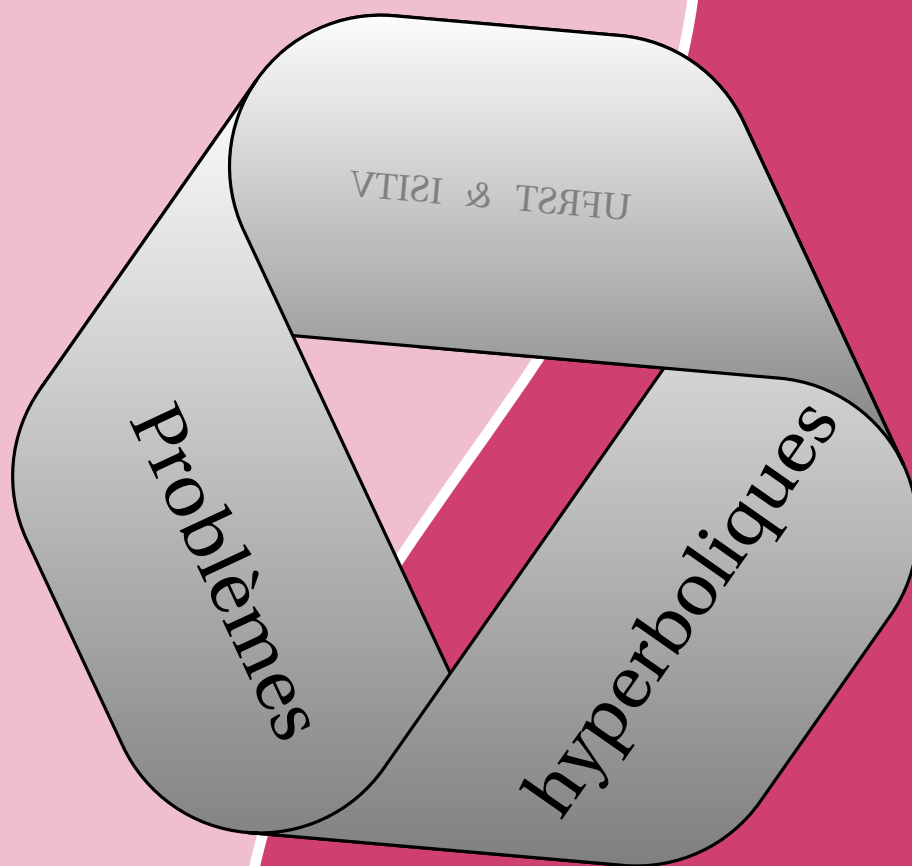


3^{ème} MARINE

M2 MATH

2012/2013



Gloria FACCANONI

IMATH Bâtiment U-318
Université du Sud Toulon-Var
Avenue de l'université
83957 LA GARDE - FRANCE

☎ 0033 (0)4 94 14 23 81

✉ gloria.faccanoni@univ-tln.fr

🌐 <http://faccanoni.univ-tln.fr>

Table des matières

I. Devoir maison	5
1. Étude d'équations hyperboliques	6
2. Étude d'un système hyperbolique	12
II. Rappels Théoriques	16
3. Équations linéaires	17
4. Équations non-linéaires	18
4.1. Exemple : équation de BURGERS	19
4.2. Exercice : trafic dans un tunnel	26
5. Systèmes hyperboliques	30
5.1. Exemple : le système de SAINT-VENANT	30
5.2. Exemple : Euler isotherme en coordonnées Lagrangiennes	39
5.3. Exemple : le système de la dynamique des gaz isentropique par relaxation	41
5.4. Exemple : mélange isotherme	48
III. Rappels Numériques	53
6. Résolution numérique de l'équation de transport	59
6.1. Exemples d'études de stabilité et de consistance	60
7. Résolution numérique d'une équation non-linéaire	65
8. Systèmes hyperboliques	67

Première partie .

Devoir maison

*Le DM sera évalué. Vous avez jusqu'au 1 mars 2013 pour rendre un rapport.
Vous pouvez écrire le rapport seul ou en binôme avec un autre membre de votre
groupe.*

1. Étude d'équations hyperboliques

Cas linéaire On considère des équations linéaires qui s'écrivent sous la forme

$$\begin{cases} \partial_t(u(t, x)) + a(t, x)\partial_x(u(t, x)) + b(t, x)u(t, x) = f(t, x), & t > 0, x \in \mathbb{R}, \\ u(x, 0) = g(x) & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Calculer la solution faible $u(t, x)$ pour $t \geq 0$ et $x \in \mathbb{R}$ des problèmes suivants en utilisant la méthode des caractéristiques :

Dans la correction on utilise les notations du chapitre 3.

1.
$$\begin{cases} \partial_t u + x\partial_x u = 0 & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(0, x) = x^4 & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

$a(t, x) = x, b(t, x) = f(t, x) = 0, g(x) = x^4$ donc pour (\hat{t}, \hat{x}) donné on a $x(t) = \hat{x}e^{t-\hat{t}}$ et donc

$$u(\hat{t}, \hat{x}) = g(x(0)) = g(\hat{x}e^{-\hat{t}}) = (\hat{x}e^{-\hat{t}})^4$$

2.
$$\begin{cases} (t+1)\partial_t u + \partial_x u = 0 & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(0, x) = x & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

$a(t, x) = \frac{1}{t+1}, b(t, x) = f(t, x) = 0, g(x) = x$ donc pour (\hat{t}, \hat{x}) donné on a $x(t) = \hat{x} + \ln\left(\frac{t+1}{\hat{t}+1}\right)$ et donc

$$u(\hat{t}, \hat{x}) = g(x(0)) = g(\hat{x} - \ln(\hat{t} + 1)) = \hat{x} - \ln(\hat{t} + 1)$$

3.
$$\begin{cases} \partial_t u + xt\partial_x u = t & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(0, x) = x^2 & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

$a(t, x) = xt, b(t, x) = 0, f(t, x) = t, g(x) = x^2$ donc pour (\hat{t}, \hat{x}) donné on a $x(t) = \hat{x}e^{(t^2-\hat{t}^2)/2}$ et donc

$$u(\hat{t}, \hat{x}) = g(x(0)) + \int_0^{\hat{t}} f(s, x(s)) ds = g(\hat{x}e^{-\hat{t}^2/2}) + \int_0^{\hat{t}} s ds = \hat{x}^2 e^{-\hat{t}^2} + \frac{\hat{t}^2}{2}.$$

4.
$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x u + u = e^{-t+2x} & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(0, x) = 0 & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

$a(t, x) = 1, b(t, x) = 1, f(t, x) = e^{-t+2x}, g(x) = 0$ donc pour (\hat{t}, \hat{x}) donné on a $x(t) = \hat{x} + t - \hat{t}$ et donc

$$u(\hat{t}, \hat{x}) = g(x(0))e^{-\hat{t}} + \int_0^{\hat{t}} e^{-s+2x(s)} e^{-(\hat{t}-s)} ds = g(\hat{x} - \hat{t})e^{-\hat{t}} + \frac{1}{2}e^{2\hat{x}-\hat{t}} = \frac{1}{2}e^{2\hat{x}-\hat{t}}.$$

Cas non-linéaire On considère l'équation non-linéaire

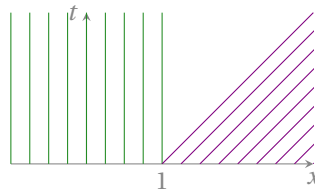
$$\begin{cases} \partial_t(u) + \partial_x(q(u)) = 0, & \text{avec } q(u) = \frac{u(2-u)}{2}, \\ u(x, 0) = g(x). \end{cases}$$

Donner l'unique solution faible entropique $u(t, x)$ pour $t \geq 0$ et $x \in \mathbb{R}$ des problèmes suivants en utilisant la méthode des caractéristiques. Justifier clairement la réponse avec tous les dessins nécessaires.

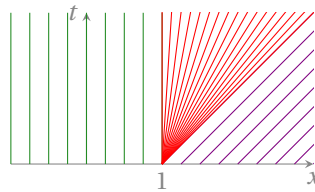
Dans la correction on utilise les notations du chapitre 4. On a $q(u) = u - \frac{u^2}{2}, q'(u) = 1 - u, (q')^{-1}\left(\frac{x-x_0}{t-t_0}\right) = 1 - \frac{x-x_0}{t-t_0}$ et $q''(u) = -1$ (le flux est concave). L'équation de la caractéristique de pied $(\xi, 0)$ est donc $x(t) = \xi + q'(g(\xi))t = \xi + (1 - g(\xi))t$.

$$1. g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 1, \\ 0 & \text{si } x > 1, \end{cases}$$

L'équation de la caractéristique de pied $(\xi, 0)$ est $x(t) = \begin{cases} \xi, & \xi < 1, \\ \xi + t, & \xi > 1. \end{cases}$

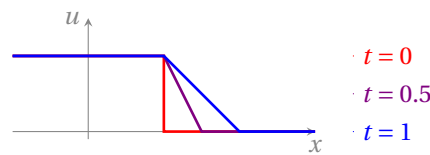


La donnée initiale du problème de Riemann a un saut décroissant et le flux est concave donc l'unique solution entropique présente une onde de raréfaction centrée en $(1, 0)$.



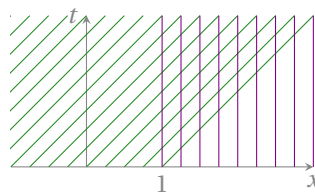
La solution est donc

$$u(x, t) = \begin{cases} 1, & x \leq 1, \\ 1 - \frac{x-1}{t}, & 1 < x \leq 1+t, \\ 0, & x > 1+t. \end{cases}$$



$$2. g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1, \\ 1 & \text{si } x > 1, \end{cases}$$

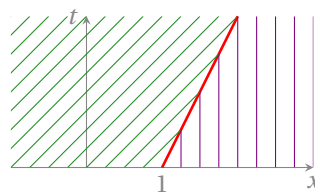
L'équation de la caractéristique de pied $(\xi, 0)$ est $x(t) = \begin{cases} \xi + t, & \xi < 1, \\ \xi, & \xi > 1. \end{cases}$



La donnée initiale du problème de Riemann a un saut croissant et le flux est concave donc l'unique solution entropique présente une onde de choc qui part en $(1, 0)$. Pour calculer l'équation $x = s(t)$ de l'onde de choc on utilise les relations de RANKINE-HUGONIOT :

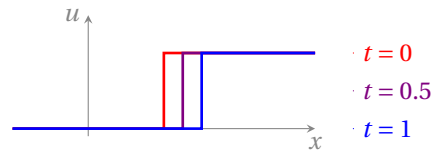
$$s'(t) = \frac{q(u_R) - q(u_L)}{u_R - u_L} = 1 - \frac{u_R + u_L}{2} = \frac{1}{2}$$

avec la donnée initiale $s(0) = 1$. On trouve donc $x = s(t) = 1 + \frac{1}{2}t$.



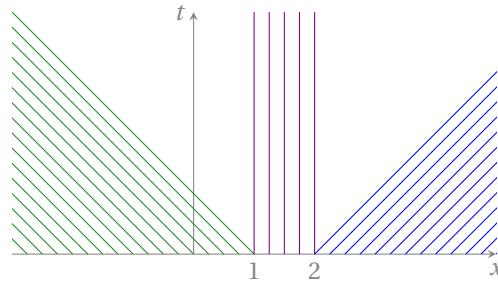
La solution est donc

$$u(x, t) = \begin{cases} 0, & x < 1 + \frac{1}{2}t, \\ 1, & x > 1 + \frac{1}{2}t. \end{cases}$$

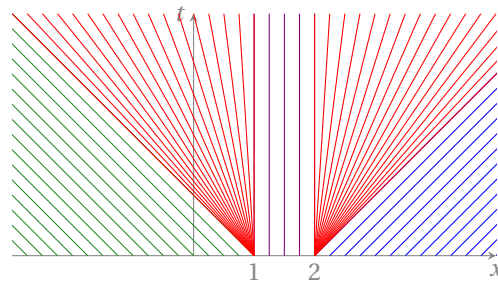


$$3. g(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < 1, \\ 1 & \text{si } x \in]1;2[, \\ 0 & \text{si } x > 2, \end{cases}$$

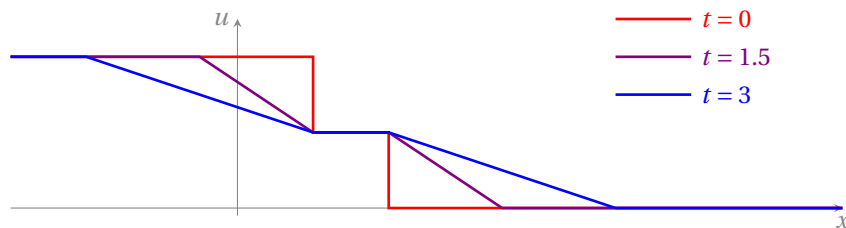
L'équation de la caractéristique de pied $(\xi, 0)$ est $x(t) = \begin{cases} \xi - t, & \xi < 1, \\ \xi, & 1 < \xi < 2, \\ \xi + t, & \xi > 2. \end{cases}$



La donnée initiale a deux sauts décroissants, un en $x = 1$ et l'autre en $x = 2$. Puisque q est concave, on s'attend à ce que la solution faible entropique présente deux ondes de raréfaction centrées l'une en $(1, 0)$ et l'autre en $(2, 0)$.



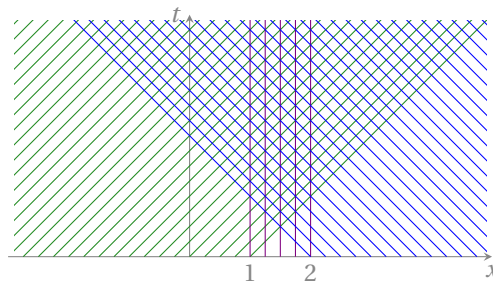
$$u(x, t) = \begin{cases} 2, & \text{si } x \leq 1 - t, \\ 1 - \frac{x-1}{t}, & \text{si } 1 - t < x \leq 1, \\ 1, & \text{si } 1 < x \leq 2, \\ 1 - \frac{x-2}{t}, & \text{si } 2 < x \leq 2 + t, \\ 0, & \text{si } x > 2 + t. \end{cases}$$



$$4. g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1, \\ 1 & \text{si } x \in]1;2[, \\ 2 & \text{si } x > 2, \end{cases}$$

Elle a deux sauts croissants, un en $x = 1$ et un en $x = 2$. Puisque q est concave, on s'attend à ce que la solution faible entropique présente deux ondes de choc qui partent de $(1, 0)$ et de $(2, 0)$.

▷ En effet, l'équation de la caractéristique de pied $(\xi, 0)$ est $x(t) = \begin{cases} \xi + t, & \xi < 1, \\ \xi, & 1 < \xi < 2, \\ \xi - t, & \xi > 2. \end{cases}$



▷ Pour calculer les équations des deux ondes de choc on utilise les relations de RANKINE-HUGONIOT :

▷ choc de pied (1, 0)

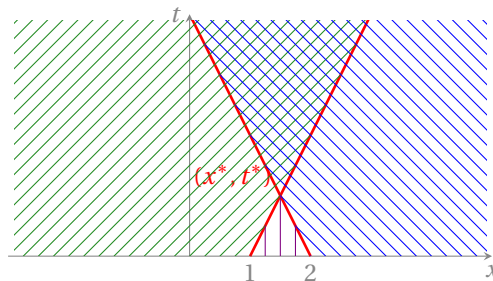
$$\begin{cases} s'(t) = \frac{q(u_R) - q(u_L)}{u_R - u_L} = 1 - \frac{u_R + u_L}{2} = \frac{1}{2} \\ s(0) = 1 \end{cases}$$

d'où $x = s(t) = \frac{1}{2}t + 1$;

▷ choc de pied (2, 0)

$$\begin{cases} s'(t) = \frac{q(u_R) - q(u_L)}{u_R - u_L} = 1 - \frac{u_R + u_L}{2} = -\frac{1}{2} \\ s(0) = 2 \end{cases}$$

d'où $x = s(t) = -\frac{1}{2}t + 2$.



Ces deux chocs vont ensuite interagir à partir d'un (x^*, t^*) qu'on détermine en résolvant le système linéaire

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}t + 1, \\ x = -\frac{1}{2}t + 2. \end{cases}$$

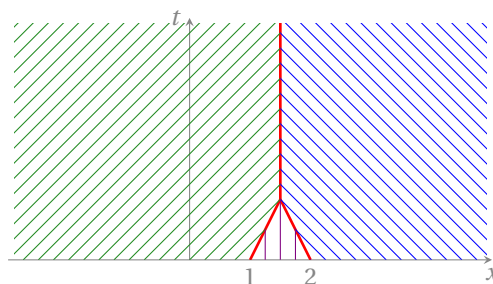
On obtient ainsi le pied de la nouvelle onde de choc qui est $(x^*, t^*) = (\frac{3}{2}, 1)$. Donc la solution pour $0 < t < 1$ est

$$u(x, t) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < \frac{1}{2}t + 1, \\ 1, & \text{si } \frac{1}{2}t + 1 < x < -\frac{1}{2}t + 2, \\ 2, & \text{si } x > -\frac{1}{2}t + 2, \end{cases}$$

▷ Pour $t \geq 1$ seul les données initiales pour $x < 1$ et $x > 2$ sont transportées et ce nouveau choc, qui part de $(\frac{3}{2}, 1)$, vérifie encore la relation de RANKINE-HUGONIOT :

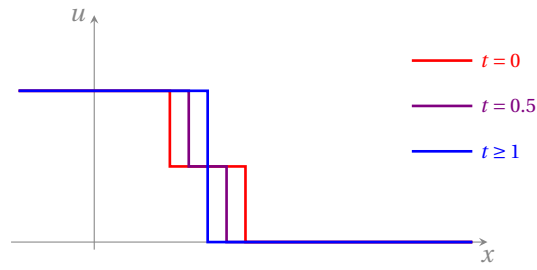
$$\begin{cases} s'(t) = \frac{q(u_R) - q(u_L)}{u_R - u_L} = 1 - \frac{u_R + u_L}{2} = 0 \\ s(1) = \frac{3}{2} \end{cases}$$

d'où $x = s(t) = \frac{3}{2}$.



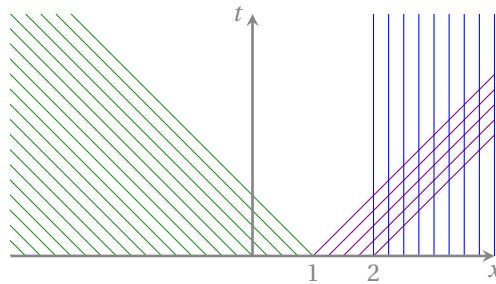
L'unique solution faible entropique pour tout $t > 0$ est donc

$$u(x, t) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < \min\{\frac{1}{2}t + 1, \frac{3}{2}\}, \\ 1, & \text{si } \frac{1}{2}t + 1 < x < -\frac{1}{2}t + 2, \\ 2, & \text{si } x > \max\{-\frac{1}{2}t + 2, \frac{3}{2}\}, \end{cases}$$



$$5. g(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < 1, \\ 0 & \text{si } x \in]1;2[, \\ 1 & \text{si } x > 2. \end{cases}$$

L'équation de la caractéristique de pied $(\xi, 0)$ est $x(t) = \begin{cases} \xi - t, & \xi < 1, \\ \xi + t, & 1 < \xi < 2, \\ \xi, & \xi > 2. \end{cases}$



On s'attend donc à ce que la solution faible entropique présente une onde de raréfaction centrée en $(1, 0)$ et une onde de choc qui part de $(2, 0)$ et que, après un certain temps, les deux ondes interagissent.

▷ La raréfaction est comprise entre la droite d'équation $x(t) = 1 - t$ et la droite d'équation $x(t) = 1 + t$ et a équation

$$u(x, t) = (q')^{-1} \left(\frac{x-1}{t-0} \right) = 1 - \frac{x-1}{t}.$$

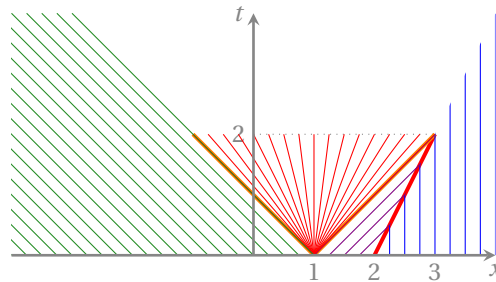
▷ Pour déterminer l'équation de l'onde de choc qui a pied en $(2, 0)$ on utilise les relations de RANKINE-HUGONIOT :

$$\begin{cases} s'(t) = \frac{q(u_R) - q(u_L)}{u_R - u_L} = 1 - \frac{u_R + u_L}{2} = \frac{1}{2} \\ s(0) = 2 \end{cases}$$

d'où $x = s(t) = \frac{1}{2}t + 2$.

Ces considérations sont valables jusqu'à ce que l'onde de choc et l'onde de raréfaction se touchent, c'est-à-dire jusqu'à $t = 2$. Donc la solution pour $0 < t < 2$ est

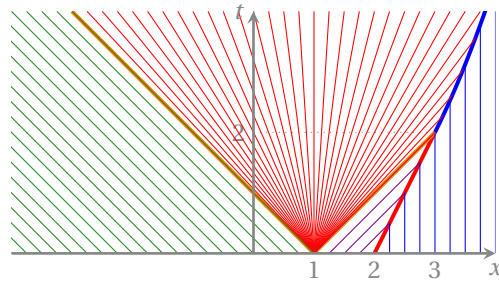
$$u(x, t) = \begin{cases} 2, & \text{si } x \leq 1 - t, \\ 1 - \frac{x-1}{t}, & \text{si } 1 - t < x \leq t + 1, \\ 0, & \text{si } t + 1 < x < \frac{1}{2}t + 2, \\ 1, & \text{si } x > \frac{1}{2}t + 2. \end{cases}$$



▷ Pour $t > 2$ on continue à avoir une onde de choc mais l'état gauche n'est plus constant car il est donné par la raréfaction *i.e.* $u_L = 1 - \frac{s(t)-1}{t}$ donc le nouveau choc a pied en $(3, 2)$ et vérifie

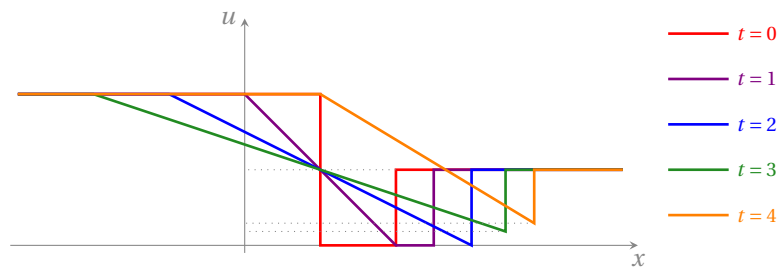
$$\begin{cases} s'(t) = \frac{q(u_R) - q(u_L)}{u_R - u_L} = 1 - \frac{u_R + u_L}{2} = \frac{0 - \left(\frac{s(t)-1}{t}\right)^2}{2\left(0 - \frac{s(t)-1}{t}\right)} = \frac{s(t)-1}{2t} \\ s(2) = 3 \end{cases}$$

d'où l'équation $x = 1 + \sqrt{2t}$.



L'unique solution faible entropique pour $t > 0$ est donc

$$u(x, t) = \begin{cases} 2, & \text{si } x \leq 1 - t, \\ 1 - \frac{x-1}{t}, & \text{si } 1 - t < x < \min\{1 + t, 1 + \sqrt{2t}\}, \\ 0, & \text{si } 1 + t \leq x < \frac{1}{2}t + 2, \\ 1, & \text{si } x > \frac{1}{2}t + 2 \text{ et } t < 2, \\ 1, & \text{si } x > 1 + \sqrt{2t} \text{ et } t \geq 2. \end{cases}$$



2. Étude d'un système hyperbolique

On considère le système de AW et RASCLE pour la modélisation macroscopique du trafic routier :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0, \\ \partial_t(\rho(u + p(\rho))) + \partial_x(\rho u(u + p(\rho))) = 0, \end{cases} \quad \text{avec } x \in \mathbb{R}, t > 0, \quad (2.1)$$

où $\rho > 0$ est la densité des véhicules, u leur vitesse moyenne et p joue le rôle d'un facteur d'anticipation (on assume $p'(\rho) > 0$ et $p''(\rho) \geq 0$).

Sous forme vectorielle ce système s'écrit

$$\partial_t \mathbf{U} + \partial_x \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \mathbf{0}$$

ayant défini

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho(u + p(\rho)) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u(u + p(\rho)) \end{pmatrix}.$$

1. Soit $\mathbf{W} = (\rho, u)$, alors le système (2.1) se réécrit, pour des solutions régulières, sous la forme quasi-linéaire

$$\partial_t \mathbf{W} + \mathbb{A}(\mathbf{W}) \partial_x \mathbf{W} = \mathbf{0}. \quad (2.2)$$

Montrer que la matrice $\mathbb{A}(\mathbf{W})$ s'écrit

$$\begin{pmatrix} u & \rho \\ 0 & u - \rho p'(\rho) \end{pmatrix}.$$

On développe les dérivées du système (2.1) pour des solutions régulières :

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0, \\ \partial_t(\rho(u + p(\rho))) + \partial_x(\rho u(u + p(\rho))) = 0, \end{cases} \\ & \quad \Downarrow \\ & \begin{cases} \partial_t(\rho) + u \partial_x(\rho) + \rho \partial_x(u) = 0, \\ \rho \partial_t(u + p(\rho)) + (u + p(\rho)) \partial_t(\rho) + (\rho u) \partial_x(u + p(\rho)) + (u + p(\rho)) \rho \partial_x(u) + (u + p(\rho)) u \partial_x(\rho) = 0, \end{cases} \\ & \quad \Downarrow \\ & \begin{cases} \partial_t(\rho) + u \partial_x(\rho) + \rho \partial_x(u) = 0, \\ \rho \partial_t(u) + \rho p'(\rho) \partial_t(\rho) + (u + p(\rho)) \partial_t(\rho) + (\rho u) \partial_x(u) + (\rho u) p'(\rho) \partial_x(\rho) + (u + p(\rho)) \rho \partial_x(u) + (u + p(\rho)) u \partial_x(\rho) = 0, \end{cases} \\ & \quad \Downarrow \\ & \begin{cases} \partial_t(\rho) + u \partial_x(\rho) + \rho \partial_x(u) = 0, \\ \partial_t(u) + (u - \rho p'(\rho)) \partial_x(u) = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

2. Calculer les deux valeurs propres $\lambda_1(\mathbf{W})$ et $\lambda_2(\mathbf{W})$ de la matrice $\mathbb{A}(\mathbf{W})$. Afin de fixer les notations on ordonne les deux valeurs propres selon $\lambda_1(\mathbf{W}) < \lambda_2(\mathbf{W})$. Proposer une base associée de vecteurs propres à droite $\{\mathbf{r}_1(\mathbf{W}), \mathbf{r}_2(\mathbf{W})\}$. En déduire que le système (5.1) est strictement hyperbolique. (Que se passe-t-il quand $\rho \rightarrow 0$?)

On cherche les deux solutions $\lambda_1(\mathbf{W})$ et $\lambda_2(\mathbf{W})$ de l'équation $\det(\mathbb{A}(\mathbf{W}) - \lambda(\mathbf{W})\mathbf{Id}) = 0$, c'est-à-dire de l'équation

$$(u - \lambda)(u - \rho p'(\rho) - \lambda) = 0.$$

On obtient

$$\lambda_1 = u - \rho p'(\rho), \quad \lambda_2 = u.$$

On peut alors prendre comme vecteurs propres à droite associés à ces valeurs propres les deux vecteurs

$$\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ p'(\rho) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Puisque $p'(\rho) > 0$, les valeurs propres sont réelles et distinctes donc le système (2.1) est strictement hyperbolique. Si $\rho \rightarrow 0$, \mathbb{A} est une matrice diagonale dont les deux valeurs propres sont égaux à u .

3. Vérifier que le champ 1 est vraiment non linéaire tandis que le champ 2 est linéairement dégénéré. Quelle est la nature du 2-champ ? Autrement dit, il s'agit d'un choc, d'une détente ou d'une discontinuité de contact ?

Pour déterminer la nature des champs caractéristiques on calcule $(\nabla \lambda_k)^T \cdot \mathbf{r}_k$ pour $k = 1, 2$:

$$\begin{aligned} (\nabla \lambda_1)^T \cdot \mathbf{r}_1 &= 2p'(\rho) + \rho p''(\rho) > 0 && \implies \text{le 1-champ est VNL} \\ (\nabla \lambda_2)^T \cdot \mathbf{r}_2 &= 0 && \implies \text{le 2-champ est LD} \end{aligned}$$

4. On note I_k l'invariant de Riemann du k -ème champ caractéristique. Montrer qu'un choix possible pour I_1 et I_2 est

$$I_1 = u + p(\rho), \quad I_2 = \lambda_2.$$

On vérifie que $(\nabla I_k)^T \cdot \mathbf{r}_k = 0$ pour $k = 1, 2$:

$$(\nabla I_1)^T \cdot \mathbf{r}_1 = -p'(\rho) + p'(\rho) = 0, \quad (\nabla I_2)^T \cdot \mathbf{r}_2 = (\nabla \lambda_2)^T \cdot \mathbf{r}_2 = 0.$$

5. Considérons le 2-champ. Quelle est la vitesse $\dot{\sigma}_2$ de cette discontinuité ? Expliciter les états $\mathbf{W} = (\rho, u)$ qui peuvent être relié à un état droit \mathbf{W}_R par une discontinuité de vitesse $\dot{\sigma}_2$.

Le 2-champ est un champ linéairement dégénéré, donc on a une discontinuité de contact. La condition sur l'invariant de Riemann donne $I_2(\mathbf{W}) = I_2(\mathbf{W}_R)$, c'est-à-dire $u = u_R$ et la discontinuité se déplace à la vitesse $\dot{\sigma}_2 = u = u_R$.

