M231 - L1 PC - Examen du 24 mai 2012

▷ Ce sujet comporte 5 exercices indépendants.

▷ **Documents et calculatrices autorisés.**

► *On attachera le plus grand soin à la rédaction et à la présentation claire et lisible des résultats dont il sera tenu compte lors de la correction. Aucun raisonnement vague ou insuffisant ne sera pris en compte.* ***Une grande valeur sera attribuée à la rigueur des raisonnements.***

► Si une question pose problème, admettre le résultat et passer à la suivante.

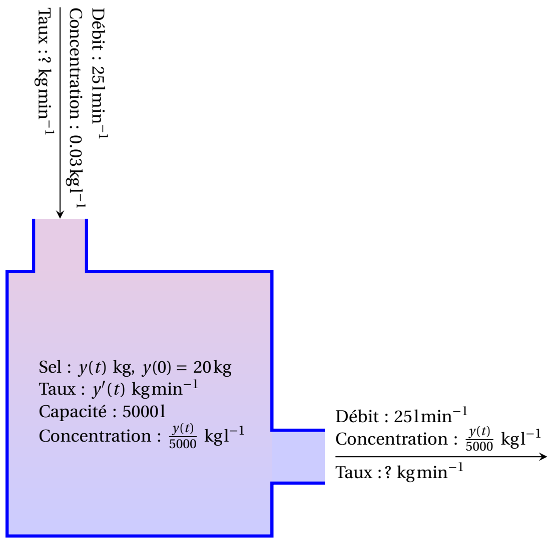
► ***Le texte est long, mais il n'est pas nécessaire de tout faire pour obtenir la note maximale.*** *(Le barème est donné à titre indicatif et est susceptible de varier.)*

► *Toute question où les notations de l'énoncé ne seraient pas respectées se verra attribuer la note zéro.*

ℹ La correction sera publiée la semaine prochaine sur ma page web : `http://faccanoni.univ-tln.fr`

Exercice 1 *Équation différentielle — 5 pts*

On considère un réservoir de capacité 5000 l rempli d'une solution sel/eau parfaitement mélangée contenant 20 kg de sel. Un mélange qui contient 0.03 kg de sel par litre d'eau entre dans le réservoir à un débit de $25\,\mathrm{l\,min^{-1}}$. La solution est maintenue bien mélangés. Si $y(t)$ désigne la quantité (en kilos) de sel dissoute dans le réservoir à l'instant t, $y'(t)$ représente le taux de variation de la quantité de sel, *i.e.* la différence entre le taux auquel le sel entre et le taux auquel il en sort.



1. Après avoir calculé les taux auxquels le sel entre et sort du réservoir, montrer que cette situation est décrite par le problème de Cauchy
$$\begin{cases} y'(t) = 0.75 - \frac{y(t)}{200}, \\ y(0) = 20. \end{cases}$$
2. Calculer l'unique solutions de ce problème.
3. Combien de sel reste dans le réservoir après une demi-heure ?

Correction.

1. Le taux auquel le sel entre est $(0.03\,\mathrm{kg})(25\,\mathrm{l\,min^{-1}})=0.75\,\mathrm{kg\,min^{-1}}$. Comme le réservoir contient constamment 5000 l de liquide, la concentration est égale à $y(t)/5000$ (exprimée en $\mathrm{kg\,l^{-1}}$). Le débit du mélange qui sort est alors de $25\,\mathrm{l\,min^{-1}}$, donc le taux auquel le sel sort est $(\frac{y(t)}{5000}\mathrm{kg\,l^{-1}})(25\,\mathrm{l\,min^{-1}})=\frac{y(t)}{200}\mathrm{kg\,min^{-1}}$. L'équation différentielle qui décrit cette variation s'écrit alors
$$y'(t) = 0.75 - \frac{y(t)}{200}$$
2. On cherche d'abord les solutions constantes, *i.e.* des fonctions $y(t) = C$ pour tout $t \in \mathbb{R}$:
$$0 = 0.75 - \frac{C}{200} \qquad \iff \qquad C = 150.$$
On trouve ainsi l'unique solution constante $y(t) = 150$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. On sait que toute autre solution ne s'annulera pas. L'EDO se réécrit alors comme
$$\frac{y'(t)}{150 - y(t)} = \frac{1}{200};$$
on doit alors calculer
$$\int \frac{\mathrm{d}y}{150 - y} = \int \frac{1}{200}\,\mathrm{d}t.$$

