MS41 Optimisation I - L2 MASS - Examen - Mai 2013

Exercice 1

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ une constante et $f_\alpha\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction ainsi définie

$$f_\alpha(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x^2+y^2)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ \alpha & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1. *Étude de la fonction sur* $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
   1.1. Calculer le gradient de f_α pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
   1.2. Montrer que f_α est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$; que peut-on conclure sur la différentiabilité de f_α ?
2. *Étude de la fonction en* $(0,0)$.
   2.1. Calculer $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_\alpha(x,y)$ et en déduire qu'il existe une valeur α_0 de α (à préciser) pour laquelle f_α est continue en $(0,0)$.
   2.2. Montrer que f_α admet des dérivées partielles en $(0,0)$ si et seulement si $\alpha = \alpha_0$ et calculer $\nabla f_{\alpha_0}(0,0)$.
   2.3. En utilisant la définition, prouver que f_{α_0} est différentiable en $(0,0)$.
   2.4. Montrer que f_{α_0} est de classe $\mathscr{C}^1$ en $(0,0)$.

CORRECTION.

1. *Étude de la fonction sur* $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
   1.1. Le gradient de f_α pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ est le vecteur de composantes

$$\partial_x f_\alpha(x,y) = \frac{2x}{(x^2+y^2)}\left(\frac{1}{1+x^2+y^2} - \frac{\ln(1+x^2+y^2)}{x^2+y^2}\right), \qquad \partial_y f_\alpha(x,y) = \frac{2y}{(x^2+y^2)}\left(\frac{1}{1+x^2+y^2} - \frac{\ln(1+x^2+y^2)}{x^2+y^2}\right).$$

   1.2. f_α et ses dérivées partielles sont continues sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ car composition et quotients de fonctions continues dont les dénominateurs ne s'annulent pas, f_α est donc de classe $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$. Comme tout fonction de classe $\mathscr{C}^1$ est différentiable, on conclut que f_α est différentiable sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
2. *Étude de la fonction en* $(0,0)$.
   2.1. Passons en coordonnées polaires :

$$\begin{aligned} \tilde f_\alpha\colon \mathbb{R}_+^* \times [0;2\pi[&\to \mathbb{R} \\ (r,\vartheta) &\mapsto \tilde f_\alpha(r,\vartheta) \equiv f_\alpha(r\cos(\vartheta), r\sin(\vartheta)) = \frac{\ln(1+r^2)}{r^2}. \end{aligned}$$

Comme $\ln(1+x) \simeq x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ lorsque $x \simeq 0$, on a alors $\ln(1+r^2) \simeq r^2 - \frac{r^4}{2} + o(r^4)$ lorsque $r \simeq 0$, donc $\tilde f_\alpha(r,\vartheta) \xrightarrow[\substack{r\to 0\\ \forall\vartheta}]{} 1$ ainsi $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_\alpha(x,y) = 1$. Pour que f_α soit continue en $(0,0)$ il faut que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_\alpha(x,y) = f_\alpha(0,0)$ donc pour que f_α soit continue en $(0,0)$ il faut que α soit égal à $\alpha_0 = 1$.

   2.2. Le gradient de f_α en $(0,0)$ est le vecteur de composantes

$$\partial_x f_\alpha(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f_\alpha(x,0) - f_\alpha(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\ln(1+x^2)}{x^2} - \alpha}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(\frac{\ln(1+x^2)}{x^2} - \alpha\right) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(\frac{x^2 - \frac{x^4}{2}}{x^2} - \alpha\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\alpha}{x} - \frac{x}{2}\right),$$

$$\partial_y f_\alpha(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f_\alpha(0,y) - f_\alpha(0,0)}{y-0} = \lim_{y\to 0} \frac{\frac{\ln(1+y^2)}{y^2} - \alpha}{y} = \lim_{y\to 0}\left(\frac{1-\alpha}{y} - \frac{y}{2}\right).$$

Ces deux limites existent et sont finies si et seulement si $\alpha = 1$. Dans ce cas, $\nabla f_\alpha(0,0) = (0,0)^T$.