6. Pour un état gauche $\mathbf{W}_L = (\rho_L, u_L)$ donné on cherche les états $\mathbf{W} = (\rho, u)$ qui peuvent être relié à \mathbf{W}_L par une 1-onde de détente. Montrer que $u > u_L$ et $\rho < \rho_L$. Calculer u en fonction de ρ_L, u_L et ρ . Plus précisément, montrer que u peut se mettre sous la forme

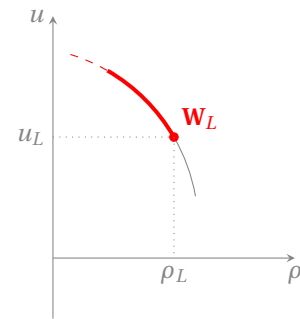
$$u = u_L + r(\rho_L, \rho)$$

en explicitant la fonction r . Étudier la fonction $\rho \mapsto u = u_L + r(\rho_L, \rho)$ et tracer son graphe dans le plan (ρ, u) .

La condition d'entropie $\lambda_1(\mathbf{W}_L) < \lambda_1(\mathbf{W})$ s'écrit $u_L - \rho_L p'(\rho_L) < u - \rho p'(\rho)$, donc $u > u_L - \rho_L p'(\rho_L) + \rho p'(\rho)$. Dans une détente les invariants de Riemann sont conservés, ici $I_1(\mathbf{W}) = I_1(\mathbf{W}_L)$, donc $u + p(\rho) = u_L + p(\rho_L)$ et on obtient la courbe intégrale

$$u: \rho \mapsto u(\rho) \equiv u_L + p(\rho_L) - p(\rho)$$

(fonction strictement décroissante et concave). Par conséquent $\rho_L p'(\rho_L) + p(\rho_L) > \rho p'(\rho) + p(\rho)$; la fonction $f: \rho \mapsto \rho p'(\rho) + p(\rho)$ est strictement croissante donc de $f(\rho_L) > f(\rho)$ on déduit $\rho_L > \rho$ et par conséquent $u_L < u$.



7. Pour un état gauche $\mathbf{W}_L = (\rho_L, u_L)$ donné on cherche les états $\mathbf{W} = (\rho, u)$ qui peuvent être relié à \mathbf{W}_L par une 1-onde de choc entropique de vitesse $\dot{\sigma}_1$. Montrer que les relations de RANKINE-HUGONIOT peuvent s'écrire sous la forme

$$\begin{cases} j_1 \equiv \rho(u - \dot{\sigma}_1) = \rho_L(u_L - \dot{\sigma}_1), \\ (u + p(\rho))\rho(u - \dot{\sigma}_1) = (u_L + p(\rho_L))\rho_L(u_L - \dot{\sigma}_1). \end{cases}$$

Montrer que $u < u_L$ et $\rho > \rho_L$. Calculer u en fonction de ρ_L, u_L et ρ . Plus précisément, montrer que u peut se mettre sous la forme

$$u = u_L + d(\rho_L, \rho)$$

en explicitant la fonction d . Étudier la fonction $\rho \mapsto u = u_L + d(\rho_L, \rho)$ et tracer son graphe dans le plan (ρ, u) .

Les relations de RANKINE-HUGONIOT pour un 1-choc de vitesse $\dot{\sigma}_1$ s'écrivent

$$\begin{cases} \dot{\sigma}_1 = \frac{\rho u - \rho_L u_L}{\rho - \rho_L} \\ \dot{\sigma}_1 = \frac{\rho u(u + p(\rho)) - \rho_L u_L(u_L + p(\rho_L))}{\rho(u + p(\rho)) - \rho_L(u_L + p(\rho_L))} \end{cases}$$

qu'on peut réécrire comme

$$\begin{cases} j_1 \equiv \rho(u - \dot{\sigma}_1) = \rho_L(u_L - \dot{\sigma}_1), \\ (u + p(\rho))\rho(u - \dot{\sigma}_1) = (u_L + p(\rho_L))\rho_L(u_L - \dot{\sigma}_1). \end{cases} \implies \begin{cases} j_1 \equiv \rho(u - \dot{\sigma}_1) = \rho_L(u_L - \dot{\sigma}_1), \\ u + p(\rho) = u_L + p(\rho_L), \end{cases}$$

et on obtient la courbe intégrale

$$u: \rho \mapsto u(\rho) \equiv u_L + p(\rho_L) - p(\rho)$$

(fonction strictement décroissante et concave).

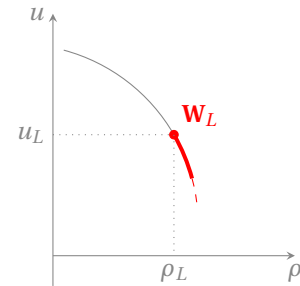
La condition d'entropie (Lax) demande à ce que la vitesse $\dot{\sigma}_1$ vérifie

$$\begin{cases} \lambda_1(\mathbf{W}) < \dot{\sigma}_1 < \lambda_2(\mathbf{W}), \\ \dot{\sigma}_1 < \lambda_1(\mathbf{W}_L), \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} u - \rho p'(\rho) < \dot{\sigma}_1 < u, \\ \dot{\sigma}_1 < u_L - \rho_L p'(\rho_L). \end{cases}$$

Par conséquent $p(\rho) + \rho p'(\rho) > p(\rho_L) + \rho_L p'(\rho_L)$; la fonction $f: \rho \mapsto \rho p'(\rho) + p(\rho)$ est strictement croissante donc de $f(\rho) > f(\rho_L)$ on déduit $\rho_L < \rho$ et par conséquent $u_L > u$.



8. À l'aide du dessin d'ondes dans le plan (ρ, u) résoudre le problème de RIEMANN : pour un état gauche \mathbf{W}_L et un état droit \mathbf{W}_R on construira une solution composée d'une 1-onde et d'une 2-onde séparant un état intermédiaire \mathbf{W}^* . On précisera les valeurs de cet état intermédiaire ainsi que les vitesses des ondes.

Soit un problème de Riemann avec les deux états donnés suivants :

$$\mathbf{W}_L = \begin{pmatrix} \rho_L \\ u_L \end{pmatrix}, \quad \mathbf{W}_R = \begin{pmatrix} \rho_R \\ u_R \end{pmatrix}.$$

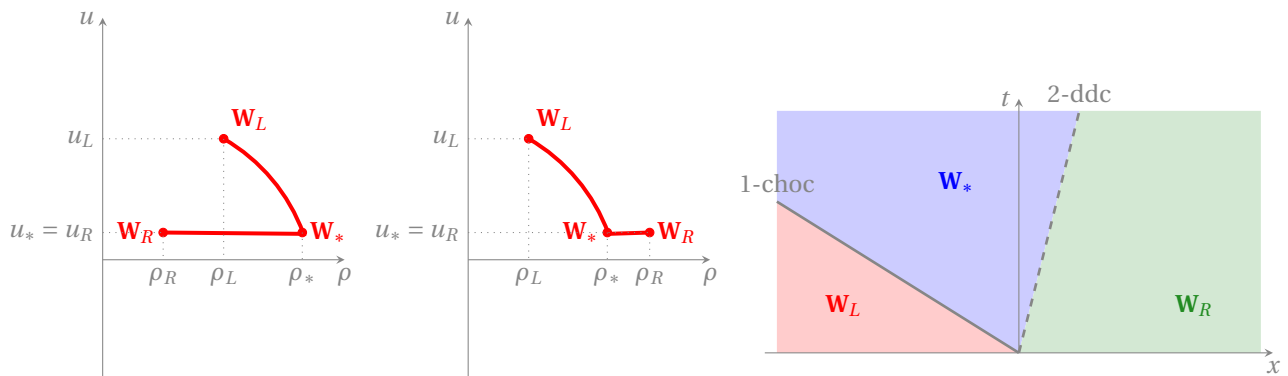
La solution est constituée de trois états constants

$$\mathbf{W}_L = \begin{pmatrix} \rho_L \\ u_L \end{pmatrix}, \quad \mathbf{W}_* = \begin{pmatrix} \rho_* = p^{-1}(-u_R + u_L + p(\rho_L)) \\ u_* = u_R \end{pmatrix}, \quad \mathbf{W}_R = \begin{pmatrix} \rho_R \\ u_R \end{pmatrix},$$

séparés par deux ondes : la première est soit un choc soit une raréfaction, la deuxième est toujours une discontinuité de contact de vitesse u_R . On note que la courbe intégrale du 1-choc et la courbe intégrale de la 1-raréfaction ont la même expression, on parle alors de système de TEMPLE.

▷ Si $u_R < u_L$ on a un 1-choc et la solution est

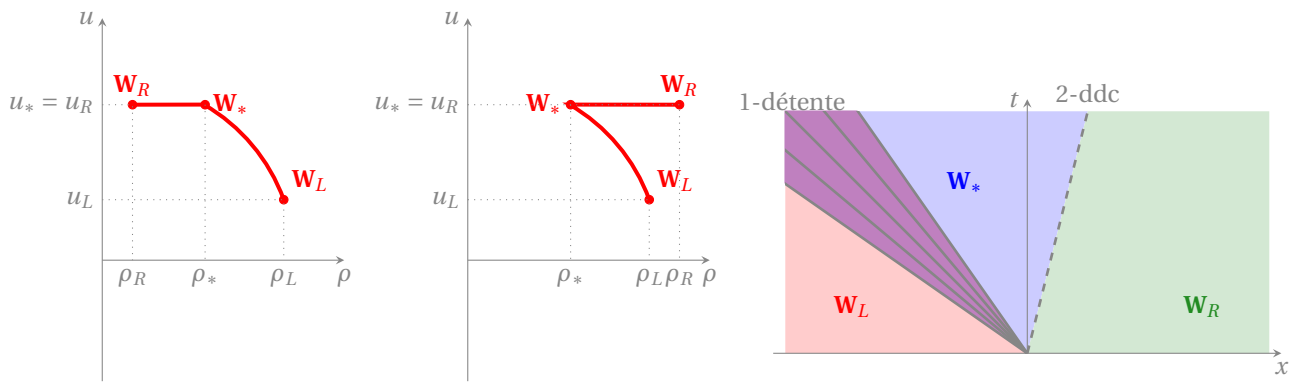
$$W(x, t) = \begin{cases} \mathbf{W}_L, & \text{si } x < \dot{\sigma}_1 t, \\ \mathbf{W}_*, & \text{si } \dot{\sigma}_1 t < x < u_R t, \text{ avec } \dot{\sigma}_1 = \frac{\rho_* u_R - \rho_L u_L}{\rho_* - \rho_L}, \\ \mathbf{W}_R, & \text{si } x > u_R t, \end{cases}$$



▷ Si $u_R > u_L$ on a une 1-raréfaction et la solution est

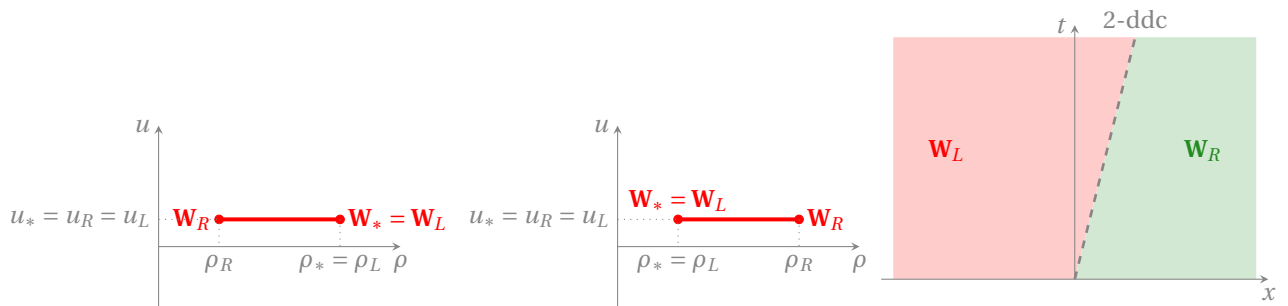
$$W(x, t) = \begin{cases} \mathbf{W}_L, & \text{si } x < (u_L - \rho_L p'(\rho_L)) t, \\ \mathbf{W}_d, & \text{si } (u_L - \rho_L p'(\rho_L)) t < x < (u_R - \rho_* p'(\rho_*)) t, \\ \mathbf{W}_*, & \text{si } (u_R - \rho_* p'(\rho_*)) t < x < u_R t, \\ \mathbf{W}_R, & \text{si } x > u_R t, \end{cases}$$

Pour calculer \mathbf{W}_d en un point (\hat{x}, \hat{t}) à l'intérieur de l'onde de raréfaction (i.e. $\lambda_1(\mathbf{W}_L) < \frac{\hat{x}}{\hat{t}} < \lambda_1(\mathbf{W}_*)$) on considère la caractéristique qui relie (\hat{x}, \hat{t}) à l'origine de l'onde $(0, 0)$. La vitesse caractéristique de l'onde est $\frac{dx}{dt} = \lambda_1(\mathbf{W})$, c'est-à-dire $\frac{\hat{x}}{\hat{t}} = u - \rho p'(\rho)$. De plus, l'invariant de RIEMANN est conservé dans l'onde, c'est-à-dire $u + p(\rho) = u_L + p(\rho_L)$. Par conséquent, $\rho(\hat{x}, \hat{t})$ est la solution de l'équation $p(\rho) + \rho p'(\rho) = u_L + p(\rho_L) - \frac{\hat{x}}{\hat{t}}$ et $u(\hat{x}, \hat{t}) = -p(\rho(\hat{x}, \hat{t})) + u_L + p(\rho_L)$.



▷ Si $u_R = u_L$ on a $W_* = W_L$ et la solution est

$$W(x, t) = \begin{cases} W_L, & \text{si } x < u_R t, \\ W_R, & \text{si } x > u_R t. \end{cases}$$



Deuxième partie .
Rappels Théoriques

3. Équations linéaires

On cherche

$$u: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, t) \mapsto u(x, t)$$

solution faible du problème

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) + a(t, x) \partial_x u(t, x) + b(t, x) u(t, x) = f(t, x), & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, 0) = g(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Soit $(\hat{t}, \hat{x}) \in]0; +\infty[\times \mathbb{R}$ donné. On appelle courbe caractéristique passant par (\hat{t}, \hat{x}) la solution (si elle existe) du problème de CAUCHY

$$\begin{cases} x'(t) = a(t, x(t)) & t > 0, \\ x(\hat{t}) = \hat{x}. \end{cases}$$

En particulier, si $a(t, x) = A$ constante, alors $x(t) = \hat{x} + A(t - \hat{t})$.

Notons $v(t) \equiv u(t, x(t))$ la restriction de u à la courbe caractéristique. Alors $u(\hat{t}, \hat{x}) = v(\hat{t})$ et l'on a

$$v'(t) = \partial_t u(t, x(t)) + x'(t) \partial_x u(t, x(t)) = \partial_t u(t, x(t)) + a(t, x(t)) \partial_x u(t, x(t)).$$

▷ Si $b(t, x) = f(t, x) = 0$ pour tout $(t, x) \in [0; +\infty[\times \mathbb{R}$ alors $v'(t) = 0$ donc

$$u(\hat{t}, \hat{x}) = v(\hat{t}) = v(0) = u(0, x(0)) = g(x(0)).$$

En particulier, si $a(t, x) = A$ constante, alors $x(t) = \hat{x} + A(t - \hat{t})$ et donc $u(\hat{t}, \hat{x}) = g(\hat{x} - A\hat{t})$.

▷ Si $f(t, x) = 0$ pour tout $(t, x) \in [0; +\infty[\times \mathbb{R}$ alors $v'(t) + b(t, x(t))v(t) = 0$ donc

$$v(t) = v(0) e^{-\int_0^t b(s, x(s)) ds} = u(0, x(0)) e^{-\int_0^t b(s, x(s)) ds} = g(x(0)) e^{-\int_0^t b(s, x(s)) ds}.$$

On a alors

$$u(\hat{t}, \hat{x}) = v(\hat{t}) = g(x(0)) e^{-\int_0^{\hat{t}} b(s, x(s)) ds}.$$

En particulier, si $b(t, x) = B$ constante, alors $u(\hat{t}, \hat{x}) = g(x(0)) e^{-B\hat{t}}$. Si, de plus, $a(t, x) = A$ constante, alors $x(t) = \hat{x} + A(t - \hat{t})$ et donc $u(\hat{t}, \hat{x}) = g(\hat{x} - A\hat{t}) e^{-B\hat{t}}$.

▷ On doit résoudre l'EDO $v'(t) + b(t, x(t))v(t) = f(t, x(t))$. Comme on connaît déjà la solution de l'équation homogène, il ne reste à calculer qu'une solution particulière de l'équation complète et on trouve

$$u(\hat{t}, \hat{x}) = v(\hat{t}) = v(0) e^{-\int_0^{\hat{t}} b(s, x(s)) ds} + \int_0^{\hat{t}} f(s, x(s)) e^{-\int_s^{\hat{t}} b(r, x(r)) dr} ds = g(x(0)) e^{-\int_0^{\hat{t}} b(s, x(s)) ds} + \int_0^{\hat{t}} f(s, x(s)) e^{-\int_s^{\hat{t}} b(r, x(r)) dr} ds.$$

4. Équations non-linéaires

On cherche

$$u: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, t) \mapsto u(x, t)$$

solution faible entropique du problème

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x q(u) = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, 0) = g(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

avec le flux

$$q: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$u \mapsto q(u)$$

Courbes caractéristiques : on appelle courbe caractéristique de l'EDP une courbe $x = x(t)$ dans le demi-espace $t > 0$ le long de laquelle la solution u est constante.

Si pour un point (x, t) passe une et une seule caractéristique et cette caractéristique a pied en $(\xi, 0)$, alors $u(x, t) = g(\xi)$. La caractéristique de pied $(\xi, 0)$ a équation

$$x(t) = \xi + q'(g(\xi))t.$$

Pour t suffisamment petit, la solution u est définie implicitement par l'équation

$$u = g(x - q'(g(\xi))t).$$

Condition de Rankine-Hugoniot : si deux caractéristiques se croisent elles génèrent une discontinuité dans la solution.

La courbe de discontinuité est appelée onde de choc et si elle est régulière et a équation $x = s(t)$ alors u doit vérifier les relations de RANKINE-HUGONIOT : si on appelle u_R et u_L respectivement les traces de u à droite et à gauche de la courbe de choc, on a

$$s'(t) = \frac{q(u_R(s(t), t)) - q(u_L(s(t), t))}{u_R(s(t), t) - u_L(s(t), t)}.$$

Si $(x_0; t_0)$ est le premier point où les caractéristiques se croisent, alors on obtient l'équation de la courbe de choc en résolvant l'EDO avec la condition initiale $s(t_0) = x_0$.

Condition d'entropie : une condition qui permet de sélectionner parmi les solutions faibles qui vérifient les relations de saut de RANKINE-HUGONIOT la solution «physique» est la condition d'entropie de Lax le long de la courbe de choc $x = s(t)$:

▷ si le flux q est convexe, le choc est entropique si et seulement si

$$q'(u_R(s(t), t)) < s'(t) < q'(u_L(s(t), t)),$$

▷ si le flux q est concave, le choc est entropique si et seulement si

$$q'(u_L(s(t), t)) < s'(t) < q'(u_R(s(t), t)),$$

En particulier, lorsque l'on considère le générique problème de RIEMANN

$$g(x) = \begin{cases} u_L, & \text{si } x < 0 \\ u_R, & \text{si } x > 0, \end{cases}$$

▷ si le flux est convexe (par exemple $q(u) = u^2/2$) on a

▷ une onde de choc ssi $u_L > u_R$

▷ une onde de raréfaction ssi $u_L < u_R$

▷ si le flux est concave (par exemple $q(u) = u(2-u)/2$) on a

▷ une onde de choc ssi $u_L < u_R$

▷ une onde de raréfaction ssi $u_L > u_R$

Onde de raréfaction ou de détente : dans les régions du demi-espace $t > 0$ qui ne sont pas rejointes par les caractéristiques on construit la solution (qui se connecte avec continuité avec les autres régions du demi-espace) par des ondes de raréfaction.

Une onde de raréfaction centrée en (x_0, t_0) a équation

$$u(x, t) = (q')^{-1} \left(\frac{x - x_0}{t - t_0} \right).$$

4.1. Exemple : équation de Burgers

Considérons l'équation de BURGERS $\partial_t u + \partial_x \left(\frac{u^2}{2} \right) = 0$ avec la donnée initiale $u(x, 0) = g(x)$. Il s'agit d'une équation de type $\partial_t u + \partial_x q(u) = 0$ avec

$$q(u) = \frac{u^2}{2} \text{ (convexe)} \qquad q'(u) = u, \qquad (q')^{-1}(r) = r.$$

on a $q(u) = u^2/2$, $q'(u) = u$ et $(q')^{-1}(r) = r$. L'équation de la caractéristique de pied $(\xi, 0)$ est alors

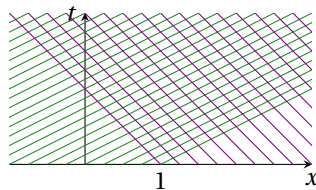
$$x(t) = \xi + q'(g(\xi))t = \xi + (g(\xi))t = \begin{cases} \xi + Lt, & \xi < -1, \\ \xi + Mt, & -1 < \xi < 1, \\ \xi + Rt, & \xi > 1. \end{cases}$$

Donnée "2-1" Considérons la donnée initiale

$$u(x, 0) = g(x) \equiv \begin{cases} 2, & \text{si } x < 1, \\ -1, & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

L'équation de la caractéristique de pied $(\xi, 0)$ est donc

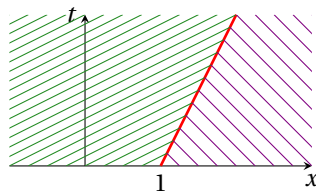
$$x(t) = \xi + q'(g(\xi))t = \xi + (g(\xi))t = \begin{cases} \xi + 2t, & \xi < 1, \\ \xi - t, & \xi > 1. \end{cases}$$



La donnée initiale du problème de Riemann a un saut décroissant et le flux est convexe donc l'unique solution entropique présente une onde de choc qui part en $(1, 0)$. Pour calculer l'équation $x = s(t)$ de l'onde de choc on utilise les relations de RANKINE-HUGONOT :

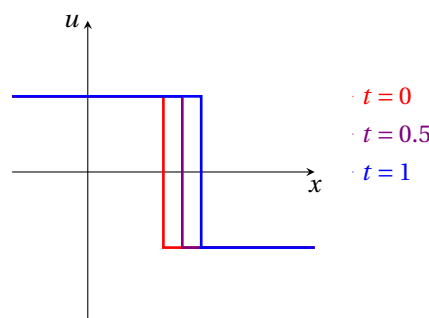
$$s'(t) = \frac{q(u_R) - q(u_L)}{u_R - u_L} = \frac{u_R + u_L}{2} = \frac{1}{2}$$

avec la donnée initiale $s(0) = 1$. On trouve donc $x = s(t) = 1 + \frac{1}{2}t$.



La solution est donc

$$u(x, t) = \begin{cases} 2, & x < 1 + \frac{1}{2}t, \\ -1, & x > 1 + \frac{1}{2}t. \end{cases}$$

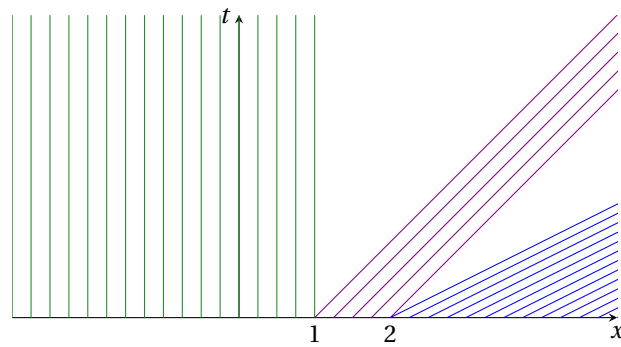


Donnée "012"

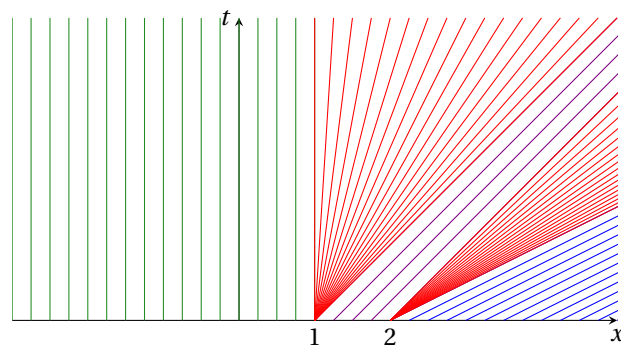
$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1, \\ 1 & \text{si } 1 < x < 2, \\ 2 & \text{si } x > 2. \end{cases}$$

L'équation de la caractéristique de pied $(\xi, 0)$ est

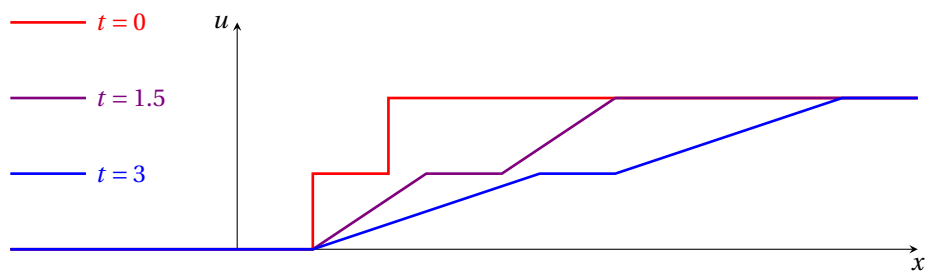
$$x(t) = \xi + q'(g(\xi))t = \xi + (g(\xi))t = \begin{cases} \xi, & \xi < 1, \\ \xi + t, & 1 < \xi < 2, \\ \xi + 2t, & \xi > 2. \end{cases}$$



La donnée initiale a deux sauts croissants, un en $x = 1$ et l'autre en $x = 2$. Puisque q est convexe, on s'attend à ce que la solution faible entropique présente deux ondes de raréfaction centrées l'une en $(1, 0)$ et l'autre en $(2, 0)$.



$$u(x, t) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 1, \\ \frac{x-1}{t}, & \text{si } 1 < x < 1+t, \\ 1, & \text{si } 1+t < x < 2+t, \\ \frac{x-2}{t}, & \text{si } 2+t < x < 2+2t, \\ 2, & \text{si } x > 2+2t, \end{cases}$$



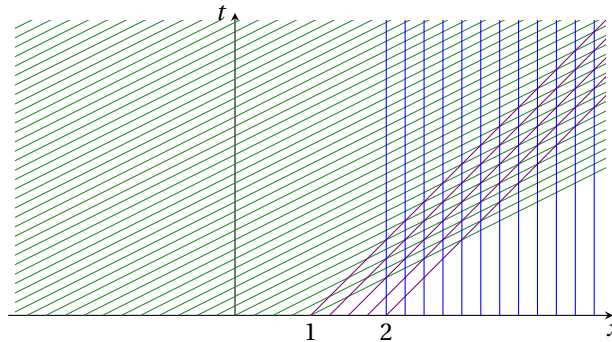
Donnée "210" Considérons la donnée initiale

$$g(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < 1, \\ 1 & \text{si } 1 < x < 2, \\ 0 & \text{si } x > 2. \end{cases}$$

Elle a deux sauts décroissants, un en $x = 1$ et un en $x = 2$. Puisque q est convexe, on s'attend à ce que la solution faible entropique présente deux ondes de choc qui partent de $(1, 0)$ et de $(2, 0)$.

▷ En effet, l'équation de la caractéristique de pied $(\xi, 0)$ est

$$x(t) = \xi + q'(g(\xi))t = \xi + (g(\xi))t = \begin{cases} \xi + 2t, & \xi < 1, \\ \xi + t, & 1 < \xi < 2, \\ \xi, & \xi > 2. \end{cases}$$



▷ Pour calculer les équations des deux ondes de choc on utilise les relations de RANKINE-HUGONIOT :

▷ choc de pied $(1, 0)$

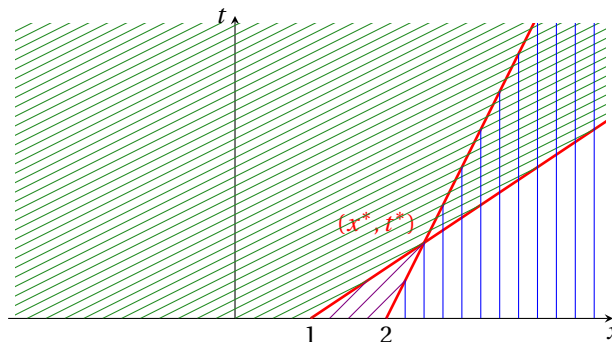
$$\begin{cases} s'(t) = \frac{q(u_R) - q(u_L)}{u_R - u_L} = \frac{(u_R)^2 - (u_L)^2}{2(u_R - u_L)} = \frac{1 - 4}{2(1 - 2)} = \frac{3}{2} \\ s(0) = 1 \end{cases}$$

d'où $x = s(t) = \frac{3}{2}t + 1$;

▷ choc de pied $(2, 0)$

$$\begin{cases} s'(t) = \frac{q(u_R) - q(u_L)}{u_R - u_L} = \frac{(u_R)^2 - (u_L)^2}{2(u_R - u_L)} = \frac{0 - 1}{2(0 - 1)} = \frac{1}{2} \\ s(0) = 2 \end{cases}$$

d'où $x = s(t) = \frac{1}{2}t + 2$.