On obtient

$$-\ln|150-y| = \frac{t}{200} + D \qquad \text{pour tout } D \in \mathbb{R},$$

soit

$$|150-y(t)| = -Ee^{-t/200} \qquad \text{pour tout } E \in \mathbb{R}.$$

Comme $y(0) = 20$ alors $|150-20| = -E$. Vu que y est continue et que $y(0) = 20 < 150$, alors $|150-y(t)| = 150-y(t)$ et on obtient l'unique solution du problème de Cauchy

$$y(t) = 150 - 130e^{-t/200}.$$

3. Reste à calculer la quantité de sel après 30 minutes : $y(30) = 150 - 130e^{-3/20} \simeq 38.1\,\text{kg}$.

Exercice 2 *Continuité, dérivabilité, différentiabilité — 6 pts*

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y+xy^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

1. La fonction f est-elle continue en $(0,0)$?
2. Déterminer si les dérivées partielles $\partial_x f(0,0)$ et $\partial_y f(0,0)$ existent et les calculer le cas échéant.
3. La fonction f est-elle de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?
4. La fonction f est-elle différentiable en $(0,0)$?

CORRECTION.

1. On étudie la limite
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y+xy^2}{x^2+y^2}.$$
On a
$$\frac{x^2y+xy^2}{x^2+y^2}=xy\frac{x+y}{x^2+y^2}=r\cos(\vartheta)\sin(\vartheta)\Big(\cos(\vartheta)+\sin(\vartheta)\Big)\xrightarrow[\substack{r\to0\\ \forall\vartheta}]{}0$$
car $\left|r\cos(\vartheta)\sin(\vartheta)\Big(\cos(\vartheta)+\sin(\vartheta)\Big)\right|\le 2r$. On en déduit que la limite de $f(x,y)$ quand (x,y) tend vers $(0,0)$ est $0=f(0,0)$. La fonction est donc continue en $(0,0)$.
2. Attention : il faut revenir à la définition de dérivée partielle en un point puisque la fonction au point $(0,0)$ n'est pas définie de la même façon que sur le reste du domaine.
$$\partial_x f(0,0)=\lim_{t\to0}\frac{f(0+t,0)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to0}\frac{(0+t)0\frac{(0+t)+0}{(0+t)^2+0^2}-0}{t}=\lim_{t\to0}\frac{0}{t}=\lim_{t\to0}0=0.$$
La dérivée partielle par rapport à x en $(0,0)$ existe et est égale à 0.
La fonction est symétrique en x et y, donc la dérivée partielle par rapport à y en $(0,0)$ existe et est égale à 0.
3. Ici on doit calculer la dérivée partielle sur le reste du domaine et vérifier si elle est continue ou non en $(0,0)$ qui est le seul point qui peut poser des problèmes.
$$\partial_x\left(\frac{x^2y+xy^2}{x^2+y^2}\right)=\frac{(2xy+y^2)(x^2+y^2)-(x^2y+xy^2)(2x)}{(x^2+y^2)^2}=y^2\frac{y^2-x^2+2xy}{(x^2+y^2)^2}.$$
On remarque que sur la droite $y=x$ elle vaut $1/2\neq\partial_x f(0,0)$. On en déduit que la dérivée partielle par rapport à x n'est pas continue en $(0,0)$ donc la fonction f n'est pas de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
4. La fonction f est différentiable en $(0,0)$ ssi
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)-\partial_x f(0,0)(x-0)-\partial_y f(0,0)(y-0)}{\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}}=0.$$
On a
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)-\partial_x f(0,0)(x-0)-\partial_y f(0,0)(y-0)}{\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}xy\frac{x+y}{(x^2+y^2)^{3/2}}.$$
On remarque que sur la droite $y=x$ elle n'existe pas. La fonction f n'est pas différentiable en $(0,0)$.

Exercice 3 *Extrema — 6 pts*

Au ministère de l'agriculture, on a établi que le profit annuel (en €) pour les fermes cultivant des germes de soja et des pistaches est exprimé par la fonction

$$p(x, y) = 600x + 800y - x^2 - 2y^2 - 2xy$$

où x représente le nombre d'acres plantés en germes de soja et y le nombre d'acres planté en pistaches.

1. Un fermier possède une terre de 500 acres. En supposant qu'il désire utiliser à pleine capacité ses terres, trouver la répartition de la production permettant de maximiser son profit. Prouver qu'il s'agit bien d'un maximum absolu.
2. Le fermier s'interroge sur la pertinence de vouloir cultiver à pleine capacité ses terres. Il se demande si la solution qu'il obtiendrait sans cette contrainte serait plus intéressante. Aidez-le à répondre à cette question en trouvant la solution qui maximise le profit sans cette contrainte. Prouvez qu'il s'agit bien d'un maximum absolu. La solution obtenue est-elle réalisable ?
3. En exploitant les résultats obtenus aux point précédent, suggériez-vous au fermier de diminuer la surface totale consacrée à ces deux cultures ou d'utiliser à pleine capacité ses terres ?

CORRECTION.