   2.3. Pour prouver que f_{α_0} est différentiable en $(0,0)$ il faut montrer que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f_{\alpha_0}(x,y) - f_{\alpha_0}(0,0) - \partial_x f_{\alpha_0}(0,0)(x-0) - \partial_y f_{\alpha_0}(0,0)(y-0)}{\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}} = 0.$$

Notons $h(x,y) = \frac{f_{\alpha_0}(x,y) - f_{\alpha_0}(0,0) - \partial_x f_{\alpha_0}(0,0)(x-0) - \partial_y f_{\alpha_0}(0,0)(y-0)}{\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}} = \frac{\frac{\ln(1+x^2+y^2)}{x^2+y^2} - 1}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Passons en coordonnées polaires :

$$\tilde h(r,\vartheta) = h(r\cos(\vartheta), r\sin(\vartheta)) = \frac{1}{r}\left(\frac{\ln(1+r^2)}{r^2} - 1\right) \simeq -\frac{r}{2} \xrightarrow[r\to 0]{} 0.$$

donc f_{α_0} est bien différentiable en $(0,0)$.

2.4. Pour que f_{α_0} soit de classe $\mathscr{C}^1$ en $(0,0)$ il faut qu'elle et ses dérivées partielles premières soient continues, donc il faut que
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \partial_x f_{\alpha_0}(x,y) = \partial_x f_{\alpha_0}(0,0) \qquad \text{et} \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \partial_y f_{\alpha_0}(x,y) = \partial_y f_{\alpha_0}(0,0).$$
Comme
$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(0,0)} \partial_x f_{\alpha_0}(x,y) &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x}{(x^2+y^2)}\left(\frac{1}{1+x^2+y^2} - \frac{\ln(1+x^2+y^2)}{x^2+y^2}\right) \\
&= \lim_{\substack{r\to0\\ \forall\vartheta}} \frac{2r\cos(\vartheta)}{r^2}\left(\frac{1}{1+r^2} - \frac{\ln(1+r^2)}{r^2}\right) = \lim_{\substack{r\to0\\ \forall\vartheta}} \frac{2\cos(\vartheta)}{r}\left(\frac{1}{1+r^2} - 1 + \frac{r^2}{2}\right) = \lim_{\substack{r\to0\\ \forall\vartheta}} \frac{r(r^2-1)}{(r^2+1)}\cos(\vartheta) = 0, \\
\lim_{(x,y)\to(0,0)} \partial_y f_{\alpha_0}(x,y) &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2y}{(x^2+y^2)}\left(\frac{1}{1+x^2+y^2} - \frac{\ln(1+x^2+y^2)}{x^2+y^2}\right) \\
&= \lim_{\substack{r\to0\\ \forall\vartheta}} \frac{2r\sin(\vartheta)}{r^2}\left(\frac{1}{1+r^2} - \frac{\ln(1+r^2)}{r^2}\right) = \lim_{\substack{r\to0\\ \forall\vartheta}} \frac{r(r^2-1)}{(r^2+1)}\sin(\vartheta) = 0,
\end{aligned}$$
par conséquent $\partial_x f_{\alpha_0}$ et $\partial_y f_{\alpha_0}$ sont continues en $(0,0)$. Comme f_{α_0} aussi est continue en $(0,0)$, on conclut que f_{α_0} est de classe $\mathscr{C}^1$ en $(0,0)$.

Exercice 2

Soit $\mathscr{E} = \left\{ (x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, 16x^4+y^4 \le 1 \right\}$. On se propose de déterminer les extrema de la fonction
$$\begin{aligned} f\colon \mathscr{E} &\to \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto x^4+16y^4 \end{aligned}$$

1. Étudier la nature des points critiques de f lorsque $(x,y)\in\mathring{\mathscr{E}} = \left\{ (x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, 16x^4+y^4 < 1 \right\}$.
2. Étudier la nature des points critiques du lagrangien, *i.e.* de f lorsque $(x,y)\in\partial\mathscr{E} = \left\{ (x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, 16x^4+y^4 = 1 \right\}$.
3. En déduire les maxima et minima globaux de f dans $\mathscr{E}$.

Correction. La fonction étant de classe $\mathscr{C}^\infty$ (somme de fonctions $\mathscr{C}^\infty$) sur $\mathscr{E}$ fermé borné, on peut appliquer le théorème de Weierstrass et affirmer que f atteint son minimum global (au moins en un point du compact $\mathscr{E}$) et son maximum global (au moins en un point du compact $\mathscr{E}$). Ces points sont à chercher parmi les minima et maxima locaux de f sur $\mathscr{E}$, c'est-à-dire parmi les minima et maxima locaux de f dans l'ouvert $\mathring{\mathscr{E}}$ (*i.e.* optimisation libre d'une fonction $\mathscr{C}^\infty$ sur un ouvert) et parmi les minima et maxima locaux de f sur le bord $\partial\mathscr{E}$ (*i.e.* optimisation liée d'une fonction $\mathscr{C}^\infty$ sous une contrainte $\mathscr{C}^\infty$).