Ces deux chocs vont ensuite interagir à partir d'un (x^*, t^*) qu'on détermine en résolvant le système linéaire

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}t + 2, \\ x = \frac{3}{2}t + 1. \end{cases}$$

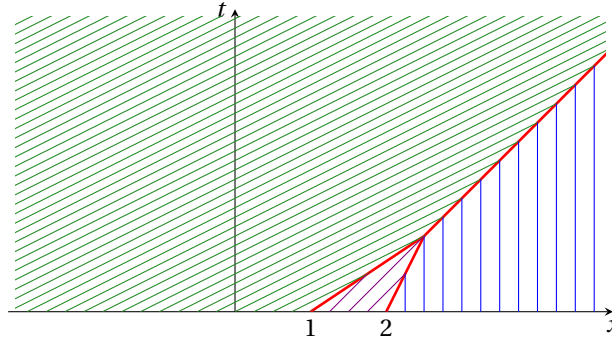
On obtient ainsi le pied de la nouvelle onde de choc qui est $(x^*, t^*) = (\frac{5}{2}, 1)$. Donc la solution pour $0 < t < 1$ est

$$u(x, t) = \begin{cases} 2, & \text{si } x < \frac{3}{2}t + 1, \\ 1, & \text{si } \frac{3}{2}t + 1 < x < \frac{1}{2}t + 2, \\ 0, & \text{si } x > \frac{1}{2}t + 2, \end{cases}$$

▷ Pour $t \geq 1$ seule les données initiales pour $x < 1$ et $x > 2$ sont transportées et ce nouveau choc, qui part de $(\frac{5}{2}, 1)$, vérifie encore la relation de RANKINE-HUGONIOT :

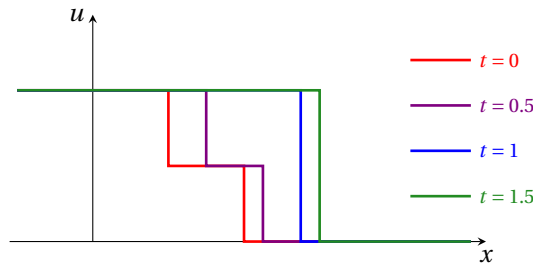
$$\begin{cases} s'(t) = \frac{q(u_R) - q(u_L)}{u_R - u_L} = \frac{(u_R)^2 - (u_L)^2}{2(u_R - u_L)} = \frac{0 - 4}{2(0 - 2)} = 1 \\ s(1) = \frac{5}{2} \end{cases}$$

d'où $x = s(t) = t + \frac{3}{2}$.



L'unique solution faible entropique pour tout $t > 0$ est donc

$$u(x, t) = \begin{cases} 2, & \text{si } x < \min\{\frac{3}{2}t + 1, t + \frac{3}{2}\}, \\ 1, & \text{si } \frac{3}{2}t + 1 < x < \frac{1}{2}t + 2, \\ 0, & \text{si } x > \max\{\frac{1}{2}t + 2, t + \frac{3}{2}\}, \end{cases}$$

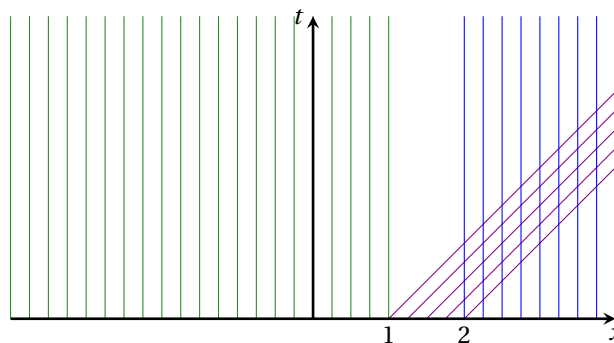


Donnée "010" Considérons la donnée initiale

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1, \\ 1 & \text{si } 1 < x < 2, \\ 0 & \text{si } x > 2. \end{cases}$$

L'équation de la caractéristique de pied $(\xi, 0)$ est

$$x(t) = \xi + q'(g(\xi))t = \xi + (g(\xi))t = \begin{cases} \xi, & \xi < 1, \\ \xi + t, & 1 < \xi < 2, \\ \xi, & \xi > 2. \end{cases}$$



On s'attend donc à ce que la solution faible entropique présente une onde de raréfaction centrée en $(1, 0)$ et une onde de choc qui part de $(2, 0)$ et que, après un certain temps, les deux ondes interagissent.

▷ La raréfaction est comprise entre la droite d'équation

$$x(t) = 1$$

et la droite d'équation

$$x(t) = 1 + t$$

et a équation

$$u(x, t) = (q')^{-1} \left(\frac{x-1}{t-0} \right) = \frac{x-1}{t}.$$

▷ Pour déterminer l'équation de l'onde de choc qui a pied en $(2, 0)$ on utilise les relations de RANKINE-HUGONOT :

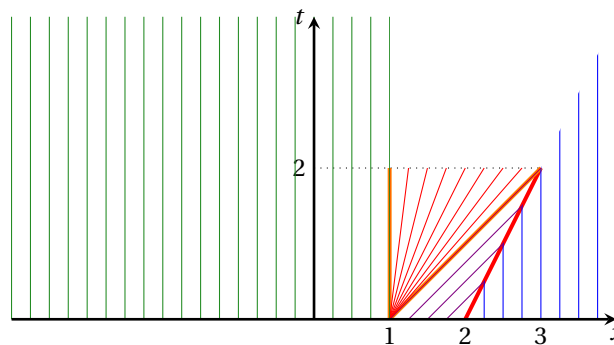
$$\begin{cases} s'(t) = \frac{q(u_R) - q(u_L)}{u_R - u_L} = \frac{(u_R)^2 - (u_L)^2}{2(u_R - u_L)} = \frac{1-0}{2(1-0)} = \frac{1}{2} \\ s(0) = 2 \end{cases}$$

d'où $x = s(t) = \frac{1}{2}t + 2$.

Ces considérations sont valables jusqu'à ce que l'onde de choc et l'onde de raréfaction se touchent, c'est-à-dire jusqu'à $t = 2$.

Donc la solution pour $0 < t < 2$ est

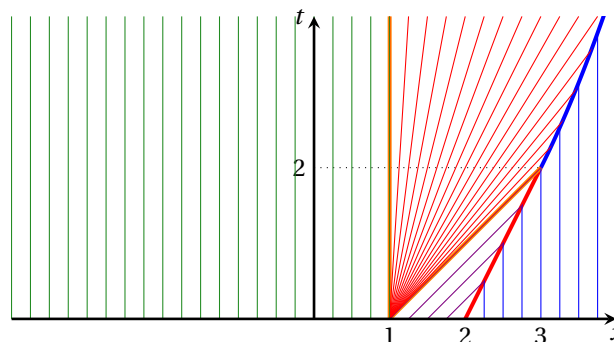
$$u(x, t) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 1, \\ \frac{x-1}{t}, & \text{si } 1 < x < t+1, \\ 1, & \text{si } t+1 < x < \frac{1}{2}t+2, \\ 0, & \text{si } x > \frac{1}{2}t+2. \end{cases}$$



▷ Pour $t > 2$ on continue à avoir une onde de choc mais l'état gauche n'est plus constante car il est donné par la raréfaction i.e. $u_L = \frac{s(t)-1}{t}$ donc le nouveau choc a pied en $(3, 2)$ et vérifie

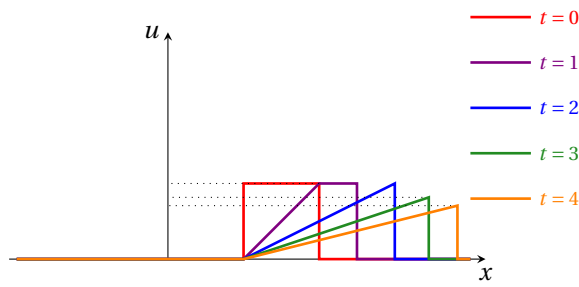
$$\begin{cases} s'(t) = \frac{q(u_R) - q(u_L)}{u_R - u_L} = \frac{(u_R)^2 - (u_L)^2}{2(u_R - u_L)} = \frac{0 - \left(\frac{s(t)-1}{t}\right)^2}{2\left(0 - \frac{s(t)-1}{t}\right)} = \frac{s(t)-1}{2t} \\ s(2) = 3 \end{cases}$$

d'où l'équation $x = 1 + \sqrt{2t}$.



L'unique solution faible entropique pour $t > 0$ est donc

$$u(x, t) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 1, \\ \frac{x-1}{t}, & \text{si } 1 < x < \min\{1+t, 1+\sqrt{2t}\}, \\ 1, & \text{si } 1+t < x < \frac{1}{2}t+2, \\ 0, & \text{si } x > \frac{1}{2}t+2 \text{ et } t < 2, \\ 0, & \text{si } x > 1+\sqrt{2t} \text{ et } t \geq 2. \end{cases}$$



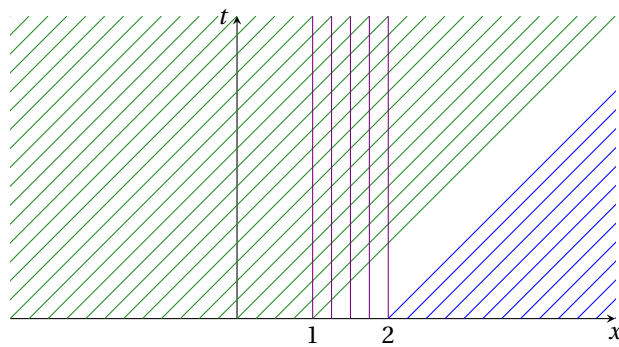
Remarquons que l'amplitude du choc vaut $\sqrt{\frac{2}{t}}$ et le choc se déplace à vitesse $\sqrt{\frac{1}{2t}}$. Par conséquent, pour $t \rightarrow \infty$, l'amplitude et la vitesse du choc tendent vers zéro.

Donnée "101"

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 1, \\ 0 & \text{si } 1 < x < 2, \\ 1 & \text{si } x > 2. \end{cases}$$

L'équation de la caractéristique de pied $(\xi, 0)$ est

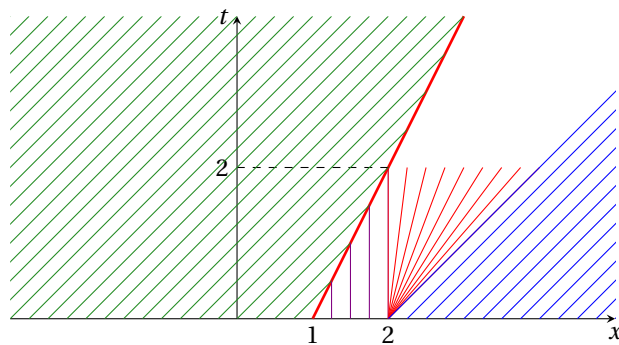
$$x(t) = \xi + q'(g(\xi))t = \xi + (g(\xi))t = \begin{cases} \xi + t, & \xi < 1, \\ \xi, & 1 < \xi < 2, \\ \xi + t, & \xi > 2. \end{cases}$$



La donnée initiale a un saut décroissant en $x = 1$ et un saut croissant en $x = 2$. Puisque q est convexe, on s'attend à ce que la solution faible entropique présente une onde de choc qui part de $(1, 0)$ et une onde de raréfaction centrée en $(2, 0)$. Pour déterminer l'équation de l'onde de choc on utilise les relations de RANKINE-HUGONIOT :

$$\begin{cases} s'(t) = \frac{q(u_R) - q(u_L)}{u_R - u_L} = \frac{(u_R)^2 - (u_L)^2}{2(u_R - u_L)} = \frac{1 - 0}{2(1 - 0)} = \frac{1}{2} \\ s(0) = 1 \end{cases}$$

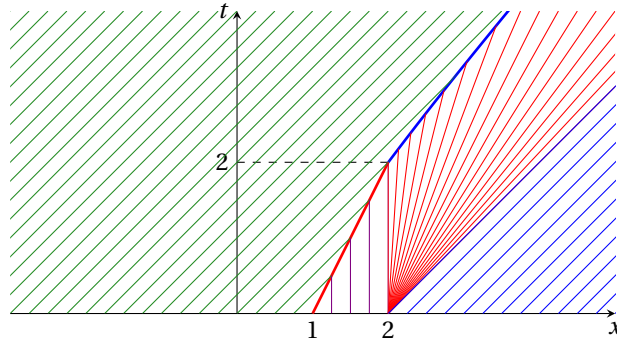
d'où $x = \frac{1}{2}t + 1$.



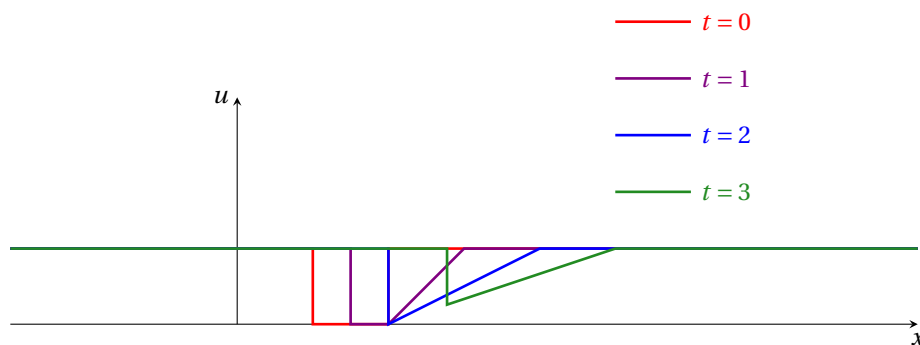
Ces considérations sont valables jusqu'à $t = 2$, ensuite on continue à avoir une onde de choc mais avec

$$\begin{cases} s'(t) = \frac{q(u_R) - q(u_L)}{u_R - u_L} = \frac{(u_R)^2 - (u_L)^2}{2(u_R - u_L)} = \frac{1^2 - \left(\frac{s(t)}{t}\right)^2}{2\left(1 - \frac{s(t)}{t}\right)} = \frac{1}{2} + \frac{s(t)}{2t} \\ s(2) = 2 \end{cases}$$

d'où l'équation $x = t - \sqrt{2t} + 2$.



$$u(x, t) = \begin{cases} 1, & \text{si } x < \min\{t/2 + 1, t - \sqrt{2t} + 2\}, \\ 0, & \text{si } t + 1 < x < 2 \text{ et } t < 2, \\ \frac{x-2}{t}, & \text{si } \max\{2, t - \sqrt{2t} + 2\} < x < t + 2, \\ 1, & \text{si } x > t + 2. \end{cases}$$



Donnée "L < M < R"

$$g(x) = \begin{cases} L & \text{si } x < -1, \\ M & \text{si } -1 < x < 1, \\ R & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Comme $L < M < R$, l'unique solution faible entropique présente deux ondes de raréfaction centrées l'une en $(-1, 0)$ et l'autre en $(1, 0)$:

$$u(x, t) = \begin{cases} L, & \text{si } x < -1, \\ \frac{x+1}{t}, & \text{si } -1 < x < -1 + Lt, \\ M, & \text{si } -1 + Lt < x < 1 + Mt, \\ \frac{x-1}{t}, & \text{si } 1 + Mt < x < 1 + Rt, \\ R, & \text{si } x > 1 + Rt. \end{cases}$$

Donnée "L > M > R"

$$g(x) = \begin{cases} L & \text{si } x < -1, \\ M & \text{si } -1 < x < 1, \\ R & \text{si } x > 2. \end{cases}$$

Comme $L > M > R$, l'unique solution faible entropique présente deux ondes de choc qui partent de $(-1, 0)$ et de $(1, 0)$.

Pour calculer les équations des deux ondes de choc on utilise les relations de RANKINE-HUGONIOT :

▷ choc de pied $(-1, 0)$:

$$\begin{cases} s_1'(t) = \frac{q(u_R) - q(u_L)}{u_R - u_L} = \frac{\frac{(u_R)^2}{2} - \frac{(u_L)^2}{2}}{u_R - u_L} = \frac{u_R + u_L}{2} = \frac{M+L}{2}, \\ s_1(0) = -1, \end{cases}$$

d'où $x = s_1(t) = \frac{M+L}{2}t - 1$;

▷ choc de pied $(1, 0)$:

$$\begin{cases} s_2'(t) = \frac{q(u_R) - q(u_L)}{u_R - u_L} = \frac{\frac{(u_R)^2}{2} - \frac{(u_L)^2}{2}}{u_R - u_L} = \frac{u_R + u_L}{2} = \frac{R+M}{2}, \\ s_2(0) = 1, \end{cases}$$

d'où $x = s_2(t) = \frac{R+M}{2}t + 1$.

Comme $\frac{M+L}{2} > \frac{R+M}{2}$, ces deux chocs vont interagir à partir d'un (x^*, t^*) qu'on détermine en résolvant le système linéaire

$$\begin{cases} x = \frac{M+L}{2}t - 1, \\ x = \frac{R+M}{2}t + 1. \end{cases}$$

On obtient ainsi le pied de la nouvelle onde de choc qui est $(x^*, t^*) = (\frac{M+R}{L-R}, \frac{4}{L-R})$. Donc la solution pour $0 < t < \frac{4}{L-R}$ est

$$u(x, t) = \begin{cases} L, & \text{si } x < \frac{M+L}{2}t - 1, \\ M, & \text{si } \frac{M+L}{2}t - 1 < x < \frac{R+M}{2}t + 1, \\ R, & \text{si } x > \frac{R+M}{2}t + 1. \end{cases}$$

Pour $t \geq \frac{4}{L-R}$ seule les données initiales pour $x < -1$ et $x > 1$ sont transportées et ce nouveau choc, qui part de $(\frac{M+R}{L-R}, \frac{4}{L-R})$, vérifie encore la relation de RANKINE-HUGONIOT :

$$\begin{cases} s_3'(t) = \frac{q(u_R) - q(u_L)}{u_R - u_L} = \frac{\frac{(u_R)^2}{2} - \frac{(u_L)^2}{2}}{u_R - u_L} = \frac{u_R + u_L}{2} = \frac{R+L}{2}, \\ s_3(\frac{4}{L-R}) = \frac{M+R}{L-R}, \end{cases}$$

d'où $x = s_3(t) = \frac{M+R}{L-R}t - 1$.

L'unique solution faible entropique pour tout $t \geq \frac{4}{L-R}$ est donc

$$u(x, t) = \begin{cases} L, & \text{si } x < \frac{M+R}{L-R}t - 1, \\ R, & \text{si } x > \frac{M+R}{L-R}t - 1. \end{cases}$$

4.2. Exercice : trafic dans un tunnel

Soit $\rho \equiv \rho(x, t)$ la densité des voitures et $q \equiv q(\rho)$ le flux des voitures. Un modèle qui décrit la vitesse des voitures dans un tunnel est le suivant

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x (q(\rho)) = 0, & x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}^+, \\ \rho(x, 0) = g(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

avec $q(\rho) = \rho v(\rho)$ et $v \equiv v(\rho)$ la vitesse des voitures ainsi définie :

$$v(\rho) = \begin{cases} v_m, & \text{si } 0 \leq \rho \leq \rho_c, \\ \lambda \ln\left(\frac{\rho_m}{\rho}\right), & \text{si } \rho_c \leq \rho \leq \rho_m, \end{cases}$$

et $\lambda \equiv (v_m)/(\ln(\rho_m/\rho_c))$. Les constantes v_m et ρ_m représentent respectivement la vitesse maximale, la densité maximale et ρ_c la densité critique en dessous de laquelle les voitures peuvent voyager à la vitesse maximale. (Valeurs vraisemblables sont $v_m = 90 \text{ km h}^{-1}$, $\rho_m = 110 \text{ voitures/km}$ et $\rho_c = 7 \text{ voitures/km}$ qui donnent $\lambda \approx 32,727272$.)

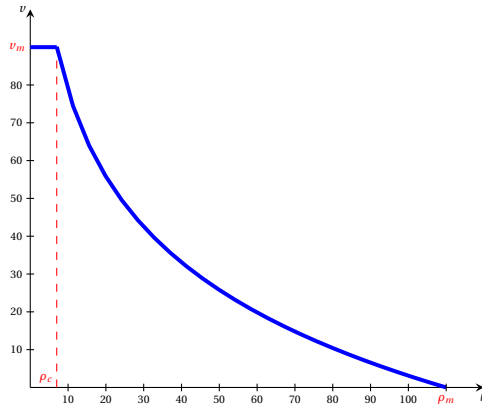
Supposons que l'entrée du tunnel est en $x = 0$ et qu'on ouvre le tunnel à l'instant $t = 0$; supposons de plus que précédemment les voitures s'étaient accumulées en un bouchon. La donnée initiale est donc

$$g(x) = \begin{cases} \rho_m, & \text{si } x < 0, \\ 0, & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

1. Calculer la densité et la vitesse du trafic et les dessiner dans les plans (x, ρ) et (x, v) pour $t = 0$ et pour $\bar{t} > 0$.
2. Déterminer et dessiner dans le plan (x, t) la trajectoire d'une voiture qu'à l'instant initiale se trouve en $x = \bar{x} < 0$ et calculer à quel instant elle rentre dans le tunnel.

Solution

1. Le graphe de la vitesse en fonction de la densité est le suivant (remarquons que v est continue) :



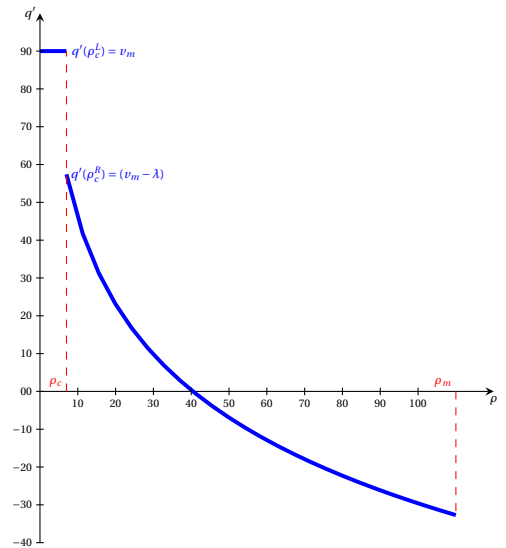
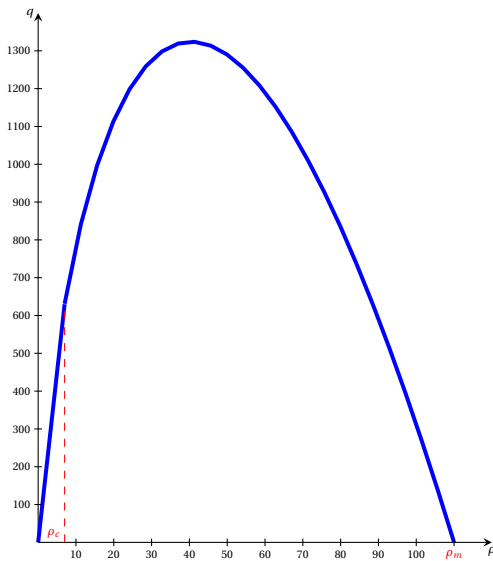
Le flux q s'écrit

$$q(\rho) = \begin{cases} v_m \rho, & \text{si } 0 \leq \rho \leq \rho_c, \\ \lambda \rho \ln\left(\frac{\rho_m}{\rho}\right), & \text{si } \rho_c \leq \rho \leq \rho_m, \end{cases}$$

donc

$$q'(\rho) = \begin{cases} v_m, & \text{si } 0 \leq \rho \leq \rho_c, \\ \lambda \left[\ln\left(\frac{\rho_m}{\rho}\right) - 1 \right], & \text{si } \rho_c \leq \rho \leq \rho_m. \end{cases}$$

Les graphes de q et q' en fonction de la densité sont les suivants (remarquons le saut de q' en ρ_c) :

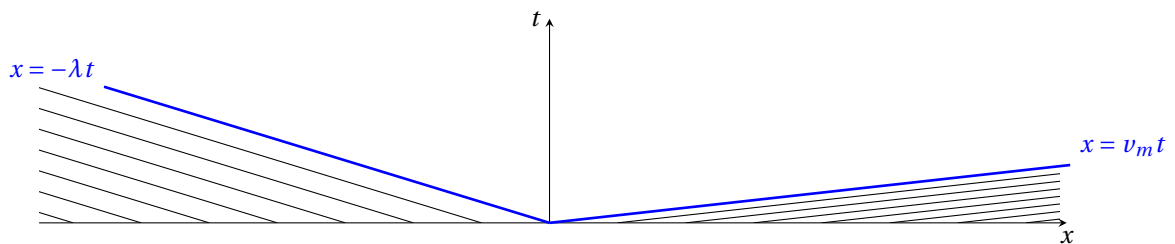


Le saut de q' en ρ_c est

$$[[q'(\rho_c)]] = q'(\rho_c^R) - q'(\rho_c^L) = (v_m - \lambda) - v_m = -\lambda.$$

La caractéristique de pied $(\xi, 0)$ a équation

$$x = \xi + q'(g(\xi))t = \begin{cases} \xi - \lambda t, & \text{si } \xi < 0, \\ \xi + v_m t, & \text{si } \xi > 0. \end{cases}$$



On peut donc écrire la solution au moins pour certaines parties du plan :

$$\rho(x, t) = \begin{cases} \rho_m, & \text{si } x < -\lambda t, \\ ?, & \text{si } -\lambda t < x < v_m t, \\ 0, & \text{si } x > v_m t. \end{cases}$$

Sachant que q' est discontinue en $\rho = \rho_c$, on va donc étudier ρ séparément sur

$$S_1 \equiv \{(x, t) : -\lambda t < x < v_m t, \rho_c < \rho(x, t) < \rho_m\} = \{(x, t) : -\lambda t < x < (v_m - \lambda)t\}$$

et

$$S_2 \equiv \{(x, t) : -\lambda t < x < v_m t, 0 < \rho(x, t) < \rho_c\} = \{(x, t) : (v_m - \lambda)t < x < v_m t\}.$$

▷ Étude dans S_1 : pour $\rho_c < \rho(x, t) < \rho_m$ on a $q''(\rho) = -\lambda/\rho < 0$. Puisque ρ est décroissante on cherche une solution sous forme d'onde de rarefaction, centrée en $(0, 0)$, qui se colle avec continuité avec la droite $x = -\lambda t$ (de cette manière elle vérifie aussi la condition d'entropie). Cette onde a équation

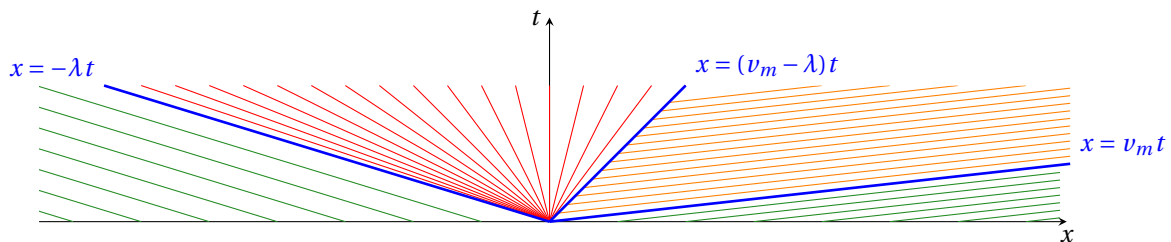
$$\rho(x, t) = (q')^{-1}(x/t) = \rho_m \exp\left(-1 - \frac{x}{\lambda t}\right).$$

▷ Étude dans S_2 : pour $\rho(x, t) < \rho_c$ on a $q'(\rho) = v_m$. Par conséquent ρ est constante le long des lignes caractéristiques du type

$$x = v_m t + k.$$

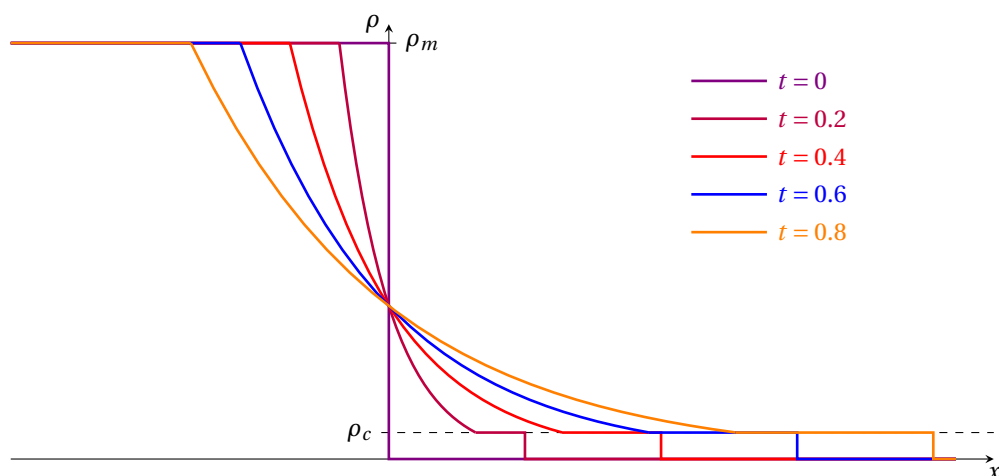
Ces caractéristiques sortent de la droite $x = (v_m - \lambda)t$ et sur cette droite, qui appartient à la région S_1 , la densité vaut

$$\rho(x, t) = \rho((v_m - \lambda)t, t) = \rho_m \exp\left(-1 - \frac{(v_m - \lambda)t}{\lambda t}\right) = \rho_m \exp\left(-\frac{v_m}{\lambda}\right) = \rho_c.$$



En résumé, on a

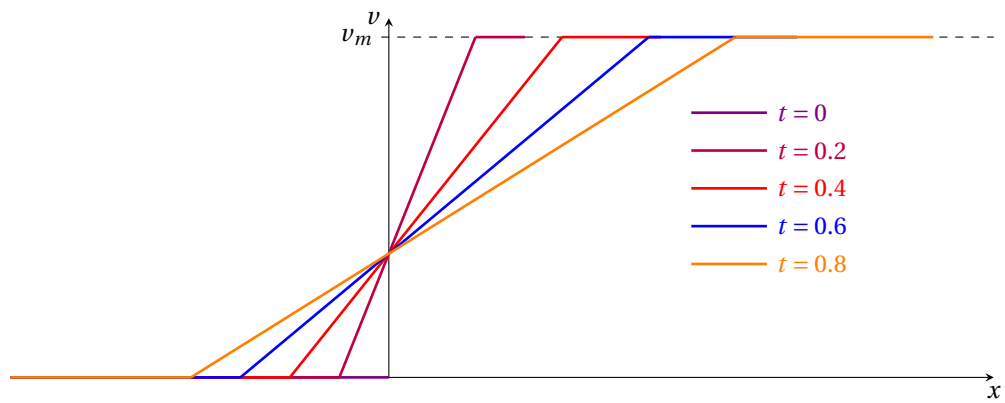
$$\rho(x, t) = \begin{cases} \rho_m, & \text{si } x < -\lambda t, \\ \rho_m \exp\left(-1 - \frac{x}{\lambda t}\right), & \text{si } -\lambda t < x < (v_m - \lambda)t, \\ \rho_c, & \text{si } (v_m - \lambda)t < x < v_m t, \\ 0, & \text{si } x > v_m t. \end{cases}$$



Pour un temps fixé, on voit que la densité décroît de la densité maximale (vitesse nulle) graduellement jusqu'à la densité critique qui permet la vitesse maximale. On remarque la discontinuité de la densité pour $x = v_m t$.

