TABLES DES MATIÈRES

Rédigé par J-J. Alibert.

Certains exercices de ce manuel m'ont été communiqués par J. Gilewicz et A. Novotny.

I. Logique.

Assertion. Une assertion est un énoncé dont on peut affirmer sans ambiguïté s'il est vrai ou s'il est faux.

Par exemple, "$1<2$" est une assertion vraie et "$4<3$" est une assertion fausse.

Proposition. Une proposition est un énoncé contenant des variables, qui est vrai pour certaines valeurs attribuées à ces variables, faux pour toutes les autres.

Par exemple, "$x<2$" est une proposition, elle est vraie pour les nombres strictement inférieurs à 2, fausse pour tous les autres.

Négation. La négation d'une proposition "P", notée "non P" est vrai lorsque P est fausse, fausse lorsque P est vrai.

Par exemple, la proposition "$x<2$" est la négation de la proposition "$x\geq 2$".

Conjonction. La conjonction de deux propositions P, Q, notée "P et Q", est vraie, si les deux propositions sont vraies, fausse dans tous les autres cas.

Par exemple, la conjonction des propositions "$x\leq 2$" et "$x\geq 2$" est "$x=2$".

Incompatibilité. Deux propositions P,Q sont incompatibles si la conjonction "P et Q" est toujours fausse.

Par exemple, les propositions "$x\leq 2$" et "$x\geq 5$" sont incompatibles.

Disjonction. La disjonction de deux propositions P, Q, notée "P ou Q", est vrai, si au moins une des deux propositions est vrai, fausse dans tous les autres cas (le "ou" est inclusif).

Par exemple, la disjonction "$x>2$ ou $x<2$" est "$x\neq 2$".

Implication. L'implication de deux propositions P, Q, notée "$P \Longrightarrow Q$", est la proposition "(non P) ou Q ".

L'implication "$P\Longrightarrow Q$" se lit "P implique Q" ou "P entraine Q" ou "P est une condition suffisante de Q" ou "Q est une condition nécessaire de P". Le fait que "$P\Longrightarrow Q$" soit vraie signifie que ; pour que Q soit vraie il suffit que P soit vraie, ou encore, pour que P soit fausse il suffit que Q soit fausse.

Théorème. P et Q étant deux assertions; si "$P \Longrightarrow Q$" est vrai on dit que c'est un théorème (c'est-à-dire une assertion démontrée dont P est l'hypothèse et Q la conclusion).

Equivalence. L'équivalence de deux propositions P, Q, notée "$P \Longleftrightarrow Q$", est la proposition "$(P \Longrightarrow Q)$ et $(Q \Longrightarrow P)$ ".

II. Ensemble.

Des êtres, aussi bien physique (élève, chat, chaise ...), qu'objets de notre pensée (nombre, fonction ...), seront représentés par des lettres a, b, E, μ ... et considérés comme bien définis si nous disposons d'un critère permettant d'affirmer que deux de ces objets (représentés par a et b) sont, ou bien identiques, ou bien distincts :

$$a = b \quad \text{ou bien} \quad a \neq b.$$

Ensemble, élément. Un ensemble E est constitué d'éléments. Il est bien défini si l'on possède un critère permettant d'affirmer pour tout objet a, s'il appartient à l'ensemble E ou non :

$$a \in E \quad \text{ou bien} \quad a \notin E.$$

On dit aussi "a est élément de E" ou bien "a n'est pas élément de E" ou encore "E contient a" ou bien "E ne contient pas a". Si un ensemble E est constitué des éléments a,b,c, on écrira : E={a,b,c}. L'ordre dans lequel les élements sont écrits n'importe pas, ainsi : {a,b,c}={c,a,b}. Un même être mathématique ne peut être à la fois un ensemble et un élément de cet ensemble, c'est à dire il est interdit d'écrire $a \in a$.

Inclusion. Un ensemble F est inclus dans un ensemble E si tout élément de F appartient à E, ce que l'on note : $F \subset E$.
On dit aussi F est une partie de E ou encore F est un sous-ensemble de E.

Egalité. Un ensemble F est égal à un ensemble E si $F \subset E$ et $E \subset F$, ce que l'on note : $F = E$.

Utilisation des quantificateurs. Les quantificateurs $\exists$ et $\forall$ concernent les éléments d'un ensemble déterminé E.

"Il existe x élément de E" s'écrit "$\exists x \in E$."

"quel que soit un élément x de E" s'écrit "$\forall x \in E$ " .

Soit A une partie de E. L'énoncé "A est la partie vide " (on note $A=\emptyset$) et sa négation "A est non vide" (on note $A \neq \emptyset$) correspondent respectivement à " quel que soit x élément de E, x n'est pas un élément de A" et "il existe au moins un élément de E qui est élément de A" et s'écrivent respectivement :

$$\forall x \in E \quad x \notin A \quad \text{et} \quad \exists x \in E \quad x \in A.$$

L'énoncé "A est la partie pleine" (on note $A=E$) et sa négation "A n'est pas la partie pleine" (on note $A \neq E$) s'écrivent respectivement :

$$\forall x \in E \quad x \in A \quad \text{et} \quad \exists x \in E \quad x \notin A.$$

Les propositions "$x \in A$" et "$x \notin A$" sont souvent remplacées respectivement par "x vérifie la propriété p" et "x ne vérifie pas la propriété p" où p est une propriété caractéristique des éléments de A, c'est à dire un critère permettant de décider pour tout élément x de E entre les deux propositions $x \in A$, $x \notin A$.

Opérations booléennes. Soit E un ensemble. On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E. Soient A et B deux éléments de $\mathcal{P}(E)$. Les quatre éléments $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $A \triangle B$ de $\mathcal{P}(E)$ sont définies de la façon suivante: pour tout $x \in E$,

$$\begin{aligned}
x \in A \cup B &\iff x \in A \quad \text{ou} \quad x \in B, \\
x \in A \cap B &\iff x \in A \quad \text{et} \quad x \in B, \\
x \in A \setminus B &\iff x \in A \quad \text{et} \quad x \notin B, \\
x \in A \triangle B &\iff x \in A \setminus B \quad \text{ou} \quad x \in B \setminus A.
\end{aligned}$$

Réunion et intersection d'une famille de parties de E. Soit E, I deux ensembles et $\{A_i\}_{i \in I}$ une partie de $\mathcal{P}(E)$. Les deux éléments $\bigcup_{i \in I} A_i$ et $\bigcap_{i \in I} A_i$ de $\mathcal{P}(E)$ sont définies de la façon suivante : pour tout $x \in E$,

$$\begin{aligned}
x \in \textstyle\bigcup_{i \in I} A_i &\iff \exists i \in I \quad x \in A_i, \\
x \in \textstyle\bigcap_{i \in I} A_i &\iff \forall i \in I \quad x \in A_i.
\end{aligned}$$

Exercice 1. Pour chaque énoncé, écrire la négation, puis dire si l'énoncé original est vrai ou faux (en justifiant la réponse à l'aide d'une démonstration).

(1) $\forall x \in \mathbb{R} \quad x > 1$,

(2) $\forall n \in \mathbb{N} \quad n^2 + n + 1 \leq n^3$,

(3) $\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad n \geq x$,

(4) $\exists n \in \mathbb{N} \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad n > p \Longrightarrow n + p > 2p$,

(5) $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \exists p \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad |x - 3| < \frac{1}{p} \Longrightarrow |x^2 - 9| < \frac{1}{n}$,

(6) $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \exists p \in \mathbb{N}^* \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad |y - x| < \frac{1}{p} \Longrightarrow |y^2 - x^2| < \frac{1}{n}$,

(7) $\exists x \in \mathbb{R} \quad \forall (n, p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \quad n > p \Longleftrightarrow \frac{1}{p} > \frac{1}{n}$,

(8) $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad (x, y) \neq (0, 0) \Longleftrightarrow x^2 + xy + y^2 > 0$,

(9) $\forall (x, s, p) \in \mathbb{R}^3 \quad \exists y \in \mathbb{R} \quad x^2 - sx + p = 0 \Longleftrightarrow \big(x + y = s \text{ et } xy = p\big)$,

(10) $\exists a \in \mathbb{R} \quad \forall b \in \mathbb{R} \quad b \neq 1 \Longrightarrow a \in \{a\}$,

(11) $\exists n \in \mathbb{N} \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad \big(\exists q \in \mathbb{N} \quad p = nq\big) \Longrightarrow \big(\exists q' \in \mathbb{N} \quad p = 6q'\big)$,

(12) $\exists n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \big(x > 0 \text{ et } x^3 > x^2\big) \Longrightarrow x > n$,

(13) $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad x^2 + x^2y + x + y = 0 \Longleftrightarrow x = -y$,

(14) $\exists x \in \mathbb{R} \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad n = 3$,

(15) $1 > 2 \Longrightarrow 23 = 5$.

Exercice 2. Expliciter les sous-ensembles suivants de la droite réelle.

$$\bigcup_{x\in[0,1]}]x/2,2x[\quad \text{et} \quad \bigcap_{x\in[0,1]}]x/2,2x[$$

Exercice 3. Soit E, I, J trois ensembles et $\{A_i\}_{i\in I}$ et $\{B_j\}_{j\in J}$ deux parties de $\mathcal{P}(E)$. Montrer que

$$\Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big)\cap\Big(\bigcup_{j\in J} B_j\Big) = \bigcup_{(i,j)\in I\times J} (A_i\cap B_j)$$

Exercice 4. Soit E, I et J trois ensembles non vides. Soit $\{A_{i,j}\}_{(i,j)\in I\times J}$ une partie de $\mathcal{P}(E)$. Montrer que

$$\bigcup_{i\in I}\Big(\bigcap_{j\in J} A_{i,j}\Big) \subset \bigcap_{j\in J}\Big(\bigcup_{i\in I} A_{i,j}\Big),$$

puis comparer (en terme d'inclusion)

$$\bigcup_{p\in\mathbb{N}^*}\Big(\bigcap_{q\in\mathbb{N}^*}\Big[0,\frac{p}{q}\Big]\Big) \quad \text{et} \quad \bigcap_{q\in\mathbb{N}^*}\Big(\bigcup_{p\in\mathbb{N}^*}\Big[0,\frac{p}{q}\Big]\Big)$$

Exercice 5. Soit E un ensemble. Pour toute partie A de E, on note $C_{_E}A := E\setminus A$ (le complémentaire de A dans E). Soit F et G deux parties de E. Montrer que

1) $\quad C_{_E}\big(C_{_E}F\big) = F \quad \text{et} \quad F\subset G \iff C_{_E}F\supset C_{_E}G$

2) $\quad C_{_E}(F\cup G) = \big(C_{_E}F\big)\cap\big(C_{_E}G\big) \quad \text{et} \quad C_{_E}(F\cap G) = \big(C_{_E}F\big)\cup\big(C_{_E}G\big)$

Soit I un ensemble et $\{A\}_{i\in I}$ une partie de $\mathcal{P}(E)$. Montrer que

3) $\quad C_{_E}\Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big) = \bigcap_{i\in I} C_{_E}A_i \quad \text{et} \quad C_{_E}\Big(\bigcap_{i\in I} A_i\Big) = \bigcup_{i\in I} C_{_E}A_i.$

Exercice 6. Soit E un ensemble et $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ une partie de $\mathcal{P}(E)$. Montrer que

$$\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n\Big)\setminus\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} A_n\Big) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} (A_n \triangle A_{n+1})$$

Exercice 7. Soit E un ensemble et $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une famille de parties de E. On définit une famille $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de parties de E en posant:

$$B_0 = A_0 \quad \text{et} \quad B_{n+1} = A_{n+1}\setminus\Big(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\Big) \text{ si } n\in\mathbb{N}.$$

Montrer que pour tout $(p,q)\in\mathbb{N}^2$, $\big(p\neq q \Longrightarrow B_p\cap B_q=\emptyset\big)$ et $\bigcup_{n=0}^{n=p} B_n = \bigcup_{n=0}^{n=p} A_n$.

Exercice 8. Soit E, I, J trois ensembles. On appelle recouvrement de E toute famille de parties de E dont la réunion est égale à E. Soit $\{A_i\}_{i\in I}$ et $\{B_j\}_{j\in J}$ deux recouvrements de E. On dit $\{A_i\}_{i\in I}$ est plus fin que $\{B_j\}_{j\in J}$ si et seulement si

$$\forall i \in I \quad \exists j \in J \quad A_i \subset B_j.$$

Montrer que si $\{A_i\}_{i\in I}$ et $\{B_j\}_{j\in J}$ sont deux recouvrements de E alors il existe un recouvrement de E plus fin que chacun des recouvrements $\{A_i\}_{i\in I}$ et $\{B_j\}_{j\in J}$.

Exercice 9. Soit E un ensemble non vide. Soit A et B deux parties de E. On s'intéresse au problème suivant:

$(\mathcal{P})$ trouver une partie X de E vérifiant $A \cup X = B$.

1) Montrer que ce problème admet une solution si et seulement si $A \subset B$.

2) On suppose que $A \subset B$. Montrer qu'une partie X de E est solution du problème $(\mathcal{P})$ si et seulement si, il existe une partie C de E telle que $C \subset A$ et $X = C \cup \big(B \setminus A\big)$.

Exercice 10. Soit E un ensemble.

1) Soit A, B, C trois parties de E. Montrer que

$(A \vartriangle B) \vartriangle C = A \vartriangle (B \vartriangle C)$.

2) Soit $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une famille de parties de E. On définit une famille $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de parties de E en posant:

$$B_0 = A_0 \quad \text{et} \quad B_{n+1} = B_n \vartriangle A_{n+1} \text{ pour } n \in \mathbb{N}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in E$. Montrer que $x \in B_n$ si et seulement si le nombre d'entiers $p \in \mathbb{N}$ vérifiant $p \leq n$ et $x \in A_p$ est un nombre impair.

III. Relation, fonction, application.

Soit E et F deux ensembles.

Produit cartésien. $E \times F$ est l'ensemble des couples (x, y) où x est un élément de E et y un élément de F. L'égalité dans $E \times F$ est définie par : $(x, y) = (x', y') \Longleftrightarrow x = x'$ et $y = y'$.

Relation binaire. Une relation binaire (ou correspondance) de E dans (ou vers) F est un triplet $\mathcal{R} = (E, F; G)$ où G une partie de $E \times F$. L'ensemble E est appelé **ensemble de départ**, l'ensemble F est appelé **ensemble d'arrivée**, L'ensemble G est appelé **graphe** de $\mathcal{R}$.

NOTATION. Pour tout $(x,y) \in E \times F$, on écrit "$x \mathcal{R} y$" et on dit "x est en relation avec y", ssi "$(x,y) \in G$".

Fonction. Une fonction f de E dans F est une relation de E dans F vérifiant : pour tout $x \in E$, il existe au plus un élément $y \in F$ satisfaisant xfy. Le **domaine de définition** D_f de f est l'ensemble des $x \in E$ satisfaisant : il existe un et un seul $y \in F$ tel que xfy.

NOTATION. Pour tout $x \in D_f$, on note $f(x)$ le seul point $y \in F$ satisfaisant xfy. Donc pour tout $(x,y) \in D_f \times F$, $xfy \Longleftrightarrow y = f(x)$. Si $x \in D_f$ alors $f(x)$ est appelé "l'image de x. Si $y \in F$ alors tout point $x \in D_f$ satisfaisant $y = f(x)$" est appelé "un antécédent de x".

Image directe. Soit f une fonction de E dans F et A une partie de E. L'image directe de A par f est la partie de F définie par $f(A) := \{ \ y \in F \ : \ \exists x \in A \cap D_f \quad y = f(x) \ \}$.

Image réciproque. Soit f une fonction de E dans F et B une partie de F. L'image réciproque de B par f est la partie de E définie par $f^{-1}(B) := \{ \ x \in D_f \ : \ f(x) \in B \}$.

Application. Une application f de E dans F est une fonction de E dans F dont le domaine de définition est égal à E.

Injection. Une injection f de E dans F est une application de E dans F vérifiant : $\forall (x, x') \in E \times E \quad f(x) = f(x') \Longrightarrow x = x'$.

Surjection. Une surjection f de E dans F est une application de E dans F vérifiant : $\forall y \in F \ \exists x \in E \quad y = f(x)$.

Bijection. Une bijection f de E dans F est une application de E dans F qui est injective et surjective.

Exercice 1.

Soit $\mathcal{R}$ une relation de E dans F telle que :

$$\forall (x,y) \in E \times F \qquad x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow (1+x^2)y = 1.$$

1) Montrer qur si $E = \mathbb{C}$ et $F = \mathbb{C}$ alors $\mathcal{R}$ est une fonction (on déterminera son domaine de définition) mais n'est pas une application.

2) Montrer qur si $E = \mathbb{R}$ et $F = \mathbb{R}$ alors $\mathcal{R}$ est une application qui n'est ni injective, ni surjective.

3) Montrer qur si $E = [0, \infty[$ et $F = \mathbb{R}$ alors $\mathcal{R}$ est une application qui est injective mais non surjective.

4) Montrer qur si $E = \mathbb{R}$ et $F =]0, 1]$ alors $\mathcal{R}$ est une application qui est surjective mais non injective.

5) Montrer qur si $E = [0, \infty[$ et $F =]0, 1]$ alors $\mathcal{R}$ est une application qui est injective et surjective (c'est à dire bijective).

Exercice 2 (graphe).

1) On note $E := \{1, 2, 3\}$ et $F := \{1, 2, 3, 4\}$. Tracer le graphe des six relations binaires de E dans F définies ci-dessous.

$$\begin{array}{lll}
(1) & \forall (x,y) \in E \times F & x\mathcal{R}_1 y \Longleftrightarrow x - y + 3 \geq 0, \\
(2) & \forall (x,y) \in E \times F & x\mathcal{R}_2 y \Longleftrightarrow x + 1 \geq y, \\
(3) & \forall (x,y) \in E \times F & x\mathcal{R}_3 y \Longleftrightarrow x \geq y, \\
(4) & \forall (x,y) \in E \times F & x\mathcal{R}_4 y \Longleftrightarrow x - y + 2 = 0, \\
(5) & \forall (x,y) \in E \times F & x\mathcal{R}_5 y \Longleftrightarrow y \text{ est pair}, \\
(6) & \forall (x,y) \in E \times F & x\mathcal{R}_6 y \Longleftrightarrow x = y.
\end{array}$$

2) Parmis les six relations ci-dessus, déterminer celles qui sont des fonctions, puis le domaine de définition de chacune de ces fonctions. L'une de ces fonction est-elle une application?

Exercice 3.

Soit $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ deux relations de E dans F telles que :

$$x\mathcal{R}_1 y \iff x^2 = y \qquad \text{et} \qquad x\mathcal{R}_2 y \iff x = y^2.$$

1) Montrer que si $E = \mathbb{N}$ et $F = \mathbb{N}$ alors $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ sont des fonctions dont on déterminera les domaines de définition.

2) Montrer que si $E = \mathbb{R}$ et $F = \mathbb{R}$ alors $\mathcal{R}_1$ est une application et $\mathcal{R}_2$ n'est pas une fonction.

3) Montrer que si $E = \mathbb{R}$ et $F = [0, \infty[$ alors $\mathcal{R}_2$ est une fonction dont on déterminera le domaine de définition.

4) Montrer que si $E = \mathbb{R}$ et F est l'ensemble des nombres complexes de parties réelle et imaginaire positives, alors $\mathcal{R}_2$ est une application.