1. Considérons l'ensemble $\mathring{\mathscr{E}} = \left\{ (x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, 16x^4+y^4 < 1 \right\}$.

   Recherche des points critiques de f
$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 4x^3 \\ 64y^3 \end{pmatrix} \qquad \text{donc} \qquad \nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x^3 = 0, \\ y^3 = 0. \end{cases}$$
   L'unique point critique de f est le point $(x_0,y_0) = (0,0)$.

   Étude de la nature du point critique
$$\partial_{xx} f(x,y) = 12x^2 \qquad\qquad \partial_{yy} f(x,y) = 192y^2 \qquad\qquad \partial_{xy} f(x,y) = 0$$
   donc
$$H_f(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \text{dét}(H_f(x_0,y_0)) = 0.$$
   Comme l'étude de la matrice Hessienne ne permet pas d'établir la nature du point (x_0,y_0), on étudie directement le signe de la fonction distance au voisinage du point critique :
$$d(h,k) \equiv f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) = h^4 + 16k^4 \qquad \text{pour } (h,k) \simeq (0,0).$$
   Puisque $d(h,k) \le 0$ pour $(h,k)\simeq(0,0)$, on conclut que le point (x_0,y_0) est un minimum local.

   Conclusion sur l'ouvert : $f(x,y) > f(0,0)$ pour tout $(x,y)\in\mathscr{E}\setminus\{(0,0)\}$ donc $(0,0)$ est un minimum global.
2. Considérons l'ensemble $\partial\mathscr{E} = \left\{ (x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, 16x^4+y^4 = 1 \right\}$. Pour chercher les candidats extrema de f sur le bord du domaine, on utilise la méthode du lagrangien : soit $g(x,y) = 16x^4+y^4-1$ et $\mathscr{L}(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x,y) = x^4+16y^4 - \lambda(16x^4+y^4-1)$.

Recherche des points critiques de $\mathscr{L}$

$$\nabla\mathscr{L}(x,y,\lambda)=\begin{pmatrix}4x^3-64\lambda x^3\\192y^3-4\lambda y^3\\1-16x^4-y^4\end{pmatrix}\quad\text{donc}\quad\nabla\mathscr{L}(x,y,\lambda)=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\iff\begin{cases}4x^3(1-16\lambda)=0,\\4y^3(16-\lambda)=0,\\16x^4+y^4=1.\end{cases}$$

Les points critiques de $\mathscr{L}$ sont les points

$$(x_1,y_1,\lambda_1)=(0,1,16),\qquad(x_2,y_2,\lambda_2)=(0,-1,16),\qquad(x_3,y_3,\lambda_3)=\left(\frac{1}{2},0,\frac{1}{16}\right),\qquad(x_4,y_4,\lambda_4)=\left(-\frac{1}{2},0,\frac{1}{16}\right).$$

Conclusion partielle : étant donné que $f(0,\pm1)=16$, $f(\pm1/2,0)=1/16$ et que le maximum global, dont l'existence est assurée par le théorème de Weierstrass, est atteint en un ou plusieurs points du bord du domaine, on peut conclure que les points $(0,1)$ et $(0,-1)$ sont des maxima globaux. En revanche, il faut encore étudier les points $(0,1/2)$ et $(0,-1/2)$ qui peuvent être des minima locaux, des maxima locaux ou ne pas être des extrema.

Étude de la nature des points critiques À la lumière de la conclusion partielle précédente, il suffit d'étudier la nature des deux points critiques $(0,1/2)$ et $(0,-1/2)$. Cependant, dans un souci d'exhaustivité, on effectue l'analyse pour chacun des quatre points critiques du lagrangien. On a

$$\partial_{xx}\mathscr{L}(x,y,\lambda)=12x^2(1-16\lambda)\qquad\partial_{yy}\mathscr{L}(x,y,\lambda)=12y^2(16-\lambda)\qquad\partial_{xy}\mathscr{L}(x,y,\lambda)=0$$

donc $\partial_{xx}\mathscr{L}(x_i,y_i,\lambda_i)\times\partial_{yy}\mathscr{L}(x_i,y_i,\lambda_i)-(\partial_{xy}\mathscr{L}(x_i,y_i,\lambda_i))^2=0$ pour $i=1,2,3,4$: la méthode du lagrangien permet juste de trouver les candidats extrema de f sous la contrainte g mais ne permet pas de conclure. On étudie alors le comportement de f au voisinage de chaque point critique en restant sur le bord $\partial\mathscr{E}$. Pour cela, on étudie le signe de la fonction distance définie par

$$d_i(h,k)\equiv f(x_i+h,y_i+k)-f(x_i,y_i),\qquad i=1,2,3,4$$

pour $(h,k)\simeq(0,0)$ et $g(x_i+h,y_i+k)=0$:
- ▷ $d_i(h,k)=(x_i+h)^4+16(y_i+k)^4-x_i^2-16y_i^2$
- ▷ $g_i(x_i+h,y_i+k)=16(x_i+h)^4+(y_i+k)^4-1$