2. Considérons une voiture qu'à l'instant $t = 0$ se trouve en $x = \bar{x} < 0$. La voiture restera immobile jusqu'à l'instant $t_0 = |\bar{x}|/\lambda$. À cet instant elle rentre dans la région S_1 où la vitesse est donnée par

$$v(\rho(x, t)) = \lambda + \frac{x}{t}.$$



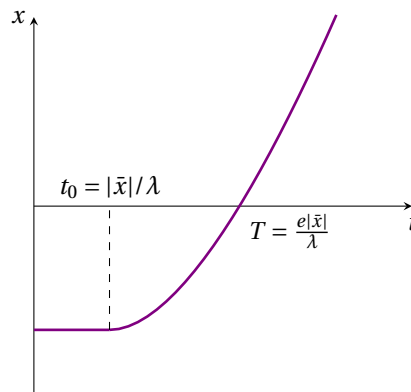
Si on indique par $x = x(t)$ la trajectoire de la voiture, on a

$$\begin{cases} x'(t) = \lambda + \frac{x(t)}{t}, \\ x(t_0) = \bar{x}. \end{cases}$$

On obtient

$$x(t) = \lambda t \left(\ln \left(\frac{\lambda t}{|\bar{x}|} \right) - 1 \right).$$

La voiture entre donc dans le tunnel à l'instant T pour lequel $x(T) = 0$, c'est-à-dire $T = \frac{e|\bar{x}|}{\lambda}$.



5. Systèmes hyperboliques

Dans ce dernier chapitre on s'intéresse à la résolution de problèmes de Riemann associés aux systèmes hyperboliques non-linéaires en une dimension d'espace. Plus précisément, on cherche une fonction

$$\begin{aligned} \mathbf{W}: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^p \\ (t, x) &\mapsto \mathbf{W}(t, x) \end{aligned}$$

qui vérifie (au sens faible) le système d'EDPs

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{W} + \partial_x \mathbf{F}(\mathbf{W}) = \mathbf{0}, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ \mathbf{W}(0, x) = \begin{cases} \mathbf{W}_L & \text{si } x < 0, \\ \mathbf{W}_R & \text{si } x > 0, \end{cases} \end{cases}$$

avec le flux

$$\begin{aligned} \mathbf{F}: \mathbb{R}^p &\rightarrow \mathbb{R}^p \\ \mathbf{W} &\mapsto \mathbf{F}(\mathbf{W}) \end{aligned}$$

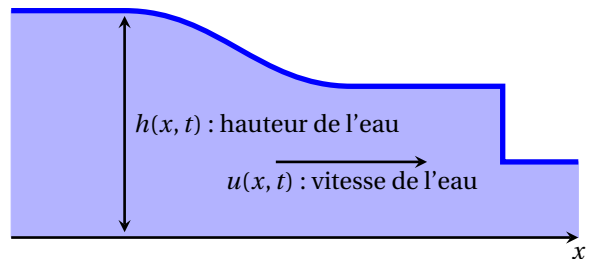
Pour des solutions régulières on peut réécrire ce système sous la forme quasi-linéaire

$$\partial_t \mathbf{W} + \mathbb{B}(\mathbf{W}) \partial_x \mathbf{W} = \mathbf{0}$$

avec $\mathbb{B}(\mathbf{W})$ la matrice jacobienne du flux \mathbf{F} et on note $\lambda_1(\mathbf{W}) < \lambda_2(\mathbf{W}) < \dots < \lambda_p(\mathbf{W})$ ses valeurs propres.

5.1. Exemple : le système de Saint-Venant

On cherche à simuler un écoulement d'eau sous l'hypothèse de faible profondeur dans le cas 1D et à fond plat. De plus, l'eau sera considérée comme un fluide incompressible non visqueux et les frottements air/eau et eau/sol seront négligés. Les inconnues, fonction du temps $t \in [0; +\infty[$ et de l'espace $x \in \mathbb{R}$, sont $h \equiv h(x, t) > 0$ la hauteur de l'eau et $u \equiv u(x, t) \in \mathbb{R}$ sa vitesse horizontale (on suppose qu'elle est la même sur toute la hauteur de l'eau). On note $g > 0$ la constante de gravité. En dimension un d'espace et pour une topographie plate, on modélise ce type d'écoulements par le système de Saint Venant (ou des eaux peu profondes)



$$\begin{cases} \partial_t h + \partial_x(hu) = 0, \\ \partial_t(hu) + \partial_x(hu^2 + gh^2/2) = 0, \end{cases} \quad \text{avec } x \in \mathbb{R}, t > 0. \quad (5.1)$$

Sous forme vectorielle il s'écrit

$$\partial_t \mathbf{U} + \partial_x \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \mathbf{0}$$

ayant défini

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} h \\ hu \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} hu \\ hu^2 + \frac{g}{2} h^2 \end{pmatrix}.$$

1. Soit $\mathbf{W} = (h, u)$, alors le système (5.1) se réécrit, pour des solutions régulières, sous la forme quasi-linéaire

$$\partial_t \mathbf{W} + \mathbb{A}(\mathbf{W}) \partial_x \mathbf{W} = \mathbf{0}. \quad (5.2)$$

Montrer que la matrice $\mathbb{A}(\mathbf{W})$ s'écrit

$$\begin{pmatrix} u & h \\ g & u \end{pmatrix}.$$

2. Calculer les deux valeurs propres $\lambda_1(\mathbf{W})$ et $\lambda_2(\mathbf{W})$ de la matrice $\mathbb{A}(\mathbf{W})$. Afin de fixer les notations on ordonne les deux valeurs propres selon $\lambda_1(\mathbf{W}) < \lambda_2(\mathbf{W})$. Proposer une base associée de vecteurs propres à droite $\{\mathbf{r}_1(\mathbf{W}), \mathbf{r}_2(\mathbf{W})\}$. En déduire que le système (5.1) est strictement hyperbolique.
3. Vérifier que les champs 1 et 2 sont vraiment non linéaires.
4. On note I_k l'invariant de Riemann du k -ème champ caractéristique. Montrer qu'un choix possible pour I_1 et I_2 est

$$I_1 = u + 2\sqrt{gh},$$

$$I_2 = u - 2\sqrt{gh}.$$

5. Pour un état gauche $\mathbf{W}_L = (h_L, u_L)$ donné on cherche les états $\mathbf{W} = (h, u)$ qui peuvent être relié à \mathbf{W}_L par une onde de détente.
 - 5.1. Considérons le 1-champ. Montrer que $u > u_L$, $h < h_L$. Calculer u en fonction de h_L , u_L et h . Plus précisément, montrer que u peut se mettre sous la forme

$$u = u_L + r(h_L, h)$$

en explicitant la fonction r . Étudier la fonction $h \mapsto u = u_L + r(h_L, h)$ et tracer son graphe dans le plan (h, u) .

- 5.2. Reprendre la question pour le 2-champ.

6. Pour un état gauche $\mathbf{W}_L = (h_L, u_L)$ donné on cherche les états $\mathbf{W} = (h, u)$ qui peuvent être relié à \mathbf{W}_L par une onde de choc entropique de vitesse $\dot{\sigma}_k$.

- 6.1. Montrer que les relations de RANKINE-HUGONOT peuvent s'écrire sous la forme

$$\begin{cases} j = h(u - \dot{\sigma}_k) = h_L(u_L - \dot{\sigma}_k), \\ uh(u - \dot{\sigma}_k) + \frac{g}{2}h^2 = u_L h_L(u_L - \dot{\sigma}_k) + \frac{g}{2}h_L^2. \end{cases}$$

En déduire que

$$j = \frac{g}{2} \frac{h_L^2 - h^2}{u - u_L}.$$

- 6.2. Considérons le 1-champ. Calculer u en fonction de h_L , u_L et h . Plus précisément, montrer que u peut se mettre sous la forme

$$u = u_L + d(h_L, h)$$

en explicitant la fonction d . Étudier la fonction $h \mapsto u = u_L + d(h_L, h)$ et tracer son graphe dans le plan (h, u) . Montrer que $u < u_L$, $h > h_L$.

- 6.3. Reprendre la question pour le 2-champ.

7. À l'aide du dessin d'onde dans le plan (h, u) résoudre le problème de Riemann : pour un état gauche \mathbf{W}_L et un état droit \mathbf{W}_R on construira une solution composée d'une 1-onde et d'une 2-onde séparant un état intermédiaire \mathbf{W}^* . On précisera les valeurs de cet état intermédiaire ainsi que les vitesses des ondes.
8. Cherchons maintenant une entropie pour le système (5.1). Montrer que la fonction

$$\eta(\mathbf{W}) = \frac{hu^2}{2} + \frac{gh^2}{2}$$

est une entropie du système avec flux d'entropie

$$\Phi(\mathbf{W}) = \frac{hu^3}{2} + gh^2u.$$

Solution

1. On développe les dérivées du système (5.1) pour des solutions régulières :

$$\begin{cases} \partial_t h + u\partial_x h + h\partial_x u = 0, \\ u\partial_t h + h\partial_t u + 2hu\partial_x u + u^2\partial_x h + gh\partial_x h = 0. \end{cases}$$

Il se réécrit alors

$$\begin{cases} \partial_t h + u\partial_x h + h\partial_x u = 0, \\ u(-u\partial_x h - h\partial_x u) + h\partial_t u + 2hu\partial_x u + u^2\partial_x h + gh\partial_x h = 0 \end{cases}$$

et on trouve le système quasi-linéaire suivant :

$$\partial_t \begin{pmatrix} h \\ u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u & h \\ g & u \end{pmatrix} \partial_x \begin{pmatrix} h \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2. On cherche les deux solutions $\lambda_k(\mathbf{W})$ de l'équation $\det(\mathbf{A}(\mathbf{W}) - \lambda(\mathbf{W})\mathbf{Id}) = 0$, i.e. de l'équation

$$(u - \lambda)^2 - hg = 0.$$

On obtient

$$\lambda_1(\mathbf{W}) = u - \sqrt{gh} < \lambda_2(\mathbf{W}) = u + \sqrt{gh}.$$

Puisque $h \neq 0$, les valeurs propres sont réelles et distinctes donc le système (5.1) est strictement hyperbolique. On peut alors prendre

$$\mathbf{r}_1(\mathbf{W}) = \begin{pmatrix} -\sqrt{h} \\ \sqrt{g} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_2(\mathbf{W}) = \begin{pmatrix} \sqrt{h} \\ \sqrt{g} \end{pmatrix}.$$

3. Pour déterminer la nature des deux champs caractéristiques on calcule $(\nabla \lambda_k)^T \cdot \mathbf{r}_k$ pour $k = 1, 2$:

$$(\nabla \lambda_1(\mathbf{W}))^T \cdot \mathbf{r}_1(\mathbf{W}) = \frac{\partial(u - \sqrt{gh})}{\partial h} (-\sqrt{h}) + \frac{\partial(u - \sqrt{gh})}{\partial u} \sqrt{g} = \frac{3}{2} \sqrt{g} > 0, \quad \text{1-champ VNL,}$$

$$(\nabla \lambda_2(\mathbf{W}))^T \cdot \mathbf{r}_2(\mathbf{W}) = \frac{\partial(u + \sqrt{gh})}{\partial h} \sqrt{h} + \frac{\partial(u + \sqrt{gh})}{\partial u} \sqrt{g} = \frac{3}{2} \sqrt{g} > 0, \quad \text{2-champ VNL.}$$

Étant donné qu'aucun champ n'est LD, il n'y aura aucune discontinuité de contact.

4. On vérifie que $(\nabla I_k(\mathbf{W}))^T \cdot \mathbf{r}_k(\mathbf{W}) = 0$ pour $k = 1, 2$:

$$(\nabla I_1(\mathbf{W}))^T \cdot \mathbf{r}_1(\mathbf{W}) = \frac{\partial(u + 2\sqrt{gh})}{\partial h} (-\sqrt{h}) + \frac{\partial(u + 2\sqrt{gh})}{\partial u} \sqrt{g} = 0,$$

$$(\nabla I_2(\mathbf{W}))^T \cdot \mathbf{r}_2(\mathbf{W}) = \frac{\partial(u - 2\sqrt{gh})}{\partial h} \sqrt{h} + \frac{\partial(u - 2\sqrt{gh})}{\partial u} \sqrt{g} = 0.$$

5. Étude des détente : on cherche à déterminer les états droits $\mathbf{W} = (h, u)$ qui peuvent être reliés à un état gauche $\mathbf{W}_L = (h_L, u_L)$ par une onde de détente.

5.1. 1-champ :

▷ Dans une détente les invariants de Riemann sont conservés. Ici $k = 1$ d'où

$$I_1(\mathbf{W}_L) = I_1(\mathbf{W})$$

donc

$$u_L + 2\sqrt{gh_L} = u + 2\sqrt{gh}$$

d'où $h \mapsto u = u_L + 2\sqrt{g}(\sqrt{h_L} - \sqrt{h})$.

▷ La condition d'entropie $\lambda_1(\mathbf{W}_L) < \lambda_1(\mathbf{W})$ se réécrit $u_L - \sqrt{gh_L} < u - \sqrt{gh}$ donc $u > u_L + \sqrt{g}(\sqrt{h} - \sqrt{h_L})$. Comme $u = u_L + 2\sqrt{g}(\sqrt{h_L} - \sqrt{h})$, on obtient

$$h < h_L \quad \text{et} \quad u > u_L.$$

On obtient ainsi

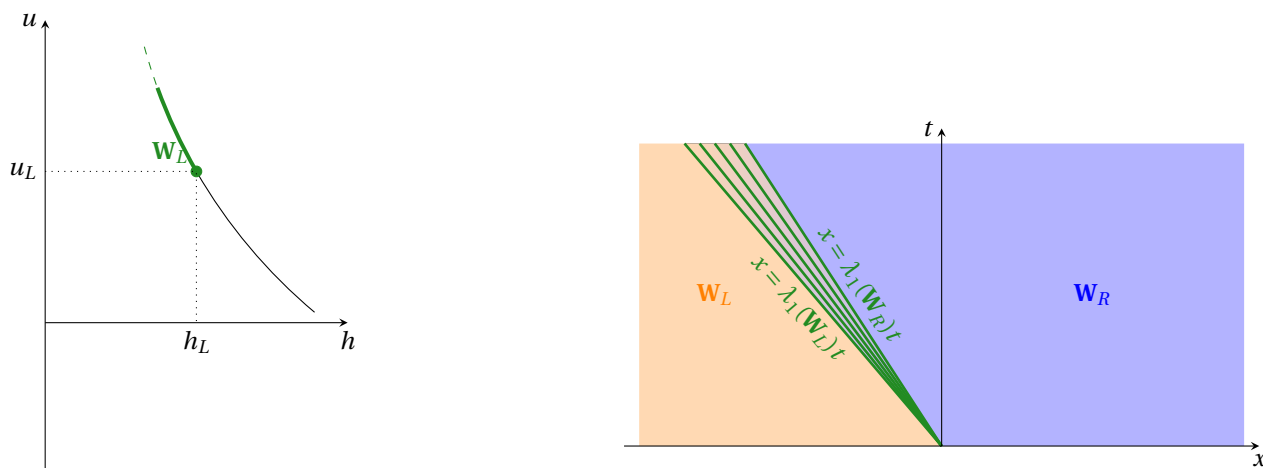
$$u = u_L + r(h_L, h) \quad \text{pour } h < h_L$$

avec $r(h_L, h) = 2\sqrt{g}(\sqrt{h_L} - \sqrt{h})$. De plus,

$$u'(h) = -\sqrt{\frac{g}{h}} < 0, \quad \text{pour } h < h_L,$$

$$u''(h) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{h^3}} > 0, \quad \text{pour } h < h_L.$$

On a donc les graphes suivants :



Pour calculer la solution en un point (\hat{x}, \hat{t}) à l'intérieure de l'onde on considère la caractéristique qui relie ce point à l'origine de l'onde $(0, 0)$. La vitesse caractéristique de l'onde est $\frac{dx}{dt} = \lambda_1$, c'est-à-dire $\frac{\hat{x}}{\hat{t}} = u - \sqrt{gh}$. De plus, l'invariant de Riemann est conservé dans l'onde, c'est-à-dire $u + 2\sqrt{gh} = u_L + 2\sqrt{gh_L}$. On obtient $u(\hat{x}, \hat{t}) = \frac{1}{3} \left(u_L + 2\sqrt{gh_L} + 2\frac{\hat{x}}{\hat{t}} \right)$ et $h(\hat{x}, \hat{t}) = \frac{1}{9g} \left(u_L + 2\sqrt{gh_L} - \frac{\hat{x}}{\hat{t}} \right)^2$.

5.2. 2-champ :

▷ Dans une détente les invariants de Riemann sont conservés. Ici $k = 2$ d'où

$$I_2(W_L) = I_2(W)$$

donc

$$u_L - 2\sqrt{gh_L} = u - 2\sqrt{gh}$$

d'où $h \rightarrow u = u_L + 2\sqrt{g}(\sqrt{h} - \sqrt{h_L})$.

▷ La condition d'entropie $\lambda_2(W_L) < \lambda_2(W)$ se réécrit $u_L + \sqrt{gh_L} < u + \sqrt{gh}$ donc $u > u_L + \sqrt{g}(\sqrt{h_L} - \sqrt{h})$. Comme $u = u_L + 2\sqrt{g}(\sqrt{h} - \sqrt{h_L})$, on obtient

$$h > h_L \quad \text{et} \quad u > u_L.$$

On obtient ainsi

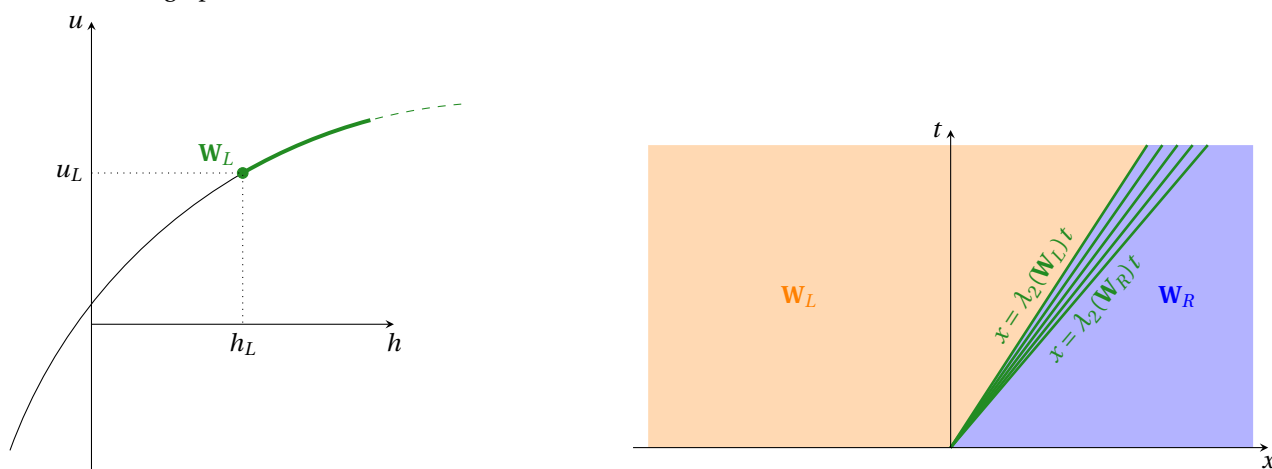
$$u = u_L + r(h_L, h) \quad \text{pour } h < h_L$$

avec $r(h_L, h) = 2\sqrt{g}(\sqrt{h} - \sqrt{h_L})$. De plus,

$$u'(h) = \sqrt{\frac{g}{h}} > 0, \quad \text{pour } h > h_L,$$

$$u''(h) = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{h^3}} < 0, \quad \text{pour } h > h_L.$$

On a donc les graphes suivants :



Pour calculer la solution en un point (\hat{x}, \hat{t}) à l'intérieure de l'onde on considère la caractéristique qui relie ce point à l'origine de l'onde $(0, 0)$. La vitesse caractéristique de l'onde est $\frac{dx}{dt} = \lambda_2$, c'est-à-dire $\frac{\hat{x}}{\hat{t}} = u + \sqrt{gh}$. De plus, l'invariant de Riemann est conservé dans l'onde, c'est-à-dire $u - 2\sqrt{gh} = u_R - 2\sqrt{gh_R}$. On obtient $u(\hat{x}, \hat{t}) = \frac{1}{3} \left(-u_R + 2\sqrt{gh_R} + 2\frac{\hat{x}}{\hat{t}} \right)$ et $h(\hat{x}, \hat{t}) = \frac{1}{9g} \left(u_R - 2\sqrt{gh_R} + \frac{\hat{x}}{\hat{t}} \right)^2$.

6. Étude des chocs : on cherche à déterminer les états droits $\mathbf{W} = (h, u)$ qui peuvent être reliés à un état gauche $\mathbf{W}_L = (h_L, u_L)$ par une discontinuité de vitesse $\dot{\sigma}_k$. Les relations de RANKINE-HUGONIOT pour un choc de vitesse $\dot{\sigma}_k$ s'écrivent

$$\begin{cases} \dot{\sigma}_k = \frac{h_L u_L - hu}{h_L - h}, \\ \dot{\sigma}_k = \frac{h_L u_L^2 + (g/2)h_L^2 - hu^2 - (g/2)h^2}{h_L u_L - hu}, \end{cases}$$

qu'on peut réécrire comme

$$\begin{cases} hu - \dot{\sigma}_k h = h_L u_L - \dot{\sigma}_k h_L, \\ (u - \dot{\sigma}_k)hu - (u_L - \dot{\sigma}_k)h_L u_L = (g/2)(h_L^2 - h^2), \end{cases}$$

ou encore

$$\begin{cases} j_k \equiv h(u - \dot{\sigma}_k) = h_L(u_L - \dot{\sigma}_k), \\ j_k(u - u_L) = (g/2)(h_L^2 - h^2). \end{cases}$$

6.1. 1-champ : la condition d'entropie (Lax) pour $k = 1$ demande à ce que la vitesse $\dot{\sigma}_1$ du 1-choc vérifie

$$\begin{cases} \lambda_1(\mathbf{W}) < \dot{\sigma}_1 < \lambda_2(\mathbf{W}), \\ \dot{\sigma}_1 < \lambda_1(\mathbf{W}_L), \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} u - \sqrt{gh} < \dot{\sigma}_1 < u + \sqrt{gh}, \\ \dot{\sigma}_1 < u_L - \sqrt{gh_L}, \end{cases}$$

donc

$$\begin{cases} u - \sqrt{gh} < \dot{\sigma}_1 \\ \dot{\sigma}_1 < u + \sqrt{gh}, \\ \dot{\sigma}_1 < u_L - \sqrt{gh_L}, \end{cases} \implies \begin{cases} j_1 < h\sqrt{gh} \\ j_1 > -h\sqrt{gh}, \\ j_1 > h_L\sqrt{gh_L}, \end{cases} \implies \begin{cases} h > h_L, \\ j_1 > 0, \end{cases} \xRightarrow{j_1 = \frac{g(h_L^2 - h^2)}{2(u - u_L)}} u < u_L$$

et on conclut que

$$h > h_L \quad \text{et} \quad u < u_L.$$

En éliminant $\dot{\sigma}_1$ dans les relations de RANKINE-HUGONIOT on trouve

$$h \mapsto u = u_L + d(h_L, h) \quad \text{pour } h > h_L$$

avec $d(h_L, h) = (h_L - h)\sqrt{\frac{g}{2} \frac{h_L + h}{h_L h}}$ et la vitesse du 1-choc est

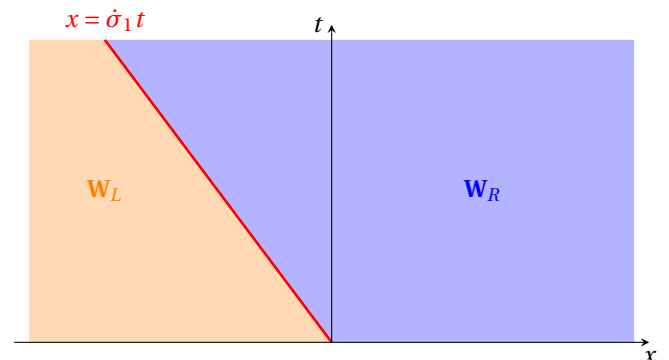
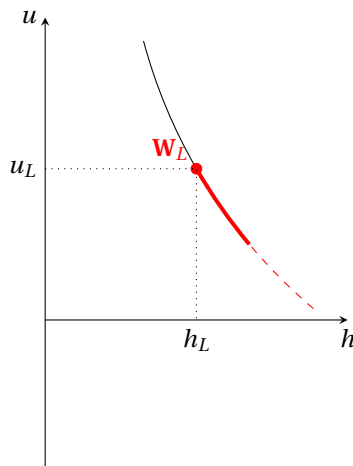
$$\dot{\sigma}_1 = u_L - h\sqrt{\frac{g}{2} \frac{h_L + h}{h_L h}}.$$

De plus,

$$u'(h) = -\sqrt{\frac{g}{8} \frac{h_L h + 2h^2 + h_L^2}{h^3 h_L (h_L + h)}} < 0, \quad \text{pour } h > h_L,$$

$$u''(h) = \sqrt{\frac{g}{32} \frac{h_L^3 (5h + 3h_L)}{h^5 (h_L + h)^3}} > 0. \quad \text{pour } h > h_L.$$

On a donc les graphes suivants :



6.2. 2-champ : la condition d'entropie (Lax) pour $k = 2$ demande à ce que la vitesse $\dot{\sigma}_2$ du 2-choc vérifie

$$\begin{cases} \lambda_2(\mathbf{W}) < \dot{\sigma}_2, \\ \lambda_1(\mathbf{W}_L) < \dot{\sigma}_2 < \lambda_2(\mathbf{W}_L), \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} u + \sqrt{gh} < \dot{\sigma}_2, \\ u_L - \sqrt{gh_L} < \dot{\sigma}_2 < u_L + \sqrt{gh_L}, \end{cases}$$

donc

$$\begin{cases} u + \sqrt{gh} < \dot{\sigma}_2 \\ \dot{\sigma}_2 > u_L - \sqrt{gh_L}, \\ \dot{\sigma}_2 < u_L + \sqrt{gh_L}, \end{cases} \implies \begin{cases} j_2 < -h\sqrt{gh} \\ j_2 < h_L\sqrt{gh_L}, \\ j_2 > -h_L\sqrt{gh_L}, \end{cases} \implies \begin{cases} h < h_L, \\ j_2 < 0, \end{cases} \quad \begin{matrix} j_2 = \frac{g(h_L^2 - h^2)}{2(u - u_L)} \\ \implies u < u_L \end{matrix}$$

et on conclut que

$$h < h_L \quad \text{et} \quad u < u_L.$$

En éliminant $\dot{\sigma}_2$ dans les relations de RANKINE-HUGONOT on trouve

$$h \mapsto u = u_L + d(h_L, h) \quad \text{pour } h < h_L$$

avec $d(h_L, h) = (h - h_L)\sqrt{\frac{g}{2} \frac{h_L + h}{h_L h}}$ et la vitesse du 2-choc est

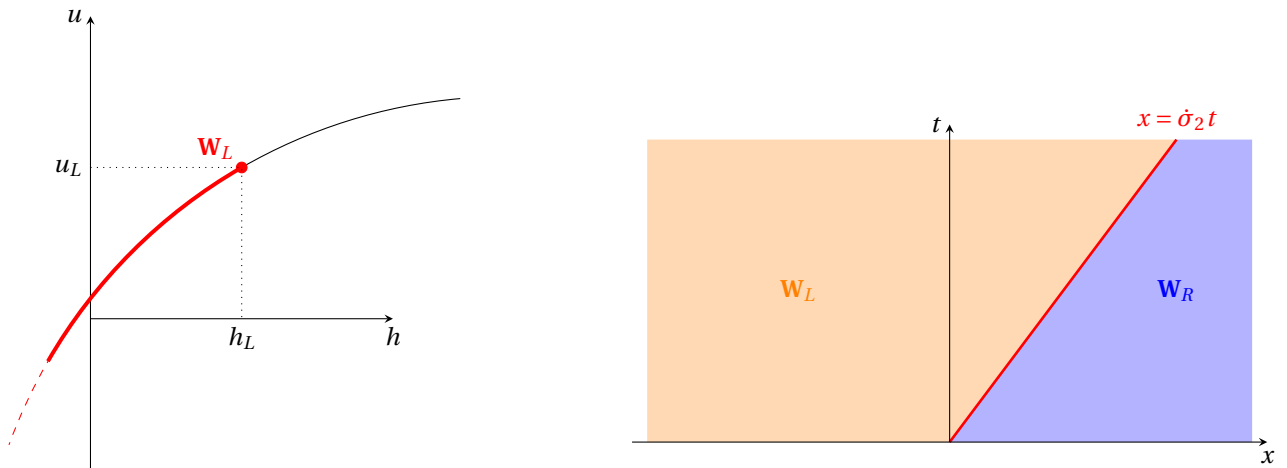
$$\dot{\sigma}_2 = u_L + h\sqrt{\frac{g}{2} \frac{h_L + h}{h_L h}}.$$

De plus,

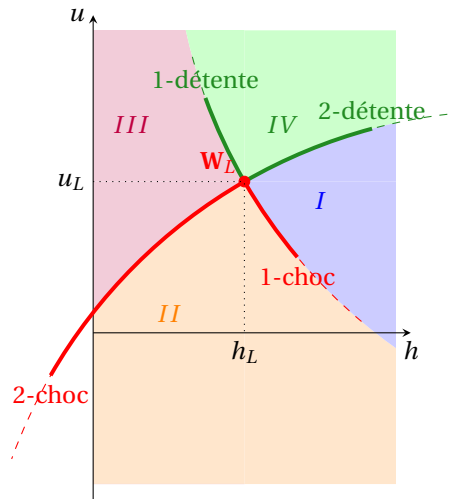
$$u'(h) = \sqrt{\frac{g}{8} \frac{h_L h + 2h^2 + h_L^2}{h^3 h_L (h_L + h)}} > 0, \quad \text{pour } h < h_L,$$

$$u''(h) = -\sqrt{\frac{g}{32} \frac{h_L^3 (5h + 3h_L)}{h^5 (h_L + h)^3}} < 0. \quad \text{pour } h < h_L.$$

On a donc les graphes suivants :



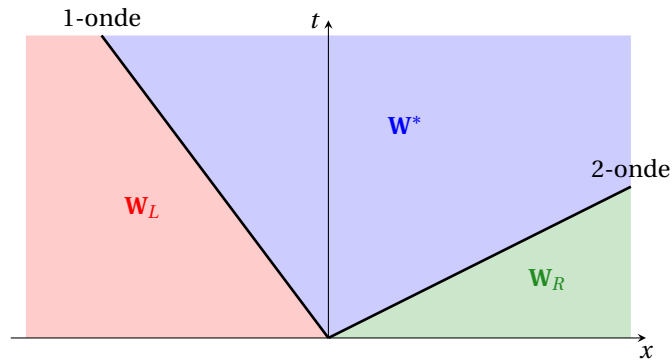
Récapitulatif : quel que soit $\mathbf{W}_L = (\tau_L, u_L)$, le demi-plan $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ se décompose en quatre zones séparées par les quatre demi-courbes 1-choc, 2-choc, 1-détente et 2-détente.