1. On veut cultiver 500 acres ce qui donne la contrainte $x + y = 500$. Il s'agit alors de résoudre le problème

$$\text{maximiser } p(x, y) \text{ sous la contrainte } x + y = 500.$$

Pour cela, on peut utiliser l'une des deux méthodes suivantes :

***Méthode* 1** On maximise $\tilde{p}(x) = p(x, 500 - x) = 600x + 800(500 - x) - x^2 - 2(500 - x)^2 - 2x(500 - x) = 800x - 100000 - x^2$.

Points critiques $\tilde{p}'(x) = 800 - 2x$, $\tilde{p}'(x) = 0$ si et seulement si $x = 400$.

Classification $\tilde{p}''(x) = -2$, $\tilde{p}''(400) < 0$.

Conclusion $x = 400$ est un maximum de $\tilde{p}$ donc $(x, y) = (400, 100)$ est un maximum de p sous la contrainte $x + y = 500$.

***Méthode* 2** On maximise le lagrangien $L(x, y, \lambda) = p(x, y) - \lambda(x + y - 500) = 600x + 800y - x^2 - 2y^2 - 2xy - \lambda(x + y - 500)$.

Points critiques $\nabla L(x, y, \lambda) = \begin{pmatrix} 600 - 2x - 2y - \lambda \\ 800 - 4y - 2x - \lambda \\ 500 - x - y \end{pmatrix}$, $\nabla L(x, y, \lambda) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ si et seulement si $(x, y, \lambda) = (400, 100, -400)$.

Classification $D(x, y, \lambda) = \partial_{xx}L(x, y, \lambda)\partial_{yy}L(x, y, \lambda) - (\partial_{xy}L(x, y, \lambda))^2 = (-2) \times (-4) - (-2)^2$, $D(400, 100, -400) > 0$ et $\partial_{xx}L(400, 100, -400) < 0$.

Conclusion $(x, y) = (400, 100)$ est un maximum de p sous la contrainte $x + y = 500$ avec $p(400, 100) = 60000$€

2. On maximise le profit $p(x, y)$ sans contraintes.

Points critiques $\nabla p(x, y) = \begin{pmatrix} 600 - 2x - 2y \\ 800 - 4y - 2x \end{pmatrix}$, $\nabla p(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ si et seulement si $(x, y) = (200, 100)$.

Classification $D(x, y) = \partial_{xx}p(x, y)\partial_{yy}p(x, y) - (\partial_{xy}p(x, y))^2 = (-2) \times (-4) - (-2)^2$, $D(200, 100) > 0$ et $\partial_{xx}p(200, 100) < 0$.

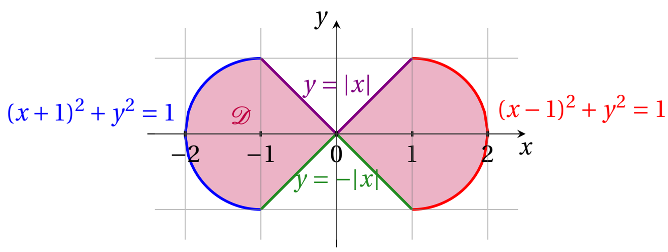
Conclusion $(x, y) = (200, 100)$ est un maximum de p. La solution obtenue est réalisable pour le fermier car elle ne dépasse pas les 500 acres.

3. Comme $p(400, 100) = 60000$€ $< p(200, 100) = 100000$€, il est plus rentable pour le fermier de diminuer la surface totale consacrée à ces deux cultures plutôt que d'utiliser à pleine capacité ses terres.

Exercice 4 *Intégrales multiples — 4 pts*

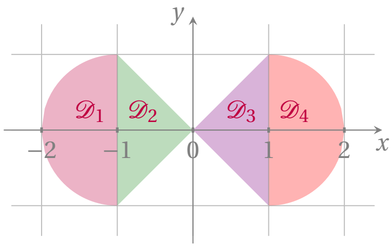
Calculer l'intégrale double

$$\iint_{\mathscr{D}} xy^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$



Correction. Il s'agit de la réunion des quatre domaines :

$$\begin{aligned}
\mathscr{D}_1 &= \left\{ (x,y) \mid x \le -1,\ (x+1)^2+y^2 \le 1 \right\},\\
\mathscr{D}_2 &= \left\{ (x,y) \mid -1 \le x \le 0,\ x \le y \le -x \right\},\\
\mathscr{D}_3 &= \left\{ (x,y) \mid 0 \le x \le 1,\ -x \le y \le x \right\},\\
\mathscr{D}_4 &= \left\{ (x,y) \mid x \ge 0,\ (x-1)^2+y^2 \le 1 \right\}.
\end{aligned}$$