Pour étudier le signe de la fonction d_i avec h et k liés par la relation $g_i(x_i+h,y_i+k)=0$, on essaye d'exprimer h en fonction de k ou réciproquement k en fonction de h à partir de la relation $g_i(x_i+h,y_i+k)=0$. Cela nécessite l'emploi du théorème des fonctions implicites dont il faudra vérifier les hypothèses avant d'exprimer une variable en fonction de l'autre. Ainsi :

- ▷ si $\partial_y g_i(x_i,y_i)\neq0$ alors l'équation $g_i(x_i+h,y_i+k)=0$ définit implicitement k en fonction de h au voisinage de $h=0$: en résolvant $g_i(x_i+h,y_i+k)=0$ on trouve $(y_i+k)^4=1-16(x_i+h)^4$; en remplaçant l'expression ainsi trouvée dans $d_i(h,k)$ on trouve la fonction d'une seule variable

$$\tilde{d}_i(h)=16-15(x_i+h)^4-x_i^4-16y_i^4;$$

  on remarque que si $\partial_y g_i(x_i,y_i)=0$, on peut toujours résoudre l'équation $g_i(x_i+h,y_i+k)=0$ et on trouve $(x_i+h)^2=(1-(y_i+k)^2)/4$; en remplaçant l'expression ainsi trouvée dans $d_i(h,k)$ on trouve la fonction d'une seule variable $\delta_i(k)\equiv d_i(h(k),k)=\frac{1}{16}+\frac{255}{16}(y_i+k)^4-x_i^4-16y_i^4$, cependant l'étude du signe de cette fonction n'est d'aucune utilité car on a violé les hypothèses du théorème des fonctions implicites ;
- ▷ si $\partial_x g_i(x_i,y_i)\neq0$ alors l'équation $g_i(x_i+h,y_i+k)=0$ définit implicitement h en fonction de k au voisinage de $k=0$: en résolvant $g_i(x_i+h,y_i+k)=0$ on trouve $(x_i+h)^4=(1-(y_i+k)^4)/16$; en remplaçant l'expression ainsi trouvée dans $d_i(h,k)$ on trouve la fonction d'une seule variable

$$\tilde{d}_i(k)=\frac{1}{16}+\frac{255}{16}(y_i+k)^4-x_i^4-16y_i^4;$$

  on remarque que si $\partial_x g_i(x_i,y_i)=0$, on peut toujours résoudre l'équation $g_i(x_i+h,y_i+k)=0$ et on trouve $(y_i+h)^4=1-16(x_i+k)^4$; en remplaçant l'expression ainsi trouvée dans $d_i(h,k)$ on trouve la fonction d'une seule variable $\delta_i(h)\equiv d_i(h,k(h))=16-15(x_i+h)^4-x_i^4-16y_i^4$, cependant l'étude du signe de cette fonction n'est d'aucune utilité car on a violé les hypothèses du théorème des fonctions implicites.

Conclusion partielle :
- ▷ $\tilde{d}_1(h)=-15h^4\le0$ donc le point (x_1,y_1) est un maximum,
- ▷ $\tilde{d}_2(h)=-15h^4\le0$ donc le point (x_2,y_2) est un maximum,
- ▷ $\tilde{d}_3(k)=\frac{255}{16}k^4\ge0$ donc le point (x_3,y_3) est un minimum,
- ▷ $\tilde{d}_4(k)=\frac{255}{16}k^4\ge0$ donc le point (x_4,y_4) est un minimum.

Conclusion sur le bord : les points $(0,1)$ et $(0,-1)$ sont des maxima de f sous la contrainte g et $f(0,\pm 1) = 16$, les points $(1/2,0)$ et $(-1/2,0)$ sont des minima de f sous la contrainte g et $f(\pm 1/2, 0) = 1/16$.

3. $(0,0)$ est le minimum global et les points $(0,1)$ et $(0,-1)$ sont les maxima globaux, autrement dit

$$0 = f(0,0) \le f(x,y) \le f(0,\pm 1) = 16 \qquad \forall (x,y) \in \mathscr{E}.$$

Exercice 3

Une société d'expédition doit construire un entrepôt de la forme d'un parallélépipède et de la capacité de 4000 m^3. Cette construction ne nécessite pas de fondations ni de sol, son coût est de 20€ le mètre carré pour le toit et de 160€ le mètre carré pour les parois. Quelles dimensions de l'entrepôt minimisent le coût de construction ?