7. Soit un problème de Riemann avec les deux états constants donnés suivants :

$$\mathbf{W}_L = \begin{pmatrix} h_L \\ u_L \end{pmatrix}, \quad \mathbf{W}_R = \begin{pmatrix} h_R \\ u_R \end{pmatrix}.$$

La solution est constituée de trois états constants séparés par deux ondes.



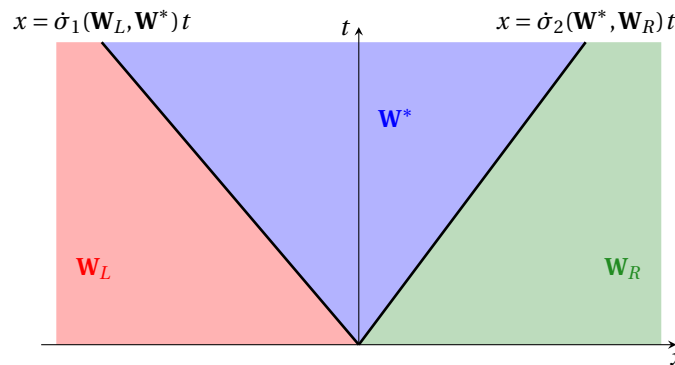
Pour expliciter cette solution on cherche à définir l'inconnue

$$\mathbf{W}^* = \begin{pmatrix} h^* \\ u^* \end{pmatrix}$$

à l'aide de l'étude des ondes précédentes.

On a cinq cas possibles :

Cas 1) 1-choc et 2-choc (il correspond au cas où \mathbf{W}_R appartient à la zone II , c'est-à-dire si $h^* > h_L$ et $h^* > h_R$)



L'unique solution faible entropique est

$$\mathbf{W}(x, t) = \begin{cases} \mathbf{W}_L, & \text{si } x < \dot{\sigma}_1(h_L, h^*, u_L)t, \\ \mathbf{W}^*, & \text{si } \dot{\sigma}_1(h_L, h^*, u_L)t < x < \dot{\sigma}_2(h^*, h_R, u^*)t, \\ \mathbf{W}_R, & \text{si } x > \dot{\sigma}_2(h^*, h_R, u^*)t, \end{cases}$$

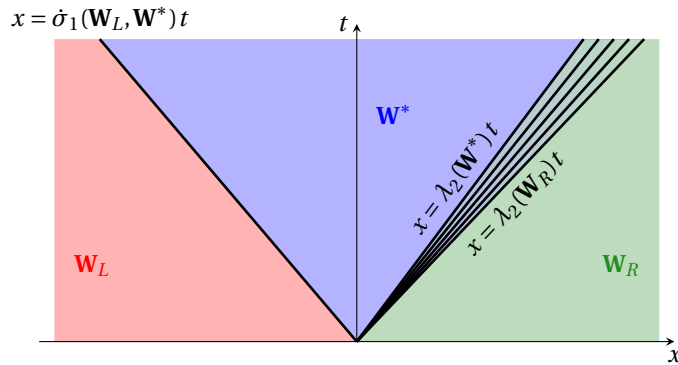
avec

$$\begin{aligned}\dot{\sigma}_1(h_L, h^*, u_L) &= u_L - h^* \sqrt{\frac{g}{2} \frac{h_L + h^*}{h_L h^*}} \\ \dot{\sigma}_2(h^*, h_R, u^*) &= u^* + h_R \sqrt{\frac{g}{2} \frac{h^* + h_R}{h^* h_R}}\end{aligned}$$

et h^* et u^* est l'unique solution du système

$$\begin{cases} u^* = u_L + (h_L - h^*) \sqrt{\frac{g}{2} \frac{h_L + h^*}{h_L h^*}}, \\ u_R = u^* + (h_R - h^*) \sqrt{\frac{g}{2} \frac{h^* + h_R}{h^* h_R}}. \end{cases}$$

Cas 2) 1-choc et 2-détente (il correspond au cas où W_R appartient à la zone I, c'est-à-dire si $h^* > h_L$ et $h^* < h_R$)



L'unique solution faible entropique est

$$W(x, t) = \begin{cases} W_L, & \text{si } x < \dot{\sigma}_1(h_L, h^*, u_L)t, \\ W^*, & \text{si } \dot{\sigma}_1(h_L, h^*, u_L)t < x < (u^* + \sqrt{gh^*})t, \\ W_{2\text{-det}}, & \text{si } (u^* + \sqrt{gh^*})t < x < (u_R + \sqrt{gh_R})t, \\ W_R, & \text{si } x > (u_R + \sqrt{gh_R})t, \end{cases}$$

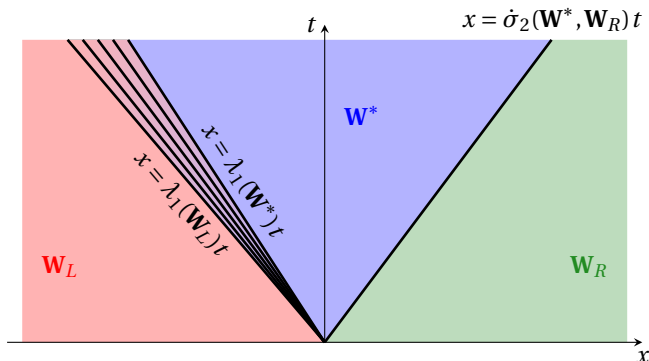
avec

$$\begin{aligned}\dot{\sigma}_1(h_L, h^*, u_L) &= u_L - h^* \sqrt{\frac{g}{2} \frac{h_L + h^*}{h_L h^*}}, \\ W_{2\text{-det}} &= \left(\frac{1}{9g} (-u_R + 2\sqrt{gh_R} + \frac{x}{t})^2, \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{3} (u_R - 2\sqrt{gh_R} + 2\frac{x}{t}) \right),\end{aligned}$$

et h^* et u^* l'unique solution du système

$$\begin{cases} u^* = u_L + (h_L - h^*) \sqrt{\frac{g}{2} \frac{h_L + h^*}{h_L h^*}}, \\ u_R = u^* + 2\sqrt{g}(\sqrt{h_R} - \sqrt{h^*}). \end{cases}$$

Cas 3) 1-détente et 2-choc (il correspond au cas où W_R appartient à la zone III, c'est-à-dire si $h^* < h_L$ et $h^* > h_R$)



L'unique solution faible entropique est

$$\mathbf{W}(x, t) = \begin{cases} \mathbf{W}_L, & \text{si } x < (u_L - \sqrt{gh_L})t, \\ \mathbf{W}_{1\text{-det}}, & \text{si } (u_L - \sqrt{gh_L})t < x < (u^* - \sqrt{gh^*})t, \\ \mathbf{W}^*, & \text{si } (u^* - \sqrt{gh^*})t < x < \dot{\sigma}_2(h^*, h_R, u^*)t, \\ \mathbf{W}_R, & \text{si } x > \dot{\sigma}_2(h^*, h_R, u^*)t, \end{cases}$$

avec

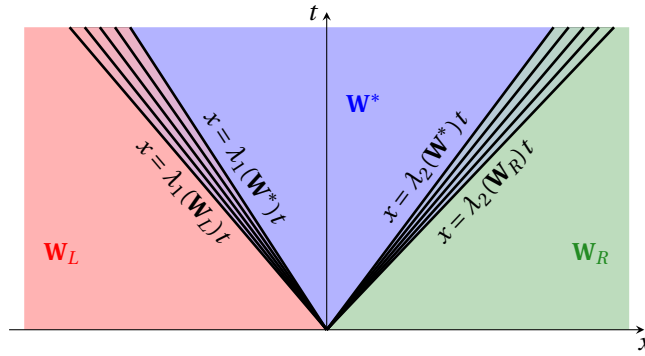
$$\dot{\sigma}_2(h^*, h_R) = u^* + h_R \sqrt{\frac{g}{2} \frac{h^* + h_R}{h^* h_R}},$$

$$\mathbf{W}_{1\text{-det}} = \left(\begin{array}{c} \frac{1}{9g} (u_L + 2\sqrt{gh_L} - \frac{x}{t})^2 \\ \frac{1}{3} (u_L + 2\sqrt{gh_L} + 2\frac{x}{t}) \end{array} \right),$$

et h^* et u^* l'unique solution du système

$$\begin{cases} u^* = u_L + 2\sqrt{g}(\sqrt{h_L} - \sqrt{h^*}), \\ u_R = u^* + (h_R - h^*)\sqrt{\frac{g}{2} \frac{h^* + h_R}{h^* h_R}}. \end{cases}$$

Cas 4) 1-détente et 2-détente (il correspond au cas où \mathbf{W}_R appartient à la zone IV, c'est-à-dire si $h^* < h_L$ et $h^* < h_R$)



L'unique solution faible entropique est

$$\mathbf{W}(x, t) = \begin{cases} \mathbf{W}_L, & \text{si } x < (u_L - \sqrt{gh_L})t, \\ \mathbf{W}_{1\text{-det}}, & \text{si } (u_L - \sqrt{gh_L})t < x < (u^* - \sqrt{gh^*})t, \\ \mathbf{W}^*, & \text{si } (u^* - \sqrt{gh^*})t < x < (u^* + \sqrt{gh^*})t, \\ \mathbf{W}_{2\text{-det}}, & \text{si } (u^* + \sqrt{gh^*})t < x < (u_R + \sqrt{gh_R})t, \\ \mathbf{W}_R, & \text{si } x > (u_R + \sqrt{gh_R})t \end{cases}$$

avec

$$\mathbf{W}_{1\text{-det}} = \left(\begin{array}{c} \frac{1}{9g} (u_L + 2\sqrt{gh_L} - \frac{x}{t})^2 \\ \frac{1}{3} (u_L + 2\sqrt{gh_L} + 2\frac{x}{t}) \end{array} \right), \quad \mathbf{W}_{2\text{-det}} = \left(\begin{array}{c} \frac{1}{9g} (-u_R + 2\sqrt{gh_R} + \frac{x}{t})^2 \\ \frac{1}{3} (u_R - 2\sqrt{gh_R} + 2\frac{x}{t}) \end{array} \right),$$

et h^* et u^* l'unique solution du système

$$\begin{cases} u^* = u_L + 2\sqrt{g}(\sqrt{h_L} - \sqrt{h^*}), \\ u_R = u^* + 2\sqrt{g}(\sqrt{h_R} - \sqrt{h^*}). \end{cases}$$

Remarque : il peut se générer une zone de hauteur h nulle lorsque \mathbf{W}_R appartient à la zone IV : un état intermédiaire $h^* > 0$ n'est possible que si

$$u_R - u_L < 2\sqrt{g}(\sqrt{h_R} - \sqrt{h_L}).$$

La méthode de résolution du problème de Riemann consiste donc à calculer cet état intermédiaire (h^* , u^*). On a vu que cet état peut être relié à l'état de gauche (h_L , u_L) par une 1-onde :

$$u^* = \begin{cases} u_L - (h^* - h_L) \frac{2\sqrt{g}}{\sqrt{h_L} + \sqrt{h^*}} & \text{si } h^* < h_L \text{ (1-détente)} \\ u_L - (h^* - h_L) \sqrt{\frac{g}{2} \frac{h^* + h_L}{h^* h_L}} & \text{si } h^* > h_L \text{ (1-choc)} \end{cases}$$

et à l'état de droite (h_R, u_R) par une 2-onde :

$$u^* = \begin{cases} u_R + (h^* - h_R) \frac{2\sqrt{g}}{\sqrt{h_R + \sqrt{h^*}}} & \text{si } h^* < h_R \text{ (2-détente)} \\ u_R + (h^* - h_R) \sqrt{\frac{g}{2} \frac{h^* + h_R}{h^* h_R}} & \text{si } h^* > h_R \text{ (2-choc)} \end{cases}$$

Pour calculer h^* on doit donc résoudre

$$u_R + (h^* - h_R)z(h^*, h_R) = u_L - (h^* - h_L)z(h^*, h_L)$$

avec

$$z(h, \psi) = \begin{cases} \frac{2\sqrt{g}}{\sqrt{h + \sqrt{\psi}}} & \text{si } h \leq \psi, \\ \sqrt{\frac{g}{2} \frac{h + \psi}{h\psi}} & \text{sinon.} \end{cases}$$

ce qui revient à chercher le zéro de la fonction

$$f(h) = u_R - u_L + (h - h_L)z(h, h_L) + (h - h_R)z(h, h_R)$$

et u^* est déduit tout simplement par

$$u^* = u_R + (h^* - h_R)z(h^*, h_R).$$

Remarque : Notons que pour $h_L = 0$ (resp. $h_R = 0$), la 1-onde (resp. la 2-onde) de choc n'est pas définie, dans ce cas la seule solution possible est une onde de détente.

8. Pour vérifier que η est une entropie du système (5.1) avec le flux d'entropie Φ , on montre que

$$\nabla_{\mathbf{W}}\Phi(\mathbf{W}) = \nabla_{\mathbf{W}}\eta(\mathbf{W}) \cdot \mathbb{A}(\mathbf{W}).$$

Or,

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} h \\ u \end{pmatrix}, \quad \Phi(\mathbf{W}) = \frac{hu^3}{2} + gh^2u,$$

donc

$$\nabla_{\mathbf{W}}\Phi(\mathbf{W}) = \begin{pmatrix} \frac{u^3}{2} + 2ghu, \\ \frac{3hu^2}{2} + gh^2, \end{pmatrix}$$

et

$$\eta(\mathbf{W}) = \frac{hu^2}{2} + \frac{gh^2}{2}$$

d'où

$$\nabla_{\mathbf{W}}\eta(\mathbf{W}) = \begin{pmatrix} \frac{u^2}{2} + gh \\ hu \end{pmatrix}.$$

Donc

$$\nabla_{\mathbf{W}}\eta(\mathbf{W}) \cdot \mathbb{A}(\mathbf{W}) = \begin{pmatrix} \frac{u^2}{2} + gh \\ hu \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} u & h \\ g & u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{u^3}{2} + 2ghu \\ \frac{3hu^2}{2} + gh^2 \end{pmatrix} = \nabla_{\mathbf{W}}\Phi(\mathbf{W}).$$

Il ne reste à prouver que la convexité de l'entropie en calculant la matrice hessienne :

$$d^2\eta(\mathbf{W}) = \begin{pmatrix} g & u \\ u & h \end{pmatrix}.$$

Si $gh - u^2 > 0$ l'entropie est convexe.

5.2. Exemple : Euler isotherme en coordonnées Lagrangiennes

On considère le système d'équations aux dérivées partielles

$$\begin{cases} \partial_t \tau - \partial_x u = 0, \\ \partial_t u + \partial_x \frac{1}{\tau} = 0, \end{cases} \quad (5.3)$$

(ce système est celui des équations d'Euler en régime isotherme en coordonnées Lagrangiennes).

1. Trouver les vecteurs $\mathbf{V}: \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ et $\mathbf{F}(\mathbf{V}): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tels que le système (5.3) s'écrit

$$\partial_t \mathbf{V} + \partial_x \mathbf{F}(\mathbf{V}) = \mathbf{0}.$$

2. En se plaçant dans les variables $\mathbf{W} = (\tau, u)$, le système (5.3) se réécrit, pour des solutions régulières, sous la forme quasiliénaire

$$\partial_t \mathbf{W} + \mathbb{A}(\mathbf{W}) \partial_x \mathbf{W} = \mathbf{0}. \quad (5.4)$$

Montrer que la matrice $\mathbb{A}(\mathbf{W})$ s'écrit

$$\begin{pmatrix} u & -1 \\ -\frac{1}{\tau^2} & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Calculer les deux valeurs propres λ_1 et λ_2 . Afin de fixer les notations on ordonne les deux valeurs propres selon $\lambda_1 < \lambda_2$. Proposer une base associée de vecteurs propres à droite $\{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2\}$ de la matrice \mathbb{A} . En déduire que le système (5.4) est hyperbolique pour $(\tau, u) \in \Omega$ où Ω est un ouvert de \mathbb{R}^2 à préciser.
4. Sachant que τ est l'inverse d'une densité spécifique et u une vitesse, déterminer un domaine *physique* d'hyperbolicité.
5. Vérifier que les champs 1 et 2 sont vraiment non linéaires.
6. On note I_k les invariants de Riemann du k -ème champ caractéristique. Montrer qu'un choix possible pour I_k est

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{\tau} + u, \\ I_2 &= -\frac{1}{\tau} + u. \end{aligned}$$

7. Écrire les relations de RANKINE-HUGONIOT pour ce système.
8. Soit σ la vitesse d'une discontinuité qui vérifie les relations de RANKINE-HUGONIOT qui relie un état gauche (τ_L, u_L) à un état droit (τ_R, u_R) .
- 8.1. Exprimer σ en fonction de τ_L et u_L .
- 8.2. Exprimer u_R en fonction de τ_L, τ_R et u_L .
- 8.3. Parmi ces discontinuités, chercher celles vérifiant

$$\begin{cases} \sigma > 0, \\ u_R = 0, \\ \tau_R = 1. \end{cases}$$

Tracer, dans un diagramme (τ, u) , l'allure de l'ensemble des états à droite (τ_R, u_R) admissibles.

Solution

1. On a

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} \tau \\ u \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}(\mathbf{V}) = \begin{pmatrix} -u \\ \frac{1}{\tau} \end{pmatrix}.$$

2. On développe les dérivées du système (5.9) pour des solutions régulières :

$$\begin{cases} \partial_t \tau - \partial_x u = 0, \\ \partial_t u - \frac{1}{\tau^2} \partial_t \tau = 0. \end{cases}$$

On a le système quasiliénaire suivant :

$$\partial_t \begin{pmatrix} \tau \\ u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -\frac{1}{\tau^2} & 0 \end{pmatrix} \partial_x \begin{pmatrix} \tau \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

3. On cherche les 2 solutions $\lambda_k(\mathbf{W})$ de l'équation $\det(\mathbb{A}(\mathbf{W}) - \lambda(\mathbf{W})\mathbf{Id}) = 0$, i.e. de l'équation

$$(-\lambda)^2 - \frac{1}{\tau^2} = 0.$$

On obtient

$$\lambda_1 = -\frac{1}{\tau^2}, \quad \lambda_2 = \frac{1}{\tau^2}.$$

On peut alors prendre

$$\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} \tau^2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} -\tau^2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Pour $\tau \neq 0$, les valeurs propres sont réelles et distinctes : le système (5.3) est strictement hyperbolique. Donc $\Omega = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.

4. Physiquement $\tau > 0$ donc le domaine physique d'hyperbolicité est $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.
 5. Pour déterminer la nature des trois champs on calcul $\nabla \lambda_k \cdot \mathbf{r}_k$ pour $k = 1, 2$:

$$\nabla \lambda_1 \cdot \mathbf{r}_1 = \frac{\partial(-1/\tau^2)}{\partial \tau} \tau^2 + \frac{\partial(-1/\tau^2)}{\partial u} 1 = \frac{2}{\tau} \quad \text{1-champ VNL}$$

$$\nabla \lambda_2 \cdot \mathbf{r}_2 = \frac{\partial(1/\tau^2)}{\partial \tau} (-\tau^2) + \frac{\partial(1/\tau^2)}{\partial u} 1 = -\frac{2}{\tau} \quad \text{2-champ VNL}$$

6. On vérifie que $\nabla I_k \cdot \mathbf{r}_k = 0$ pour $k = 1, 2$:

$$\nabla I_1 \cdot \mathbf{r}_1 = \frac{\partial(\frac{1}{\tau} + u)}{\partial \tau} \tau^2 + \frac{\partial(\frac{1}{\tau} + u)}{\partial u} 1 = 0,$$

$$\nabla I_2 \cdot \mathbf{r}_2 = \frac{\partial(-\frac{1}{\tau} + u)}{\partial \tau} (-\tau^2) + \frac{\partial(-\frac{1}{\tau} + u)}{\partial u} 1 = 0.$$

7. Les relations de RANKINE-HUGONIOT sont

$$\begin{cases} \sigma(\tau_L - \tau_R) = -(u_L - u_R), \\ \sigma(u_L - u_R) = \frac{1}{\tau_L} - \frac{1}{\tau_R}. \end{cases}$$

8. Discontinuité.

- 8.1. Les relations de RANKINE-HUGONIOT donnent

$$\sigma^2(\tau_L - \tau_R) = \frac{1}{\tau_L} - \frac{1}{\tau_R}$$

soit

$$\sigma = \pm \sqrt{\frac{1}{\tau_L \tau_R}}.$$

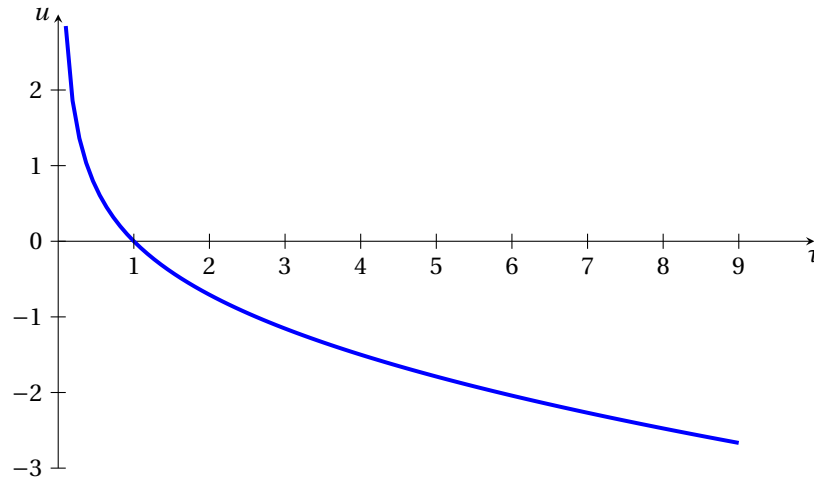
- 8.2. La première relation de RANKINE-HUGONIOT permet d'écrire

$$u_R = u_L + \sigma(\tau_L - \tau_R) = u_L \pm \frac{\tau_L - \tau_R}{\sqrt{\tau_L \tau_R}}.$$

- 8.3. On prend ici $u_L = 0, \tau_R = 1$ et on cherche une discontinuité se propageant à une vitesse positive $\sigma = +\sqrt{\frac{1}{\tau_R}}$. L'expression de u_R est

$$u_R = \frac{1 - \tau_R}{\sqrt{\tau_R}}$$

et son graphe est représenté sur la figure suivante



5.3. Exemple : le système de la dynamique des gaz isentropique par relaxation

On considère le système de la dynamique des gaz isentropique en une dimension d'espace

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2 + p) = 0, \end{cases} \quad (5.5)$$

avec une loi d'état $p \equiv p(\rho)$. On note $\rho \equiv \rho(x, t) > 0$ la densité et $u \equiv u(x, t) \in \mathbb{R}$ la vitesse du fluide.

1. Dans un premier temps on suppose que la loi d'état est celle d'un gaz parfait :

$$p(\rho) = \rho^\gamma, \quad \gamma > 1.$$

1.1. Trouver les vecteurs $\mathbf{V}: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ et $\mathbf{F}(\mathbf{V}): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tels que le système (5.5) s'écrit

$$\partial_t \mathbf{V} + \partial_x \mathbf{F}(\mathbf{V}) = \mathbf{0}.$$

1.2. En se plaçant dans les variables $\mathbf{W} \equiv (\rho, u)$, le système (5.5) se réécrit, pour des solutions régulières, sous la forme quasi-linéaire

$$\partial_t \mathbf{W} + \mathbb{A}(\mathbf{W}) \partial_x \mathbf{W} = \mathbf{0}. \quad (5.6)$$

Montrer que la matrice $\mathbb{A}(\mathbf{W})$ s'écrit

$$\mathbb{A}(\mathbf{W}) = \begin{pmatrix} u & \rho \\ \frac{p'}{\rho} & u \end{pmatrix}.$$

1.3. Calculer les valeurs propres $\lambda_1(\mathbf{W})$ et $\lambda_2(\mathbf{W})$ de la matrice $\mathbb{A}(\mathbf{W})$. Afin de fixer les notations on ordonne les valeurs propres selon $\lambda_1(\mathbf{W}) < \lambda_2(\mathbf{W})$. Proposer une base associée de vecteurs propres à droite $\{\mathbf{r}_1(\mathbf{W}), \mathbf{r}_2(\mathbf{W})\}$. En déduire que le système (5.6) est strictement hyperbolique.

1.4. Vérifier que les deux champs caractéristiques sont vraiment non linéaires.

2. Lorsque le fluide n'est pas un gaz parfait, le caractère vraiment non linéaire des champs caractéristiques de (5.5) rend la résolution du problème de Riemann assez compliquée. C'est pourquoi il a été proposé de remplacer (5.5) par un système approché, dit *système de relaxation*, qui s'écrit

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2 + \pi) = 0, \\ \partial_t(\rho V) + \partial_x(\rho u V) = \mu \rho \left(\frac{1}{\rho} - V \right), \end{cases} \quad (5.7)$$

avec $\mu > 0$ un paramètre constant, $V \equiv V(x, t)$ une nouvelle variable dite volume de relaxation et $\pi \equiv \pi(\rho, V)$ une nouvelle loi d'état

$$\pi(\rho, V) = p(1/V) - a^2 \left(\frac{1}{\rho} - V \right)$$

où $a > 0$ est une constante et $p(1/V)$ est la «vraie» loi d'état du fluide (sur laquelle on ne fait aucune hypothèse).

2.1. Montrer formellement que, lorsque le paramètre μ tend vers $+\infty$, alors on retrouve le système (5.5) à partir du système (5.7) (et on aura $V = 1/\rho$).

2.2. Désormais et pour tout ce qui suit on ne s'intéresse qu'à la structure différentielle de (5.7), c'est-à-dire qu'on ne tient pas compte du terme source. Autrement dit, on pose $\mu = 0$. On suppose aussi que ρ et V sont strictement positifs.

2.2.1. Trouver les vecteurs $\mathbf{U}: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ et $\mathbf{H}(\mathbf{U}): \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tels que le système (5.7) s'écrive

$$\partial_t \mathbf{U} + \partial_x \mathbf{H}(\mathbf{U}) = \mathbf{0}.$$

2.2.2. En se plaçant dans les variables $\mathbf{Y} \equiv (\rho, u, V)$, le système (5.7) se réécrit, pour des solutions régulières, sous la forme quasi-linéaire

$$\partial_t \mathbf{Y} + \mathbb{B}(\mathbf{Y}) \partial_x \mathbf{Y} = \mathbf{0}. \quad (5.8)$$

Montrer que la matrice $\mathbb{B}(\mathbf{Y})$ s'écrit

$$\mathbb{B}(\mathbf{Y}) = \begin{pmatrix} u & \rho & 0 \\ \frac{a^2}{\rho^3} & u & \frac{1}{\rho} \frac{\partial \pi}{\partial V} \\ 0 & 0 & u \end{pmatrix}.$$

2.2.3. Calculer les valeurs propres $\lambda_1(\mathbf{Y})$, $\lambda_2(\mathbf{Y})$ et $\lambda_3(\mathbf{Y})$ de la matrice $\mathbb{B}(\mathbf{Y})$. Afin de fixer les notations on ordonne les valeurs propres selon $\lambda_1(\mathbf{Y}) < \lambda_2(\mathbf{Y}) < \lambda_3(\mathbf{Y})$. Proposer une base associée de vecteurs propres à droite $\{\mathbf{r}_1(\mathbf{Y}), \mathbf{r}_2(\mathbf{Y}), \mathbf{r}_3(\mathbf{Y})\}$. En déduire que le système (5.8) est strictement hyperbolique.

2.2.4. Vérifier que les trois champs caractéristiques sont linéairement dégénérés. (Par conséquent, les ondes associées à chaque champ sont des discontinuités de contact). Les ondes associées sont-elles entropiques ?

2.2.5. Pour chaque $k = 1, 2, 3$, on note I_k et J_k deux invariants de Riemann du k -ème champ caractéristique. Montrer qu'un choix possible pour I_k et J_k est

$$\begin{aligned} I_1 &= V, & J_1 &= u - \frac{a}{\rho}, \\ I_2 &= u, & J_2 &= \pi, \\ I_3 &= V, & J_3 &= u + \frac{a}{\rho}. \end{aligned}$$

2.2.6. En utilisant les invariants de Riemann et les relations de Rankine-Hugoniot, montrer que u et π sont constants dans une 2-onde, tandis que les courbes de 1-onde et de 3-onde sont des droites dans le plan (u, π) . Vérifier en particulier que les courbes de détente et de choc coïncident (*i.e.* les détenteurs vérifient les conditions de Rankine-Hugoniot).

2.2.7. À l'aide du dessin d'ondes dans le plan (u, π) résoudre le problème de Riemann : pour un état gauche \mathbf{Y}_L et un état droit \mathbf{Y}_R on construira une solution composée d'une 1-onde, d'une 2-onde et d'une 3-onde séparant deux états intermédiaires \mathbf{Y}_1 et \mathbf{Y}_2 . On précisera les valeurs de ces états intermédiaires ainsi que les vitesses des ondes.