Exercice 4 (relation,fonction).

1) Factoriser les trois fonctions polynômiales $a(x) := 4x^2 + 4x + 1$ puis $b(x) := 2x^2 + 5x + 2$ et enfin $c(x) := x^2 + 4x + 4$.

Soit la relation de $\mathbb{R}$ *vers* $\mathbb{R}$ *définie par:* $x\mathcal{R}y$ ssi $a(x)y^2 + 2b(x)y + c(x) = 0$.

2) Montrer que $\mathcal{R}$ n'est pas une application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

3) Montrer que $\mathcal{R}$ est une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ et déterminer son domaine de définition D.

4) Soit $(x, y) \in D \times \mathbb{R}$ tel que $x\mathcal{R}y$. Expliciter y en fonction de x.

Exercice 5.

Déterminer le nombre de fonctions (applications, injections, surjections, bijections) de E dans F dans chacun des cas suivants.

(1) $E = \{1\}$ et $F = \{1\}$,
(2) $E = \{1, 2\}$ et $F = \{1, 2, 3\}$,
(3) $E = \{1, 2, 3\}$ et $F = \{1, 2\}$.
(4) $E = \{1, 2, 3\}$ et $F = \{1, 2, 3\}$.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ le nombre de bijection de $\{1, ..., n\}$ dans $\{1, ..., n\}$ est égal à $n!$ (i.e. $n!$ est la factorielle de n).

Exercice 6.

Soit E et F deux parties de $\mathbb{R}$ et $\mathcal{R}$ la relation binaire de E dans F définie par : $x\mathcal{R}y \iff x^2 + y^2 = 1$.

1) Montrer que si $E = \mathbb{R}$ et $F = \mathbb{R}$ alors $\mathcal{R}$ n'est pas une fonction.

2) Montrer que si $E = \mathbb{R}$ et $F = [\,0, +\infty\,[$ alors $\mathcal{R}$ est une fonction dont on déterminera le domaine de définition D. Pour tout $(x, y) \in D \times F$ tel que $x\mathcal{R}y$, expliciter y en fonction de x.

3) Montrer que si $E = [\,-1, +1\,]$ et $F = [\,0, +\infty\,[$ alors $\mathcal{R}$ est une application qui n'est ni injective ni surjective.

4) Définir E et F de telle sorte que $\mathcal{R}$ soit une injection mais pas une surjection, puis une surjection mais pas une injection, et enfin une bijection.

Exercice 7 (injections et surjections de E dans $\mathcal{P}(E)$).

Soit E un ensemble non vide. On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.

1) Montrer qu'il existe une application injective de E dans $\mathcal{P}(E)$.

2) Montrer qu'il n'existe pas d'application surjective de E dans $\mathcal{P}(E)$.

Indication: on montrera que si f est une application de E dans $\mathcal{P}(E)$ alors il ne peut exister d'élément a de A vérifiant $a \in f(a)$ où $A := \{x \in E \,:\, x \notin f(x)\,\}$.

Exercice 8 (image réciproque et image directe).

Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = 1 + x^2$. Déterminer l'image directe et réciproque par f des ensembles suivants :

$$[0,1] \qquad]-1,4[\qquad [0,+\infty[\qquad]-\infty,5].$$

Exercice 9 (image réciproque et image directe).

Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = x^2$. Soient

$$A := [-2,1] \qquad \text{et} \qquad B := [-1,4].$$

1) Calculer $f^{-1}\big(f(A)\big)$ et $f\big(f^{-1}(A)\big)$ puis comparer ces deux ensembles et A.

2) Comparer $f(A \cap B)$ et $f(A) \cap f(B)$.

2) Comparer $f(A \cup B)$ et $f(A) \cup f(B)$.

Exercice 10 (image réciproque et image directe).

Soit E, F deux ensembles non vides et f une application de E dans F.

1) Soit $\{B_j\}_{j\in J}$ une famille de parties de F. Montrer que

$$f^{-1}\Big(\bigcup_{j\in J} B_j\Big) = \bigcup_{j\in J} f^{-1}(B_j) \qquad \text{et} \qquad f^{-1}\Big(\bigcap_{j\in J} B_j\Big) = \bigcap_{j\in J} f^{-1}(B_j)$$

2) Soit $\{A_i\}_{i\in I}$ une famille de parties de E. Montrer que

$$f\Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big) = \bigcup_{i\in I} f(A_i) \qquad \text{et} \qquad f\Big(\bigcap_{i\in I} A_i\Big) \subset \bigcap_{i\in I} f(A_i)$$

3) Soit $\{A_i\}_{i\in I}$ une famille de parties de E. Montrer que si f est injective alors l'inclusion du 2)b) est une égalité mais que si f n'est pas supposée injective alors cette inclusion peut être stricte.

Exercice 11 (image directe et réciproque, injection, surjection).

Soit E et F deux ensembles non vides. Soit f une application de E dans F.

1) Montrer que: $\forall A \in \mathcal{P}(E),\ f^{-1}\big(f(A)\big) \supset A$.

2) Montrer que: $\forall B \in \mathcal{P}(F),\ f\big(f^{-1}(B)\big) \subset B$.

3) Montrer que f est injective ssi $\forall A \in \mathcal{P}(E),\ f^{-1}\big(f(A)\big) = A$.

4) Montrer que f est surjective ssi $\forall B \in \mathcal{P}(F),\ f\big(f^{-1}(B)\big) = B$.

Exercice 12.

Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = 1 + x + x^2$.

1) f est-elle injective? f est-elle surjective?

Soit g l'application de $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $g(x) = \frac{2x-1}{x+2}$.

2) g est-elle injective? g est-elle surjective?

IV. Composition, réciprocité.

Soit E,F,G, H quatre ensembles.

Composition. Si f est une application de E dans F et g une application de F dans G alors $g \circ f$ est l'application de E dans G définie par : $\forall x \in E \quad g \circ f(x) = g\big(f(x)\big)$.

Théorème (associativité). Si f est une application de E dans F, g une application de F dans G et h une application de G dans H alors $h \circ \big(g \circ f\big) = \big(h \circ g\big) \circ f$.

Application réciproque. Soit f une application de E dans F. On dit que f admet une réciproque (ou inverse) ssi il existe une application g de F dans E telle que :

$$\forall (x, y) \in E \times F \qquad y = f(x) \iff g(y) = x.$$

Si une telle application g existe, elle est unique et notée f^{-1}.

Théorème (réciprocité). Soit f une application de E dans F. Alors f admet une réciproque ssi f est bijective.

Exercice 1 (composition, réciprocité).
Soient f,g les deux applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par :

$$f(x) = 2x + 1 \quad \text{et} \quad g(x) = 7x^2 - 2.$$

Montrer que f admet une application réciproque (que l'on calculera), puis que g n'en admet pas. Calculer $g \circ f$ et $f \circ g$.

Exercice 2 (composition, réciprocité).
Soient les applications f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ et g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ définies par :

$$f(x, y) = 2x + 3y + 1 \quad \text{et} \quad g(t) = (t, 2t - 1).$$

Calculer $g \circ f$ et $f \circ g$. Montrer que $f \circ g$ admet une application réciproque (que l'on calculera), puis que $g \circ f$ n'en admet pas.

Exercice 3 (composition, associativité).
Soient les applications f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$, g de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ et h de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$, définies par :

$$f(x, y, z) = (2x, y + z) \quad \text{et} \quad g(u, v) = v - u \quad \text{et} \quad h(t) = (3t + 1, 2t)$$

Calculer $h \circ g$ puis $h \circ \big(g \circ f\big)$.

Exercice 4 (réciprocité).
Soit l'application f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par :

$$f(x, y) = (2x + y, x - 2y)$$

Démontrer que f admet une application réciproque (que l'on calculera).

Exercice 5 (réciprocité).

Soit l'application f de $]\,1,+\infty\,[$ dans $]\,0,+\infty\,[$ définie par :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^3 - 1}}.$$

Démontrer que f admet une application réciproque (que l'on calculera).

Exercice 6 (réciproque du sinus hyperbolique).

Soit l'application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Démontrer que f admet une application réciproque (que l'on calculera).

Exercice 7 (réciprocité).

Soit les applications f de $\mathbb{R}$ dans $]-1,+1\,[$ et g de $]-1,+1\,[$ dans $\mathbb{R}$ définies par :

$$f(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \quad \text{et} \quad g(y) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+y}{1-y}.$$

Calculer $f \circ g$ et $g \circ f$ puis en déduire que f admet une application réciproque (que l'on calculera).

Exercice 8 (réciprocité).

L'application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par;

$$f(x) = 1 + x + x^2,$$

admet-elle une application réciproque?

Exercice 9 (inverse à droite et inverse à gauche).

Soient E, F deux ensembles non vides et f une application de E dans F.

> *On dit que f admet un inverse à gauche ssi il existe une application g de F dans E satisfaisant :*
>
> $$\forall x \in E \quad g \circ f(x) = x.$$
>
> *On dit que f admet un inverse à droite ssi il existe une application h de F dans E satisfaisant :*
>
> $$\forall x \in E \quad f \circ h(y) = y.$$

1) A l'aide d'exemples montrer qu'une application f peut avoir

plusieurs inverses à droite.

3) Vérifier que si f admet un inverse à gauche alors f est injective.

4) Démontrer que si f est injective alors f admet un inverse à gauche.

5) Vérifier que si f admet un inverse à droite alors f est surjective.

6) Démontrer que si f est surjective alors f admet un inverse à droite.

> Pour la question 6), on utilisera l'AXIOME DU CHOIX qui s'énonce ainsi :
>
> *Soit H une application de F dans $\mathcal{P}(E)$. Si*
> $$\forall y \in F \quad H(y) \neq \emptyset,$$
> *alors il existe une application h de F dans E satisfaisant :*
> $$\forall y \in F \quad h(y) \in H(y).$$

Exercice 10 (composition, injection, surjection).

Démontrer que la composée de deux injections est une injection puis que la composée de deux surjections est une surjection.

V. Relation d'équivalence.

Relation d'équivalence. Soit E un ensemble non vide. Une relation d'équivalence sur E est une relation binaire $\mathcal{R}$ de E dans E satisfaisant :

(A_1) $\forall x \in E \quad x\mathcal{R}x,$ (réflexivité)

(A_2) $\forall (x,y) \in E^2 \quad x\mathcal{R}y \implies y\mathcal{R}x,$ (symétrie)

(A_3) $\forall (x,y,z) \in E^3,\ x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z \implies x\mathcal{R}z.$ (transitivité)

L'exemple le plus simple de relation d'équivalence sur E est l'égalité dans E.

Classes et ensemble quotient. Soit E un ensemble non vide et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E. Soit $x \in E$. La classe de x modulo $\mathcal{R}$ est l'élément de $\mathcal{P}(E)$ défini par

$$\overline{x} := \{y \in E \ : \ x\mathcal{R}y \}.$$

L'ensemble quotient $E/\mathcal{R}$ est le sous ensemble de $\mathcal{P}(E)$ constitué de toutes les classes modulo $\mathcal{R}$. Ainsi, pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$,

$$A \in E/\mathcal{R} \iff \big(\exists x \in E \quad A = \overline{x}\big).$$

L'application de E dans $E/\mathcal{R}$ qui à tout élément x de E associe l'élément $\overline{x}$ de $E/\mathcal{R}$ est une surjection que l'on appelle surjection canonique.

Partition. Soit E un ensemble non vide et $\mathcal{F}$ une partie de $\mathcal{P}(E)$. On dit que $\mathcal{F}$ est une partition de E si

$$E = \bigcup_{F \in \mathcal{F}} F \quad \text{et} \quad \big(\forall (F,G) \in \mathcal{F}^2 \quad F \cap G = \emptyset \text{ ou } F = G \big).$$

Théorème.

1) Si $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur E alors $E/\mathcal{R}$ est une partition de E.

2) Si $\mathcal{F}$ est une partition de E alors il existe une unique relation d'équivalence $\mathcal{R}$ sur E telle que $\mathcal{F} = E/\mathcal{R}$. Celle-ci est définie par : pour tout $(x,y) \in E^2$, $\quad x\mathcal{R}y \iff (\exists F \in \mathcal{F} \quad x \in F$ et $y \in F)$.

Exercice 1.

Soit E, F deux ensembles non vides et f une application de E dans F.

1) Montrer que $\{f^{-1}(\{y\})\}_{y \in f(E)}$ est une partition de E.

2) Montrer que la famille $\{\{f(x)\}\}_{x \in E}$ est une partition de F si et seulement si f est une bijection.

Exercice 2.

1) Soit $\mathcal{R}$ la relation binaire de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$x\mathcal{R}y \iff \big(x^2 + y^2 \leq 1 \quad \text{ou} \quad x = y \big)$$

$\mathcal{R}$ est-elle une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$?

Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$. Préciser autant que possible la classe de x modulo $\mathcal{R}$.

3) Soit $\mathcal{R}$ la relation binaire de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$x\mathcal{R}y \iff xe^y = ye^x.$$

Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'equivalence sur $\mathbb{R}$. Préciser autant que possible la classe de x modulo $\mathcal{R}$.

Exercice 3.

Combien peut-on dénombrer de relations d'équivalence sur $\{1, 2\}$, puis sur $\{1, 2, 3\}$?

Exercice 4 (Construction des entiers relatifs).

Dans cet exercice, on tient pour acquise l'existence de l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$, de l'addition et la multiplication des entiers naturels. Soit la relation binaire $\mathcal{R}$ de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{N}$ définie par :

$$(p, q)\ \mathcal{R}\ n \quad \iff \quad q + n = p.$$

Cette relation n'est pas une application (car si $q > p$, l'équation $q + n = p$ n'a pas de solution $n \in \mathbb{N}$) mais une fonction dont le domaine de définition est $D := \{(p, q) \in \mathbb{N}^2 : p \geq q\}$.

1) (*question préliminaire.*) Soient $(p, q) \in D$, $(p', q') \in D$ et $(n, n') \in \mathbb{N}^2$ satisfaisant à $(p, q)\ \mathcal{R}\ n$ et $(p', q')\ \mathcal{R}\ n'$. Montrer que

$$\begin{array}{ll} (1) & n = n' \quad \iff \quad p + q' = p' + q, \\ (2) & (p + p', q + q')\ \mathcal{R}\ (n + n'), \\ (3) & (pp' + qq', pq' + p'q)\ \mathcal{R}\ (nn'). \end{array}$$

On démontrera les propriétés ci-dessus en prenant soin de **ne pas utiliser la soustraction** *mais seulement la propriété* $(a + n = b + n \implies a = b)$. Nous allons définir l'ensemble des entiers relatifs (à l'aide de la notion de relation d'équivalence) en classant les couples $(p, q) \in \mathbb{N}^2$.

2) (*L'égalité des entiers relatifs*). Soit la relation binaire E de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{N}^2$ définie par :

$$(p, q)\ E\ (p', q') \iff p + q' = p' + q.$$

Vérifier que E est une relation d'équivalence sur $\mathbb{N}^2$. Pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ on note $\overline{(p,q)}$ la classe de (p, q) modulo E.

> DEFINITION. L'ensemble quotient $\mathbb{N}^2/E$ est appelé *ensemble des entiers relatifs* et noté Z.

l'ensemble des entiers relatifs positifs et celui des entiers relatifs négatifs sont respectivement définis par

$$Z^+ := \{\overline{(n, 0)} : n \in \mathbb{N}\} \quad \text{et} \quad Z^- := \{\overline{(0, n)} : n \in \mathbb{N}\}.$$

Montrer que $Z = Z^+ \cup Z^-$ et $\{\overline{(0, 0)}\} = Z^+ \cap Z^-$.

Montrer que la relation binaire A est une application. L'image d'un couple $(z,z') \in Z^2$ par cette application est notée $z+z'$. Vérifier que si p,q sont des entiers naturels alors $\overline{(p,p)}=\overline{(0,0)}$ et $\overline{(p,q)}+\overline{(q,p)}=\overline{(0,0)}$. En déduire que pour tout $(z_1,z_2) \in Z^2$ l'équation $z_1+z=z_2$ possède une solution unique $z \in Z$.

3) (*La multiplication des entiers relatifs*). Soit la relation binaire M de Z^2 dans Z définie par :

$$(z,z')\ M\ z'' \iff \forall (p,q) \in z \quad \forall (p',q') \in z' \quad (pp'+qq', pq'+p'q) \in z''.$$

Montrer que la relation binaire M est une application. L'image d'un couple $(z,z') \in Z^2$ par cette application est notée zz'. Vérifier que si p et q sont des entiers naturels alors $\overline{(1,0)}\ \overline{(p,q)}=\overline{(p,q)}$ et $\overline{(0,1)}\ \overline{(p,q)}=\overline{(q,p)}$.

4) (*L'injection de* $\mathbb{N}$ *dans* Z). Montrer que l'application I de $\mathbb{N}$ dans Z définie par

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad I(n) := \overline{(n,0)}$$

est une injection satisfaisant à : pour tout $(n,n') \in \mathbb{N}^2$,

$$I(n+n') = I(n) + I(n') \quad \text{et} \quad I(nn') = I(n)I(n').$$

COMMENTAIRES. *Pour retrouver les notations usuelles dans Z, il suffit de noter* $n{:=}\overline{(n,0)}$ *et* $-n{:=}\overline{(0,n)}$.

Exercice 5 (Construction des nombres rationnels).

Dans cet exercice, on tient pour acquise l'existence de l'ensemble des entiers relatifs Z, de l'addition et la multiplication des entiers relatifs (en utilisant les notations communément admises). Notons $\mathbb{N}^*$ l'ensemble des entiers relatifs positifs non nuls. Soit la relation binaire $\mathcal{R}$ de $Z \times \mathbb{N}^*$ dans Z définie par :

$$(p,q)\ \mathcal{R}\ n \iff qn = p.$$

Cette relation est une fonction et $D := \{(p,q) \in Z \times \mathbb{N}^* : q \text{ divise } p\}$ est son domaine de définition. Rappelons que " q divise p " signifie que le reste de la division Euclidienne de p par q est nul.

1) (*Question préliminaire*). Soient $(p,q) \in D$, $(p',q') \in D$ et $(n,n') \in Z$ satisfaisant à $(p,q)\ \mathcal{R}\ n$ et $(p',q')\ \mathcal{R}\ n'$. Montrer que

$$(1) \quad n = n' \iff pq' = p'q,$$

$$(2) \quad (pq'+p'q, qq')\ \mathcal{R}\ (n+n'),$$

$$(3) \quad (pp', qq')\ \mathcal{R}\ (nn').$$

Nous allons définir l'ensemble des nombres rationnels (à l'aide de la notion de relation d'équivalence) en classant les couples $(p,q) \in Z \times \mathbb{N}^*$.

2) (*L'égalité des nombres rationnels*). Soit la relation binaire E de $Z \times \mathbb{N}^*$ dans $Z \times \mathbb{N}^*$ définie par :

$$(p,q)\ E\ (p',q') \iff pq' = p'q.$$

Vérifier que E est une relation d'équivalence sur $Z \times \mathbb{N}^*$. Pour tout $(p,q) \in \mathbb{N}^* \times Z$ on note $\overline{(p,q)}$ la classe de (p,q) modulo E.

> DEFINITION. L'ensemble quotient $Z \times \mathbb{N}^*/E$ est appelé *ensemble des nombres rationnels* et noté $\mathbb{Q}$.