Par définition on a

$$\iint_{\mathscr{D}} xy^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{\mathscr{D}_1} xy^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint_{\mathscr{D}_2} xy^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint_{\mathscr{D}_3} xy^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint_{\mathscr{D}_4} xy^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Calculons chaque intégrale :

$$\iint_{\mathscr{D}_1} xy^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{\pi/2}^{3\pi/2}\int_0^1 r^4\cos(\vartheta)\sin^2(\vartheta)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\vartheta = \left(\int_{\pi/2}^{3\pi/2}\cos(\vartheta)\sin^2(\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta\right)\left(\int_0^1 r^4\,\mathrm{d}r\right) = \left[\frac{\sin^3(\vartheta)}{3}\right]_{\vartheta=\pi/2}^{\vartheta=3\pi/2}\left[\frac{r^5}{5}\right]_{r=0}^{r=1} = -\frac{2}{15}$$

$$\iint_{\mathscr{D}_2} xy^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-1}^{0}\int_x^{-x} xy^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} x\left[\frac{y^3}{3}\right]_{y=x}^{y=-x}\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} x\left(\frac{(-x)^3}{3}-\frac{(x)^3}{3}\right)\mathrm{d}x = -\frac{2}{3}\int_{-1}^{0}x^4\,\mathrm{d}x = -\frac{2}{3}\left[\frac{x^5}{5}\right]_{x=-1}^{x=0} = -\frac{2}{15}$$

$$\iint_{\mathscr{D}_3} xy^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{0}^{1}\int_{-x}^{x} xy^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{1} x\left[\frac{y^3}{3}\right]_{y=-x}^{y=x}\mathrm{d}x = \int_{0}^{1} x\left(\frac{x^3}{3}-\frac{(-x)^3}{3}\right)\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\int_{0}^{1}x^4\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\left[\frac{x^5}{5}\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{2}{15}$$

$$\iint_{\mathscr{D}_4} xy^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^1 r^4\cos(\vartheta)\sin^2(\vartheta)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\vartheta = \left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos(\vartheta)\sin^2(\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta\right)\left(\int_0^1 r^4\,\mathrm{d}r\right) = \left[\frac{\sin^3(\vartheta)}{3}\right]_{\vartheta=-\pi/2}^{\vartheta=\pi/2}\left[\frac{r^5}{5}\right]_{r=0}^{r=1} = \frac{2}{15}$$

En conclusion,

$$\iint_{\mathscr{D}} xy^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0.$$

Ce résultat était prévisible car le domaine est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées et la fonction à intégrer est impaire par rapport à x.

Exercice 5 *Formes différentielles — 4 pts*

Considérons la forme différentielle suivante

$$\omega(x,y) = (2xy + y^2 - 1)\,\mathrm{d}x + (2xy + x^2)\,\mathrm{d}y.$$

1. Exprimer l'intégrale curviligne de ω le long du segment de droite reliant les points $A = (1,0)$ et $B = (0,1)$ (orienté de A vers B), puis calculer cette intégrale.
2. Déterminer si ω est exacte. Si c'est le cas, déterminer une fonction f telle que $\mathrm{d}f = \omega$.
3. Calculer l'intégrale curviligne de ω le long de la courbe γ de paramétrisation $t \mapsto (\cos^5(t), \sin^4(t))$, $t \in [0;\pi/2]$.

Correction.

1. Un paramétrage possible du segment est l'application $\gamma_2 \colon [0;1] \to \mathbb{R}^2$ définie par $\gamma_2(t) = (1-t, t)$. Donc

$$\int_{\gamma_2} \omega = \int_0^1 \left((2(1-t)t + t^2 - 1)(1-t)' + (2(1-t)t + (1-t)^2)t'\right)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 (2-2t)\,\mathrm{d}t = \left[2t - t^2\right]_0^1 = 1.$$

2. La forme différentielle ω est définie sur $\mathbb{R}^2$. Comme le domaine de définition est simplement connexe, la forme différentielle est exacte si et seulement si elle est fermée, c'est-à-dire

$$\partial_y(\omega_1) = \partial_x(\omega_2) \iff \partial_y(2xy + y^2 - 1) = \partial_x(2xy + x^2) \iff 2x + 2y = 2y + 2x \iff (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

On cherche une primitive $f \colon \mathscr{D} \to \mathbb{R}$ telle que $\mathrm{d}f = \omega$. On intègre ω_1 par rapport à x et on obtient $f(x,y) = x^2y + xy^2 - x + h(y)$. Pour déterminer h on dérive l'expression ainsi obtenue par rapport à y : $\partial_y f = x^2 + 2xy + h'(y)$; cette fonction doit être égale à ω_2 donc $h'(y) = 0$ et finalement

$$f(x,y) = x^2y + xy^2 - x + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

3. On remarque que la courbe γ a pour origine et extrémités respectivement les points A et B. Par conséquent

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma_2} \omega = f(B) - f(A) = 1.$$