2.2.8. Montrer que la fonction

$$\eta(\mathbf{Y}) = \frac{1}{2}\rho u^2 + \rho \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{\pi(r, V)}{r^2} dr$$

est une entropie du système (5.7). Pour cela on vérifiera que

$$\partial_t \eta + \partial_x(\Phi) = 0 \quad \text{avec} \quad \Phi(\mathbf{Y}) = u \left[\frac{1}{2}\rho u^2 + G(\rho, V) \right]$$

c'est-à-dire que

$$\nabla_{\mathbf{Y}}(\Phi(\mathbf{Y}))^T = \nabla_{\mathbf{Y}}(\eta(\mathbf{Y}))^T \cdot \mathbb{B}(\mathbf{Y})$$

(on ne vérifiera pas que η est convexe).

2.2.9. Expliciter la fonction G dans le flux d'entropie.

2.2.10. Montrer qu'une discontinuité de contact de la deuxième famille reliant un état gauche $\mathbf{Y}_L = (\rho_L, u_L, V_L)$ à un état droit $\mathbf{Y} = (\rho, u, V)$ avec vitesse $\sigma = \lambda_2(\mathbf{Y}_L) = \lambda_2(\mathbf{Y})$ vérifie

$$\Phi(\mathbf{Y}) - \Phi(\mathbf{Y}_L) = \sigma(\eta(\mathbf{Y}) - \eta(\mathbf{Y}_L)),$$

autrement dit on a conservation de l'entropie.

Solution

1. Système (5.5).

1.1. On a

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}(\mathbf{V}) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p(\rho) \end{pmatrix}.$$

1.2. On développe les dérivées du système (5.5) pour des solutions régulières :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \rho \partial_x u + u \partial_x \rho = 0, \\ \rho \partial_t u + u \partial_t \rho + u^2 \partial_x \rho + 2\rho u \partial_x u + \frac{dp}{d\rho} \partial_x \rho = 0. \end{cases}$$

Il se réécrit alors

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \rho \partial_x u + u \partial_x \rho = 0, \\ \rho \partial_t u - u [\rho \partial_x u + u \partial_x \rho] + u^2 \partial_x \rho + 2\rho u \partial_x u + \frac{dp}{d\rho} \partial_x \rho = 0, \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} \partial_t \rho + u \partial_x \rho + \rho \partial_x u = 0, \\ \rho \partial_t u + u \rho \partial_x u + \frac{dp}{d\rho} \partial_x \rho = 0, \end{cases}$$

et donc finalement on a le système quasi-linéaire suivant :

$$\partial_t \begin{pmatrix} \rho \\ u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u & \rho \\ p' & u \end{pmatrix} \partial_x \begin{pmatrix} \rho \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

1.3. On cherche les deux solutions $\lambda_k(\mathbf{W})$ de l'équation $\det(\mathbb{A}(\mathbf{W}) - \lambda_k(\mathbf{W})\mathbf{Id}) = 0$, *i.e.* de l'équation

$$\lambda^2 - 2u\lambda + u^2 - p' = 0.$$

On obtient

$$\lambda_1 = u - \sqrt{p'}, \quad \lambda_2 = u + \sqrt{p'}$$

et $p' = \gamma \rho^{\gamma-1} > 0$. On peut alors prendre

$$\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} -\rho/\sqrt{p'} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{\rho^{\gamma-1}}{\gamma}} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} \rho/\sqrt{p'} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\rho^{\gamma-1}}{\gamma}} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Puisque $p' > 0$, les valeurs propres sont réelles et distinctes donc le système (5.5) est strictement hyperbolique.

1.4. Pour déterminer la nature des deux champs on calcule $\nabla \lambda_k \cdot \mathbf{r}_k$ pour $k = 1, 2$:

$$\nabla \lambda_1 \cdot \mathbf{r}_1 = -\frac{\partial(u - \sqrt{p'})}{\partial \rho} \sqrt{\frac{\rho^{\gamma-1}}{\gamma}} + \frac{\partial(u - \sqrt{p'})}{\partial u} (1) = \frac{\gamma-1}{2} \sqrt{\gamma \rho^{\gamma-3}} + 1 > 0, \quad \text{1-champ VNL,}$$

$$\nabla \lambda_2 \cdot \mathbf{r}_2 = \frac{\partial(u + \sqrt{p'})}{\partial \rho} \sqrt{\frac{\rho^{\gamma-1}}{\gamma}} + \frac{\partial(u + \sqrt{p'})}{\partial u} (1) = \frac{\gamma-1}{2} \sqrt{\gamma \rho^{\gamma-3}} + 1 > 0, \quad \text{2-champ VNL.}$$

2. Considérons maintenant le système de relaxation (5.7).

2.1. La troisième équation du système (5.7) se réécrit

$$\frac{1}{\mu} [\partial_t(\rho V) + \partial_x(\rho u V)] = \rho \left(\frac{1}{\rho} - V \right).$$

Si $\mu \rightarrow +\infty$ alors $\rho \left(\frac{1}{\rho} - V \right) \rightarrow 0$, c'est-à-dire $V \rightarrow \frac{1}{\rho}$, ce qui implique $\pi(\rho, 1/\rho) = p(\rho)$.

2.2. Désormais et pour tout ce qui suit on pose $\mu = 0$. On suppose aussi que ρ et V sont strictement positifs.

2.2.1. On a

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho V \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + \pi \\ \rho u V \end{pmatrix}.$$

2.2.2. On développe les dérivées du système (5.7) pour des solutions régulières :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + u \partial_x \rho + \rho \partial_x u = 0, \\ \rho \partial_t u + u \partial_t \rho + 2u \rho \partial_x u + u^2 \partial_x \rho + \frac{\partial \pi}{\partial \rho} \partial_x \rho + \frac{\partial \pi}{\partial V} \partial_x V = 0, \\ \rho \partial_t V + V \partial_t \rho + u V \rho \partial_x \rho + \rho V \partial_x u + \rho u \partial_x V = 0. \end{cases}$$

Il se réécrit alors

$$\begin{cases} \partial_t \rho + u \partial_x \rho + \rho \partial_x u = 0, \\ \rho \partial_t u - u [u \partial_x \rho + \rho \partial_x u] + 2u \rho \partial_x u + u^2 \partial_x \rho + \frac{\partial \pi}{\partial \rho} \partial_x \rho + \frac{\partial \pi}{\partial V} \partial_x V = 0, \\ \rho \partial_t V - V [u \partial_x \rho + \rho \partial_x u] + u V \rho \partial_x \rho + \rho V \partial_x u + \rho u \partial_x V = 0, \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} \partial_t \rho + u \partial_x \rho + \rho \partial_x u = 0, \\ \rho \partial_t u + u \rho \partial_x u + \frac{a^2}{\rho^2} \partial_x \rho + \frac{\partial \pi}{\partial V} \partial_x V = 0, \\ \partial_t V + u \partial_x V = 0, \end{cases}$$

et donc finalement on a le système quasi-linéaire suivant :

$$\partial_t \begin{pmatrix} \rho \\ u \\ V \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u & \rho & 0 \\ \frac{a^2}{\rho^3} & u & \frac{1}{\rho} \frac{\partial \pi}{\partial V} \\ 0 & 0 & u \end{pmatrix} \partial_x \begin{pmatrix} \rho \\ u \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2.2.3. On cherche les 3 solutions $\lambda_k(\mathbf{Y})$ de l'équation $\det(\mathbb{B}(\mathbf{Y}) - \lambda(\mathbf{Y})\mathbf{Id}) = 0$, i.e. de l'équation

$$(u - \lambda) \left(\lambda^2 - 2u\lambda + u^2 - \frac{a^2}{\rho^2} \right) = 0.$$

On obtient

$$\lambda_1 = u - \frac{a}{\rho}, \quad \lambda_2 = u, \quad \lambda_3 = u + \frac{a}{\rho}.$$

On peut alors prendre

$$\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -a/\rho^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{\rho^2}{a^2} \frac{\partial \pi}{\partial V} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ a/\rho^2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Puisque par hypothèse $a > 0$, les valeurs propres sont réelles et distinctes donc le système (5.7) est strictement hyperbolique.

2.2.4. Pour déterminer la nature des trois champs caractéristiques on calcule $\nabla \lambda_k \cdot \mathbf{r}_k$ pour $k = 1, 2, 3$:

$$\nabla \lambda_1 \cdot \mathbf{r}_1 = \frac{\partial(u - \frac{a}{\rho})}{\partial \rho} 1 + \frac{\partial(u - \frac{a}{\rho})}{\partial u} \frac{-a}{\rho^2} + \frac{\partial(u - \frac{a}{\rho})}{\partial V} 0 = 0 \quad \text{1-champ LD}$$

$$\nabla \lambda_2 \cdot \mathbf{r}_2 = \frac{\partial u}{\partial \rho} \frac{\partial \pi}{\partial V} \frac{-\rho^2}{a^2} + \frac{\partial u}{\partial u} 0 + \frac{\partial u}{\partial V} 1 = 0 \quad \text{2-champ LD}$$

$$\nabla \lambda_3 \cdot \mathbf{r}_3 = \frac{\partial(u + \frac{a}{\rho})}{\partial \rho} 1 + \frac{\partial(u + \frac{a}{\rho})}{\partial u} \frac{a}{\rho^2} + \frac{\partial(u + \frac{a}{\rho})}{\partial V} 0 = 0 \quad \text{3-champ LD}$$

2.2.5. On vérifie que $\nabla I_k \cdot \mathbf{r}_k = 0$ et $\nabla J_k \cdot \mathbf{r}_k = 0$ pour $k = 1, 2, 3$:

$$\nabla I_1 \cdot \mathbf{r}_1 = \frac{\partial V}{\partial \rho} 1 + \frac{\partial V}{\partial u} \frac{-a}{\rho^2} + \frac{\partial V}{\partial V} 0 = 0,$$

$$\nabla J_1 \cdot \mathbf{r}_1 = \frac{\partial(u - a/\rho)}{\partial \rho} 1 + \frac{\partial(u - a/\rho)}{\partial u} \frac{-a}{\rho^2} + \frac{\partial(u - a/\rho)}{\partial V} 0 = 0,$$

$$\nabla I_2 \cdot \mathbf{r}_2 = \frac{\partial u}{\partial \rho} \frac{\partial \pi}{\partial V} \frac{-\rho^2}{a^2} + \frac{\partial u}{\partial u} 0 + \frac{\partial u}{\partial V} 1 = 0,$$

$$\nabla J_2 \cdot \mathbf{r}_2 = \frac{\partial \pi}{\partial \rho} \frac{\partial \pi}{\partial V} \frac{-\rho^2}{a^2} + \frac{\partial \pi}{\partial u} 0 + \frac{\partial \pi}{\partial V} 1 = -\frac{\partial \pi}{\partial V} + \frac{\partial \pi}{\partial V} = 0,$$

$$\nabla I_3 \cdot \mathbf{r}_3 = \frac{\partial V}{\partial \rho} 1 + \frac{\partial V}{\partial u} \frac{a}{\rho^2} + \frac{\partial V}{\partial V} 0 = 0,$$

$$\nabla J_3 \cdot \mathbf{r}_3 = \frac{\partial(u + a/\rho)}{\partial \rho} 1 + \frac{\partial(u + a/\rho)}{\partial u} \frac{a}{\rho^2} + \frac{\partial(u + a/\rho)}{\partial V} 0 = 0.$$

2.2.6. Étude des trois ondes :

▷ $k = 1$: la condition sur les invariants de Riemann donne

$$\begin{cases} I_1(\mathbf{Y}) = I_1(\mathbf{Y}_L), \\ J_1(\mathbf{Y}) = J_1(\mathbf{Y}_L), \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} V = V_L, \\ u - \frac{a}{\rho} = u_L - \frac{a}{\rho_L}, \end{cases}$$

ce qui donne

$$\begin{cases} V = V_L, \\ \pi(\rho, V) = -a(u - u_L) + \pi(\rho_L, V_L); \end{cases}$$

▷ $k = 2$: la condition sur les invariants de Riemann donne

$$\begin{cases} I_2(\mathbf{Y}) = I_2(\mathbf{Y}_L), \\ J_2(\mathbf{Y}) = J_2(\mathbf{Y}_L), \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} u = u_L, \\ \pi(\rho, V) = \pi(\rho_L, V_L). \end{cases}$$

Les conditions de RANKINE-HUGONOT s'écrivent

$$\sigma = \frac{(\rho u) - (\rho_L u_L)}{\rho - \rho_L} = \frac{(\rho u^2 + \pi(\rho, V)) - (\rho_L u_L^2 + \pi(\rho_L, V_L))}{\rho u - \rho_L u_L} = \frac{(\rho u V) - (\rho_L u_L V_L)}{\rho V - \rho_L V_L}$$

et, étant donné que $u = u_L$ et $\pi(\rho, V) = \pi(\rho_L, V_L)$, on a $\sigma = u_L$;

▷ $k = 3$: la condition sur les invariants de Riemann donne

$$\begin{cases} I_3(\mathbf{Y}) = I_3(\mathbf{Y}_L), \\ J_3(\mathbf{Y}) = J_3(\mathbf{Y}_L), \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} V = V_L, \\ u + \frac{a}{\rho} = u_L + \frac{a}{\rho_L}, \end{cases}$$

ce qui donne

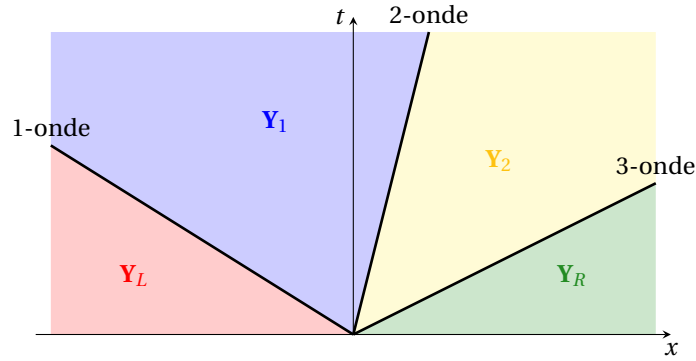
$$\begin{cases} V = V_L, \\ \pi(\rho, V) = a(u - u_L) + \pi(\rho_L, V_L). \end{cases}$$

2.2.7. Soit un problème de Riemann avec les deux états donnés suivants :

$$\mathbf{Y}_L = \begin{pmatrix} \rho_L \\ u_L \\ V_L \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Y}_R = \begin{pmatrix} \rho_R \\ u_R \\ V_R \end{pmatrix}.$$

La solution est constituée de quatre états constants

$$\mathbf{Y}(x, t) = \begin{cases} \mathbf{Y}_L, & \text{si } x < (u - a/\rho)t, \\ \mathbf{Y}_1, & \text{si } (u - a/\rho)t < x < u_L t, \\ \mathbf{Y}_2, & \text{si } u_L t < x < (u + a/\rho)t, \\ \mathbf{Y}_R, & \text{si } x > (u + a/\rho)t. \end{cases}$$



Pour expliciter cette solution on cherche à définir les six inconnues

$$\mathbf{Y}_1 = \begin{pmatrix} \rho_1 \\ u_1 \\ V_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Y}_2 = \begin{pmatrix} \rho_2 \\ u_2 \\ V_2 \end{pmatrix}$$

à l'aide des invariants de Riemann qu'ici donnent

$$\begin{cases} V_1 = V_L, \\ u_1 - \frac{a}{\rho_1} = u_L - \frac{a}{\rho_L}, \\ u_1 = u_2, \\ \pi(\rho_1, V_1) = \pi(\rho_2, V_2), \\ V_2 = V_R, \\ u_2 + \frac{a}{\rho_2} = u_R + \frac{a}{\rho_R}. \end{cases}$$

Grâce à la première, à la troisième et à la dernière relations on peut tout de suite écrire

$$\mathbf{Y}_1 = \begin{pmatrix} \rho_1 \\ u^* \\ V_L \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Y}_2 = \begin{pmatrix} \rho_2 \\ u^* \\ V_R \end{pmatrix}$$

et il ne reste à calculer que les trois inconnues ρ_1 , ρ_2 et u^* . Le point u^* est donné par l'intersection, dans le plan (π, u) , des deux courbes

$$\begin{cases} \pi = -au + au_L + \pi(\rho_L, V_L), \\ \pi = au - au_R + \pi(\rho_R, V_R), \end{cases}$$

donc

$$u^* = \frac{1}{2} \left(u_L + u_R + \frac{\pi(\rho_L, V_L) - \pi(\rho_R, V_R)}{a} \right)$$

et

$$\rho_1 = \frac{a}{u^* - u_L + \frac{a}{\rho_L}}, \quad \rho_2 = \frac{a}{u_R - u^* + \frac{a}{\rho_R}}.$$

2.2.8. Pour vérifier que η est une entropie du système (5.7) avec le flux d'entropie Φ , on montre que

$$\nabla_{\mathbf{Y}} \Phi(\mathbf{Y}) = \nabla_{\mathbf{Y}} \eta(\mathbf{Y}) \cdot \mathbb{B}(\mathbf{Y}).$$

Or,

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} \rho \\ u \\ V \end{pmatrix}, \quad \Phi(\mathbf{Y}) = u \left[\frac{\rho u^2}{2} + G(\rho, u) \right]$$

donc

$$\nabla_{\mathbf{Y}} \Phi(\mathbf{Y}) = \begin{pmatrix} \frac{u^3}{2} + u \frac{\partial G}{\partial \rho} \\ \frac{3\rho u^2}{2} + G \\ u \frac{\partial G}{\partial V} \end{pmatrix}$$

et

$$\eta(\mathbf{Y}) = \frac{1}{2} \rho u^2 + \rho \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{\pi(r, V)}{r^2} dr$$

d'où

$$\nabla_{\mathbf{Y}} \eta(\mathbf{Y}) = \begin{pmatrix} \frac{u^2}{2} + \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{\pi(r, V)}{r^2} dr + \frac{\pi(\rho, V)}{\rho} \\ u\rho \\ \rho \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{\partial_V \pi(r, V)}{r^2} dr \end{pmatrix}.$$

Donc

$$\nabla_{\mathbf{Y}} \eta(\mathbf{Y}) \cdot \mathbb{B}(\mathbf{Y}) =$$

$$\begin{aligned} &= \begin{pmatrix} \frac{u^2}{2} + \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{\pi(r, V)}{r^2} dr + \frac{\pi(\rho, V)}{\rho} \\ u\rho \\ \rho \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{\partial_V \pi(r, V)}{r^2} dr \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} u & \rho & 0 \\ \frac{a^2}{\rho^3} & u & \frac{1}{\rho} \frac{\partial \pi}{\partial V} \\ 0 & 0 & u \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \left[\frac{u^2}{2} + \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{\pi(r, V)}{r^2} dr + \frac{\pi(\rho, V)}{\rho} \right] u + \frac{u a^2}{\rho^2} \\ \left[\frac{u^2}{2} + \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{\pi(r, V)}{r^2} dr + \frac{\pi(\rho, V)}{\rho} \right] \rho + u^2 \rho \\ u \frac{\partial \pi}{\partial V} + \left[\rho \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{\partial_V \pi(r, V)}{r^2} dr \right] u \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{u^3}{2} + u \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{\pi(r, V)}{r^2} dr + u \frac{\pi(\rho, V)}{\rho} + \frac{u a^2}{\rho^2} \\ \frac{\rho u^2}{2} + \rho \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{\pi(r, V)}{r^2} dr + \pi(\rho, V) + u^2 \rho \\ u \frac{\partial \pi}{\partial V} + \rho u \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{\partial_V \pi(r, V)}{r^2} dr \end{pmatrix} \end{aligned}$$

qui donne

$$\begin{pmatrix} \frac{u^3}{2} + u \frac{\partial G}{\partial \rho} \\ \frac{3\rho u^2}{2} + G \\ u \frac{\partial G}{\partial V} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{u^3}{2} + u \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{\pi(r, V)}{r^2} dr + u \frac{\pi(\rho, V)}{\rho} + \frac{u a^2}{\rho^2} \\ \frac{\rho u^2}{2} + \rho \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{\pi(r, V)}{r^2} dr + \pi(\rho, V) + u^2 \rho \\ u \frac{\partial \pi}{\partial V} + \rho u \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{\partial_V \pi(r, V)}{r^2} dr \end{pmatrix}.$$

Identifiant terme à terme on obtient les conditions suivantes

$$\begin{cases} \frac{\partial G}{\partial \rho} = \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{\pi(r, V)}{r^2} dr + \frac{\pi(\rho, V)}{\rho} + \frac{a^2}{\rho^2}, \\ G = \rho \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{\pi(r, V)}{r^2} dr + \pi(\rho, V), \\ \frac{\partial G}{\partial V} = \frac{\partial \pi}{\partial V} + \rho \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{\partial_V \pi(r, V)}{r^2} dr. \end{cases}$$

2.2.9. On obtient

$$G = \rho \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{\pi(r, V)}{r^2} dr + \pi(\rho, V).$$

2.2.10. Pour $k = 2$ on a

$$\begin{cases} u = u_L, \\ \pi(\rho, V) = \pi(\rho_L, V_L). \end{cases}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{Y}) &= \frac{\rho}{2} u^3 + u \rho \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{\pi(r, V)}{r^2} dr + \pi(\rho, V), \\ \Phi(\mathbf{Y}_L) &= \frac{\rho_L u^3}{2} + u \rho_L \int_{\rho_0}^{\rho_L} \frac{\pi(r, V)}{r^2} dr + \pi(\rho_L, V_L), \\ \eta(\mathbf{Y}) &= \frac{1}{2} \rho u^2 + \rho \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{\pi(r, V)}{r^2} dr, \end{aligned}$$

$$\eta(\mathbf{Y}_L) = \frac{1}{2} \rho_L u^2 + \rho_L \int_{\rho_0}^{\rho_L} \frac{\pi(r, V)}{r^2} dr,$$

$$\sigma = u.$$

Donc on a bien

$$\left. \begin{aligned} \Phi(\mathbf{Y}) - \Phi(\mathbf{Y}_L) &= \frac{\rho - \rho_L}{2} u^3 + u \rho \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{\pi(r, V)}{r^2} dr - u \rho_L \int_{\rho_0}^{\rho_L} \frac{\pi(r, V)}{r^2} dr, \\ \sigma(\eta(\mathbf{Y}) - \eta(\mathbf{Y}_L)) &= \frac{\rho - \rho_L}{2} u^3 + u \rho \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{\pi(r, V)}{r^2} dr - u \rho_L \int_{\rho_0}^{\rho_L} \frac{\pi(r, V)}{r^2} dr. \end{aligned} \right) =$$

5.4. Exemple : mélange isotherme

On considère un mélange homogène et isentrope de deux fluides compressibles. On note $\rho \equiv \rho(x, t) > 0$ la densité du mélange, $u \equiv u(x, t)$ la vitesse du mélange, $c \equiv c(x, t)$ la concentration massique du premier fluide (on a toujours $0 \leq c \leq 1$ et $1 - c$ est la concentration massique du deuxième fluide), $p \equiv p(\rho, c) > 0$ la pression du mélange qu'on supposera vérifier les conditions

$$\begin{cases} \left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_c = a^2 > 0, \\ 2 \left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_c + \rho \left. \frac{\partial^2 p}{\partial \rho^2} \right|_c > 0, \end{cases}$$

où $a > 0$ désigne la vitesse du son du mélange.

En dimension un d'espace, on modélise ce type d'écoulements bifluide par le système suivant

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2 + p) = 0, \\ \partial_t(\rho c) + \partial_x(\rho u c) = 0. \end{cases} \tag{5.9}$$

1. Trouver les vecteurs $\mathbf{V}: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ et $\mathbf{F}(\mathbf{V}): \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tels que le système (5.9) s'écrit

$$\partial_t \mathbf{V} + \partial_x \mathbf{F}(\mathbf{V}) = \mathbf{0}.$$

2. En se plaçant dans les variables $\mathbf{W} = (\rho, u, c)$, le système (5.9) se réécrit, pour des solutions régulières, sous la forme quasilinéaire

$$\partial_t \mathbf{W} + \mathbb{A}(\mathbf{W}) \partial_x \mathbf{W} = \mathbf{0}. \tag{5.10}$$

Montrer que la matrice $\mathbb{A}(\mathbf{W})$ s'écrit

$$\begin{pmatrix} u & \rho & 0 \\ \frac{a^2}{\rho} & u & \frac{1}{\rho} \left. \frac{\partial p}{\partial c} \right|_{\rho} \\ 0 & 0 & u \end{pmatrix}.$$

3. Calculer les valeurs propres λ_1, λ_2 et λ_3 . Afin de fixer les notations on ordonne les trois valeurs propres selon $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$. Proposer une base associée de vecteurs propres à droite $\{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3\}$ de la matrice \mathbb{A} . En déduire que le système (5.10) est strictement hyperbolique.
4. Vérifier que les champs 1 et 3 sont vraiment non linéaires tandis que le champ 2 est linéairement dégénéré.
5. On note I_k et J_k les deux invariants de Riemann du k -ème champ caractéristique. Montrer qu'un choix possible pour I_k et J_k est

$$\begin{aligned} I_1 &= c, & J_1 &= u + a \ln(\rho), \\ I_2 &= u, & J_2 &= c, \\ I_3 &= c, & J_3 &= u - a \ln(\rho). \end{aligned}$$

6. Soit une détente de la première famille reliant un état gauche $\mathbf{W}_L = (\rho_L, u_L, c_L)$ à un état droit $\mathbf{W} = (\rho, u, c)$.

6.1. Montrer que $c = c_L, u > u_L, \rho < \rho_L$.

6.2. Calculer u en fonction de ρ_L, u_L et ρ . Plus précisément, montrer que u peut se mettre sous la forme

$$u = u_L + g(\rho_L, \rho)$$

en explicitant la fonction g .

7. Soit une onde de la deuxième famille reliant un état gauche $\mathbf{W}_L = (\rho_L, u_L, c_L)$ à un état droit $\mathbf{W} = (\rho, u, c)$ (il s'agit d'une discontinuité de contact).
- 7.1. Montrer que $u = u_L$ et $p(\rho, c) = p(\rho_L, c_L)$.
- 7.2. Quelle est la vitesse de déplacement σ de cette discontinuité?
8. Cherchons maintenant une entropie pour le système (5.9).

8.1. Montrer que la fonction

$$\eta(\mathbf{W}) = \frac{1}{2}\rho u^2 + \rho \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{p(r, c)}{r^2} dr$$

est une entropie du système avec flux d'entropie

$$\Phi(\mathbf{W}) = u \left[p(\rho, c) + \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{p(r, c)}{r^2} dr \right] + G(\rho, u)$$

(on ne vérifiera pas que η est convexe).

8.2. Expliciter la fonction G .

8.3. Montrer qu'une discontinuité de contact reliant un état gauche $\mathbf{W}_L = (\rho_L, u_L, c_L)$ à un état droit $\mathbf{W} = (\rho, u, c)$ avec vitesse σ vérifie

$$\Phi(\mathbf{W}) - \Phi(\mathbf{W}_L) = \sigma(\eta(\mathbf{W}) - \eta(\mathbf{W}_L)),$$

autrement dit on a conservation de l'entropie.

Correction

1. On a

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho c \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}(\mathbf{V}) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho u c \end{pmatrix}.$$

2. On développe les dérivées du système (5.9) pour des solutions régulières :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + u \partial_x \rho + \rho \partial_x u = 0, \\ \rho \partial_t u + u \partial_t \rho + 2u \rho \partial_x u + u^2 \partial_x \rho + \frac{\partial p}{\partial \rho} \Big|_c \partial_x \rho + \frac{\partial p}{\partial c} \Big|_\rho \partial_x c = 0, \\ \rho \partial_t c + c \partial_t \rho + u c \partial_x \rho + \rho c \partial_x u + \rho u \partial_x c = 0. \end{cases}$$

Il se réécrit alors

$$\begin{cases} \partial_t \rho + u \partial_x \rho + \rho \partial_x u = 0, \\ \rho \partial_t u - u [u \partial_x \rho + \rho \partial_x u] + 2u \rho \partial_x u + u^2 \partial_x \rho + a^2 \partial_x \rho + \frac{\partial p}{\partial c} \Big|_\rho \partial_x c = 0, \\ \rho \partial_t c - c [u \partial_x \rho + \rho \partial_x u] + u c \partial_x \rho + \rho c \partial_x u + \rho u \partial_x c = 0, \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} \partial_t \rho + u \partial_x \rho + \rho \partial_x u = 0, \\ \partial_t u + \frac{a^2}{\rho} \partial_x \rho + u \partial_x u + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial c} \Big|_\rho \partial_x c = 0, \\ \rho \partial_t c + \rho u \partial_x c = 0, \end{cases}$$

et donc finalement on a le système quasilineaire suivant :

$$\partial_t \begin{pmatrix} \rho \\ u \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u & \rho & 0 \\ \frac{a^2}{\rho} & u & \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial c} \Big|_\rho \\ 0 & 0 & u \end{pmatrix} \partial_x \begin{pmatrix} \rho \\ u \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

3. On cherche les 3 solutions $\lambda_k(\mathbf{W})$ de l'équation $\det(\mathbf{A}(\mathbf{W}) - \lambda(\mathbf{W})\mathbf{Id}) = 0$, i.e. de l'équation

$$u^3 - 3u^2\lambda + 3u\lambda^2 - \lambda^3 - a^2u + a^2\lambda = 0.$$

On obtient

$$\lambda_1 = u - a,$$

$$\lambda_2 = u,$$

$$\lambda_3 = u + a.$$

On peut alors prendre

$$\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} -\rho/a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{a^2} \frac{\partial p}{\partial c} \Big|_{\rho} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_3 = \begin{pmatrix} \rho/a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Puisque par hypothèse $a > 0$, les valeurs propres sont réelles et distinctes donc le système (5.9) est strictement hyperbolique.