Préciser autant que possible les trois classes $\overline{(1,1)}$ et $\overline{(1,3)}$ et $\overline{(0,1)}$.

Montrer que la relation binaire A est une application, L'image d'un couple $(r,r') \in \mathbb{Q}^2$ par cette application sera notée $r+r'$. Calculer $\overline{(1,3)}+\overline{(2,5)}$.

4) (*La multiplication des nombres rationnels*). Soit la relation binaire M de $\mathbb{Q}^2$ dans $\mathbb{Q}$ définie par :

$$(r,r')\ M\ r'' \iff \forall (p,q) \in r \quad \forall (p',q') \in r' \quad (pp',qq') \in r''.$$

Montrer que la relation binaire M est une application. L'image d'un couple $(r,r') \in \mathbb{Q}^2$ par cette application sera notée rr'. Calculer $\overline{(1,3)}\ \overline{(2,5)}$. On note $\mathbb{Q}^* := \mathbb{Q} \setminus \{\overline{(0,1)}\}$. Montrer que pour tout $(a,b,c) \in \mathbb{Q}^* \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, l'equation $ar+b=c$ possède une solution unique $r \in \mathbb{Q}$.

5) (*L'injection de Z dans* $\mathbb{Q}$). Montrer que l'application I de Z dans $\mathbb{Q}$ définie par

$$\forall z \in \mathbb{N} \quad I(z) := \overline{(z,1)}$$

est une injection satisfaisant à : pour tout $(z,z') \in \mathbb{N}^2$,

$$I(z+z') = I(z)+I(z') \quad \text{et} \quad I(zz') = I(z)I(z').$$

6) (*Fraction irréductible*). Montrer que la relation binaire F de $\mathbb{Q}^*$ dans $Z \times \mathbb{N}^*$ définie par

$$rF(p,q) \iff (p,q) \in r \text{ et } \big(\ \forall (p',q') \in Z \times \mathbb{N}^* \quad (p',q') \in r \implies q' \geq q\ \big)$$

est une application. Expliquer pourquoi l'intitulé de cette question est "*fraction irréductible*".

Exercice 6 (Construction des nombres réels).

Dans cet exercice, on tient pour acquise l'existence de l'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q}$, de l'addition et la multiplication des nombres rationnels (en utilisant les notations communément admises). Une **suite rationnelle** est (par définition) une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Q}$. Une telle application sera notée (x_n). On dit qu'une suite rationnelle (x_n) vérifie le critère de Cauchy si pour tout $q \in \mathbb{N}^*$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall (n,m) \in \mathbb{N}^2 \quad n \geq N \text{ et } m \geq N \implies |x_m - x_n| < \frac{1}{q}.$$

On note R l'ensemble des suites rationnelles satisfaisant au critère de Cauchy. On note Q l'ensemble des suites rationnelles stationnaires i.e. $(x_n) \in Q$ ssi $x_n = x_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (on vérifiera que $Q \subset R$).

1) (*Question préliminaire*). Montrer que l'équation $x^2 = 2$ n'admet pas de solution $x \in \mathbb{Q}$, puis montrer qu'il existe $(x_n) \in R$ satisfaisant à : pour tout $q \in \mathbb{N}^*$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \geq 0 \quad \text{et} \quad \big(n \geq N \implies |x_n^2 - 2| < \frac{1}{q}\ \big).$$

Indication. On pourra remarquer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $p \in \mathbb{N}$ unique tel que $p^2 \leq 2n^2 < (p+1)^2$.

2) (*L'égalité des nombres réels*). Soit la relation binaire E de R dans R définie

Vérifier que E est une relation d'équivalence sur R. Pour tout $(x_n) \in R$, on note $\overline{(x_n)}$ la classe de (x_n) modulo E.

> DEFINITION. L'ensemble quotient R/E est appelé *ensemble des nombres réels* et noté $\mathbb{R}$.

3) (*L'injection de* $\mathbb{Q}$ *dans* $\mathbb{R}$). Montrer que l'application I de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall r \in \mathbb{Q} \quad I(r) := \overline{(x_n)} \quad \text{où} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad x_n := r$$

est une injection. Définir l'addition et la multiplication dans $\mathbb{R}$ afin que l'injection I satisfasse à : pour tout $(r, r') \in \mathbb{Q}^2$,

$$I(r + r') = I(r) + I(r') \quad \text{et} \quad I(rr') = I(r)I(r').$$

4) Montrer que l'équation $x^2 = I(2)$ possède au moins une solution $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 7 (Construction des nombres complexes).

Dans cet exercice, on tient pour acquise l'existence de l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$, de l'addition et la multiplication des nombres réels (en utilisant les notations communément admises). Soit la relation déquivalence E sur $\mathbb{R}^2$ définie par : $(a, b)\ E\ (a', b') \iff a = a'$ et $b = b'$. La classe de (a, b) modulo E est donc le singleton $\{(a, b)\}$.

> DEFINITION. L'ensemble quotient $\mathbb{R}^2/E$ est appelé *ensemble des nombres complexes* et noté C.

1) (*L'addition des nombres complexes*). Soit la relation binaire A de C^2 dans C définie par :

$$(\{(a, b)\}, \{(a', b')\})\ A\ \{(a'', b'')\} \iff a + a' = a'' \text{ et } b + b' = b''.$$

Montrer que la relation binaire A est une application, L'image d'un couple $(z, z') \in C^2$ par cette application sera notée $z + z'$.

2) (*La multiplication des nombres complexes*). Soit la relation binaire M de C^2 dans C définie par :

$$(\{(a, b)\}, \{(a', b')\})\ M\ \{(a'', b'')\} \iff aa' - bb' = a'' \text{ et } ab' + ba' = b''.$$

Montrer que la relation binaire M est une application. L'image d'un couple $(z, z') \in C^2$ par cette application sera notée zz'. On note $z^2 := zz$. Vérifier que

$$\{(0, 1)\}^2 = \{(-1, 0)\}$$

3) (*L'injection des réels dans les complexes*). Montrer que l'application I de $\mathbb{R}$ dans C définie par $\forall x \in \mathbb{R} \quad I(x) := \{(x, 0)\}$, est une injection qui satisfait à : pour tout $(x, x') \in \mathbb{R}^2$,

$$I(x + x') = I(x) + I(x') \quad \text{et} \quad I(xx') = I(x)I(x').$$

4) (*L'écriture Cartésienne d'un nombre complexe*). La multiplication d'un nombre réel par un nombre complexe est l'aplication de $\mathbb{R} \times C$ dans C définie par : $t\{(a, b)\} := \{(ta, tb)\}$. Notons

$$1 := \{(1, 0)\} \quad \text{et} \quad i := \{(0, 1)\}.$$

Exercice 8.

Soit E_1 et E_2 deux ensembles non vides, $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ deux relations d'equivalence sur E_1 et E_2 respectivement. On définit une relation binaire sur $E_1 \times E_2$ en posant:

$$(x_1, x_2)\mathcal{R}(y_1, y_2) \iff x_1\mathcal{R}_1 y_1 \text{ et } x_2\mathcal{R}_2 y_2.$$

Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'equivalence sur $E_1 \times E_2$ et qu'il existe une bijection de $E_1 \times E_2/\mathcal{R}$ sur $E_1/\mathcal{R}_1 \times E_2/\mathcal{R}_2$.

Exercice 9.

Soit E un ensemble non vide. Montrer que pour tout $A, B, C, D \in \mathcal{P}(E)$,

$$B \setminus C \subset A \text{ et } C \setminus D \subset A \Longrightarrow B \setminus D \subset A.$$

A chaque partie A de E est associée la relation binaire $\mathcal{R}_A$ de $\mathcal{P}(E)$ dans $\mathcal{P}(E)$ par : $B\,\mathcal{R}_A\,C \iff B \triangle C \subset A$. Montrer que $\mathcal{R}_A$ est une relation d'equivalence sur $\mathcal{P}(E)$. Préciser autant que possible, la classe de B modulo $\mathcal{R}_A$.

Exercice 10 (décomposition canonique).

Soit E et F deux ensembles non vides et f une application de E dans F. Soit $\mathcal{R}$ la relation binaire définie sur E par: pour tout $(x, y) \in E \times E$,

$$x\mathcal{R}y \iff f(x) = f(y).$$

1) Vérifier que $\mathcal{R}$ est une relation d'equivalence sur E.

2) On note S l'application de E dans $E/\mathcal{R}$ qui à tout $x \in E$ associe la classe de x modulo $\mathcal{R}$ (S est la surjection canonique). Montrer qu'il existe une application g de $E/\mathcal{R}$ dans F unique telle que $f = g \circ S$.

3) On note $\hat{f}$ l'application de $E/\mathcal{R}$ dans $f(E)$ définie par: $\hat{f}(A) = g(A)$. Montrer que $\hat{f}$ est bijective.

4) On note I l'application de $f(E)$ dans F qui à $y \in f(E)$ associe $y \in F$ (I est l'injection canonique). Montrer que $f = I \circ \hat{f} \circ S$.

VI. Relations d'ordre.

Relation d'ordre. Soit E un ensemble non vide. Une relation d'ordre sur E est une relation binaire $\mathcal{R}$ de E dans E vérifiant :

(A_1) $\quad \forall x \in E \quad x\mathcal{R}x,$ (réflexivité)

(A_2) $\quad \forall (x,y) \in E^2 \quad x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x \Longrightarrow x = y.$ (antisymétrie)

(A_3) $\quad \forall (x,y,z) \in E^3,\ x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z \Longrightarrow x\mathcal{R}z.$ (transitivité)

L'exemple le plus usuel de relation d'ordre sur $\mathbb{R}$ est la relation $\leq$.

On dit que l'ordre est **total** si

(A_4) $\quad \forall (x,y) \in E^2 \quad x\mathcal{R}y$ ou $y\mathcal{R}x.$

Majorant et minorant. Soit E un ensemble non vide, $\mathcal{R}$ une relation d'ordre sur E, $A \in \mathcal{P}(E)$ et $y \in E$. On dit que y est un majorant de A si

$$\forall x \in A \quad x\mathcal{R}y.$$

Un élément maximal (ou plus grand élément) de A est un majorant de A qui appartient à A. On dit que A est majoré s'il existe un majorant de A. On dit que y est un minorant de A si

$$\forall x \in A \quad y\mathcal{R}x.$$

Un élément minimal (ou plus petit élément) de A est un minorant de A qui appartient à A. On dit que A est minoré s'il existe un minorant de A. On dit que A est borné si A est majoré et minoré.

Théorème et définition. On suppose que $E := \mathbb{R}$ et $\mathcal{R} := \leq$.

1) Si A est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ alors il existe un et un seul élément de $\mathbb{R}$ qui est un élément minimal de l'ensemble des majorants de A. Cet élément est appelé **borne supérieure** de A et noté $\sup A$.

2) Si A est une partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$ alors il existe un et un seul élément de $\mathbb{R}$ qui est un élément maximal de l'ensemble des minorants de A. Cet élément est appelé **borne inférieure** de A et noté $\inf A$.

Exercice 1.

Soit $\mathcal{R}$ la relation binaire de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow \big(x = y \text{ ou } \big(x = 0 \text{ et } y = 1\big)\ \big).$$

Montrer que $\mathcal{R}$ est-elle une relation d'ordre sur $\mathbb{R}$. Déterminer l'ensemble des majorants d'un singleton $\{x\}$. L'ordre est-il total?

Exercice 2.

Soit $\mathcal{R}$ la relation binaire de $\{1,2,3,4\}^3$ dans $\{1,2,3,4\}^3$ définie par :

$$(x,y,z)\mathcal{R}(x',y',z')$$

si et seulement si

$$(x<x') \text{ ou } \big(x=x' \text{ et } y<y')\big) \text{ ou } (x=x' \text{ et } y=y' \text{ et } z\leq z').$$

Montrer que $\mathcal{R}$ est-elle une relation d'ordre sur $\{1,2,3,4\}^3$. Déterminer l'ensemble des majorants du singleton $\{(3,2,1)\}$. L'ordre est-il total?

Exercice 3.

Combien peut-on dénombrer de relations d'ordre sur $\{1,2\}$, puis sur $\{1,2,3\}$?

Exercice 4.

Soit E un ensemble non vide. Montrer que la seule relation de E dans E qui est à la fois réflexive symétrique et antisymétrique est l'égalité.

Exercice 5.

Soit E un ensemble non vide. Soit $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ deux relations d'ordre total sur E. Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes.

$$\begin{array}{ll} (1) & \forall (x,y)\in E\times E \quad x\mathcal{R}y \implies x\mathcal{S}y, \\ (2) & \forall (x,y)\in E\times E \quad x\mathcal{R}y \iff x\mathcal{S}y. \end{array}$$

Exercice 6.

Soit E un ensemble non vide, $\mathcal{R}$ une relation d'ordre sur E et A une partie non vide de E. Montrer que A est un singleton si et seulement si il existe un minorant m de A et un majorant M de A satisfaisant $M\mathcal{R}m$.

Exercice 7.

Soit E un ensemble non vide et $\mathcal{R}$ une relation d'ordre sur E telle que toute partie non vide de E admet un plus petit élément et un plus grand élément. Montrer que E est un ensemble fini.

Exercice 8 (relation $\leq$ dans $\mathbb{R}$).

Soient a et b deux nombres réels. Montrer que

$$a\leq b \quad\iff\quad \big(\ \forall\varepsilon>0 \quad a<b+\varepsilon\ \big).$$

Exercice 9 (relation $\leq$ dans $\mathbb{R}$. Caractérisation de la borne sup.).

Soit A une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ et soit $M\in\mathbb{R}$. Montrer que $M:=\mathrm{Sup}A$ si et seulement si

$$\begin{array}{ll} 1) & \forall a\in A \quad a\leq M, \\ 2) & \forall\varepsilon>0 \quad \exists a\in A \quad a>-\varepsilon+\mathrm{Sup}A \end{array}$$

Exercice 10 (relation $\leq$ dans $\mathbb{R}$).

Montrer que les bornes supérieures et inférieures de l'intervalle $[\,1,2\,[$ sont respectivement égales à 2 et 1. Montrer que les bornes supérieures et inférieures

Montrer qu'il n'existe pas de plus grand élément de A.

Exercice 12 (relation $\leq$ dans $\mathbb{R}$).

Soient A et B deux parties non vides majorées de $\mathbb{R}$.

1) Vérifier que $A \cup B$ est une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ puis démontrer que

$$\mathrm{Sup} A \cup B = \mathrm{Max}\{\mathrm{Sup} A, \mathrm{Sup} B\}$$

2) Vérifier que $A + B := \{a + b : (a, b) \in A \times B\}$ est une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ puis démontrer que

$$\mathrm{Sup} A + B = \mathrm{Sup} A + \mathrm{Sup} B.$$

Exercice 13 (relation $\leq$ dans $\mathbb{R}$).

Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et A une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$. Rappelons que f est croissante si $\quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad x \leq y \implies f(x) \leq f(y)$.

1) Montrer que si f est croissante alors

$$f\big(\mathrm{Sup} A\big) \geq \mathrm{Sup} f(A),$$

puis donner l'exemple d'une fonction croissante f et d'une partie A pour lesquelles l'inégalité ci-dessus est stricte.

2) Montrer que si f est croissante et surjective alors

$$f\big(\mathrm{Sup} A\big) = \mathrm{Sup} f(A),$$

Exercice 14

On note $E := \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Dans tout l'exercice, on suppose que $\mathcal{R}$ est une relation binaire de E vers E et on note $A := \{(x, y) \in E \times E : x \mathcal{R} y \}$. Pour tout ensemble fini F, on note $\mathrm{card}\, F$ le cardinal de l'ensemble F, c'est à dire le nombre d' éléments de F.

1) Montrer que si $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre telle que $1 \mathcal{R} 3$ et $3 \mathcal{R} 5$ alors

$\mathrm{card}\, A \geq 9 \quad$ et $\quad \mathrm{card}\, A \leq 21.$

2) Montrer que si $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence telle que $1 \mathcal{R} 3$ et $3 \mathcal{R} 5$ alors

$\mathrm{card}\, A \geq 12 \quad$ et $\quad \mathrm{card}\, A \leq 36.$

3) Montrer qu'il existe une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ de E vers E telle que

$1 \mathcal{R} 3 \quad$ et $\quad 3 \mathcal{R} 5 \quad$ et $\quad \mathrm{card}\ A = 12.$

4) On suppose que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence telle que $1 \mathcal{R} 3$ et $3 \mathcal{R} 5$. Montrer que

$\mathrm{card}\, A = 12 \quad$ si et seulement si $\quad \mathrm{card}\, E/\mathcal{R} = 4.$

VII. Fonctions polynômiales.

Fonctions polynômiales. Une application P de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ est polynômiale s'il existe une famille finie $\{a_n, ..., a_1, a_0\}$ de nombres complexes telle que pour tout $x \in \mathbb{C}$,

$$P(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n.$$

Pour faire bref, nous ferons un abus de Langage en utilisant le terme "polynôme" pour "application polynômiale".

Théorème et définition (degré). Pour tout polynôme non nul P, il existe un unique entier $n \in \mathbb{N}$ et une unique famille $\{a_n, ..., a_1, a_0\}$ de nombres complexes telle que :

$$a_n \neq 0 \quad \text{et} \quad \big(\forall x \in \mathbb{C} \quad P(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n. \big)$$

L'entier n est par définition, le degré de P (on le note $\mathrm{d}^o P$). Le polynôme nul n'a pas de degré, mais par convention $\mathrm{d}^o 0 < \mathrm{d}^o g$ pour tout polynôme non nul g.

Théorème (division euclidienne). Soient f et g deux polynômes avec (g non nul). Alors il existe un unique couple (Q, R) de polynômes vérifiant :

$$\big(\forall x \in \mathbb{C} \quad f(x) = g(x)Q(x) + R(x) \big) \quad \text{et} \quad \big(\mathrm{d}^o R < \mathrm{d}^o g \big)$$

Q s'appelle le quotient et R le reste. On dit que f est divisible par g si $R = 0$.

Racine, multiplicité. Un nombre complexe a est racine d'un polynôme P si $P(a) = 0$. On montre facilement (voir Ex.2)que a est racine de P si et seulement si P est divisible par "$x - a$". L'ordre de multiplicité d'une racine a de P est le plus grand entier n tel que "$(x - a)^n$" divise P.

Théorème (décomposition de D'Alembert). Soit P un polynôme de degré supérieur ou égal à 1. Alors l'ensemble des racines de P est fini et non vide. Notons $x_1, ..., x_k$ les k racines deux à deux distinctes de P et n_i l'ordre de de multiplicité de x_i. Alors il existe un unique $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{C}$,

$$P(x) = a\big(x - x_1\big)^{n_1} ... \big(x - x_k\big)^{n_k}.$$

On a donc : $n_1 + ... + n_k = \mathrm{d}^o P$.

Théorème (Taylor). Soit P un polynôme de degré $n \geq 1$. Pour tout $x_0 \in \mathbb{C}$ et tout $x \in \mathbb{C}$,

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(x_0) \frac{(x-x_0)^k}{}$$

Exercice 1 (division euclidienne).

Effectuer la division euclidienne de f par g dans les cas suivants :

(1) $f(x) = 7x^4 - x^3 + 2x - 4$ et $g(x) = x^2 - 3x + 5$,

(2) $f(x) = x^5 - x^4 - x + 1$ et $g(x) = x^2 - 2x + 1$.

Exercice 2 (division euclidienne).

