Autour des longueurs, surfaces et volumes

Atelier n° 3

Jean-Jacques Alibert Gloria Faccanoni

UFR Sciences et Techniques de l'Université de Toulon

12-14 juin 2018

1 Identités remarquables

Exercice 1.1 $(a+b)^2$

Illustrez l'identité $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ en découpant un carré.

Exercice 1.2 Identité de Pythagore

Illustrez l'identité de Pythagore $a^2+b^2 = c^2$ où a, b et c sont les longueurs des côtés d'un triangle rectangle.

Exercice 1.3 $(a+b)^3$

Illustrez l'identité $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ en découpant un cube.

Exercice 1.4 $a^2 - b^2$

Illustrez l'identité $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ en découpant un carré.

Exercice 1.5 $a^3 - b^3$

Illustrez l'identité $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$ en découpant un cube.

2 Identités numériques et découpage de rectangle

Exercice 2.1 Somme des n premiers entiers impairs

Vérifiez les identités

$$\begin{aligned} 1 &= 1^2, \\ 1+3 &= 2^2, \\ 1+3+5 &= 3^2, \\ 1+3+5+7 &= 4^2. \end{aligned}$$

Cette construction se généralise de la façon suivante : pour tout nombre entier strictement positif n,

$$1+3+\cdots+(2n-1) = n^2.$$

Cette formule exprime le fait que la somme des n premiers entiers impairs est égale au carré de n.
Illustrez cette formule en découpant un rectangle.

Exercice 2.2 Somme des n premiers entiers pairs

Vérifiez les identités

$$\begin{aligned} 2 &= 1\times 2, & 2 &= 2^2-2, \\ 2+4 &= 2\times 3, & 2+4 &= 3^2-3, \\ 2+4+6 &= 3\times 4, & 2+4+6 &= 4^2-4, \\ 2+4+6+8 &= 4\times 5, & 2+4+6+8 &= 5^2-5. \end{aligned}$$

Ces constructions se généralisent respectivement en : pour tout nombre entier strictement positif n,

$$2+4+\cdots+(2n) = n\times(n+1), \qquad 2+4+\cdots+(2n) = (n+1)^2-(n+1).$$

Illustrez ces formules en découpant un rectangle.

Exercice 2.3 Somme des n premiers entiers

Vérifiez les identités

$$\begin{aligned} 2\times 1 &= 2, \\ 2\times(1+2) &= 2\times 3, \\ 2\times(1+2+3) &= 3\times 4, \\ 2\times(1+2+3+4) &= 4\times 5. \end{aligned}$$

Cette construction se généralise de la façon suivante : pour tout nombre entier strictement positif n,

$$2\times(1+2+\cdots+n) = n(n+1).$$

Illustrez cette formule en découpant un rectangle.

Exercice 2.4

Vérifiez les identités

$$\begin{aligned} 1^2 &= 1, \\ -2^2 + 1^2 &= -(1+2), \\ 3^2 - 2^2 + 1^2 &= (1+2+3), \\ -4^2 + 3^2 - 2^2 + 1^2 &= -(1+2+3+4), \\ 5^2 - 4^2 + 3^2 - 2^2 + 1^2 &= (1+2+3+4+5). \end{aligned}$$

Cette construction se généralise de la façon suivante : pour tout nombre entier strictement positif n,

$$(-1)^{n+1}n^2 + \cdots + 3^2 - 2^2 + 1^2 = (-1)^{n+1}(1 + 2 + \cdots + n).$$

Illustrez cette formule en découpant un rectangle.

3 Quelques résultats qui pourraient vous surprendre

Exercice 3.1 Le tour du monde

Le rayon de la Terre est de 6400 km environ. On ceinture la planète avec une corde au niveau de l'équateur. Quelle longueur de corde faudrait-il ajouter à cette ceinture si on l'écartait d'un mètre de la surface de la Terre sur toute la circonférence ?
Même question pour une balle de tennis.

Exercice 3.2 Le rail

Un rail de chemin de fer d'un kilomètre de long est posé au mois de décembre. En été la température s'élève et le rail se dilate d'un mètre mais comme il est solidement arrimé à chacune de ses extrémités, il se soulève en son centre. Quelle hauteur va atteindre le point central (est-ce de l'ordre du centimètre, de la dizaine de centimètres, du mètre, de la dizaine de mètres) ?

Exercice 3.3 Aquarium

Un grand aquarium contient 200 poissons. De ceux-ci, 99% sont des poissons rouges. On voudrait que ce pourcentage baisse à 98%. On décide donc de retirer des poissons rouges. Combien de poissons rouges doit-on enlever de l'aquarium ?

Exercice 3.4 Les pizzas

Donatello prépare 500 g de pâte à pain pour cuisiner deux pizzas. Il dispose pour les cuire de deux plaques circulaires, l'une de 15 cm de diamètre, l'autre de 30 cm. Comment doit-il répartir les 500 g de pâte ?

Exercice 3.5 Le punch au citron

Dans la liste des ingrédients d'une recette de punch, il faut 5 citrons jaunes, mais le barman ne dispose que de citrons verts dont le diamètre est deux fois plus petit. Combien de citrons verts faut-il ?

Exercice 3.6 La tuile

Dans le midi de la France les toitures doivent respecter une pente de 30%. Sur le plan d'une maison avec un toit à deux pans, la toiture occupe au sol un rectangle de 6×8 m^2. Quelle surface de tuiles faut-il acheter ? Même question en montagne où la pente doit atteindre 60%.
On souhaite à présent couvrir un toit d'église en forme de cône avec de petites pièces en ardoise. Que se passerait-il si la pente devenait de plus en plus importante ?

Exercice 3.7 Le tir à l'arc

Un tireur est positionné à 100 m d'une cible. Il décoche sa flèche vers la cible. La flèche se déplace à la vitesse de $100\,\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$. La flèche va d'abord parcourir la moitié du trajet, puis la moitié du trajet restant et ainsi de suite. Quelle identité de longueur cette constatation nous conduit-elle à formuler ?

Exercice 3.8 Combien de fois peut-on plier une feuille ?

Une feuille de papier d'une épaisseur d'un dixième de millimètre est pliée 15 fois en deux : quelle est l'épaisseur du résultat après pliage ? Après combien de pliages l'épaisseur dépasse-t-elle la distance Terre-Lune (la distance Terre-Lune vaut approximativement 300 000 km) ?

Exercice 3.9 Balade à New-York : recherche d'un plus court chemin

La ville de New-York est quadrillée par des routes horizontales et verticales délimitant des blocs rectangulaires de $100\,\mathrm{m} \times 80\,\mathrm{m}$. On veut se déplacer d'un carrefour A à un carrefour B. Il y a évidemment plusieurs chemins pour faire ce trajet. Est-il efficace de rapprocher son trajet de la ligne droite entre A et B ? Peut-on adopter une autre stratégie ?