4. Pour déterminer la nature des trois champs on calcul $\nabla \lambda_k \cdot \mathbf{r}_k$ pour $k = 1, 2, 3$:

$$\begin{aligned} \nabla \lambda_1 \cdot \mathbf{r}_1 &= \frac{\partial(u-a)}{\partial \rho} \frac{-\rho}{a} + \frac{\partial(u-a)}{\partial u} 1 + \frac{\partial(u-a)}{\partial c} 0 = 1 && \text{1-champ VNL} \\ \nabla \lambda_2 \cdot \mathbf{r}_2 &= \frac{\partial u}{\partial \rho} \frac{\frac{\partial p}{\partial c} \Big|_{\rho}}{a^2} + \frac{\partial u}{\partial u} 0 + \frac{\partial u}{\partial c} 1 = 0 && \text{2-champ LD} \\ \nabla \lambda_3 \cdot \mathbf{r}_3 &= \frac{\partial(u+a)}{\partial \rho} \frac{\rho}{a} + \frac{\partial(u+a)}{\partial u} 1 + \frac{\partial(u+a)}{\partial c} 0 = 1 && \text{3-champ VNL} \end{aligned}$$

5. On vérifie que $\nabla I_k \cdot \mathbf{r}_k = 0$ et $\nabla J_k \cdot \mathbf{r}_k = 0$ pour $k = 1, 2, 3$:

$$\begin{aligned} \nabla I_1 \cdot \mathbf{r}_1 &= \frac{\partial c}{\partial \rho} \frac{-\rho}{a} + \frac{\partial c}{\partial u} 1 + \frac{\partial c}{\partial c} 0 = 0, \\ \nabla J_1 \cdot \mathbf{r}_1 &= \frac{\partial(u+a \ln(\rho))}{\partial \rho} \frac{-\rho}{a} + \frac{\partial(u+a \ln(\rho))}{\partial u} 1 + \frac{\partial(u+a \ln(\rho))}{\partial c} 0 = 0, \\ \nabla I_2 \cdot \mathbf{r}_2 &= \frac{\partial u}{\partial \rho} \frac{\frac{\partial p}{\partial c} \Big|_{\rho}}{a^2} + \frac{\partial u}{\partial u} 0 + \frac{\partial u}{\partial c} 1 = 0, \\ \nabla J_2 \cdot \mathbf{r}_2 &= \frac{\partial p}{\partial \rho} \frac{\frac{\partial p}{\partial c} \Big|_{\rho}}{a^2} + \frac{\partial p}{\partial u} 0 + \frac{\partial p}{\partial c} 1 = 0, \\ \nabla I_3 \cdot \mathbf{r}_3 &= \frac{\partial c}{\partial \rho} \frac{\rho}{a} + \frac{\partial c}{\partial u} 1 + \frac{\partial c}{\partial c} 0 = 0, \\ \nabla J_3 \cdot \mathbf{r}_3 &= \frac{\partial(u-a \ln(\rho))}{\partial \rho} \frac{\rho}{a} + \frac{\partial(u-a \ln(\rho))}{\partial u} 1 + \frac{\partial(u-a \ln(\rho))}{\partial c} 0 = 0. \end{aligned}$$

6. Soit le 1-champ une détente.

6.1. La condition sur les vitesse entraîne $\lambda_1(\mathbf{W}_L) < \lambda_1(\mathbf{W})$ d'où

$$u > u_L.$$

La condition sur les invariants de Riemann pour $k = 1$ donne

$$\begin{cases} I_1(\mathbf{W}) = I_1(\mathbf{W}_L), \\ J_1(\mathbf{W}) = J_1(\mathbf{W}_L), \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} c = c_L, \\ u - a \ln(\rho) = u_L - a \ln(\rho_L), \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} c = c_L, \\ u - u_L = a \ln(\rho_L / \rho) > 0. \end{cases}$$

On conclut donc que

$$\begin{cases} c = c_L, \\ u > u_L, \\ \rho < \rho_L. \end{cases}$$

6.2. La condition sur l'invariant de Riemann $J_1(\mathbf{W}) = J_1(\mathbf{W}_L)$ donne $g(\rho_L, \rho) = a \ln(\rho_L / \rho)$.

7. Considérons le 2-champ qui est une discontinuité de contact.

7.1. La condition sur les invariants de Riemann pour $k = 2$ donne

$$\begin{cases} I_2(\mathbf{W}) = I_2(\mathbf{W}_L), \\ J_2(\mathbf{W}) = J_2(\mathbf{W}_L), \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} u = u_L, \\ p(\rho, c) = p(\rho_L, c_L). \end{cases}$$

7.2. La condition sur la vitesse σ de la discontinuité de contact découle des conditions de RANKINE-HUGONIOT et notamment de la relation

$$\sigma(\rho_L u_L - \rho u) = (\rho_L u_L^2 + p(\rho_L, c_L) - \rho u^2 - p(\rho, c))$$

qui donne

$$\sigma(\rho_L - \rho)u_L = (\rho_L - \rho)u_L^2$$

c'est-à-dire $\sigma = u_L$.

8. Entropie.

8.1. Pour vérifier que η est une entropie du système (5.9) avec le flux d'entropie Φ , on montre que

$$\nabla_{\mathbf{W}}\Phi(\mathbf{W}) = \nabla_{\mathbf{W}}\eta(\mathbf{W}) \cdot \mathbb{A}(\mathbf{W}).$$

Or,

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} \rho \\ u \\ c \end{pmatrix}, \quad \Phi(\mathbf{W}) = u \left[p(\rho, c) + \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{p(r, c)}{r^2} dr \right] + G(\rho, u)$$

donc

$$\nabla_{\mathbf{W}}\Phi(\mathbf{W}) = \begin{pmatrix} ua^2 + u \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{p(r, c)}{r^2} dr + u \frac{p(\rho, c)}{\rho} + \frac{\partial G}{\partial \rho} \\ p(\rho, c) + \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{p(r, c)}{r^2} dr + \frac{\partial G}{\partial u} \\ u \left[\frac{\partial p(\rho, c)}{\partial c} + \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{\frac{\partial p(\rho, c)}{\partial c}}{r^2} dr \right] \end{pmatrix}$$

et

$$\eta(\mathbf{W}) = \frac{1}{2}\rho u^2 + \rho \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{p(r, c)}{r^2} dr$$

d'où

$$\nabla_{\mathbf{W}}\eta(\mathbf{W}) = \begin{pmatrix} \frac{u^2}{2} + \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{p(r, c)}{r^2} dr + \frac{p(r, c)}{\rho} \\ u\rho \\ \rho \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{\frac{\partial p(\rho, c)}{\partial c}}{r^2} dr \end{pmatrix}.$$

Donc

$$\nabla_{\mathbf{W}}\eta(\mathbf{W}) \cdot \mathbb{A}(\mathbf{W}) =$$

$$\begin{aligned} &= \begin{pmatrix} \frac{u^2}{2} + \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{p(r, c)}{r^2} dr + \frac{p(r, c)}{\rho} \\ u\rho \\ \rho \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{\frac{\partial p(\rho, c)}{\partial c}}{r^2} dr \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} u & \rho & 0 \\ \frac{a^2}{\rho} & u & \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial c} \Big|_{\rho} \\ 0 & 0 & u \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \left[\frac{u^2}{2} + \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{p(r, c)}{r^2} dr + \frac{p(r, c)}{\rho} \right] u + ua^2 \\ \left[\frac{u^2}{2} + \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{p(r, c)}{r^2} dr + \frac{p(r, c)}{\rho} \right] \rho + u^2 \rho \\ u \frac{\partial p}{\partial c} \Big|_{\rho} + u\rho \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{\frac{\partial p(\rho, c)}{\partial c}}{r^2} dr \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{u^3}{2} + u \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{p(r, c)}{r^2} dr + u \frac{p(r, c)}{\rho} + ua^2 \\ \frac{3}{2}\rho u^2 + \rho \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{p(r, c)}{r^2} dr + p(r, c) \\ u \frac{\partial p}{\partial c} \Big|_{\rho} + u\rho \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{\frac{\partial p(\rho, c)}{\partial c}}{r^2} dr \end{pmatrix} \end{aligned}$$

qui donne

$$\begin{pmatrix} ua^2 + u \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{p(r, c)}{r^2} dr + u \frac{p(\rho, c)}{\rho} + \frac{\partial G}{\partial \rho} \\ p(\rho, c) + \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{p(r, c)}{r^2} dr + \frac{\partial G}{\partial u} \\ u \left[\frac{\partial p(\rho, c)}{\partial c} + \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{\frac{\partial p(\rho, c)}{\partial c}}{r^2} dr \right] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{u^3}{2} + u \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{p(r, c)}{r^2} dr + u \frac{p(r, c)}{\rho} + ua^2 \\ \frac{3}{2}\rho u^2 + \rho \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{p(r, c)}{r^2} dr + p(\rho, c) \\ u \frac{\partial p}{\partial c} \Big|_{\rho} + u\rho \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{\frac{\partial p(\rho, c)}{\partial c}}{r^2} dr \end{pmatrix}.$$

Identifiant terme par terme on obtient les conditions suivantes

$$\begin{cases} \frac{\partial G}{\partial \rho} = \frac{u^3}{2}, \\ \frac{\partial G}{\partial u} = \frac{3u^2 \rho}{2}. \end{cases}$$

8.2. On peut prendre $G(\rho, u) = \frac{1}{2} u^3 \rho$.

8.3. Sur une discontinuité de contact on a

$$\begin{cases} u = u_L = \sigma, \\ p(\rho, c) = p(\rho_L, c_L). \end{cases}$$

donc

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{W}) - \Phi(\mathbf{W}_L) &= u \left[p(\rho, c) + \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{p(r, c)}{r^2} dr \right] + \frac{1}{2} u^3 \rho - u_L \left[p(\rho, c)_L + \int_{\rho_0}^{\rho_L} \frac{p(r, c)}{r^2} dr \right] - \frac{1}{2} u_L^3 \rho_L = \\ &= u_L \left[\int_{\rho_L}^{\rho} \frac{p(r, c)}{r^2} dr \right] + \frac{1}{2} (u^3 \rho - u_L^3 \rho_L) = \\ &= u_L \left[\frac{1}{2} \rho u^2 + \rho \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{p(r, c)}{r^2} dr - \frac{1}{2} \rho u_L^2 - \rho_L \int_{\rho_0}^{\rho_L} \frac{p(r, c)}{r^2} dr \right] = \\ &= u_L (\eta(\mathbf{W}) - \eta(\mathbf{W}_L)). \end{aligned}$$

Troisième partie .
Rappels Numériques

Rappels sur les différences finies

À part dans quelques cas très particulier, il est impossible de calculer explicitement des solutions de modèles issus de la physique. Il est donc nécessaire d'avoir recours au calcul numérique sur ordinateur pour estimer qualitativement et quantitativement ces solutions. Le principe de toutes les méthodes de résolution numérique des équations aux dérivées partielles est d'obtenir des valeurs numériques discrètes (c'est-à-dire en nombre fini) qui *approchent* (en un sens convenable à préciser) la solution exacte. Dans ce procédé il faut bien être conscient de deux points fondamentaux : premièrement, on ne calcul pas des solutions exactes mais approchées ; deuxièmement, on *discrétise* le problème en représentant des fonctions par un nombre finis de valeurs, c'est-à-dire que l'on passe du *continu* au *discret*.

Il existe de nombreuses méthodes d'approximation numérique des solutions d'équations aux dérivées partielles. Pour simplifier la présentation, nous nous limiterons dans ce chapitre à la dimension un d'espace.

Principe de la méthode des différences finies

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.
Comme

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

il est naturel d'introduire les approximations

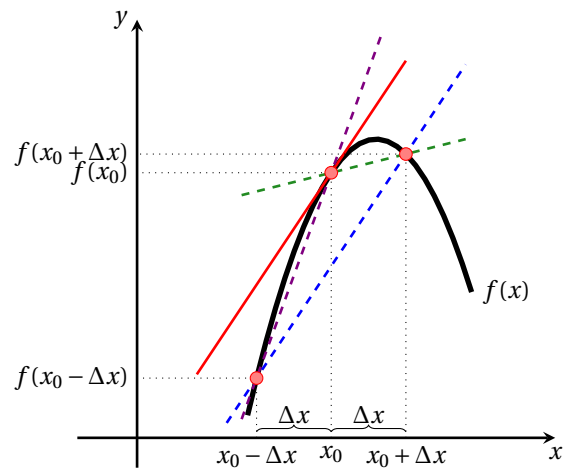
$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}, \quad (5.11)$$

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0) - f(x_0 - \Delta x)}{\Delta x}, \quad (5.12)$$

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0 - \Delta x)}{2\Delta x}. \quad (5.13)$$

De manière analogue, la dérivée seconde peut être approchée par

$$f''(x_0) \approx \frac{f(x_0 + \Delta x) - 2f(x_0) + f(x_0 - \Delta x))}{(\Delta x)^2}.$$



Si on fait un développement de Taylor en x autour du point x_0

$$f(x_0 \pm \Delta x) = f(x_0) \pm \Delta x f'(x_0) + (\Delta x)^2 f''(x_0) + O((\Delta x)^3),$$

on a

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_0) + \Delta x f'(x_0) + (\Delta x)^2 f''(x_0) + O((\Delta x)^3) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) + O(\Delta x),$$

$$\frac{f(x_0) - f(x_0 - \Delta x)}{\Delta x} = \frac{f(x_0) - f(x_0) + \Delta x f'(x_0) - (\Delta x)^2 f''(x_0) + O((\Delta x)^3)}{\Delta x} = f'(x_0) + O(\Delta x),$$

$$\begin{aligned} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0 - \Delta x)}{2\Delta x} &= \frac{f(x_0) + \Delta x f'(x_0) + (\Delta x)^2 f''(x_0) + O((\Delta x)^3) - f(x_0) + \Delta x f'(x_0) - (\Delta x)^2 f''(x_0)}{2\Delta x} \\ &= f'(x_0) + O((\Delta x)^2), \end{aligned}$$

et pour l'approximation de la dérivée seconde on a

$$\begin{aligned} \frac{f(x_0 + \Delta x) - 2f(x_0) + f(x_0 - \Delta x))}{(\Delta x)^2} &= \frac{f(x_0) + \Delta x f'(x_0) + (\Delta x)^2 f''(x_0) + O((\Delta x)^3) - 2f(x_0) + f(x_0) - \Delta x f'(x_0) + (\Delta x)^2 f''(x_0)}{(\Delta x)^2} \\ &= f''(x_0) + O((\Delta x)^2). \end{aligned}$$

Si Δx est «petit», ces formules sont des «bonnes» approximations.

Généralisation aux équations aux dérivées partielles

Nous nous limitons pour le moment à la dimension un d'espace et considérons une équation aux dérivées partielles $F(u) = 0$ définie pour $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ avec une condition initiale $u(x, 0) = g(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$ (remarquons que $F(u)$ est une notation pour une fonction de u et de ses dérivées partielles en tout point). Pour discrétiser le domaine $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$, on introduit un pas d'espace $\Delta x > 0$ et un pas de temps $\Delta t > 0$ et on définit les nœuds d'un maillage régulier

$$(x_j, t^n) = (j\Delta x, n\Delta t) \quad \text{pour } j \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}.$$

On note u_j^n la valeur d'une solution discrète approchée au point (x_j, t^n) et $u(x, t)$ la solution exacte (inconnue). Le principe de la méthode des différences finies est de remplacer les dérivées par des différences finies en utilisant des formules de Taylor dans lesquelles on néglige les restes.

Dans tous schéma il y a bien sûr une donnée initiale pour démarrer les itération en n : les valeurs initiales $(u_j^0)_{j \in \mathbb{Z}}$ sont définies par exemple par $u_j^0 = g(x_j)$ où g est la donnée initiale de l'équation.

S'il y a un second membre $f(x, t)$ dans l'équation aux dérivées partielles, alors les schémas se modifient en remplaçant zéro au second membre par une approximation consistante de $f(x, t)$ au point (x_j, t^n) .

Si l'équation est définie sur un domaine borné, par exemple $x \in [\alpha; \beta]$, le maillage spatiale sera restreint à cet intervalle c'est-à-dire $j \in \{0, 1, \dots, N\}$ avec $x_0 = \alpha$ et $x_N = \beta$ et $\Delta x = (\beta - \alpha)/(N + 1)$. Il faut de plus ajouter des conditions aux limites qui peuvent être de plusieurs types.

Par exemple, si on a des conditions aux limites de Dirichlet

$$u(\alpha, t) = L, \quad u(\beta, t) = R, \quad \text{pour } t \in \mathbb{R}_*^+,$$

elles se traduisent au niveau discret en

$$u_0^n = L, \quad u_{N+1}^n = R, \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}.$$

Si on a des conditions de Neumann

$$\partial_x u(\alpha, t) = L, \quad \partial_x u(\beta, t) = R, \quad \text{pour } t \in \mathbb{R}_*^+,$$

elles se traduisent au niveau discret en

$$\frac{u_1^n - u_0^n}{\Delta x} = L, \quad \frac{u_N^n - u_{N-1}^n}{\Delta x} = R, \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}.$$

Si on a des conditions périodiques

$$u(x + \beta, t) = u(x + \alpha, t), \quad \text{pour } x \in [\alpha; \beta], t \in \mathbb{R}_*^+$$

elles se traduisent au niveau discret en

$$u_0^n = u_N^n, \quad \text{pour } n \in \mathbb{N},$$

et plus généralement $u_j^n = u_{N+j}^n$.

Niveaux et stencil Un schéma est dit à m niveaux s'il ne fait intervenir que m indices de temps. Les schémas les plus populaires sont des schémas à deux ou trois niveaux.

La collection des couples (j', n') qui interviennent dans l'équation discrète au point (j, n) est appelé *stencil* du schéma (qu'on peut essayer de traduire par support). En général, plus le stencil est large, plus le schéma est coûteux et difficile à programmer.

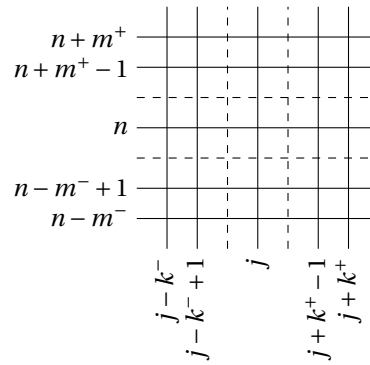
Consistance et ordre de précision

De manière générale, un schéma aux différences finies est défini, pour tous les indices possibles $j \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$, par la formule

$$F_{\Delta x, \Delta t} \left(\left\{ u_{j+k}^{n+m} \right\}_{\substack{k^- \leq k \leq k^+ \\ m^- \leq m \leq m^+}} \right) = 0$$

où les entiers k^- , k^+ , m^- et m^+ définissent la largeur du stencil du schéma.

Un des buts de l'analyse numérique est de comparer et de sélectionner les meilleurs schémas suivant des critères de précision, de coût ou de robustesse.

FIGURE 5.1.: Exemple de stencil pour un schéma à $m^- + m^+ + 1$ niveaux et $k^- + k^+ + 1$ points.

Erreur de troncature Considérons le schéma aux différences finies $F_{\Delta x, \Delta t}(\{u_{j+k}^{n+m}\})$ pour l'approximation de l'équation aux dérivées partielles $F(u) = 0$. Soit $u(x, t)$ une solution suffisamment régulière de cette équation. On appelle *erreur de troncature* du schéma la quantité

$$\tau_j^n \equiv F_{\Delta x, \Delta t} \left(\left\{ u(x + k\Delta x, t + m\Delta t) \right\}_{\substack{k^- \leq k \leq k^+ \\ m^- \leq m \leq m^+}} \right).$$

Concrètement on calcule l'erreur de troncature d'un schéma en remplaçant u_{j+k}^{n+m} dans la formule par $u(x + k\Delta x, t + m\Delta t)$.

Consistance Le schéma aux différences finies $F_{\Delta x, \Delta t}(\{u_{j+k}^{n+m}\})$ est dit *consistant* avec l'équation aux dérivées partielles $F(u) = 0$ si l'*erreur de troncature* du schéma tend vers zéro, uniformément par rapport à (x, t) , lorsque Δx et Δt tendent vers zéro indépendamment.

Ordre de consistance Le schéma aux différences finies $F_{\Delta x, \Delta t}(\{u_{j+k}^{n+m}\})$ est *précis à l'ordre p en espace et à l'ordre q en temps* avec l'équation aux dérivées partielles $F(u) = 0$ si l'*erreur de troncature* du schéma tend vers zéro comme $O((\Delta x)^p + (\Delta t)^q)$ lorsque Δx et Δt tendent vers zéro.

Convergence

La convergence d'un schéma aux différences finies est une propriété naturelle qui assure que, pour des valeurs suffisamment petites des pas d'espace et de temps, la solution numérique calculée sera proche de la solution exacte du problème de départ.

Convergence Le schéma aux différences finies $F_{\Delta x, \Delta t}(\{u_{j+k}^{n+m}\})$ utilisé pour la résolution numérique de l'équation aux dérivées partielles $F(u) = 0$ est *convergent* si, pour toute solution u de l'équation $F(u) = 0$, la suite u_j^n converge vers $u(x_j, t^n)$ avec $(\Delta x, \Delta t) \rightarrow (0, 0)$.

Malheureusement la notion de consistance ne suffit pas à garantir que le schéma soit convergent comme on verra sur des exemples. Pour introduire un critère (très pratique) qui permet de voir si un schéma donné est convergent nous allons introduire la notion de stabilité.

Stabilité

Autre les outils qui permettent de comparer les performances des différents schémas, on doit également choisir les pas Δx et Δt de sorte que le schéma correspondant donnera une solution approchée correcte, au sens où une petite perturbation de la donnée initiale g n'induit pas une perturbation trop grande sur la solution calculée au temps final. Cette idée, déjà rencontrée pour la définition de problème bien posé, est à la base du concept de stabilité pour les schémas aux différences finies.

Soit $u^n \equiv (u_j^n)_{1 \leq j \leq N-1}$ la solution numérique d'un schéma.

Stabilité Un schéma aux différences finies est dit *stable* pour la norme $\|\cdot\|$ s'il existe une constante $K > 0$ indépendante de Δx et Δt (lorsque ces valeurs tendent vers zéro) telle que

$$\|u^n\| \leq K \|u^0\| \quad \text{pour tout } n \geq 0,$$

quelle que soit la donnée initiale u^0 . Si cette inégalité n'a lieu que pour des pas Δx et Δt astreints à certaines inégalités, on dit que le schéma est *conditionnellement stable*.

On définit les normes classiques

$$\|u^n\|_p = \left(\sum_{j=1}^{N-1} \Delta x |u_j^n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{pour } 1 \leq p < +\infty,$$

$$\|u^n\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq N-1} |u_j^n|.$$

Schéma linéaire Un schéma aux différences finies est dit linéaire si la formule $F_{\Delta x, \Delta t}(\{u_{j+k}^{n+m}\}) = 0$ qui le définit est linéaire par rapport à ses arguments u_{j+k}^{n+m} .

La stabilité d'un schéma linéaire à deux niveaux est facile à interpréter. En effet, par linéarité tout schéma linéaire à deux niveaux peut s'écrire sous la forme condensée

$$\mathbb{A}u^n = u^{n+1},$$

où \mathbb{A} est une matrice (dite d'itération) et on obtient $\mathbb{A}^n u^0 = u^{n+1}$ (attention, la notation \mathbb{A}^n désigne ici la puissance n -ème de \mathbb{A}) et par conséquent la stabilité du schéma est équivalente à

$$\|\mathbb{A}^n u^0\| \leq K \|u^0\|, \quad \forall n \geq 0, \forall u^0 \in \mathbb{R}^{N-1}.$$

Introduisant la norme matricielle subordonnée $\|\mathbb{M}\| = \sup_{u \in \mathbb{R}^{N-1}, u \neq 0} \frac{\|\mathbb{M}u\|}{\|u\|}$, la stabilité du schéma est équivalente à

$$\|\mathbb{A}^n\| \leq K \quad \forall n \geq 0$$

qui veut dire que la suite des puissances de \mathbb{A} est bornée.

Principe du maximum discret - stabilité L^∞ Un schéma aux différences finies vérifie le principe du maximum discret si pour tout $n \geq 0$ et tout $1 \leq j \leq N-1$ on a

$$\min_{0 \leq j \leq N} (u_j^0) \leq u_j^n \leq \max_{0 \leq j \leq N} (u_j^0)$$

quelle que soit la donnée initiale u^0 .

Stabilité L^2

La norme L^2 se prête bien à l'étude de la stabilité grâce à l'outil très puissant de l'analyse de Fourier. Supposons désormais que les conditions aux limites pour l'équation aux dérivées partielles sont des conditions aux limites de périodicité. À chaque vecteur $u^n \equiv (u_j^n)_{1 \leq j \leq N-1}$ on associe une fonction $u^n(x)$, constante par morceaux, périodique, définie sur $[\alpha; \beta]$ par

$$u^n(x) = u_j^n \quad \text{si } x_{j-1/2} < x < x_{j+1/2}$$

avec $x_{j+1/2} = \alpha + (j+1/2)\Delta x$ pour $0 \leq j \leq N$, $x_{-1/2} = \alpha$ et $x_{N+1/2} = \beta$. Ainsi définie, la fonction $u^n(x)$ appartient à $L^2([\alpha; \beta])$, elle peut donc se décomposer en la somme de Fourier

$$u^n(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{u}^n(k) e^{2i\pi kx}$$

avec $\hat{u}^n(k) = \int_\alpha^\beta u^n(x) e^{-2i\pi kx} dx$ et la formule de Plancherel

$$\int_\alpha^\beta |u^n(x)|^2 dx = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{u}^n(k)|^2.$$

Remarquons que même si $u^n(x)$ est une fonction réelle, les coefficients $\hat{u}^n(k)$ de la série de Fourier sont complexes. Une propriété importante pour l'étude de stabilité de la transformée de Fourier des fonctions périodiques est la suivantes : si on note $v^n(x) = u^n(x + \Delta x)$ alors $\hat{v}^n(k) = \hat{u}^n(k) e^{2i\pi k\Delta x}$.

«Recette» pour un schéma à deux niveaux On injecte dans le schéma un mode de Fourier, on obtient ainsi

$$u_j^n = A(k)^n e^{2i\pi kx_j}$$

et on en déduit la valeur du facteur d'amplification $A(k)$. Rappelons que pour l'instant nous nous sommes limité au cas scalaire, c'est-à-dire que $A(k)$ est un nombre complexe. On appelle *condition de stabilité de Von Neumann* l'inégalité

$$|A(k)| \leq 1 \quad \text{pour tout mode } k \in \mathbb{Z}.$$

Si la condition de stabilité de Von Neumann est satisfaite (avec éventuellement des restrictions sur Δx et Δt), alors le schéma est stable pour la norme L^2 , sinon il est instable.

Dans la plupart des cas, on va trouver des restrictions sur Δx et Δt pour obtenir la stabilité au sens L^2 du schéma. Comme Δx est initialement fixé, ceci nous oblige à nous donner un pas de temps Δt petit. Plus cette condition de stabilité est restrictive, plus le schéma sera coûteux à utiliser d'un point de vue du temps de calcul. Au contrario, les schémas inconditionnellement stables ne nécessitent aucune restriction particulière et donc peuvent être à priori utilisés pour une valeur quelconque de Δt . Ceci ne signifie pas pour autant qu'ils seront des «bons» schémas, et notamment que la solution calculée sera proche de la solution exacte. En effet, un choix trop grand de Δt donne une mauvaise approximation de la dérivée partielle par rapport au temps. En pratique, un schéma instable est inutilisable car, même si on part d'une donnée initiale spécialement préparée de manière à ce qu'aucun des modes de Fourier instables ne soit excité par elle, les inévitables erreurs d'arrondi vont créer des composantes non nulles (bien que très petites) de la solution sur ces modes instables. La croissance exponentielle de ces modes instables entraîne qu'après seulement quelque pas en temps ces modes deviennent énormes et polluent complètement le reste de la solution numérique.

Stabilité + Consistance = Convergence

Théorème de Lax Soit $u(x, t)$ la solution suffisamment régulière de l'équation aux dérivées partielles $F(u) = 0$ avec des conditions aux limites appropriées. Soit u_j^n la solution numérique discrète obtenue par un schéma aux différences finies avec la donnée initiale $u_j^0 = g(x_j)$. Si le schéma est linéaire, à deux niveaux, consistant et stable pour une norme $\|\cdot\|$, alors le schéma est convergent au sens où

$$\forall T > 0, \quad \lim_{\Delta x, \Delta t \rightarrow 0} \left(\sup_{t^n \leq T} \|u_j^n - u(x_j, t^n)\| \right) = 0.$$

De plus, si le schéma est précis à l'ordre p en espace et à l'ordre q en temps, alors pour tout $T > 0$ il existe une constante $C_T > 0$ telle que

$$\sup_{t^n \leq T} \|u_j^n - u(x_j, t^n)\| \leq C_T ((\Delta x)^p + (\Delta t)^q).$$

D'un point de vue pratique ce théorème est très rassurant : si l'on utilise un schéma consistant (ils sont construits pour cela en général) et que l'on n'observe pas d'oscillations numériques (c'est-à-dire qu'il est stable), alors la solution numérique est proche de la solution exacte (le schéma converge).

Équation équivalente : diffusion et dispersion

Pour comparer divers schémas consistants et stables (donc convergents) d'un point de vue pratique, un concept pertinent (quoique formel) est celui d'équation équivalente.

Équation équivalente On appelle équation équivalente d'un schéma l'équation obtenue en ajoutant au modèle étudié la partie principale (c'est-à-dire le terme d'ordre le plus bas) de l'erreur de troncature.

Tous les schémas qu'on va voir sont consistants. Cependant, si on ajoute à l'équation la partie principale de l'erreur de troncature d'un schéma, alors ces schémas non seulement sont encore consistants avec cette nouvelle équation «équivalente», mais sont même strictement plus précis pour cette équation équivalente. En d'autres termes, les schémas sont «plus consistants» avec l'équation équivalente qu'avec l'équation qu'on veut approcher.

Cette équation va nous donner des renseignements précieux sur le comportement numérique du schéma. Le coefficient de diffusion (c'est-à-dire le coefficient de la dérivée seconde) de l'équation équivalente est appelé diffusion numérique. S'il est grand on dit que le schéma est diffusif (ou dissipatif). Le comportement typique d'un schéma diffusif est sa tendance à étaler artificiellement les données initiales au cours du temps. Si le schéma est précis d'ordre 2 alors l'équation équivalente ne contient pas de terme de diffusion mais un terme du troisième ordre, dit dispersif. Le comportement typique d'un schéma dispersif est qu'il produit des oscillations lorsque la solution est discontinue. En effet, le terme dispersif modifie la vitesse de propagation des modes de Fourier de la solution (particulièrement des modes de fréquence élevée), alors qu'un terme diffusif ne fait qu'atténuer son amplitude.