Soient a et b deux nombres complexes et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que dans la division euclidienne de $f(x) := (x-a)^n$ par $g(x) := x - b$, le reste est égal à $(b-a)^n$.

Exercice 3 (résolution d'équations polynômiales).

Trouver toutes les solutions complexes des équations ,

(E_1) $z^2 = 2$,

(E_2) $z^2 = 3i$,

(E_3) $z^2 = 2 + 3i$,

(E_4) $z^2 = 1 + bi$ (b est un paramètre réel),

(E_5) $z^2 = a^4$ (a est un paramètre complexe).

Exercice 4 (résolution d'équations polynômiales).

Trouver toutes les solutions complexes des équations ,

(E_1) $z^2 + 2z + (1 - 2i) = 0$,

(E_2) $z^2 + 2(1+i)z - 5(1+2i) = 0$,

(E_3) $z^2 + 2(1-2i)z - 8 + \sqrt{3} = 0$,

(E_4) $z^2 - (5+3i)z + 7i + 4 = 0$,

(E_5) $z^6 + z^3(z+1)^3 + (z+1)^6 = 0$ (poser $x := 1 + \frac{1}{z}$).

Exercice 5 (question de cours).

1) Si a et b sont deux nombres complexes alors on a les deux identités remarquables : $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ et $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$. Ces identités admettent la généralisation suivante : avec la convention $a^0 = b^0 = 1$,

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k-1}.$$

Démontrer cette formule par réccurence sur n.

2) En déduire qu'un nombre complexe a est racine d'un polynôme P si et seulement si le polynôme $g(x) := x - a$ divise le polynôme P.

Exercice 6 (question de cours).

Soient x_0 une racine d'un polynôme P. Montrer à l'aide de la formule de Taylor que x_0 est de multiplicité n si et seulement si

$$P^{(n)}(x_0) \neq 0 \quad \text{et} \quad P^{(k)}(x_0) = 0 \text{ pour tout } k \leq n-1.$$

Exercice 7 (factorisation).

Factoriser les polynômes suivants en exploitant les informations données :

(1) $P(x) = 2x^3 - (5+6i)x^2 + 9ix + 1 - 3i$ (P possède une racine réelle).

(2) $P(x) = x^5 + 3x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 3x + 1$ (P possède une racine évidente).

(3) $P(x) = 2x^4 + x^3 - 6x^2 + x + 2$ (poser $u = x + \frac{1}{x}$).

Exercice 8 (multiplicité).

Calculer la multiplicité de la racine x_0 de P dans les cas suivants :

(1) $x_0 = 1$ et $P(x) = x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 2$.

(2) $x_0 = i$ et $P(x) = x^3 - ix^2 + x - i$.

Exercice 9 (multiplicité).

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ le polynôme $P_n(x) := 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!}$ n'a pas de racines multiples. On pourra calculer P' et l'exprimer en fonction de P.

Exercice 10.

Soient a et b deux nombres complexes et $P(x) := x^4 - 2ix^3 + 3(1+i)x^2 + ax + b$.

1) Calculer a et b pour que i soit une racine multiple de P. Dans toute la suite, on suppose que i est une racine multiple de P.

2) Quelle est la multiplicité de la racine i de P?

3) Calculer les autres racines de P.

Exercice 11.

Montrer que le polynôme $P(x) := 2x^4 - 7x^3 + 9x^2 - 5x + 1$ admet une racine triple que l'on déterminera, puis factoriser P à l'aide de la formule de Taylor.

Exercice 12.

Soit x_1, x_2, x_3 les trois racines du polynôme $P(x) := x^3 - 3x^2 + 2x + 1$. Sans calculer les racines de P, donner les valeurs

$$\sigma_1 := x_1 + x_2 + x_3$$
$$\sigma_2 := x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1$$
$$\sigma_3 := x_1x_2x_3$$
$$A := x_1^2 + x_2^2 + x_3^2.$$

Exercice 13 (division par les puissances croissantes.

Effectuer la division de $A(x) := 1 + x^2 + x^4$ par $B(x) := 1 + x + x^3$ suivant les puissances croissantes à l'ordre quatre.

Exercice 14.

Afin de calculer la valeur numérique de $P(x) := 2x^4 - 4x^3 - 7x - 14$ pour $x := 1 + \sqrt{3}$, effectuer la division de P par un polynôme à coefficients entiers s'annulant en $x := 1 + \sqrt{3}$.

Exercice 15.

Factoriser $P(x) := x^8 + x^4 + 1$ sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$. On remarquera pour commencer que que $P(x)=(x^4+1)^2-x^4$.

Exercice 16.

Factoriser $P(x) := x^6 - i$ sans utiliser la méthode trigonométrique. On remarquera pour commencer que $P(x)=(x^2)^3-(-i)^3$. En déduire $\sin \frac{\pi}{12}$ et $\cos \frac{\pi}{12}$.

Exercice 17.

Soient a, b deux nombres complexes. Factoriser $P(x) := (x + a)(x + b) - ab$. sans faire aucun calcul par écrit.

Exercice 18.

Trouver deux racines évidentes de l'équation $(x+1)(x+2)(x+4)(x+5) = 40$, puis factoriser le polynôme $P(x) = (x + 1)(x + 2)(x + 4)(x + 5) - 40$.

Exercice 19.

Trouver toutes les solutions complexes de chacune des deux équations

$$x^2 + |x| - 2 = 0 \qquad \text{et} \qquad x^2 + |x| + 2 = 0.$$

VIII. Suites numériques et limites.

Suites. Une suite numérique est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$. La notation traditionnelle est : $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

N.B. Dans ce qui suit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désigne toujours une suite numérique.

Limite d'une suite. On dit qu'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $x \in \mathbb{R}$ (on écrit $\lim_n x_n = x$) si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n > N \implies |x_n - x| < \varepsilon.$$

On dit qu'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers plus l'infini (on écrit $\lim_n x_n = +\infty$) si

$$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n > N \implies x_n > M.$$

On dit qu'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers moins l'infini (on écrit $\lim_n x_n = -\infty$) si

$$\forall m \in \mathbb{R} \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n > N \implies x_n < m.$$

Suite convergente et suite de Cauchy. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. On dit que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente s'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $\lim_n x_n = x$ et divergente sinon. On dit que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie le critère de Cauchy si,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall (p,q) \in \mathbb{N}^2 \quad p, q > N \implies |x_q - x_p| < \varepsilon.$$

Théorème de complétude. Une suite est convergente si et seulement si elle vérifie le critère de Cauchy.

Théorème (condition suffisante). Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui est croissante et majorée est convergente et $\lim_n x_n = \sup_n x_n$. Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui est décroissante et minorée est convergente et $\lim_n x_n = \inf_n x_n$.

Théorème (condition suffisante). Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. S'il existe deux suites convergentes $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ayant une même limite $x \in \mathbb{R}$ et satisfaisant

$$\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n > N \implies u_n \leq x_n \leq v_n,$$

alors $\lim_n x_n = x$.

Exercice 1 (question de cours : l'unicité de la limite).

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite et $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer que si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n > N \implies |x_n - x| < \varepsilon,$$
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n > N \implies |x_n - y| < \varepsilon,$$

alors $x = y$ (Ce résultat autorise l'utilisation de la notation $\lim_n x_n$)

Exercice 2 (définition du mot "limite").

Montrer à l'aide de la définition de limite :

$$\lim_n \frac{2n}{n+3} = 2 \quad \lim_n \frac{1}{n-3} = 0 \quad \lim_n \frac{n+1}{\sqrt{n}} = +\infty \quad \lim_n \frac{5-n^2}{n+2} = -\infty$$

puis que $\lim_n \frac{1}{n^2} \neq 1$.

Exercice 3 (définition du mot "limite").

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels positifs qui converge vers $u \in \mathbb{R}^+$. Montrer à l'aide de la définition d'une limite que :

$$\lim_n \sqrt{u_n} = \sqrt{u}.$$

Exercice 4.

1) Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ où $x_n := \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{1+k}\right)$, est convergente.

2) Montrer que la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ où $y_n := \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{1+k}\right) \sin k\theta$ et $\theta \in \mathbb{R}$, est convergente. On pourra utiliser le critère de Cauchy.

Exercice 5 (Série harmonique).

Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ où $x_n := \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$, diverge vers $+\infty$.

Exercice 6 (Suite géométrique de raison $\lambda \in \mathbb{R}$).

Etudier la convergence de la suite $(\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ suivant la valeur de $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exercice 7 (Série géométrique).

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $x_n := \sum_{k=0}^n \lambda^k$.

1) Montrer que si $|\lambda| < 1$ alors la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\frac{1}{1-\lambda}$.

2) Montrer que si $\lambda \geq 1$ alors la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

3) Montrer que si $\lambda = -1$ alors la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et divergente.

4) Montrer que si $\lambda < -1$ alors la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non bornée.

Exercice 8.

Montrer que la suite $(\frac{n!}{n^n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

Exercice 9.

Montrer que la suite $((n!)^{\frac{1}{n}})_{n\in\mathbb{N}^*}$ diverge vers $+\infty$.

Exercice 10.

Quel lien y a t-il entre les deux résultats suivants : $\lim_n \frac{\ln n}{n} = 0$ et $\lim_n n^{\frac{1}{n}} = 1$?

Exercice 11 (suite récurrente).

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que : $u_o = 2 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = 2 - \frac{1}{u_n}$.

1) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bien définie qui satisfait :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n > 1.$$

2) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone puis étudier la convergence.

Exercice 12 (suite récurrente).

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que : $u_0 > 2 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n^2 + 1$.

1) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n > 2$.

2) Montrer que la suite (u_n) est divergente.

3) Montrer que (u_n) est croissante et diverge vers $+\infty$.

Exercice 13 (suite récurrente).

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que : $u_0 > 2 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n^2 - 2$.

1) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n > 2$.

2) En supposant que $\lim_n u_n$ existe, la calculer.

3) Montrer que (u_n) est croissante et diverge vers $+\infty$.

Exercice 14 (suite récurrente).

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = 2u_n + 1$.

Montrer qu'il existe une suite géométrique $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n - v_n = u_0 - v_0,$$

puis en déduire la limite de la suite (u_n) en fonction de u_0.

Exercice 15 (généralisation de l'exercice 14).

Étudier la convergence d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = au_n + b$$

où a et b sont deux réels.

Exercice 16.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad 2u_{n+1} = 1 + u_n^2$.

Montrer que si $0 < u_0 < 1$ alors (u_n) converge vers 1 et si $u_0 > 1$ alors (u_n) diverge.

Exercice 17 (suites adjacentes).

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites adjacentes, c'est à dire telle que (u_n) est croissante, (v_n) est décroissante et $\lim_n \big(v_n - u_n\big) = 0$. Montrer que $(v_n - u_n)$ est décroissante puis que les deux suites convergent vers une même limite.

Exercice 18 (moyenne arithmético-harmonique).

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$,$(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites telles que $u_0 > 0$, $v_0 > 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$

1) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites bien définies puis que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad v_n \geq u_n.$$

2) Vérifier que la suite $(u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire.

3) Montrer que les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes (on commencera par vérifier que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.)

4) Calculer la limite commune au deux suites dans le cas particulier où $u_0 = 1$ et $v_0 = 2$.

Exercice 19 (moyenne géometrico-harmonique).

Soient a, b deux nombres réels tels que $0 < a < b$. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites telles que $u_0 = a$, $v_0 = b$ et

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$

Montrer que ces deux suites convergent et ont même limite (appelée *moyenne géométrico-harmonique* de a et b).

Exercice 20 (suite récurrente).

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a > b > 0$. Montrer qu'il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifiant :

$$u_1 = a + b \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_{n+1} = a + b - \frac{ab}{u_n}.$$

Montrer que $u_n = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a^n - b^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, puis que cette suite converge vers une limite que l'on calculera.

Exercice 21 (exemples).

1) Donner l'exemple d'une suite non bornée (donc divergente).

2) Donner l'exemple d'une suite bornée et divergente.

3) Donner l'exemple de deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$(u_n) \text{ converge et } (v_n) \text{ diverge et } (u_n v_n) \text{ diverge.}$$

4) Donner l'exemple de deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$(u_n) \text{ converge et } (v_n) \text{ diverge et } (u_n v_n) \text{ converge.}$$

Montrer qu'un tel exemple doit nécéssairement satisfaire $\lim_n u_n = 0$.

5) Donner l'exemple de deux suites bornées $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$(u_n) \text{ diverge et } (v_n) \text{ diverge et } (u_n v_n) \text{ converge.}$$

Exercice 22.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite **bornée** satisfaisant :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n \leq \frac{u_{n-1}+u_{n+1}}{2}.$$

Montrer que la suite $(u_{n+1}-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers zero.

Exercice 23.

Soit f une application de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}^*$. Montrer que si f est une bijection et $\lim_n \frac{f(n)}{n}$ existe dans $\mathbb{R}$ alors

$$\lim_n \frac{f(n)}{n} = 1$$

Exercice 24.

Etudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ dans les cas suivants:

$$u_n := \frac{n-(-1)^{n+1}}{n+(-1)^{n+1}} \qquad u_n := \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$$

Exercice 25. RAPPEL: on dit que $\ell \in \mathbb{R}$ est une valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ssi il existe une sous-suite extraite qui converge vers ℓ.

a) Montrer que si une suite possède au moins deux valeurs d'adhérence distinctes alors cette suite est divergente.

b) Déterminer l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ dans les cas suivants:

$$u_n := (-1)^n \qquad u_n := \frac{(-1)^n}{1+\frac{1}{n}} \qquad u_n := \sin\frac{n\pi}{2}$$

Exercice 26.

Montrer que les suites $(\sin n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(\cos n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont divergentes.

Exercice 27.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite possèdant au moins une valeur d'adhérence. Montrer que si la suite est monotone alors elle converge.

Exercice 28.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite.

a) Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est non majorée alors il existe une suite extraite $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}^*}$ qui satisfait: $\lim\limits_{k\to+\infty} u_{n_k} = +\infty$.

b) Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est non majorée croissante alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Exercice 29.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite. On suppose que les trois suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont convergentes.

a) Montrer que les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ ont même limite.

b) Montrer que les suites $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ ont même limite.

c) En déduire que la suite (u_n)

grand entier tel que

$$\left(\tfrac{k_n}{p^n}\right)^2 < p,$$

puis on pose $u_n := \frac{k_n}{p^n}$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite croissante de nombres rationnels qui converge vers $\sqrt{p}$.

Exercice 31. (*limites supérieure et inférieure*).

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite bornée. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note

$$v_n := \sup\{u_k : k \geq n\} \quad \text{et} \quad w_n := \inf\{u_k : k \geq n\}$$

1) Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.

2) En déduire que les suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont convergentes.

NOTA BENE. *Par définition,* $\lim_n v_n$ *est la limite supérieure de la suite* (u_n) *et* $\lim_n w_n$ *est la limite inférieure de la suite* (u_n).

3) Calculer les limites supérieure et inférieure de la suite (u_n) dans le cas $u_n := (-1)^n$.

IX. Fonctions continues et limites.

Soient f, g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$.

Limite en plus l'infini. Si $D_f \cap]\delta, +\infty[\neq \emptyset$ pour tout $\delta \in \mathbb{R}$ alors on dit que la limite de f quand x tend vers $+\infty$ est égale à $\ell \in \mathbb{R}$ (et on écrit $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$) si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta \in \mathbb{R} \quad \forall x \in D_f \quad x > \delta \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

On dit que la limite de f quand x tend vers $+\infty$ est égale à $+\infty$ (et on écrit $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$) si

$$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists \delta \in \mathbb{R} \quad \forall x \in D_f \quad x > \delta \Longrightarrow f(x) > M.$$

On dit que la limite de f quand x tend vers $+\infty$ est égale à $-\infty$ (et on écrit $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$) si

$$\forall m \in \mathbb{R} \quad \exists \delta \in \mathbb{R} \quad \forall x \in D_f \quad x > \delta \Longrightarrow f(x) < m.$$

Limite en moins l'infini. Les définitions sont du même type que ci-dessus. Il faut simplement remplacer $D_f \cap]\delta, +\infty[\neq \emptyset$ par $D_f \cap] - \infty, \delta[\neq \emptyset$ puis $x > \delta$ par $x < \delta$.

Limite en un point. Si $D_f \cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\neq \emptyset$ pour tout $\delta > 0$ alors on dit que la limite de f quand x tend vers x_0 est égale à $\ell \in \mathbb{R}$ (et on écrit $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$) si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D_f \quad |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

On dit que la limite de f quand x tend vers x_0 est égale à $+\infty$ (et on écrit $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$) si

$$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D_f \quad |x - x_0| < \delta \Longrightarrow f(x) > M.$$

On dit que la limite de f quand x tend vers x_0 est égale à $-\infty$ (et on écrit $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$) si

$$\forall m \in \mathbb{R} \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D_f \quad |x - x_0| < \delta \Longrightarrow f(x) < m.$$

Continuité en un point. Si $x_0 \in D_f$ alors on dit que f est continue en x_0 si $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Théorème (fonctions composées). Si $(x_0, f(x_0)) \in D_f \times D_g$ et f continue en x_0 et g continue en $f(x_0)$. Alors $x_0 \in D_{g\circ f}$ et $g \circ f$ est continue en x_0.

Théorème (valeurs intermédiaires). Si f est définie et continue en tout point d'un intervalle I alors pour tout sous-intervalle J de I, $f(J)$ est un intervalle.

Exercice 1.

En utilisant la définition de limite (le choix de δ en fonction de ε doit être clairement spécifié), montrer que :

(1) $\forall x_0 \in \mathbb{R} \qquad \lim\limits_{x\to x_0} x = x_0 \quad \text{et} \quad \lim\limits_{x\to x_0} |x| = |x_0|.$

(2) $\lim\limits_{x\to 2} x^2 = 4$ puis plus généralement $\forall x_0 \in \mathbb{R} \qquad \lim\limits_{x\to x_0} x^2 = x_0^2.$

(3) $\forall x_0 \in \mathbb{R} \qquad \lim\limits_{x\to x_0} x^3 = x_0^3.$

(4) $\forall x_0 \in [0, \infty[\qquad \lim\limits_{x\to x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0}.$

(5) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{2x-4} = 2.$

(6) $\forall x_0 \in \mathbb{R}\setminus\{1\} \qquad \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{x+1}{x-1} = \dfrac{x_0+1}{x_0-1}.$

Exercice 2.

Etudier les limites quand x tend vers $+\infty$ des fonctions suivantes :

$$f(x) := \sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x} \quad \text{et} \quad g(x) := \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} - \sqrt{x}.$$

Exercice 3.

Soit f et g deux applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et h l'application définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad h(x) := \max\{f(x), g(x)\}.$$

Montrer que si f et g sont continues en un point $x_0 \in \mathbb{R}$ alors h l'est aussi.

Exercice 4 (question de cours).

Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $u \in \mathbb{R}$. Montrer que f est continue en u si et seulement si pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a:

$$\lim_n u_n = u \quad \Longrightarrow \quad \lim_n f(u_n) = f(u).$$

Exercice 5 (fonction continue en un seul point).

Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) := \begin{cases} +x \text{ si } x \text{ est rationnel} \\ -x \text{ si } x \text{ est irrationnel} \end{cases}$$

Montrer que f est continue en 0 et discontinue en tout autre point.

Exercice 6 (discontinuité de première espèce).

Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ satisfaisant :

$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \qquad f(x) := \frac{x}{|x|}.$$

Montrer que f n'est pas continue en 0.

Exercice 7 (discontinuité de seconde espèce).

Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ satisfaisant :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \qquad f(x) := \sin \frac{1}{x}.$$

Montrer que f est pas continue en 0.

Exercice 8 (fonction prolongeable par continuité).

Soit f l'application de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \qquad f(x) := x \sin \frac{1}{x}.$$

Montrer que f est prolongeable par continuité en 0.

Exercice 9.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note $\mathcal{E}(x)$ la partie entière de x. Soit $\mathcal{R}$ la relation binaire de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $x\mathcal{R}y \iff \big(x - \mathcal{E}(x)\big)y = 1$.

1) Montrer que $\mathcal{R}$ est une fonction dont on déterminera le domaine de définition.

2) Montrer que cette fonction est continue en tout point de son domaine de définition.

Exercice 10.

Etudier la continuité de la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = \begin{cases} \lim_n \frac{x^n+1}{x^n-1} & \text{si } |x| \neq 1 \\ \\ 1 & \text{si } |x| = 1 \end{cases}$$

Exercice 11 (question de cours).

Soit f une application d'un intervalle fermé borné non vide $[\,a, b\,]$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que si f est continue en tout point de $[\,a, b\,]$ alors

$$\exists x_0 \in [\,a, b\,] \qquad f(x_0) = \sup f\big([\,a, b\,]\big).$$

Exercice 12 (application du thm. des valeurs intermédiaires).

Montrer qu'il existe $x \in]\,0, 1\,[$ tel que $x^{17} + x - 1 = 0$.

Exercice 13 (application du thm. des valeurs intermédiaires).

Soit f une application de $[\,0, 1\,]$ dans $[\,0, 1\,]$. Montrer que si f est continue en tout point de $[\,0, 1\,]$ alors il existe $x_0 \in [\,0, 1\,]$ tel que $f(x_0) = x_0$.

Exercice 14 (application du thm. des valeurs intermédiaires).

Montrer que toute fonction polynômiale de degré impair possède au moins un zéro réel.

Exercice 15 (application du thm. des valeurs intermédiaires).

Soit f une application d'un intervalle fermé borné non vide $[\,a, b\,]$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que si f est injective et continue en tout point de $[\,a, b\,]$ alors f est strictement croissante ou bien f est strictement décroissante.

Exercice 16.

Soient E et F deux intervalles fermés bornés non vides. Soit f une application de E dans F. Montrer que si f est bijective et continue en tout point de E alors f^{-1} est continue en tout point de F.

Exercice 17.

Soient $E := [\,-2, -1\,[\cup \{0\} \cup]\,+1, +2\,]$ et $F := [-1, +1]$. Soit f l'application de E dans F définie par :

$$\forall x \in E \qquad f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \in [\,-2, -1\,[\\ 0 & \text{si } x = 0 \\ x-1 & \text{si } x \in]\,+1, +2\,] \end{cases}$$

Montrer que f est bijective et continue en tout point de E mais qu'il existe un point de F en lequel f^{-1} n'est pas continue.

Exercice 18.

Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ satisfaisant :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(2x) + f(x) = 0.$$

Montrer que si f est continue en 0 alors f est la fonction nulle.

Exercice 19 (uniforme continuité).

Soit $[\,a, b\,]$ un intervalle fermé borné non vide. Soit f une application de $[\,a, b\,]$ dans $\mathbb{R}$ continue en tout point de $[\,a, b\,]$. Pour tout $\delta > 0$, on note

$$\mathrm{C}(\delta) := \sup\{|f(y) - f(x)| : x, y \in [\,a, b\,] \text{ et } |y - x| < \delta\}.$$

Montrer que $\lim_{\delta \to 0} \mathrm{C}(\delta) = 0$.

Exercice 20 (points de discontinuité d'une fonction croissante).

On rappelle que :

- une partie A de $\mathbb{R}$ est au plus dénombrable ssi il existe une surjection de $\mathbb{N}$ dans A,
- l'ensemble des nombres rationnels est une partie au plus dénombrable de $\mathbb{R}$,
- tout intervalle ouvert non vide contient au moins un nombre rationnel.

Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui est croissante.

1) Montrer que f est discontinue en un point $x_0 \in \mathbb{R}$ ssi

$$\sup\{f(x) : x < x_0\} < \inf\{f(x) : x > x_0\}.$$

2) Montrer que l'ensemble des points $x_0 \in \mathbb{R}$ tels que f est discontinue en x_0 est une partie au plus dénombrable de $\mathbb{R}$.

X. Fonctions dérivables et développements limités.

Soient f, g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$.

Dérivabilité en un point. On dit que f est dérivable en x_0 si f est définie en tout point d' un intervalle ouvert contenant x_0 et si

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{existe dans } \mathbb{R}.$$

Lorsque cette limite existe, elle est notée $f'(x_0)$.

Nota bene. Si f est dérivable en x_0 alors f est continue en x_0. Attention, la réciproque est fausse : par exemple la fonction $f(x) = |x|$ est continue en 0 mais non dérivable en 0.

Théorème (fonctions composées). Si f est dérivable en x_0 et g dérivable en $f(x_0)$ alors $g \circ f$ est dérivable en x_0 et

$$(g \circ f)'(x_0) = f'(x_0) g'\big(f(x_0)\big).$$

Théorème (accroissements finis). Si f est continue en tout point d'un intervalle fermé $[a, b]$ (avec $a < b$) et dérivable en tout point de $]a, b[$ alors

$$\exists c \in]a, b[\qquad f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Notation. On écrit $f(x) = \varepsilon(x)$ si f est une fonction telle $D_f \cap] - \delta, +\delta[\setminus \{0\} \neq \emptyset$ pour tout $\delta > 0$ et $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$.

Développement limité. f admet un développement limité à l'ordre n en x_0 si $D_f \cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\setminus \{x_0\} \neq \emptyset$ pour tout $\delta > 0$ et s'il existe un polynôme P_n de degré n telle que

$$f(x) = P_n(x - x_0) + (x - x_0)^n \varepsilon(x - x_0).$$

Lorsqu'il existe, le polynôme P_n est unique.

Théorème (Taylor). Si f et toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre n, sont définies et continues en tout point d'un intervalle ouvert contenant x_0 alors f admet un développement limité à l'ordre n en x_0 donné par la formule :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + (x - x_0)^n \varepsilon(x - x_0)$$

Exercice 1.

Soit $]\,a,b\,[$ un intervalle ouvert non vide et f une application de $]\,a,b\,[$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que f est dérivable en un point $x_0 \in]\,a,b\,[$. A l'aide du nombre dérivé $f'(x_0)$, définir la relation binaire $\mathcal{R}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dont le graphe est une droite tangente au graphe de f en $(x_0, f(x_0))$.

Exercice 2.

Etudier la continuité et dérivabilité des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ci-dessous puis la continuité des fonctions dérivées.

(1) $f(x) := |x|$,

(2) $f(x) := |x^2 - 1|$,

(3) $g(x) := \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$ si $x \neq 0$ et $g(0) := 0$,

(4) $h_n(x) := x^n \sin \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$ et $h_n(0) = 0$, $(n = 1, 2 \text{ ou } 3)$

Exercice 3.

Soit f une application de $[\,0,1\,]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que $f(0) = f(1)$, f est continue en tout point de $[\,0,1\,]$ et dérivable en tout point de $]\,0,1\,[$. Soit g l'application de $[\,0,1\,]$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$g(x) := \begin{cases} f(2x) & \text{si } x \in [\,0, \frac{1}{2}\,] \\ f(2x-1) & \text{si } x \in]\,\frac{1}{2}, 1\,] \end{cases}$$

Montrer que g est continue en tout point de $[\,0,1\,]$ puis étudier la dérivabilité de g dans $]\,0,1\,[$.

Exercice 4.

Soit f l'application de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) := \begin{cases} x^3 \sin \frac{1}{x} & \text{si } x < 0 \\ \\ x^2 |x-1| & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

1) Montrer que f peut-être prolongée par continuité en 0 (Ce prolongement de sera encore noté f).

2) Calculer $f'(x)$ pour $x < 0$, puis $\lim_{x \to 0^-} f'(x)$.

3) Calculer $f'(x)$ pour $x \in]\,0,1\,[$, puis $\lim_{x \to 0^+} f'(x)$.

4) Etudier la dérivabilité de f dans $\mathbb{R}$.

Exercice 5 (application du thm. des accroissements finis).

Prouver les inégalités suivantes :

(1) $\forall x > 0 \qquad \sin x < x$,

(2) $\forall x > 0 \qquad x > \arctan(x) > \frac{x}{1+x^2}$,

(3) $\forall x > 0 \qquad \ln x \leq x - 1$.

Exercice 6

Soit I un intervalle ouvert non vide et f une application de I dans $\mathbb{R}$. On suppose que f est dérivable en tout point de I. Montrer que si f' possède un nombre fini de zéro dans I alors f aussi.

Exercice 7

Soit P un polynôme à coefficients réels.

1) Montrer que l'équation $P(x) = \ln x$ n'a qu'un nombre fini de racines.

2) Montrer que l'équation $P(x) = \mathrm{e}^x$ n'a qu'un nombre fini de racines.

Exercice 8 (définition de la fonction exponentielle).

> La fonction la plus importante de l'analyse mathématique est sans aucun doute la fonction exponentielle. L'exponentielle d'un nombre réel x est par définition
>
> (1) $\qquad \mathrm{e}^x{:=}\lim_{n\uparrow\infty} P_n(x) \quad$ *où* $\quad P_n(x){:=}\sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k\,!}.$
>
> Afin de valider cette définition, il faut démontrer que pour tout nombre réel x, la suite $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. A partir de cette définition, on peut démontrer que
>
> (2) $\qquad \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2 \qquad \mathrm{e}^{x+y}{=}\mathrm{e}^x\mathrm{e}^y$
>
> puis que la fonnction exponentielle est dérivable en tout point de $\mathbb{R}$ et que sa dérivée en un point x est égale à e^x, i.e.
>
> (3) $\qquad \forall x\in\mathbb{R} \qquad \lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{e}^{x+h}-\mathrm{e}^x}{h}{=}\mathrm{e}^x.$
>
> L'objet de cet exercice est de démontrer (1), (2) et (3).

a) Soit ε un nombre réel tel que $0 < \varepsilon < 1$. Montrer que la suite de terme général $\sum_{k=0}^n \varepsilon^k$ converge vers $(1-\varepsilon)^{-1}$.

b) Montrer que si N, n, q, p sont des entiers naturels non nuls, alors

$$p > q > n > N \quad \Longrightarrow \quad \sum_{k=q+1}^{p} \frac{N^k}{k\,!} \leq \frac{(N+1)^{N+1}}{N\,!}\left(\frac{N}{N+1}\right)^n.$$

Utiliser le **Critère de Cauchy** afin d'établir que pour tout nombre réel x, la suite $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$P_n(x)P_n(y) - P_n(x+y) = \sum_{k=n+1}^{2n} \left(\sum_{i=0}^{i=n} \frac{x^i y^{k-i}}{i\,!(k-i)\,!} \right),$$

puis en déduire (2).

d) Montrer que pour tout $n \geq 2$ et tout $h \in \mathbb{R}$ tel que $|h| \leq 1$, on a

$$\left| \frac{P_n(h)-1}{h} - 1 \right| \leq |h| \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\,!},$$

puis en déduire (3).

Exercice 9 (nombre de Néper).

Le nombre de Néper e est l'exponentielle du nombre 1, c'est à dire, la limite quand n tend vers l'infini de $P_n(1)$ (voir Ex. 8 pour la définition de P_n). Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$P_n(1) \leq \mathrm{e} \leq P_n(1) + \frac{2}{(n+1)\,!}.$$

En déduire que $2,71805 \leq \mathrm{e} \leq 2,71846$.

Exercice 10 (définition du logarithme népérien).

1) Justifier le fait que l'application f de $\mathbb{R}$ dans $]\,0,+\infty[$ définie par $f(x) = \mathrm{e}^x$, est une bijection.

> DÉFINITION *: Le logarithme népérien (notée* ln*) est, par définition, l'application réciproque de f. On a donc:*
>
> $$\forall (x,y) \in \mathbb{R} \times]\,0,+\infty\,[\qquad y = \mathrm{e}^x \iff x = \ln y.$$
>
> *Il en résulte que le logarithme népérien de* 1 *est égal à* 0 *et le logarithme népérien du nombre de Néper est égal à* 1.

2) Montrer que $\ln(yy') = \ln y + \ln y'$ pour tout $y, y' \in]\,0,+\infty\,[$.

3) Montrer que le logarithme népérien est dérivable en tout point de $]\,0,+\infty\,[$ et que sa dérivée en un point x est égale à $\frac{1}{x}$.

Exercice 11 (une approximation de l'exponentielle).

Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $\lim\limits_{n\uparrow\infty} \ln\big(\big(1+\dfrac{x}{n}\big)^n\big) = x$ puis que $\lim\limits_{n\uparrow\infty} \big(1+\dfrac{x}{n}\big)^n = \mathrm{e}^x$.

Exercice 12 (exponentiation).

Soit a un nombre réel strictement positif. On rappelle que si $n \in \mathbb{N}^*$ alors $\sqrt[n]{a}$ désigne l'unique nombre réel satisfaisant: $x \geq 0$ et $x^n = a$.

1) Montrer (par récurrence) que $a^n = \mathrm{e}^{n \ln a}$ pour tout entier relatif n.

On généralise cette formule à tout nombre réel de la façon suivante.

> DÉFINITION *: pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose: $a^x := \mathrm{e}^{x \ln a}$.*

2) Montrer que $a^{x+y} := a^x a^y$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

3) Montrer que la fonction $x \longrightarrow a^x$ est dérivable en tout point de $\mathbb{R}$ et que sa dérivée en point x est égale à $(\ln a)a^x$.

4) Montrer que $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 13 (du groupe $(\mathbb{R},+)$ vers le groupe $(\mathbb{R}_+^*,\times)$).
Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ satisfaisant les propriétés suivantes:

(P_1) $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2 \quad f(x+y)=f(x)f(y)$,

(P_2) $\exists x_1\in\mathbb{R} \quad f(x_1)>0$ et $f(x_1)\neq 1$,

(P_3) f est continue en au moins un point de $\mathbb{R}$.

1) Montrer que $f(0)=1$ puis en déduire que $f(x)f(-x)=1$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

2) Montrer que f est continue en tout point de $\mathbb{R}$ puis, à l'aide du théorème des valeurs intermédiaires, en déduire que $f(x)>0$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

3) Soit $x\in\mathbb{R}$. Montrer que $f(nx)=\big(f(x)\big)^n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

4) Soit x un nombre rationnel. Montrer que $f(x)=\big(f(1)\big)^x$.

5) Montrer qu'il existe un nombre réel strictement positif a tel que:

$$\forall x\in\mathbb{R} \qquad f(x)=a^x.$$

Exercice 14 (du groupe $(\mathbb{R}_+^*,\times)$ vers le groupe $(\mathbb{R},+)$)
Soit f une application de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ satisfaisant les propriétés suivantes:

(P_1) $\forall (x,y)\in\big(\mathbb{R}_+^*\big)^2 \quad f(xy)=f(x)+f(y)$,

(P_2) $\exists x_1\in\mathbb{R}_+^* \quad f(x_1)\neq 0$,

(P_3) f est continue en au moins un point de $\mathbb{R}_+^*$.

1) Montrer que $f(1)=0$ puis en déduire que $f(x)=-f(\frac{1}{x})$ pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$.

2) Montrer que f est continue au point 1, puis en déduire que f est continue en tout point de $\mathbb{R}_+^*$.

3) Soit $a\in\mathbb{R}_+^*$ et $n\in\mathbb{N}$. Montrer que $f(a^n)=nf(a)$.

4) Soit $a\in\mathbb{R}_+^*$ et x un nombre rationnel. Montrer que $f(a^x)=xf(a)$.

5) Soit $a\in\mathbb{R}_+^*$ et $x\in\mathbb{R}$. Montrer que $f(a^x)=xf(a)$.

6) Montrer qu'il existe un nombre réel strictement positif a tel que,

$$a\neq 1 \quad \text{et} \quad f(a)=1.$$

En déduire que f est dérivable en tout point de $\mathbb{R}_+^*$ et que

$$\forall x\in\mathbb{R}_+^* \qquad f'(x)=\frac{1}{x\ln a}\ .$$

Exercice 15 (définition des sinus et cosinus hyperbolique).

DÉFINITION. Les fonctions sh et ch sont définies par :

$$\mathrm{sh}x := \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{ch}x := \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$$

1) Vérifier que $\mathrm{ch}^2 - \mathrm{sh}^2 = 1$ puis que la dérivée de sh est ch et la dérivée de ch est sh.

2) Montrer que sh est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et que sa fonction réciproque (notée argsh) satisfait

$$\forall y \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{argsh}y = \ln\big(y + \sqrt{1+y^2}\big) \quad \text{et} \quad \mathrm{argsh}'y = \tfrac{1}{\sqrt{1+y^2}}.$$

3) Montrer que ch est une bijection de $[\,0, \infty[$ dans $[\,1, \infty[$ et que sa fonction réciproque (notée argch) satisfait

$$\forall y \in [\,1, \infty[\quad \mathrm{argch}y = \ln\big(y + \sqrt{y^2-1}\big) \quad \text{et} \quad \forall y \in]\,1, \infty[\quad \mathrm{argch}'y = \tfrac{1}{\sqrt{y^2-1}}.$$

Exercice 16 (définition des arcsinus et arccosinus).

1) Montrer que l'application f de $[\,-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\,]$ dans $[\,-1, +1\,]$ définie par :

$$\forall x \in [\,-\tfrac{\pi}{2}, +\tfrac{\pi}{2}\,] \qquad f(x) = \sin x,$$

est bijective. La fonction réciproque f^{-1} est notée "arcsin". Montrer que

$$\forall y \in]-1, +1\,[\qquad \arcsin' y = \tfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

2) Montrer que l'application g de $[\,0, \pi\,]$ dans $[\,-1, +1\,]$ définie par :

$$\forall x \in [\,0, +\pi\,] \qquad g(x) = \cos x,$$

est bijective. La fonction réciproque g^{-1} est notée "arccos". Montrer que :

$$\forall y \in]-1, +1\,[\qquad \arccos' y = -\tfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

Exercice 17 (définition de l'arctangente).

Montrer que la fonction f de $]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\,[$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\,[\qquad f(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$$

est bijective. La fonction réciproque f^{-1} est notée "arctan". Montrer que

$$\forall y \in \mathbb{R} \qquad \arctan'(y) = \frac{1}{1+y^2}$$

Exercice 18.

Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dérivable en tout point de $\mathbb{R}$. Montrer que si f est paire alors f' est impaire. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 19 (application du thm. des accroissements finis).

Soit I un intervalle ouvert non vide et f une application de I dans $\mathbb{R}$. On suppose que f est dérivable en tout point de I.

1) Montrer que les assertions suivantes sont **équivalentes** :

$$(a_1) \quad \forall x \in I \qquad f'(x) = 0,$$
$$(a_2) \quad \exists c \in \mathbb{R} \qquad \forall x \in I \quad f(x) = c.$$

2) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, on a :

$$\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \begin{cases} +\frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

3) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, on a :

$$\arctan \frac{1+x}{1-x} - \arctan x = \begin{cases} +\frac{\pi}{4} & \text{si } x > 1 \\ -\frac{3\pi}{4} & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

4) Montrer que pour tout $x \in [-1, +1]$, on a : $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 20.

Calculer les developpements limités à l'ordre 2 au point 0 puis au point 1 des fonctions suivantes :

(1) $\quad f_1(x) := x,$

(2) $\quad f_2(x) := x^4 + 5x^3 + 2x^2 - 1,$

(3) $\quad f_3(x) := \frac{1}{1+x},$

(4) $\quad f_4(x) := \frac{1+x^2+x^4}{(1+x)^4},$

Exercice 21.

Soit f l'application de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) := x^3 \sin \frac{1}{x}$.
Calculer le développement limité à l'ordre 2 en 0 de f puis montrer que f n'admet pas de developpement limité à l'ordre 3 en 0.

Exercice 22 (développements limités usuels).

Montrer que :

(1) $\quad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ \dots \ + \frac{x^n}{n!} + x^n \varepsilon(x),$

(2) $\quad \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ \dots \ + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + x^n \varepsilon(x),$

(3) $\quad \sin x = x - \frac{x^3}{6} + \ \dots \ + (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + x^{2p+2} \varepsilon(x),$

(4) $\quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \ \dots \ + (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!} + x^{2p+1} \varepsilon(x).$

Exercice 23.

Soit I un intervalle ouvert non vide et $x_0 \in I$. Soit f une application de I dans $\mathbb{R}$.

1) Vérifier que f est continue en x_0 ssi f admet un développement limité d'ordre 0 en x_0.

2) Vérifier que f est dérivable en x_0 ssi f admet un développement limité d'ordre 1 en x_0.

3) Soit f l'application nulle en 0 satisfaisant $f(x) = x^3 \sin \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$. Montrer que f est dérivable en tout point de $\mathbb{R}$, que f n'est pas deux fois dérivables en 0 bien que f admette un developpement limité à l'ordre 2 en x_0.

Exercice 24.

Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^2, $x_0 \in \mathbb{R}$ et θ une application de $\mathbb{R}^*$ dans $]\,0,1\,[$ satisfaisant :

$$\forall h \in \mathbb{R}^* \qquad f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'\big(x_0 + h\theta(h)\big)$$

En utilisant le developpement limité à l'ordre 2 de f en x_0, montrer que si $f''(x_0) \neq 0$ alors $\theta(h)$ tend vers $\frac{1}{2}$ quand h tend vers 0.

Exercice 25

Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que f est deux fois dérivable et f'' est continue en tout point de $\mathbb{R}$. Soit g l'application de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$g(x) = \frac{f(x) - f(0) - x}{x}$$

1) Montrer que g est prolongeable par continuité en 0 (prolongement noté g).

2) Montrer que g est dérivable en tout point de $\mathbb{R}$.

3) Montrer que g' est continue en tout point de $\mathbb{R}$.

Exercice 26 (tangente et arctangente).

1) En utilisant les développements limités des fonctions "sinus" et "cosinus", calculer le dévellopement à l'ordre 4 en 0 de la fonction "tangente".

2) Calculer de deux façons différentes le développement limité à l'ordre 4 en 0 de la fonction "arctangente".

Exercice 27.

Calculer les développements limités à l'ordre 4 en $\frac{\pi}{2}$ puis $\frac{\pi}{4}$ des fonctions "sinus" et "cosinus".

Exercice 28 (arcsinus et arccosinus).

Calculer les développements limités à l'ordre 4 en 0 des fonctions "arcsinus" et "arccosinus".

Exercice 29.

Calculer les développements limités à l'ordre 4 en 0 des fonctions "sh" et "ch" et "argsh" puis le développement limité à l'ordre 2 en 2 de "argch".

Exercice 30.

Calculer les développements limités à l'ordre 3 en 0 des fonctions "$\ln(\cos x)$" et "$\sqrt{1+x}$ "et "$\sqrt{1+\sin x}$ ".

Exercice 31 (calculs de limites).

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\sin x}$$

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\arctan x - \sin x}{\tan x - \arcsin x}\right)$$

$$\lim_{x\to +\infty} \left(ch \frac{1}{x^2}\right)^{x^2}$$

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\cos x - \mathrm{e}^x}{\arcsin x - x^2}\right)$$

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x-\sin x} + \frac{1}{x - \operatorname{sh} x}\right)$$

$$\lim_{x\to 0} \left(x+\sqrt{x}\right)\ln x$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} \ln \frac{\sin x}{x}$$

$$\lim_{x\to +\infty} \left(1+\frac{7}{x}\right)^x$$

Exercice 32.

Calculer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $f(x) := \arctan \frac{x}{x+2}$ de trois façon.

1) par la formule de Taylor,

2) par composition de développements limités,

3) en commençant par calculer le développement limité de f'.

Exercice 33.

Soit f l'application de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \qquad f(x) = \left(1 + x^2\right)^{\frac{1}{x}}.$$

1) Calculer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $g(x) := \ln f(x)$.

2) Montrer que f est prolongeable par continuité en 0 (prolongement noté f).

3) Montrer que f est dérivable en tout point de $\mathbb{R}$.

4) Montrer que f' est continue en tout point de $\mathbb{R}$.

Exercice 34 (développement limité au voisinnage de l'infini).

Déterminer les asymptotes de la courbe d'équation :

$$y = 5x + 3\sqrt{x^2 - 1}$$

Préciser la position de la courbe par rapport à ces asymptotes.

Exercice 35 (développement limité au voisinnage de l'infini).

1) Calculer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $\ln\left(1 + y + y^2\right)$.

2) Calculer le développement limité à l'ordre 2 au voisinnage de l'infini de la fonction

$$f(x) := (2x - 1)\ln\frac{x^2}{1 + x + x^2}.$$

3) Calculer la limite de $x^2\big(f(x) + 2\big)$ quand x tend vers $+\infty$.

XI. Calcul de primitives et intégrale de Riemann.

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et I un intervalle ouvert.

Primitive. Si $I \subset D_f$ alors une primitive de f dans I est une fonction F dérivable en tout point de I telle que $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in I$. Lorsque f admet une primitive dans I, celle-ci est unique dans I modulo l'addition d'une constante.

Soit f une application bornée de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$.

Sommes de Darboux. Une subdivision σ de $[a, b]$ est un ensemble fini $\{t_i\}_{0 \le i \le n}$ de réels tel que $a := t_0 < t_1 < ... < t_n := b$. A toute telle subdivision on associe les deux sommes

$$S^+_\sigma(f) := \sum_{i=1}^{n} M_i(t_i - t_{i-1}) \quad \text{et} \quad S^-_\sigma(f) := \sum_{i=1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1})$$

où M_i et m_i sont respectivement les bornes supérieure et inférieure de l'ensemble $\{f(t) : t \in [t_{i-1}, t_i]\}$.

Intégrabilité au sens de Riemann. On dit que f est intégrable au sens de Riemann dans $[a, b]$ si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une subdivision σ telle que : $S^+_\sigma(f) - S^-_\sigma(f) < \varepsilon$.

Théorème (intégrale de Riemann). Si f est intégrable au sens de Riemann dans $[a, b]$ alors Il existe un unique réel $\int_a^b f(t)dt$ tel que pour toutes subdivisions σ et σ' de $[a, b]$,

$$S^-_\sigma(f) \le \int_a^b f(t)dt \le S^+_{\sigma'}(f).$$

Théorème (Riemann). Si f est continue en tout point de $[a, b]$ alors f est intégrable au sens de Riemann dans $[a, b]$ et

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_n \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(t_i^{(n)}),$$

où $a + \frac{i-1}{n}(b - a) \le t_i^{(n)} \le a + \frac{i}{n}(b - a)$.

Théorème (existence de primitives). Si f est continue en tout point de $[a, b]$ alors la fonction F définie par

$$\forall x \in]a, b[\qquad F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt,$$

est une primitive de f dans $]a, b[$.

Théorème fondamental. Si f' est définie et continue en tout point de $[a, b]$ alors

$$\int_a^b f'(t)dt = f(b) - f(a).$$

Exercice 1. Calculer les primitives des fonctions suivantes:

$$\frac{2}{1+3x^2} \qquad \frac{1}{4x^2+4x+9} \qquad \frac{1}{(1+x^2)^2} \qquad \frac{x}{1+x^4} \qquad \frac{x^3}{(1+x^2)^3}$$

Exercice 2. Calculer les primitives de la fonction :

$$\frac{1}{1+x^4}$$

Exercice 3. Calculer les primitives des fonctions suivantes :

$$\frac{1}{1-x^2} \qquad \frac{x+1}{x^2+4x+6} \qquad \frac{3x^2-5x+10}{x(x^2-4x+5)}$$

Exercice 4. Calculer les primitives des fonctions suivantes:

$$\sin^3 x \qquad \cos^4 x \qquad \cos^6 x \qquad \frac{\cos^3 x}{\sin^5 x} \qquad \frac{\mathrm{sh}^3 x}{1+\mathrm{ch}^2 x}$$

Exercice 5. Calculer les primitives des fonctions suivantes :

$$\frac{1}{x\sqrt{2x-1}} \qquad \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}} \qquad \frac{1}{x^2\sqrt{1-x^2}} \qquad \frac{1}{\cos x} \qquad \frac{1}{1+\sin x}$$

Exercice 6. Calculer l'intégrale suivante :

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x}+\sqrt{(1+x)^3}}$$

Exercice 7. Pour $x > 0$, calculer l'intégrale suivante :

$$\int_1^{1/\sqrt{x}} \frac{2t\ln t}{(1+t^2)^2} dt.$$

Exercice 8. Pour $a \neq 0$ et $t > |a|$, calculer l'intégrale suivante :

$$\int_{2|a|}^{t} \frac{dx}{x^2-a^2}.$$

Exercice 9. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose: $F(x) := \displaystyle\int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2+t^4}}$.

1) Montrer que F est impaire.

2) Calculer $F'(x)$ puis résoudre $F'(x) = 0$ avec $x \geq 0$.

3) Montrer que: $\forall\, x > 0 \quad 0 \leq F(x) \leq 1/x$.

4) En déduire l'allure générale du graphe de F.

Exercice 10. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose: $I_n := \int_0^1 x^n\sqrt{1-x}dx$. Trouver une relation entre I_n et I_{n-1} pour $n \geq 1$. Calculer I_0 puis I_n pour $n \geq 1$.

Exercice 11. Soit $f \in C^1[\,a,b\,]$ strictement croissante dans $[\,a,b\,]$. On note :

$$I_1 := \int_a^b f(t)\,dt \qquad \text{et} \qquad I_2 := \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(t)\,dt.$$

Calculer I_2 en fonction de I_1 puis $I_1 + I_2$. Interpréter géométriquement l'intégrale I_2.

Exercice 12. Soit $a, b \in \mathbb{R}$ et $f \in C(\mathbb{R})$ telle que:

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \qquad f(a+b-x) = f(x).$$

Exprimer $\int_a^b xf(x)\,dx$ en fonction de $\int_a^b f(x)dx$. Appliquer ce résultat pour calculer:

$$\int_0^{\Pi} \frac{xdx}{1+\sin x}.$$

Contrôle continu de M 11 numéro 1 (INFO. 2)- Octobre 2008.

1) Soit E un ensemble. Soient A et B deux parties de E. Démontrer que

$$A \subset A \cup B.$$

2) Soit E un ensemble. Soient A et B deux parties de E. Démontrer que

$$A \cap B \subset B.$$

3) Ecrire la négation de la proposition

$$\forall p \in \mathbb{N}^* \quad \exists q \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad |x| < \frac{1}{q} \implies x^2 < \frac{1}{p}.$$

4) Démontrer la proposition

$$\forall p \in \mathbb{N}^* \quad \exists q \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad |x| < \frac{1}{q} \implies x^2 < \frac{1}{p}.$$

5) Démontrer (par récurrence) la proposition

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

6) **Question de cours** . Soient E et F deux ensembles et f une application de E dans F. Comment définit-on " f est injective "?

7) **Question de cours** . Soient E et F deux ensembles et f une application de E dans F. Comment définit-on " f est surjective "?

Contrôle continu de M 11 numéro 1 (MATH. 2)- Octobre 2008.

1) Soit E un ensemble. Soient A et B deux parties de E. Démontrer que

$$B \subset A \cup B.$$

2) Soit E un ensemble. Soient A et B deux parties de E. Démontrer que

$$A \cap B \subset B.$$

3) Ecrire la négation de la proposition

$$\forall p \in \mathbb{N}^* \quad \exists q \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad x^2 \geq \frac{1}{q} \implies |x| \geq \frac{1}{p}.$$

4) Démontrer la proposition

$$\forall p \in \mathbb{N}^* \quad \exists q \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad |x-1| < \frac{1}{q} \implies |x^2-1| < \frac{1}{p}.$$

5) Démontrer (par récurrence) la proposition

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \sum_{i=1}^{n}(2i+1) = n(n+2).$$

6) **Question de cours** . Soient E et F deux ensembles et f une application de E dans F. Comment définit-on l'injectivité de f?

7) **Question de cours** . Soient E et F deux ensembles et f une application de E dans F. Comment définit-on la surjectivité de f?

Contrôle continu de M 11 numéro 2 (MATH. 2)- Octobre 2008.

1) **Question de cours**. Soient E et F deux ensembles et f une application de E dans F. Comment définit-on l'injectivité de f?

2) On rappelle que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \quad x^2 + xy + y^2 > 0 \Longleftrightarrow (x,y) = (0,0).$$

Utiliser ce résultat pour montrer que l'application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3$ est injective.

3) **Question de cours**. Soit E un ensemble. Qu'est ce qu'une relation d'équivalence sur E?

4) Soit $\mathcal{R}$ la relation de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ définie par

$$p\mathcal{R}q \Longleftrightarrow |p-q| \text{ est divisible par } 3.$$

Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{N}$. Combien y a t'il de classes d'équivalence modulo $\mathcal{R}$?

5) Factoriser le polynôme

$$P(x) := x^3 - 2x^2 - (i+2)x + 3i - 3$$

sachant que P possède une racine réelle.

Contrôle continu de M 11 numéro 2 (INFO. 2)- Octobre 2008.

1) **Question de cours**. Soient E et F deux ensembles et f une application de E dans F. Comment définit-on l'injectivité de f?

2) Montrer que l'application f de $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$ est injective.

3) **Question de cours**. Soit E un ensemble. Qu'est ce qu'une relation d'équivalence sur E?

4) Soit $\mathcal{R}$ la relation de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ définie par

$$p\mathcal{R}q \Longleftrightarrow |p - q| \text{ est divisible par 2.}$$

Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{N}$. Combien y a t'il de classes d'équivalence modulo $\mathcal{R}$?

5) Factoriser le polynôme

$$P(x) := x^3 + (3i - 2)x^2 - (2 + 6i)x + 4$$

sachant que P possède une racine réelle.

Contrôle continu de M 11 numéro 3 (INFO. 2)- Décembre 2008.

1) Donner un nombre réel $\delta > 0$ satisfaisant à

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad |x-3| < \delta \implies |x^2 - 9| < \frac{1}{100}.$$

2) Donner le développement limité à l'ordre 4 au point 1 de la fonction

$$f(x) := x \ln x.$$

3) Factoriser

$$g(x) := x^3 + 2x^2 - x - 2.$$

4) Déduire du théorème des accroissements finis qu'il existe $c \in]0, \frac{\pi}{7}[$ tel que

$$\frac{1}{\cos^2 c} = \frac{7}{\pi} \tan \frac{\pi}{7}.$$

5) Donner le développement limité à l'ordre 8 au point 1 de la fonction

$$h(x) := \frac{x}{2-x}$$

Contrôle continu de M 11 numéro 3 (MATH. 2)- Décembre 2008.

1) Donner un nombre réel $\delta > 0$ satisfaisant à

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad |x-4| < \delta \implies |\sqrt{x}-2| < \frac{1}{100}.$$

2) Donner le développement limité à l'ordre 4 au point 1 de la fonction

$$f(x) := x \ln x.$$

3) Soit g une application de $\mathbb{R} \setminus \{-4\}$ dans $\mathbb{R}$ satisfaisant à

$$\frac{(x+4)g(x)}{(x-1)^4} = 5.$$

Donner le développement limité à l'ordre 3 au point 1 de g, puis le développement limité à l'ordre 3 au point 0 de g.

4) Déduire du théorème des accroissements finis qu'il existe $c \in]0, \frac{\pi}{7}[$ tel que

$$\frac{1}{\cos^2 c} = \frac{7}{\pi} \tan \frac{\pi}{7}.$$

5) Donner le développement limité à l'ordre 8 au point 1 de la fonction

$$h(x) := \frac{x}{2-x}$$

Exercice 13. Soit $\mathcal{R}$ la relation de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par: pour tout $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$,

$$x\mathcal{R}y \iff (4x^2 + 4x + 1)y^2 + (4x^2 + 10x + 4)y + (x^2 + 4x + 4) = 0.$$

1) Montrer que $\mathcal{R}$ n'est pas une application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

2) Montrer que $\mathcal{R}$ est une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ dont on déterminera le domaine de définition (celui-ci sera noté D).

3) Soit $(x, y) \in D \times \mathbb{R}$ tel que $x\mathcal{R}y$. Donner y explicitement en fonction de x.

Solution
1) Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} &a(x) := 4x^2 + 4x + 1 = (2x + 1)^2, \\ &2b(x) := 4x^2 + 10x + 4 = 2(2x + 1)(x + 2), \\ &c(x) := x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2, \end{aligned}$$

et $x\mathcal{R}y$ ssi $a(x)y^2 + 2b(x)y + c(x) = 0$. Par suite, pour $x = -\frac{1}{2}$, on a $a(x) = b(x) = 0$ et $c(x) \neq 0$, donc il n'existe pas de nombre réel y vérifiant $x\mathcal{R}y$. En conclusion, $\mathcal{R}$ n'est pas une application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

2) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $x \neq -\frac{1}{2}$, on a $a(x) \neq 0$ et $b(x)^2 - a(x)c(x) = 0$, donc il existe $y \in \mathbb{R}$ unique vérifiant $x\mathcal{R}y$. Compte tenu de la première question, pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe au plus un nombre réel y tel que $x\mathcal{R}y$. En conclusion, $\mathcal{R}$ est une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ dont le domaine de définition est $D := \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\}$.

3) Soit $(x, y) \in D \times \mathbb{R}$ tel que $x\mathcal{R}y$. Puisque $a(x) \neq 0$, on a

$$y^2 + 2\frac{b(x)}{a(x)}y + \frac{c(x)}{a(x)} = 0$$

ce qui équivaut à

$$y^2 + 2\left(\frac{x + 2}{2x + 1}\right)y + \left(\frac{x + 2}{2x + 1}\right)^2 = 0$$

c'est à dire,

$$\left(y + \frac{x + 2}{2x + 1}\right)^2 = 0.$$

On en déduit que

$$y = -\frac{x + 2}{2x + 1}.$$

fin de la solution

TD. M11 SUITES NUMÉRIQUES

Exercice 1. Montrer à l'aide de la définition d'une limite que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2n+1}{n+3} = 2 \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{\sqrt{n}} = +\infty \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+3} = 0 \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{5-n^2}{n+2} = -\infty.$$

Exercice 2. (*Suites géométriques*). Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par: $u_0 = x_0$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \lambda u_n$.