6. Résolution numérique de l'équation de transport

On considère le problème de transport en une dimension d'espace dans le domaine borné $[0; L]$ avec une vitesse c constante non nulle et des conditions aux limites de périodicité

$$\begin{cases} \partial_t u(x, t) + c \partial_x u(x, t) = 0 & \text{pour } (x, t) \in [0; L] \times [0; T], \\ u(x + L, t) = u(x, t) & \text{pour } (x, t) \in [0; L] \times [0; T], \\ u(x, 0) = g(x) & \text{pour } x \in [0; L]. \end{cases}$$

On souhaite calculer la valeur de la solution u en un ensemble discret de points en espace et en temps. Plus précisément, en fixant un pas d'espace $\Delta x = L/N > 0$ (N entier positif) et un pas de temps $\Delta t > 0$, on cherche à calculer $u_j^n \approx u(j\Delta x, n\Delta t)$ la valeur d'une solution discrète approchée au point (x_j, t^n) . On sait que $u(x, t) = g(x - ct)$ est la solution exacte. Les conditions aux limites de périodicité conduisent aux égalités $u_1^n = u_{N+1}^n$ pour tout $n \geq 0$, par conséquent l'inconnue discrète à chaque pas de temps est un vecteur $u^n = (u_j^n)_{1 \leq j \leq N}$.

Notre stratégie consiste à remplacer des opérateurs différentiels par des quotients aux différences finies. En utilisant différentes façon d'évaluer les dérivées partielles, beaucoup de choix de schémas sont possibles. Nous voulons en étudier ici quelques uns.

Soit $\alpha := c \frac{\Delta t}{\Delta x}$. On considère les schémas aux différences finies suivants :

- ❶ le schéma décentré à gauche

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} = 0 \quad \text{i.e.} \quad u_j^{n+1} = u_j^n - \alpha(u_j^n - u_{j-1}^n)$$

- ❷ le schéma décentré à droite

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} = 0 \quad \text{i.e.} \quad u_j^{n+1} = u_j^n - \alpha(u_{j+1}^n - u_j^n)$$

- ❸ le schéma centré

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0 \quad \text{i.e.} \quad u_j^{n+1} = u_j^n - \alpha \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2}$$

- ❹ le schéma upwind (décentré amont)

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \frac{c + |c|}{2\Delta x} (u_j^n - u_{j-1}^n) + \frac{c - |c|}{2\Delta x} (u_{j+1}^n - u_j^n) = 0$$

i.e.

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \begin{cases} \frac{\alpha + |\alpha|}{2} (u_j^n - u_{j-1}^n) + \frac{\alpha - |\alpha|}{2} (u_{j+1}^n - u_j^n) & \text{si } \alpha > 0, \\ \frac{\alpha - |\alpha|}{2} (u_{j+1}^n - u_j^n) & \text{si } \alpha < 0. \end{cases}$$

- ❺ le schéma de Lax-Friedrichs

$$\frac{u_j^{n+1} - \frac{u_{j+1}^n + u_{j-1}^n}{2}}{\Delta t} + c \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0 \quad \text{i.e.} \quad u_j^{n+1} = \frac{1 - \alpha}{2} u_{j+1}^n + \frac{1 + \alpha}{2} u_{j-1}^n$$

- ❻ le schéma de Lax-Wendroff

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} - \frac{c^2 \Delta t}{2} \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{(\Delta x)^2} = 0$$

i.e.

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \alpha \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2} + \alpha^2 \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{2}$$

⑦ le schéma de Beam-Warming (pour $c > 0$)

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \alpha \left(g(u_{j-1}^n, u_j^n) - g(u_{j-2}^n, u_{j-1}^n) \right) \quad \text{avec } g(A, B) = \frac{\alpha-1}{2} A + \frac{3-\alpha}{2} B$$

i.e.

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \alpha \left((u_j^n - u_{j-1}^n) + \frac{(1-\alpha)}{2} (u_j^n - 2u_{j-1}^n + u_{j-2}^n) \right)$$

ou encore

$$u_j^{n+1} = \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} u_{j-2}^n + \alpha(2-\alpha) u_{j-1}^n + \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)}{2} u_j^n$$

⑧ le schéma de Fromm (pour $c > 0$)

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c \frac{g(u_{j-1}^n, u_j^n, u_{j+1}^n) - g(u_{j-2}^n, u_{j-1}^n, u_j^n)}{\Delta x} = 0 \quad \text{avec } g(A, B, C) = \frac{\alpha-1}{4} A + B + \frac{1-\alpha}{4} C$$

i.e.

$$u_j^{n+1} = \frac{\alpha(\alpha-1)}{4} u_{j-2}^n + \frac{\alpha(5-\alpha)}{4} u_{j-1}^n + \frac{(1-\alpha)(\alpha+4)}{4} u_j^n + \frac{\alpha(\alpha-1)}{4} u_{j+1}^n$$

⑨ le schéma anti-diffusif de Després-Lagoutière (pour $c > 0$)

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c \frac{g(u_{j-1}^n, u_j^n, u_{j+1}^n) - g(u_{j-2}^n, u_{j-1}^n, u_j^n)}{\Delta x} = 0$$

i.e.

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \alpha (g(u_{j-1}^n, u_j^n, u_{j+1}^n) - g(u_{j-2}^n, u_{j-1}^n, u_j^n))$$

avec

$$g(L, C, R) = \begin{cases} A, & \text{si } R \leq A, \\ B, & \text{si } R \geq B, \\ R, & \text{sinon,} \end{cases}$$

où

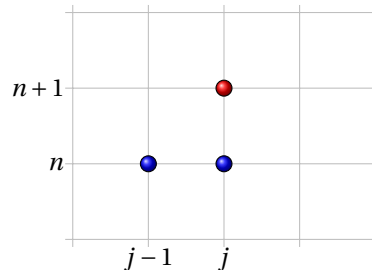
$$A = \max(L, C) + \frac{C - \max(L, C)}{\alpha}, \quad B = \min(L, C) + \frac{C - \min(L, C)}{\alpha}.$$

6.1. Exemples d'études de stabilité et de consistance

Étude du schéma ① (décentré à gauche)

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} = 0 \quad \text{i.e.} \quad u_j^{n+1} = u_j^n - \alpha (u_j^n - u_{j-1}^n)$$

Stencil



Stabilité L^2 . On utilise l'analyse de Fourier : pour $k \in \mathbb{Z}$, le coefficient de Fourier $\hat{u}^n(k)$ de la solution du schéma vérifie

$$\hat{u}^{n+1}(k) = \left[1 - \alpha + \alpha e^{-i2\pi k \Delta x} \right] \hat{u}^n(k).$$

En notant $\xi \equiv 2\pi k \Delta x$, on a

$$\begin{aligned} \hat{u}^{n+1}(k) &= \left[1 - \alpha + \alpha e^{-i\xi} \right] \hat{u}^n(k) = \\ &= \left[1 - \alpha + \alpha (\cos(-\xi) + i \sin(-\xi)) \right] \hat{u}^n(k) = \end{aligned}$$

$$= [1 - \alpha + \alpha \cos(\xi) - i \alpha \sin(\xi)] \hat{u}^n(k).$$

Après simplification on obtient

$$|\hat{u}^{n+1}(k)|^2 = |A(k)|^2 |\hat{u}^n(k)|^2$$

avec

$$\begin{aligned} |A(k)|^2 &\equiv [1 - \alpha + \alpha \cos(\xi)]^2 + \alpha^2 \sin^2 \xi = \\ &= 1 + 2\alpha(\alpha - 1)(1 - \cos(\xi)). \end{aligned}$$

On a

$$|A(k)| \leq 1 \quad \forall k \in \mathbb{Z} \iff 2\alpha(\alpha - 1)(1 - \cos(\xi)) \geq 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{R} \iff \alpha(\alpha - 1) \geq 0.$$

Pour $0 \leq \alpha \leq 1$ on a $|A(k)| \leq 1$ pour toute fréquence $k \in \mathbb{Z}$, ce qui prouve que le schéma est stable en norme L^2 sous la condition CFL $0 \leq \alpha \leq 1$.

Ordre de consistance. On remplace u_i^m par $u(x_i, t^m)$ où u est une fonction régulière, $i = j - 1, j$ et $m = n, n + 1$. On définit l'erreur de troncature par

$$\tau_j^n \equiv \frac{u(x_j, t^{n+1}) - u(x_j, t^n)}{\Delta t} + c \frac{u(x_j, t^n) - u(x_{j-1}, t^n)}{\Delta x}.$$

On fait un développement de Taylor en x autour du point x_j et en t autour du point t^n et, comme u est solution de l'équation $\partial_t u = -c \partial_x u$, on a

$$\begin{aligned} u(x_{j-1}, t^n) &= u(x_j, t^n) - \Delta x \frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t^n) + \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t^n) + O((\Delta x)^3), \\ u(x_j, t^{n+1}) &= u(x_j, t^n) + \Delta t \frac{\partial u}{\partial t}(x_j, t^n) + \frac{(\Delta t)^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j, t^n) + O((\Delta t)^3) \\ &= u(x_j, t^n) + \Delta t \left(-c \frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t^n) \right) + \frac{(\Delta t)^2}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(-c \frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t^n) \right) + O((\Delta t)^3) \\ &= u(x_j, t^n) - c \Delta t \frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t^n) - c \frac{(\Delta t)^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial t}(x_j, t^n) \right) + O((\Delta t)^3) \\ &= u(x_j, t^n) - c \Delta t \frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t^n) + c^2 \frac{(\Delta t)^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t^n) + O((\Delta t)^3). \end{aligned}$$

Par conséquent l'erreur de troncature se réécrit

$$\begin{aligned} \tau_j^n &\equiv \frac{u(x_j, t^{n+1}) - u(x_j, t^n)}{\Delta t} + c \frac{u(x_j, t^n) - u(x_{j-1}, t^n)}{\Delta x} \\ &= \left(c^2 \frac{\Delta t}{2} - c \frac{\Delta x}{2} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t^n) + O((\Delta x)^2 + (\Delta t)^2) \\ &= O((\Delta x) + (\Delta t)). \end{aligned}$$

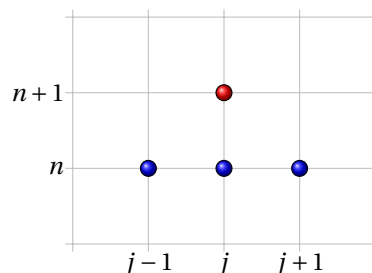
Le schéma est donc d'ordre 1 en temps et en espace.

On aurait pu s'arrêter un ordre avant dans les développements de Taylor, mais vous voyez bien que même si on va plus loin on obtient le bon résultat! Cependant, dans la consigne de l'exercice je vous ai suggéré l'ordre pour éviter de faire des calculs inutiles. Dans les exemples qui suivent on va s'arrêter au minimum nécessaire.

Exemple : étude du schéma \otimes (centré)

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0 \quad \text{i.e.} \quad u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\alpha}{2} (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n)$$

Stencil



Stabilité L^2 . On utilise l'analyse de Fourier : pour $k \in \mathbb{Z}$, le coefficient de Fourier $\hat{u}^n(k)$ de la solution du schéma vérifie

$$\hat{u}^{n+1}(k) = \left[1 - \frac{\alpha}{2} \left(e^{i2\pi k \Delta x} - e^{-i2\pi k \Delta x} \right) \right] \hat{u}^n(k).$$

En notant $\xi \equiv 2\pi k \Delta x$, on a

$$\begin{aligned} \hat{u}^{n+1}(k) &= \left[1 - \frac{\alpha}{2} \left(e^{i\xi} - e^{-i\xi} \right) \right] \hat{u}^n(k) = \\ &= \left[1 - \frac{\alpha}{2} \left(\cos(\xi) + i \sin(\xi) - \cos(-\xi) - i \sin(-\xi) \right) \right] \hat{u}^n(k) = \\ &= [1 - i\alpha \sin(\xi)] \hat{u}^n(k). \end{aligned}$$

Après simplification on obtient

$$|\hat{u}^{n+1}(k)|^2 = |A(k)|^2 |\hat{u}^n(k)|^2$$

avec

$$|A(k)|^2 \equiv 1 + \alpha^2 \sin^2(\xi).$$

On a

$$|A(k)| \leq 1 \quad \forall k \in \mathbb{Z} \iff \alpha^2 \sin^2(\xi) \leq 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{R} \iff \alpha = 0.$$

Ce qui prouve que le schéma est inconditionnellement instable en norme L^2 .

Ordre de consistance. On remplace u_j^m par $u(x_j, t^m)$ où u est une fonction régulière, $i = j - 1, j, j + 1$ et $m = n, n + 1$. On définit l'erreur de troncature par

$$\tau_j^n \equiv \frac{u(x_j, t^{n+1}) - u(x_j, t^n)}{\Delta t} + c \frac{u(x_{j+1}, t^n) - u(x_{j-1}, t^n)}{2\Delta x}.$$

On fait un développement de Taylor en x autour du point x_j et en t autour du point t^n et, comme u est solution de l'équation $\partial_t u = -c \partial_x u$, on a

$$\begin{aligned} u(x_{j-1}, t^n) &= u(x_j, t^n) - \Delta x \frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t^n) + \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t^n) + O((\Delta x)^3), \\ u(x_{j+1}, t^n) &= u(x_j, t^n) + \Delta x \frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t^n) + \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t^n) + O((\Delta x)^3), \\ u(x_j, t^{n+1}) &= u(x_j, t^n) + \Delta t \frac{\partial u}{\partial t}(x_j, t^n) + O((\Delta t)^2) \\ &= u(x_j, t^n) + \Delta t \left(-c \frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t^n) \right) + O((\Delta t)^2) \\ &= u(x_j, t^n) - c \Delta t \frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t^n) + O((\Delta t)^2). \end{aligned}$$

Par conséquent l'erreur de troncature se réécrit

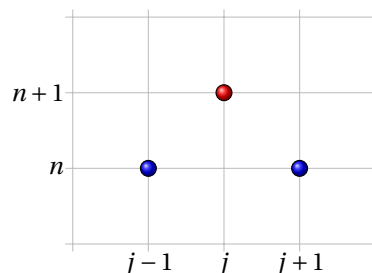
$$\tau_j^n \equiv \frac{u(x_j, t^{n+1}) - u(x_j, t^n)}{\Delta t} + c \frac{u(x_{j+1}, t^n) - u(x_{j-1}, t^n)}{2\Delta x} = O((\Delta x)^2 + (\Delta t)).$$

Le schéma est donc d'ordre 1 en temps et 2 en espace.

Exemple : étude du schéma ⑤ (Lax-Friedrichs)

$$\frac{u_j^{n+1} - \frac{u_{j+1}^n + u_{j-1}^n}{2}}{\Delta t} + c \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0 \quad \text{i.e.} \quad u_j^{n+1} = \frac{1-\alpha}{2} u_{j+1}^n + \frac{1+\alpha}{2} u_{j-1}^n$$

Stencil



Stabilité L^2 . On utilise l'analyse de Fourier : pour $k \in \mathbb{Z}$, le coefficient de Fourier $\hat{u}^n(k)$ de la solution du schéma vérifie

$$\hat{u}^{n+1}(k) = \left[\frac{1-\alpha}{2} e^{i2\pi k \Delta x} - \frac{1+\alpha}{2} e^{-i2\pi k \Delta x} \right] \hat{u}^n(k).$$

En notant $\xi \equiv 2\pi k \Delta x$, on a

$$\hat{u}^{n+1}(k) = \left[\frac{1-\alpha}{2} e^{i\xi} + \frac{1+\alpha}{2} e^{-i\xi} \right] \hat{u}^n(k) = [\cos(\xi) - i\alpha \sin(\xi)] \hat{u}^n(k).$$

Après simplification on obtient

$$|\hat{u}^{n+1}(k)|^2 = |A(k)|^2 |\hat{u}^n(k)|^2$$

avec

$$|A(k)|^2 \equiv \cos^2(\xi) + \alpha^2 \sin^2(\xi).$$

On a

$$|A(k)| \leq 1 \quad \forall k \in \mathbb{Z} \iff \cos^2(\xi) + \alpha^2 \sin^2(\xi) \geq 1 \quad \forall \xi \in \mathbb{R} \iff \alpha^2 \leq 1.$$

Ce qui prouve que le schéma est stable en norme L^2 sous la condition CFL $|\alpha| \leq 1$.

Ordre de consistance. On remplace u_i^m par $u(x_i, t^m)$ où u est une fonction régulière, $i = j-1, j, j+1$ et $m = n, n+1$. On définit l'erreur de troncature par

$$\tau_j^n \equiv \frac{u(x_j, t^{n+1}) - \frac{u(x_{j+1}, t^n) + u(x_{j-1}, t^n)}{2}}{\Delta t} + c \frac{u(x_{j+1}, t^n) - u(x_{j-1}, t^n)}{2\Delta x}.$$

On fait un développement de Taylor en x autour du point x_j et en t autour du point t^n et, comme u est solution de l'équation $\partial_t u = -c \partial_x u$, on a

$$\begin{aligned} u(x_{j-1}, t^n) &= u(x_j, t^n) - \Delta x \frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t^n) + O((\Delta x)^2), \\ u(x_{j+1}, t^n) &= u(x_j, t^n) + \Delta x \frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t^n) + O((\Delta x)^2), \\ u(x_j, t^{n+1}) &= u(x_j, t^n) + \Delta t \frac{\partial u}{\partial t}(x_j, t^n) + O((\Delta t)^2) \\ &= u(x_j, t^n) + \Delta t \left(-c \frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t^n) \right) + O((\Delta t)^2) \\ &= u(x_j, t^n) - c \Delta t \frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t^n) + O((\Delta t)^2). \end{aligned}$$

Par conséquent l'erreur de troncature se réécrit

$$\tau_j^n \equiv \frac{u(x_j, t^{n+1}) - u(x_j, t^n)}{\Delta t} + c \frac{u(x_{j+1}, t^n) - u(x_{j-1}, t^n)}{2\Delta x} = O\left((\Delta x) + (\Delta t) + \frac{(\Delta x)^2}{\Delta t} \right).$$

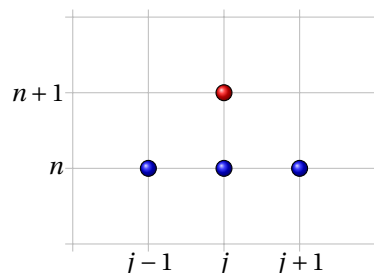
Étant donné que, sous la condition CFL calculée précédemment, $O\left(\frac{(\Delta x)^2}{\Delta t}\right) = O(\Delta x)$, le schéma est donc d'ordre 1 en temps et en espace.

Exemple : étude du schéma ⑥ (Lax-Wendroff)

Pour $j = 0, \dots, N-1$ et $n \in \mathbb{N}$, le schéma de Lax-Wendroff s'écrit

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} - c^2 \Delta t \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{2(\Delta x)^2} = 0 \quad \text{i.e.} \quad u_j^{n+1} = u_j^n - \alpha \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2} + \alpha^2 \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{2}$$

Stencil



Stabilité L^2 . On utilise l'analyse de Fourier : pour $k \in \mathbb{Z}$, le coefficient de Fourier $\hat{u}^n(k)$ de la solution du schéma vérifie

$$\hat{u}^{n+1}(k) = \left[\frac{-\alpha + \alpha^2}{2} e^{i2\pi k \Delta x} + 1 - 2\alpha^2 + \frac{\alpha + \alpha^2}{2} e^{-i2\pi k \Delta x} \right] \hat{u}^n(k).$$

En notant $\xi \equiv 2\pi k \Delta x$, on a

$$\hat{u}^{n+1}(k) = \left[\frac{-\alpha + \alpha^2}{2} e^{i\xi} + 1 - \alpha^2 + \frac{\alpha + \alpha^2}{2} e^{-i\xi} \right] \hat{u}^n(k) = [1 - \alpha^2(1 - \cos(\xi)) - i\alpha \sin(\xi)] \hat{u}^n(k).$$

Après simplification on obtient

$$|\hat{u}^{n+1}(k)|^2 = |A(k)|^2 |\hat{u}^n(k)|^2$$

avec

$$|A(k)|^2 \equiv \alpha^2(\alpha^2 - 1)(\cos(\xi) - 1)^2 + 1.$$

On a

$$|A(k)| \leq 1 \quad \forall k \in \mathbb{Z} \iff \alpha^2 \leq 1.$$

Ce qui prouve que le schéma est stable en norme L^2 sous la condition CFL $|\alpha| \leq 1$.

Ordre de consistance. On remplace u_i^m par $u(x_i, t^m)$ où u est une fonction régulière, $i = j - 1, j, j + 1$ et $m = n, n + 1$. On définit l'erreur de troncature par

$$\tau_j^n \equiv \frac{u(x_j, t^{n+1}) - u(x_j, t^n)}{\Delta t} + c \frac{u(x_{j+1}, t^n) - u(x_{j-1}, t^n)}{2\Delta x} - c^2 \Delta t \frac{u(x_{j+1}, t^n) - 2u(x_j, t^n) + u(x_{j-1}, t^n)}{2(\Delta x)^2} = 0.$$

On fait un développement de Taylor en x autour du point x_j et en t autour du point t^n et, comme u est solution de l'équation $\partial_t u = -c \partial_x u$, on a

$$\begin{aligned} u(x_{j-1}, t^n) &= u(x_j, t^n) - \Delta x \frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t^n) + \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t^n) + O((\Delta x)^3), \\ u(x_{j+1}, t^n) &= u(x_j, t^n) + \Delta x \frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t^n) + \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t^n) + O((\Delta x)^3), \\ u(x_j, t^{n+1}) &= u(x_j, t^n) + \Delta t \frac{\partial u}{\partial t}(x_j, t^n) + \frac{(\Delta t)^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j, t^n) + O((\Delta t)^3) \\ &= u(x_j, t^n) + \Delta t \left(-c \frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t^n) \right) + \frac{(\Delta t)^2}{2} \left(c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t^n) \right) + O((\Delta t)^3) \\ &= u(x_j, t^n) - c \Delta t \frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t^n) + c^2 \frac{(\Delta t)^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t^n) + O((\Delta t)^3). \end{aligned}$$

Par conséquent l'erreur de troncature se réécrit

$$\tau_j^n \equiv \frac{u(x_j, t^{n+1}) - u(x_j, t^n)}{\Delta t} + c \frac{u(x_{j+1}, t^n) - u(x_{j-1}, t^n)}{2\Delta x} - c^2 \Delta t \frac{u(x_{j+1}, t^n) - 2u(x_j, t^n) + u(x_{j-1}, t^n)}{2(\Delta x)^2} = O((\Delta t)^2) + O((\Delta x)^2).$$

car, sous la condition CFL calculée précédemment, $O(c \frac{\Delta t}{\Delta x}) = O(1)$, le schéma est donc d'ordre 2 en temps et en espace.

7. Résolution numérique d'une équation non-linéaire

On cherche

$$u: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, t) \mapsto u(x, t)$$

solution faible entropique du problème

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x q(u) = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, 0) = g(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

avec le flux

$$q: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$u \mapsto q(u)$$

Soit $\alpha := \frac{\Delta t}{\Delta x}$ et cf1 une constante réelle positive et posons

$$u_j^n \approx \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} u(x, n\Delta t) dx$$

la solution approchée dans la mailles de centre $(j\Delta x, n\Delta t)$.

❶ On considère tout d'abord le schéma upwind, qui se base sur la forme non-conservative

$$\partial_t u + q'(u) \partial_x u = 0,$$

tel qu'on l'a écrit pour l'équation de transport :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \frac{q'(u_j^n) + |q'(u_j^n)|}{2\Delta x} (u_j^n - u_{j-1}^n) + \frac{q'(u_j^n) - |q'(u_j^n)|}{2\Delta x} (u_{j+1}^n - u_j^n) = 0$$

i.e.

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \alpha \left(\frac{q'(u_j^n) + |q'(u_j^n)|}{2} (u_j^n - u_{j-1}^n) + \frac{q'(u_j^n) - |q'(u_j^n)|}{2} (u_{j+1}^n - u_j^n) \right) = \begin{cases} u_j^n - \alpha q'(u_j^n) (u_j^n - u_{j-1}^n) & \text{si } q'(u_j^n) > 0, \\ u_j^n - \alpha q'(u_j^n) (u_{j+1}^n - u_j^n) & \text{si } q'(u_j^n) < 0. \end{cases}$$

On considère ensuite des schémas de type *Volumes Finis* qui se basent sur la forme conservative de l'équation non-linéaire

$$\partial_t u + \partial_x q(u) = 0.$$

Principe : on intègre l'EDP entre $x_{j-1/2} \equiv (j-1/2)\Delta x$ et $x_{j+1/2} \equiv (j+1/2)\Delta x$ pour tout $t > 0$:

$$\partial_t \left(\int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} u(x, t) dx \right) + \partial_x \left(\int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} q(u(x, t)) dx \right) = 0.$$

On pose

$$u_j(t) = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} u(x, t) dx$$

ce qui donne

$$\partial_t (u_j(t)) + \partial_x \left(\frac{q(u_{j+1/2}(t)) - q(u_{j-1/2}(t))}{\Delta x} \right) = 0.$$

Idée : approcher $q(u_{j+1/2}(t)) \approx g(u_j(t), u_{j+1}(t))$ où g est le flux numérique du schéma qu'il faut définir :

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \alpha (g(u_{j-1}^n, u_j^n) - g(u_j^n, u_{j+1}^n)) \quad \text{avec} \quad \Delta t \leq \text{cf1} \frac{\Delta x}{\sup_j |q'(u_j^n)|},$$

Les différents schémas se caractérisent par la définition du flux numérique g qui est une approximation du flux q :

❷ le schéma de Lax-Friedrichs :

$$g(L, R) = \frac{q(L) + q(R) + \frac{L-R}{\alpha}}{2}$$

❸ le schéma de Lax-Wendroff :

$$g(L, R) = \frac{q(L) + q(R) - \alpha(q(R) - q(L))q'(\frac{L+R}{2})}{2}$$

❹ le schéma de Godunov : si on dénote $w(\frac{x}{t}, L, R)$ la solution exacte du problème de Riemann à deux états donnés par L (gauche) et R (droite), le flux numérique s'écrit

$$g(L, R) = q(w(0, L, R))$$

❺ le schéma de Murman-Roe :

$$g(L, R) = \begin{cases} q(L) & \text{si } a(L, R) \in \{0, 1\}, \\ q(R) & \text{si } a(L, R) = -1 \end{cases} \quad \text{où } a(L, R) = \begin{cases} \text{signe}(q(L) - q(R)) \cdot \text{signe}(L - R) & \text{si } L \neq R, \\ \text{signe}(q'(L)) & \text{sinon.} \end{cases}$$

8. Systèmes hyperboliques

Dans ce dernier chapitre on s'intéresse à la résolution de problèmes de Riemann associés aux systèmes hyperboliques non-linéaires en une dimension d'espace. Plus précisément, on cherche une fonction

$$\begin{aligned} \mathbf{W}: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^p \\ (t, x) &\mapsto \mathbf{W}(t, x) \end{aligned}$$

qui vérifie (au sens faible) le système d'EDPs

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{W} + \partial_x \mathbf{F}(\mathbf{W}) = \mathbf{0}, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ \mathbf{W}(0, x) = \begin{cases} \mathbf{W}_L & \text{si } x < 0, \\ \mathbf{W}_R & \text{si } x > 0, \end{cases} \end{cases}$$

avec le flux

$$\begin{aligned} \mathbf{F}: \mathbb{R}^p &\rightarrow \mathbb{R}^p \\ \mathbf{W} &\mapsto \mathbf{F}(\mathbf{W}) \end{aligned}$$

Pour des solutions régulières on peut réécrire ce système sous la forme quasi-linéaire

$$\partial_t \mathbf{W} + \mathbb{B}(\mathbf{W}) \partial_x \mathbf{W} = \mathbf{0}$$

avec $\mathbb{B}(\mathbf{W})$ la matrice jacobienne du flux \mathbf{F} et on note $\lambda_1(\mathbf{W}) < \lambda_2(\mathbf{W}) < \dots < \lambda_p(\mathbf{W})$ ses valeurs propres.

Pour $j \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$ on pose

$$\mathbf{W}_j^n \approx \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \mathbf{W}(x, t^n) dx \quad \text{et} \quad \mathbf{G}(\mathbf{W}_j^n, \mathbf{W}_{j+1}^n) \approx \mathbf{F}(\mathbf{W}(x_{j+1/2}, t^n)).$$

On considère des schémas Volumes Finis :

$$\mathbf{W}_j^{n+1} = \mathbf{W}_j^n - \frac{\Delta t^n}{\Delta x} \left[\mathbf{G}(\mathbf{W}_j^n, \mathbf{W}_{j+1}^n) - \mathbf{G}(\mathbf{W}_{j-1}^n, \mathbf{W}_j^n) \right],$$

à savoir

le schéma de Lax-Friedrichs	$\mathbf{G}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{\mathbf{F}(\mathbf{a}) + \mathbf{F}(\mathbf{b}) - \frac{\Delta x}{\Delta t^n} (\mathbf{b} - \mathbf{a})}{2}$
le schéma de Rusanov	$\mathbf{G}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{\mathbf{F}(\mathbf{a}) + \mathbf{F}(\mathbf{b})}{2} - \max_{k=1, \dots, p} \{ \lambda_k(\mathbf{a}) , \lambda_k(\mathbf{b}) \} \frac{\mathbf{b} - \mathbf{a}}{2}$

On associe à ces schémas la condition de stabilité de Courant-Friedrichs-Lewy

$$\Delta t^n \leq \frac{\Delta x}{2 \max_{j \in \mathbb{Z}} \{ |\lambda_1(\mathbf{W}_j^n)|, \dots, |\lambda_p(\mathbf{W}_j^n)| \}}.$$