Exercice 3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

a) On suppose que: $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = 2u_n + 1$. Montrer qu'il existe une suite géométrique $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que la suite $(u_n - v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit stationnaire (i.e. constante). Calculer u_n en fonction de n puis étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

b) Soit $a, b \in \mathbb{R}$. On suppose que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = au_n + b$. Calculer u_n en fonction de n et u_0 puis étudier la convergence de la suite.

Exercice 4. Etudier la convergence de la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ dans les cas suivants:

$$u_n := \frac{n!}{n^n} \qquad u_n := \frac{n-(-1)^{n+1}}{n+(-1)^{n+1}} \qquad u_n := \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$$

Exercice 5. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k} = +\infty.$

Exercice 6. RAPPEL: on dit que $\ell \in \mathbb{R}$ est une valeur d'adhérence de la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ssi il existe une sous-suite extraite qui converge vers ℓ.

a) Montrer que si une suite possède au moins deux valeurs d'adhérence distinctes alors cette suite est divergente.

b) Déterminer l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ dans les cas suivants:

$$u_n := (-1)^n \qquad u_n := \frac{(-1)^n}{1+\frac{1}{n}} \qquad u_n := \sin\frac{n\pi}{2}$$

Exercice 7. Montrer que les suites $(\sin n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(\cos n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont divergentes.

Exercice 8. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle possèdant au moins une valeur d'adhérence. Montrer que si la suite est monotone alors elle converge.

Exercice 9. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle.

$a)$ Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est non majorée alors il existe une suite extraite $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}^*}$ qui satisfait: $\lim\limits_{k\to+\infty} u_{n_k} = +\infty$.

$b)$ Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est non majorée et croissante alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Exercice 10. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle. On suppose que les trois suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont convergentes.

$a)$ Montrer que les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ ont même limite.

$b)$ Montrer que les suites $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ ont même limite.

$c)$ En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.

Exercice 11. (*limites supérieure et inférieure*). Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle bornée. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note

$$v_n := \sup\{u_k : k \geq n\} \quad \text{et} \quad w_n := \inf\{u_k : k \geq n\}$$

$a)$ Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.

$b)$ En déduire que les suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont convergentes.

> NOTA BENE. *Par définition,* $\lim_n v_n$ *est la limite supérieure de la suite* (u_n) *et* $\lim_n w_n$ *est la limite inférieure de la suite* (u_n).

$c)$ Calculer les limites supérieure et inférieure de la suite (u_n) dans le cas $u_n := (-1)^n$.

Exercice 12. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ dans les cas suivant:

$a)$ $\quad u_n := \dfrac{n^k}{a^n} \quad$ où $\quad k > 0$ et $a > 1$.

$b)$ $\quad u_n := n^{\frac{1}{n}}$. $\qquad c)$ $\quad u_n := \dfrac{\log n}{n}$. $\qquad d)$ $\quad u_n := \dfrac{1}{(n!)^{\frac{1}{n}}}$

$e)$ $\quad u_n := \dfrac{\sum_{k=1}^{k=n} a^k}{\sum_{k=1}^{k=n} b^k} \quad$ où $\quad 0 < |a| < 1$ et $0 < |b| < 1$. $\qquad f)$ $\quad u_n := \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k(k+1)}$.

Exercice 13. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle **bornée**.

$a)$ (*question de cours*). Montrer qu'il existe une suite extraite $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge.

$b)$ Montrer que si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède au plus une valeur d'adhérence alors cette suite est convergente.

Exercice 14. a) Montrer que l'on définit une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_n > 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, en posant:

$$u_0 := 2 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} := 2 - \frac{1}{u_n}$$

b) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone.

c) Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 15. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle satisfaisant:

$$u_0 > 2 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} := u_n^2 - 2.$$

a) Montrer que $u_n \geq 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) En supposant que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, calculer sa limite.

c) Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 16. Soient a et b deux nombres réels satisfaisant: $0 < a < b$.

a) Montrer que l'on définit deux suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant:

$$(u_0, v_0) := (a, b) \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} := \sqrt{u_n v_n} \text{ et } v_{n+1} := \tfrac{u_n + v_n}{2}.$$

b) Étudier la convergence de ces deux suites (on pourra montrer qu'elles sont adjacentes).

Exercice 17. Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$. On pose

$$u_0 := b \quad \text{et} \quad u_{n+1} := \tfrac{1}{2}\Big(u_n + \tfrac{a^2}{u_n}\Big).$$

Étudier la convergence de cette suite (dans les cas où elle est bien définie).

Exercice 18. Soit p un entier supérieur ou égal à 2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note k_n le plus grand entier tel que

$$\left(\frac{k_n}{p^n}\right)^2 < p,$$

puis on pose $u_n := \frac{k_n}{p^n}$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite croissante de nombres rationnels qui converge vers $\sqrt{p}$.

La fonction la plus importante de l'analyse mathématique est sans aucun doute la fonction **exponentielle**. *L'exponentielle d'un nombre réel x est par définition*

$$(1) \qquad \mathrm{e}^x := \lim_{n\uparrow\infty} P_n(x) \quad \textit{où} \quad P_n(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k\,!}.$$

Afin de valider cette définition, il faut démontrer que pour tout nombre réel x, la suite réelle $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. A partir de cette définition de la fonction exponentielle, on peut démontrer que

$$(2) \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad \mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}^x \mathrm{e}^y$$

puis que la fonnction exponentielle est dérivable en tout point de $\mathbb{R}$ et que sa dérivée en un point x est égale à e^x, autrement dit,

$$(3) \qquad \forall x \in \mathbb{R} \qquad \lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{e}^{x+h} - \mathrm{e}^x}{h} = \mathrm{e}^x.$$

Dans l'exercice ci-dessous, on justifie (1) *puis on démontre les propriétés* (2) *et* (3).

Exercice.1. (**Propriétés fondamentales de l'exponentielle**).

a) Soit ε un nombre réel tel que $0 < \varepsilon < 1$. On note $s_n(\varepsilon) := \sum_{k=1}^{n} \varepsilon^k$. Montrer que $(s_n(\varepsilon))$ est une suite croissante majorée, puis que $\lim_n \varepsilon^n = 0$ et enfin que $\lim_n s_n(\varepsilon) = (1-\varepsilon)^{-1}$.

b) Montrer que si N, n, q, p sont des entiers naturels non nuls, alors

$$p > q > n > N \quad \Longrightarrow \quad \sum_{k=q+1}^{p} \frac{N^k}{k\,!} \leq \frac{(N+1)^{N+1}}{N\,!} \left(\frac{N}{N+1}\right)^n.$$

Utiliser le **Critère de Cauchy** afin d'établir que pour tout nombre réel x, la suite $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a:

$$P_n(x)P_n(y) - P_n(x+y) = \sum_{k=n+1}^{2n} \left(\sum_{i=0}^{i=n} \frac{x^i y^{k-i}}{i\,!(k-i)\,!} \right)$$

En déduire que: $\mathrm{e}^x \mathrm{e}^y = \mathrm{e}^{x+y}$.

d) Montrer que pour tout $n \geq 2$ et tout $h \in \mathbb{R}$ tel que $|h| \leq 1$, on a:

$$\left| \frac{P_n(h) - 1}{h} - 1 \right| \leq |h| \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\,!}$$

En déduire que la fonnction exponentielle est dérivable en tout point de $\mathbb{R}$ et que sa dérivée en un point x est égale à e^x.

Exercice.2. (**Le nombre de Néper**).

Le nombre de Néper e est l'exponentielle du nombre 1, c'est à dire, la limite quand n tend vers l'infini de $P_n(1)$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$P_n(1) \leq \mathrm{e} \leq P_n(1) + \frac{2}{(n+1)\,!}.$$

En déduire que $2,71805 \leq \ \mathrm{e} \ \leq \ 2,71846$.

Exercice.3. (**Propriétés fondamentales du logarithme népérien**).

1) Justifier le fait que l'application f de $\mathbb{R}$ dans $]\,0,+\infty[$ définie par $f(x) = \mathrm{e}^x$, est une bijection.

> DÉFINITION *: Le logarithme népérien (notée* ln*) est, par définition, l'application réciproque de f. On a donc:*
>
> $$\forall (x,y) \in \mathbb{R}\times]\,0,+\infty\,[\qquad y = \mathrm{e}^x \iff x = \ln y.$$
>
> *Il en résulte que le logarithme népérien de* 1 *est égal à* 0 *et le logarithme népérien du du nombre de Néper est égal* à 1.

2) Montrer que $\ln(yy') = \ln y + \ln y'$ pour tout $y, y' \in]\,0,+\infty\,[$.

3) Montrer que le logarithme népérien est dérivable en tout point de $]\,0,+\infty\,[$ et que sa dérivée en un point x est égale à $\frac{1}{x}$.

Exercice.4. (**Une approximation de l'exponentielle**)

Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $\lim\limits_{n\uparrow\infty} \ln\Big(\big(1+\dfrac{x}{n}\big)^n\Big) = x$ puis que $\lim\limits_{n\uparrow\infty} \big(1+\dfrac{x}{n}\big)^n = \mathrm{e}^x$.

Exercice.5. (**Exponentiation**).

Soit a un nombre réel strictement positif. On rappelle que si $n \in \mathbb{N}^*$ alors $\sqrt[n]{a}$ désigne l'unique nombre réel satisfaisant: $x \geq 0$ et $x^n = a$.

1) Montrer (par récurrence) que $a^n = \mathrm{e}^{n \ln a}$ pour tout entier relatif n.

On généralise cette formule à tout nombre réel de la façon suivante.

> DÉFINITION *: pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose: $a^x := \mathrm{e}^{x \ln a}$.*

2) Montrer que $a^{x+y} := a^x a^y$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

3) Montrer que la fonction $x \longrightarrow a^x$ est dérivable en tout point de $\mathbb{R}$ et que sa dérivée en point x est égale à $(\ln a)a^x$.

4) Montrer que $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice.6. (Du groupe $(\mathbb{R},+)$ vers le groupe $(\mathbb{R}_+^*,\times)$)

Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ satisfaisant les propriétés suivantes:

(P_1) $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2 \quad f(x+y)=f(x)f(y)$,

(P_2) $\exists x_1\in\mathbb{R} \quad f(x_1)>0$ et $f(x_1)\neq 1$,

(P_3) f est continue en au moins un point de $\mathbb{R}$.

1) Montrer que $f(0)=1$ puis en déduire que $f(x)f(-x)=1$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

2) Montrer que f est continue en tout point de $\mathbb{R}$ puis, à l'aide du théorème des valeurs intermédiaires, en déduire que $f(x)>0$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

3) Soit $x\in\mathbb{R}$. Montrer que $f(nx)=\big(f(x)\big)^n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

4) Soit x un nombre rationnel. Montrer que $f(x)=\big(f(1)\big)^x$.

5) Montrer qu'il existe un nombre réel strictement positif a tel que:

$$\forall x\in\mathbb{R} \qquad f(x)=a^x.$$

Exercice.7. (Du groupe $(\mathbb{R}_+^*,\times)$ vers le groupe $(\mathbb{R},+)$)

Soit f une application de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ satisfaisant les propriétés suivantes:

(P_1) $\forall(x,y)\in\big(\mathbb{R}_+^*\big)^2 \quad f(xy)=f(x)+f(y)$,

(P_2) $\exists x_1\in\mathbb{R}_+^* \quad f(x_1)\neq 0$,

(P_3) f est continue en au moins un point de $\mathbb{R}_+^*$.

1) Montrer que $f(1)=0$ puis en déduire que $f(x)=-f(\frac{1}{x})$ pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$.

2) Montrer que f est continue au point 1, puis en déduire que f est continue en tout point de $\mathbb{R}_+^*$.

3) Soit $a\in\mathbb{R}_+^*$ et $n\in\mathbb{N}$. Montrer que $f(a^n)=nf(a)$.

4) Soit $a\in\mathbb{R}_+^*$ et x un nombre rationnel. Montrer que $f(a^x)=xf(a)$.

5) Soit $a\in\mathbb{R}_+^*$ et $x\in\mathbb{R}$. Montrer que $f(a^x)=xf(a)$.

6) Montrer qu'il existe un nombre réel strictement positif a tel que,

$$a\neq 1 \quad \text{et} \quad f(a)=1.$$

En déduire que f est dérivable en tout point de $\mathbb{R}_+^*$ et que

$$\forall x\in\mathbb{R}_+^* \qquad f'(x)=\frac{1}{x\ln a}\ .$$

ELLIPSE.

De manière concrète, on peut construire une ellipse en se donnant deux points du plan S et S^* (appelés foyers de l'ellipse) et un nombre L strictement plus grand que la distance de S à S^*. L'ellipse $E(S, S^*, L)$ est l'ensemble des points X du plan satisfaisant:

$$(1) \qquad \operatorname{dist}(X, S) + \operatorname{dist}(X, S^*) = L.$$

On peut démontrer que L est le diamètre de l'ellipse, c'est à dire la plus grande distance entre deux points de l'ellipse (ou encore, la longueur du grand axe). On peut aussi vérifier que l'ellipse s'inscrit dans un rectangle de longueur L et de largeur ℓ. La relation entre les dimensions de ce rectangle et la distance d entre les foyers de l'ellipse est: $d^2 + \ell^2 = L^2$.

Considérons le repère cartésien dans lequel les coordonnés des deux foyers S et S^* sont respectivement $(-\frac{d}{2}, 0)$ et $(+\frac{d}{2}, 0)$ (dans ce que l'origine du repère est placé au milieu des deux foyers). Un point X de coordonnées (x, y) est un point de l'ellipse si et seulement si

$$(2) \qquad \sqrt{\left(x + \frac{d}{2}\right)^2 + y^2} + \sqrt{\left(x - \frac{d}{2}\right)^2 + y^2} = L.$$

On peut simplifier la relation ci-dessus en vérifiant (c'est un simple exercice de calcul) qu'elle est équivalente à

$$(3) \qquad \frac{4x^2}{L^2} + \frac{4y^2}{\ell^2} = 1.$$

Pour étudier le mouvement d'une planète autour du soleil (par exemple), il est plus indiqué de placer l'origine du repère à l'un des foyers (ce foyer sera le soleil). Considérons donc le repère cartésien dans lequel les coordonnés des deux foyers S et S^* sont respectivement $(0, 0)$ et $(d, 0)$. Un point X de coordonnées (x, y) est un point de l'ellipse ssi

$$(4) \qquad \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{(x - d)^2 + y^2} = L.$$

La loi des aires est plus simple à exprimer en fonction des variables (r, θ) qui sont liées au variables (x, y) par les relations $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$. Un calcul simple (à partir de (4)) montre qu'un point X de coordonnées $(x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ est un point de l'ellipse si et seulement si

$$(5) \qquad \frac{\ell^2}{2r} + d\cos\theta = L.$$

Université de Toulon et du Var *UFR Sciences et Techniques*
DEUG première année - M11 *Session de Septembre 2003*

Exercice 1.

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *définie par* $f(x) := e^{\frac{x\ln x}{1-x}}$.

1) Déterminer le domaine de définition D de f.

2) Déterminer le développement limité à l'ordre deux en 1 de $\ln x$, puis le développement limité à l'ordre un en 1 de $\frac{x\ln x}{1-x}$.

3) Déterminer le développement limité à l'ordre un en -1 de l' exponentielle, puis le développement limité à l'ordre un en 1 de f. En déduire la valeur de $\lim_{x\to 1} f(x)$.

Soit g et h les applications de $]\,0,\infty\,[$ *dans* $\mathbb{R}$ *définies par* $h(x) := 1-x+\ln x$ *puis* $g(x) := f(x)$ *si* $x \neq 1$ *et* $g(x) = \lim_{x\to 1} f(x)$ *si* $x = 1$.

4) La fonction g est-elle continue en 1?

5) Calculer $g'(x)$ pour tout $x \in]\,0,\infty\,[$ tel que $x \neq 1$. En utilisant la définition de dérivée et la question 3), montrer que g est dérivable en 1 et calculer $g'(1)$.

6) Calculer $h'(x)$ pour tout $x \in]\,0,\infty\,[$ puis $\lim_{x\to 0} h(x)$ et $\lim_{x\to\infty} h(x)$. Enfin, dresser le tableau de variation de h puis déterminer le signe de h.

7) En utilisant les question 5) et 6), déterminer le signe de g'. Calculer $\lim_{x\to 0} g(x)$ et $\lim_{x\to\infty} g(x)$ et $\lim_{x\to 0} g'(x)$, puis dresser le tableau de variation de g.

Exercice 2.

1) Factoriser les trois fonctions polynômiales $a(x) := 4x^2 + 4x + 1$ puis $b(x) := 2x^2 + 5x + 2$ et enfin $c(x) := x^2 + 4x + 4$.

Soit la relation de $\mathbb{R}$ *vers* $\mathbb{R}$ *définie par:* $x\mathcal{R}y$ ssi $a(x)y^2 + 2b(x)y + c(x) = 0$.

2) Montrer que $\mathcal{R}$ n'est pas une application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ (on trouvera un point x qui n'a pas d'image, c'est à dire tel que l'ensemble $\{y\in\mathbb{R} : x\mathcal{R}y\}$ est vide).

3) Montrer que $\mathcal{R}$ est une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ (on montrera que tout point x a au plus une image, c'est à dire que l'ensemble $\{y\in\mathbb{R} : x\mathcal{R}y\}$ a au plus un élément), dont on déterminera le domaine de définition D.

4) Soit $(x, y) \in D \times \mathbb{R}$ tel que $x\mathcal{R}y$. Calculer y en fonction de x.

Exercice 3.

Montrer que $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{0} \frac{dx}{2+4x+4x^2} = \frac{\pi}{8}$.

FIN

Université du Sud Toulon-Var — *UFR Sciences et Techniques*
DEUG première année - M11 — *Session de Septembre 2004*

Exercice 1. *Pour tout nombre réel t, on note f_t la fonction de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *définie par :* $f_t(x) := \dfrac{x^3}{3} - t^2x + 1$.

1) Calculer la dérivée de f_t en un point $x \in \mathbb{R}$.

2) Calculer les solutions réelles de l'équation $f_t'(x) = 0$.

3) Montrer que si l'équation $f_t(x) = 0$ possède exactement deux solutions réelles distinctes alors l'une de ces solutions est racine simple du polynôme f_t et l'autre est racine double.

4) Montrer qu'il existe un unique nombre réel strictement positif t_0 pour lequel l'équation $f_{t_0}(x) = 0$ possède exactement deux solutions réelles distinctes. Calculer t_0.

5) En utilisant la formule de Taylor, montrer que $f_{t_0}(x) = \frac{1}{3}(x-t_0)^2(x+2t_0)$.

Dans les questions 6), 7) *et* 8) *on suppose que t est un nombre réel satisfaisant à :* $-t_0 < t < t_0$.

6) Montrer que l'équation $f_t(x) = 0$ possède une et une seule solution réelle.

7) On note $x(t)$ la solution réelle de l'équation $f_t(x) = 0$ et on admet que la fonction $t \longrightarrow x(t)$ de $(-t_0, t_0)$ dans $\mathbb{R}$ est deux fois dérivable dans $(-t_0, t_0)$.

a) Calculer $x(0)$.

b) Montrer que $x'(t)\big(x^2(t) - t^2\big) = 2tx(t)$ puis calculer $x'(0)$.

c) Calculer $x''(0)$ puis écrire le développement limité à l'ordre 2 au voisinnage de 0 de la fonction $t \longrightarrow x(t)$.

8) Soient u et v deux nombres réels satisfaisant $u < v$. On suppose que u et v sont les deux racines de l'équation $x^2 - 3x + t^6 = 0$.

a) Montrer que $u + v = 3$ et $uv = t^6$.

b) On pose $a := -u^{\frac{1}{3}}$ et $b := -v^{\frac{1}{3}}$. Montrer que $a + b$ est la solution réelle de l'équation $f_t(x) = 0$.

c) Calculer $a + b$.

Exercice 2. Déterminer l'ensemble des primitives de la fonction

$$f(x) := \frac{2x}{1 + x^4}.$$

Exercice 3. Calculer l'intégrale

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{(1 + x^2)x^2}.$$

Fin

Solution de l'exercice 1

1) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_t(x) = x^2 - t^2$.

2) Les solutions de l'équation $f_t'(x) = 0$ sont $x := t$ et $x := -t$.

3) L'équation $f_t(x) = 0$ possède trois solutions complexes au plus dont deux sont réelles. Elle possède donc une racine non réelle au plus. Or, si un nombre complexe z est solution de l'équation à coefficients réels $f_{\varepsilon_0}(x) = 0$ alors $\overline{z}$ l'est aussi, donc cette équation ne possède pas de solution non réelle. Par suite, cette équation possède une racine réelle simple et une racine réelle double.

4) Soit t un nombre réel strictement positif. D'après la question 3), pour que l'équation $f_t(x) = 0$ possède deux solutions réelles distinctes il faut et il suffit que le système de deux équations à une inconnue ;

$$(S) \qquad f_t(x) = 0 \quad \text{et} \quad f_t'(x) = 0$$

possède exactement une solution réelle. Comme ce système équivaut à

$$f_t(x) = 0 \quad \text{et} \quad \big(\ x = t \text{ ou } x = -t\ \big)$$

et que $f_t(-t) = \frac{2}{3}t^3 + 1 > 0$, on en déduit que l'équation $f_t(x) = 0$ possède deux solutions réelles distinctes si et seulement si $f_t(t) = 0$, c'est à dire si et seulement si $-\frac{2}{3}t^3 + 1 = 0$. Cette dernière équation possède une solution unique qui est

$$t_0 = \left(\tfrac{3}{2}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

5) Puisque $f_{t_0}(t_0) = 0$, $f_{t_0}'(t_0) = 0$, $f_{t_0}''(t_0) = 2t_0$ et $f_{t_0}'''(t_0) = 2$, il résulte de la formule de Taylor que

$$f_{t_0}(x) = 2t_0\frac{(x-t_0)^2}{2} + 2\frac{(x-t_0)^3}{6} = \frac{1}{3}(x-t_0)^2(x+2t_0).$$

6) $f_t(x)$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers $-\infty$, $f_t(-t) = \frac{2}{3}t^3 + 1 > 0$ et f_t est continue. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, la fonction f_t admet au moins un zero dans l'intervalle $(-\infty, -t)$. Comme f_t est strictement croissante dans cet intervalle, f_t admet un seul zero dans l'intervalle $(-\infty, -t)$. f_ε n'a pas d'autre zero car pour tout $x \in [-t, +\infty)$, on a $f_t(x) \geq f_t(t) = -\frac{2}{3}t^3 + 1 > -\frac{2}{3}t_0^3 + 1 = 0$ donc $f_t(x) > 0$.

7a) On a $\dfrac{x^3(0)}{3} + 1 = 0$ donc $x(0) = -3^{\frac{1}{3}}$.

7b) On a $\dfrac{x^3(t)}{3} - t^2x(t) + 1 = 0$ donc $x^2(t)x'(t) - 2tx(t) - t^2x'(t) = 0$ donc

$$x'(t)\big(x^2(t) - t^2\big) = 2tx(t).$$

Dans le cas particulier $t = 0$, on obtient $3^{\frac{2}{3}}x'(0) = 0$ donc $x'(0) = 0$.

7c) De l'équation obtenue en 7c), on déduit

$$x''(t)\big(x^2(t) - t^2\big) + x'(t)\big(2x'(t)x(t) - 2t\big) = 2x(t) + 2tx'(t).$$

Pour $t = 0$, on obtient $3^{\frac{2}{3}}x''(0) = -2.3^{\frac{1}{3}}$ donc $x''(0) = -2.3^{-\frac{1}{3}}$. Par Taylor,

$$x(t) = -3^{\frac{1}{3}} - 3^{-\frac{1}{3}}t^2 + t^2\varepsilon(t).$$

8a) On a $(x-u)(x-v)=x^2-3x+t^6$ donc $x^2-(u+v)x+uv=x^2-3x+t^6$ donc $u+v=3$ et $uv=t^6$.

8b) On a $f_t(a+b)=\frac{a^3+b^3}{3}+\big(ab-t^2\big)\big(a+b\big)+1$. Comme $ab=(uv)^{\frac{1}{3}}=t^2$ et $a^3+b^3=-(u+v)=-3$, on en déduit que $f_t(a+b)=0$.

8c) Par hypothèse $|t|<t_0=(\frac{3}{2})^{\frac{1}{3}}$ donc $9-4t^6>0$ donc les solutions de l'équation $x^2-3x+t^6=0$ sont

$$u=\frac{3-\sqrt{9-4t^6}}{2} \quad \text{et} \quad v=\frac{3+\sqrt{9-4t^6}}{2}.$$

Par suite,

$$a+b=-\left(\left(\tfrac{3-\sqrt{9-4t^6}}{2}\right)^{\frac{1}{3}}+\left(\tfrac{3+\sqrt{9-4t^6}}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\right)$$

Solution de l'exercice 2.

On pose $t=x^2$, donc $dt=2xdx$. Par suite,

$$f(x)dx=\frac{2xdx}{1+x^4}=\frac{dt}{1+t^2}=d\big(\arctan \mathrm{t}\big).$$

Toute primitive F de f est de la forme

$$F(x)=c+\arctan x^2$$

où c est une constante réelle.

Solution de l'exercice 3.

$$\frac{1}{(1+x^2)x^2}=\frac{(1+x^2)-x^2}{(1+x^2)x^2}=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{1+x^2}$$

donc une primive de la fonction $\frac{1}{(1+x^2)x^2}$ dans l'intervall $(0,+\infty)$ est

$$F(x)=-\frac{1}{x}-\arctan x.$$

Par suite,

$$\int_1^{\sqrt{3}}\frac{dx}{(1+x^2)x^2}=F(\sqrt{3})-F(1)$$

Or $\arctan 1=\frac{\pi}{4}$ et $\arctan\sqrt{3}=\frac{\pi}{4}$ donc

$$\int_1^{\sqrt{3}}\frac{dx}{(1+x^2)x^2}=1-\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{\pi}{12}.$$

Fin

Université du Sud Toulon-Var *UFR Sciences et Techniques*
première année - M11 *Session de Septembre 2005*

Exercice 1. *On note f l'application de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ définie par :*

$$f(0) = 0, \quad f(1) = 1, \quad f(x) := \frac{x \ln x}{x - 1},$$

si $x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0, 1\}$.

1) La fonction f est-elle continue en 0?

2) Montrer que f est continue en 1.

3) Montrer que f est dérivable en 1 et que $f'(1) = \frac{1}{2}$.

4) Calculer $f'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0, 1\}$.

5) En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que $f'(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0, 1\}$.

6) Calculer le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 1 de f.

Exercice 2. On rappelle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que la somme des n premiers entiers impairs est un carré parfait.

2) Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left(\sum_{k=1}^{n} k \right)^2 = \sum_{k=1}^{n} k^3.$$

Exercice 3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer l'ensemble des primitives de la fonction f_n définie dans $]\,0, \infty\,[$ par

$$f_n(x) := x^n \ln x.$$

Exercice 4. Soit le polynôme $P(x) = (1 + x)^4 + 2x^2(1 + x)^2 + x^4$.

1) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$P(x) \geq \frac{1}{4}.$$

2) Factoriser le polynôme dans le corps des nombres complexes.

Fin

Solution de l'exercice 1.

1) La fonction f est continue en 0 car $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.

2) Pour tout $x > 0$, on a : $\ln x = \ln(1 + (x-1)) = (x-1) + (x-1)\varepsilon(x-1)$. Par suite, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, on a :

$$f(x) - f(1) = (x-1) + x\varepsilon(x-1),$$

donc f est continue en 1.

3) Pour tout $x > 0$, on a : $\ln x = \ln(1 + (x-1)) = (x-1) - \dfrac{(x-1)^2}{2} + (x-1)^2\varepsilon(x-1)$. Par suite, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, on a :

$$\frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \frac{x \ln x - (x-1)}{(x-1)^2} = \frac{1}{2} + \varepsilon(x-1),$$

donc f est dérivable en 1 et $f'(1) = \frac{1}{2}$.

4) Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, on a :

$$f'(x) = \frac{x - 1 - \ln x}{(x-1)^2}.$$

5) Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. Si $x < 1$ alors d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]x, 1[$ tel que

$$\frac{\ln x - \ln 1}{x - 1} = \frac{1}{c} > 1 \quad \text{donc} \quad \ln x < x - 1 \quad \text{donc} \quad f'(x) > 0.$$

Si $x > 1$ alors d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]1, x[$ tel que

$$\frac{\ln x - \ln 1}{x - 1} = \frac{1}{c} < 1 \quad \text{donc} \quad \ln x < x - 1 \quad \text{donc} \quad f'(x) > 0.$$

6) Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, on a :

$$\ln x = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + (x-1)^4\varepsilon(x-1).$$

Il en résulte que

$$f(x) = 1 + \frac{(x-1)}{2} - \frac{(x-1)^2}{6} + \frac{(x-1)^3}{12} + (x-1)^3\varepsilon(x-1).$$

Solution de l'exercice 2.

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Notons S_n la somme des n premiers entiers impairs. On a

$$S_n := \sum_{k=1}^{n}(2k-1) = 2\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} 1 = n(n+1) - n = n^2.$$

2) Notons $A_n := \left(\sum_{k=1}^n k\right)^2$ et $B_n := \sum_{k=1}^n k^3$. On a $A_1 = B_1$ et si $A_n = B_n$ alors

$$A_{n+1} = \left((n+1) + \textstyle\sum_{k=1}^n k\right)^2 = (n+1)^2 + 2(n+1)\sum_{k=1}^n k + A_n = (n+1)^3 + B_n = B_{n+1}.$$

On en déduit que $A_n = B_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Solution de l'exercice 3.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\begin{aligned}
x^n \ln x dx &= \ln x d\Big(\frac{x^{n+1}}{n+1}\Big)\\
&= -\frac{x^{n+1}}{n+1} d(\ln x) + d\Big(\frac{x^{n+1}\ln x}{n+1}\Big)\\
&= -\frac{x^n}{n+1} dx + d\Big(\frac{x^{n+1}\ln x}{n+1}\Big)\\
&= d\Big(-\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + \frac{x^{n+1}\ln x}{n+1}\Big)
\end{aligned}$$

En conclusion F_n est une primitive de f_n dans $]0, \infty[$ si et seulement si il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x > 0$

$$F_n(x) = -\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + \frac{x^{n+1}\ln x}{n+1} + C$$

Solution de l'exercice 4.
1) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}
P(x) &= (1+x)^4 + 2x^2(1+x)^2 + x^4\\
&= \big((1+x)^2 + x^2\big)^2\\
&= \big(2x^2 + 2x + 1\big)^2\\
&= \big((x\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}})^2 + \frac{1}{2}\big)^2 \geq \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

2) Pour tout nombre complexe x, on a

$$\begin{aligned}
P(x) =& \Big((x\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}})^2 + \frac{1}{2}\Big)^2\\
=& \Big((x\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}})^2 - (\frac{i}{\sqrt{2}})^2\Big)^2\\
=& \Big(x\sqrt{2} + \frac{1-i}{\sqrt{2}}\Big)^2 \Big(x\sqrt{2} + \frac{1+i}{\sqrt{2}}\Big)^2.
\end{aligned}$$

fin

Université du Sud Toulon-Var | *UFR Sciences et Techniques*
première année - M11 | *Session de Septembre 2007*

Exercice 1. *On rappelle que* $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$.

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que la somme des n premiers entiers impairs est un carré parfait.

2) Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} k^3.$$

Exercice 2. *Soient a et b deux paramètres réels. On considère l'équations (E) du troisième degré :* $z^3 + az + b = 0$.

1) Montrer que l'équation (E) possède au moins une racine réelle.

Dans toute la suite de l'exercice, on suppose de plus que $a > 0$.

2) Montrer que l'équations (E) possède une et une seule racine réelle.

3) Montrer que la racine réelle de (E) est une racine simple.

4) Soient x et y deux nombres réels. Montrer que si $y \neq 0$ et $x + iy$ est une racine de (E) alors x est le seul nombre réel qui vérifie $8x^3 + 2ax - b = 0$ et

$$y = \sqrt{a + 3x^2} \quad \text{ou} \quad y = -\sqrt{a + 3x^2}.$$

Exercice 3. *On note f l'application de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ définie par :*

$$f(0) = 0, \quad f(1) = 1, \quad f(x) := \frac{x \ln x}{x - 1},$$

si $x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0, 1\}$.

1) La fonction f est-elle continue en 0?

2) Montrer que f est continue en 1.

3) Montrer que f est dérivable en 1 et que $f'(1) = \frac{1}{2}$.

4) Calculer $f'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0, 1\}$.

5) En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que $f'(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0, 1\}$.

6) Calculer le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 1 de f.

Fin

Université du Sud Toulon-Var — *UFR Sciences et Techniques*
première année - M11 — *Session de Septembre 2008*

Exercice 1. *On rappelle que* $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$.

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que

$$\sum_{k=1}^{k=n} \big(k+1\big)^3 = n + 3\sum_{k=1}^{k=n} k + 3\sum_{k=1}^{k=n} k^2 + \sum_{k=1}^{k=n} k^3.$$

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer

$$\sum_{k=1}^{k=n} k^2.$$

Exercice 2. *On note* f *et* g *les applications de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *définies par :*

$$f(x) := \frac{1}{1+x^2} \quad \textit{et} \quad g(x) := \frac{1}{\big(1+x^2\big)^2}.$$

1) Donner une primitive de f.
2) Calculer $f'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.
3) Montrer que $xf'(x) + 2f(x) = 2g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
4) Déterminer une primitive de g.

Exercice 3. *On note* f *l'application de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *définie par :*

$$f(x) := \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}.$$

1) Démontrer que f est injective.
2) Enoncer de façon précise le théorème des valeurs intermédiaires.
3) Calculer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
4) En utilisant les deux questions précédentes, démontrer que f est surjective.
5) On note f^{-1} l'application réciproque de f. Expliciter $f^{-1}(y)$ pour $y \in \mathbb{R}$.
6) Calculer le développement limité à l'ordre 4 au voisinage de 0 de f^{-1}.

Fin

Solution de l'exercice 1.

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\left(k+1\right)^3 = 1 + 3k + 3k^2 + k^3,$$

donc par sommation de $k = 1$ à $k = n$

$$\sum_{k=1}^{k=n} \left(k+1\right)^3 = n + 3\sum_{k=1}^{k=n} k + 3\sum_{k=1}^{k=n} k^2 + \sum_{k=1}^{k=n} k^3.$$

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\sum_{k=1}^{k=n} \left(k+1\right)^3 - \sum_{k=1}^{k=n} k^3 = \left(n+1\right)^3 - 1^3 = n^3 + 3n^2 + 3n.$$

Il résulte de la question 1) que

$$3\sum_{k=1}^{k=n} k^2 = n^3 + 3n^2 + 3n - n - 3\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)$$

donc (en prenant soin de mettre $n(n+1)$ en facteur)

$$\sum_{k=1}^{k=n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Solution de l'exercice 2.

1) Une primitive de f est $F(x) := \arctan(x)$.

2) Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = -\frac{2x}{\left(1+x^2\right)^2}.$$

3) Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$xf'(x) + 2f(x) = -\frac{2x^2}{\left(1+x^2\right)^2} + \frac{2}{1+x^2} = \frac{2}{\left(1+x^2\right)^2} = 2g(x).$$

4) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ le réel $xf'(x) + f(x)$ est la dérivée en x de la fonction $x \longrightarrow xf(x)$ et le réel $f(x)$ est la dérivée en x de la fonction $x \longrightarrow \arctan(x)$, donc une primitive de $2g$ est la fonction $x \longrightarrow xf(x) + \arctan(x)$, donc une primitive de g est la fonction G définie par

$$G(x) := \frac{xf(x) + \arctan(x)}{2} = \frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{\arctan(x)}{2}.$$

Solution de l'exercice 3.

1) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$ donc $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante donc f est injective.

2) Soit a et b deux réels tel que $a < b$. Soit h une application de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. Si h est continue dans $[a,b]$ et y est un réel strictement compris entre $h(a)$ et $h(b)$ alors il existe $c \in]a,b[$ satisfaisant à $h(c) = y$.

3) $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

4) Soit $y \in \mathbb{R}$. D'après la question 3) il existe deux réels a et b satisfaisant à $a < b$ et $f(a) < y < f(b)$. Comme f est continue dans $[a,b]$, il résulte du théorème des valeurs

$$\begin{aligned}
&\iff (\mathrm{e}^x)^2 - 2y\mathrm{e}^x - 1 = 0\\
&\iff (\mathrm{e}^x - y)^2 = 1 + y^2\\
&\iff \mathrm{e}^x = y + \sqrt{1+y^2} \quad \text{ou} \quad \mathrm{e}^x = y - \sqrt{1+y^2}\\
&\iff \mathrm{e}^x = y + \sqrt{1+y^2},
\end{aligned}$$

la dernière équivalence provenant du fait que $\mathrm{e}^x > 0$ et $y - \sqrt{1+y^2} < 0$. On en déduit que

$$\forall y \in \mathbb{R} \qquad f^{-1}(y) = \ln\big(y + \sqrt{1+y^2}\big).$$

6) On cherche cinq réels a, b, c, d, e satisfaisant à

$$f^{-1}(y) = a + by + cy^2 + dy^3 + ey^4 + y^4\varepsilon(y).$$

En utilisant le développement limité à l'ordre 4 au voisinnage de 0 de la fonction exponentielle, on obtient celui de f, à savoir :

$$f(x) = x + \frac{x^3}{6} + x^4\varepsilon(x).$$

Par suite,

$$\begin{aligned}
\big(f(x)\big)^2 &= x^2 + \frac{x^4}{3} + x^4\varepsilon(x),\\
\big(f(x)\big)^3 &= x^3 + x^4\varepsilon(x),\\
\big(f(x)\big)^4 &= x^4 + x^4\varepsilon(x).
\end{aligned}$$

Il en résulte que

$$\begin{aligned}
x &= f^{-1}\big(f(x)\big)\\
&= a + b\big(f(x)\big) + c\big(f(x)\big)^2 + d\big(f(x)\big)^3 + e\big(f(x)\big)^4 + \big(f(x)\big)^4\varepsilon\big(f(x)\big)\\
&= a + bx + cx^2 + \big(\frac{b}{6} + d\big)x^3 + \big(\frac{c}{3} + e\big)x^4 + x^4\varepsilon(x)
\end{aligned}$$

donc (par unicité du développement limité), $a = 0$, $b = 1$, $c = 0$, $d = -\frac{1}{6}$ et $e = 0$, donc

$$f^{-1}(y) = y - \frac{y^3}{6} + y^4\varepsilon(y).$$

Fin