Correction. Notons x, y et z les dimensions de l'entrepôt (la largeur, la longueur et la hauteur respectivement). Il s'agit de minimiser la fonction $f(x,y,z) = 160(2xz + 2yz) + 20xy$ sous la contrainte $g(x,y,z) = xyz - 4000$ avec $x,y,z > 0$ (la face manquante du parallélépipède est le planché qui a pour cotés x et y). Pour trouver les dimensions optimales on peut utiliser l'une des deux méthodes suivantes.

Méthode de Lagrange. Introduisons le lagrangien :

$$\begin{aligned} L \colon (\mathbb{R}_+^*)^2 \times \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ (x,y,z,\lambda) &\mapsto f(x,y,z) - \lambda g(c,y,z) \end{aligned}$$

Il s'agit de chercher les solutions (x,y,z,λ) de $\nabla L(x,y,z,\lambda) = (0,0,0,0)^T$:

$$\begin{cases} 20y + 320z - \lambda yz = 0, & \text{(1a)} \\ 20x + 320z - \lambda xz = 0, & \text{(1b)} \\ 320x + 320y - \lambda xy = 0, & \text{(1c)} \\ xyz = 4000. & \text{(1d)} \end{cases}$$

Avec les trois soustractions (1b)-(1a), (1c)-16×(1a) et (1c)-16×(1b) on obtient $x = y = 16z$, on insère ce résultat dans (1d) et on trouve que le seul point critique est $(40, 40, 5/2, 16)$.

Il reste à étudier sa nature. Pour cela, étudions le signe de la différence

$$d(u,v,w) \equiv f\left(40+u, 40+v, \frac{5}{2}+w\right) - f\left(40, 40, \frac{5}{2}\right) = 1600u + 1600v + 25600w + 320uw + 320vw + 20uv,$$

u, v et w étant liés par la relation $(40+u)(40+v)\left(\frac{5}{2}+w\right) = 4000$, soit encore

$$w(u,v) = -\frac{5}{2}\frac{40u + 40v + uv}{(40+u)(40+v)}.$$

On a alors

$$\tilde{d}(u,v) \equiv d(u,v,w(u,v)) = \frac{20}{(40+u)(40+v)} h(u,v)$$

avec

$$h(u,v) \equiv 1600u^2 + 1600v^2 + 1600uv + 80uv^2 + 80u^2v + u^2v^2.$$

On s'intéresse au signe de $\tilde{d}$ lorsque $(u,v) \simeq (0,0)$, *i.e.* au signe de h lorsque $(u,v) \simeq (0,0)$. On vérifie facilement que $(0,0)$ est un minimum local de h car

$$\nabla h(0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad H_h(0,0) = \begin{pmatrix} 3200 & 1600 \\ 1600 & 3200 \end{pmatrix}, \qquad \det(H_h(0,0)) > 0.$$

Comme $(0,0)$ est un minimum local de h, alors $h(0,0) \le h(u,v)$ pour tout $(u,v) \simeq (0,0)$. Comme $h(0,0) = 0$, cela signifie que $h(u,v) \ge 0$ pour tout $(u,v) \simeq (0,0)$ et donc $\tilde{d}(u,v) \ge \tilde{d}(0,0)$ pour tout $(u,v) \simeq (0,0)$: le point $(40, 40, 5/2)$ est alors un minimum local de f sous la contrainte $xyz = 4000$.

Méthode de réduction. La contrainte se réécrit $z = \frac{4000}{xy}$ donc il s'agit de chercher les extrema libres de la fonction de deux variables $h\colon (\mathbb{R}_+^*)^2 \to \mathbb{R}^+$ définie par

$$h(x,y) = f\left(x, y, \frac{4000}{xy}\right) = 20\left(xy + \frac{64000}{y} + \frac{64000}{x}\right).$$

Cherchons d'abord les points critiques de h :

$$\nabla h(x,y) = \begin{pmatrix} 20\left(y - \frac{64000}{x^2}\right) \\ 20\left(x - \frac{64000}{y^2}\right) \end{pmatrix}$$

et $\nabla h(x,y) = (0,0)^T$ ssi $(x,y) = (40,40)$. Étudions maintenant ce point en calculant le déterminant de la matrice hessienne de la fonction h :

$$\begin{aligned}
h_{xx}(x,y) &= \frac{2560000}{x^3} & h_{xx}(40,40) &= 40 > 0,\\
h_{xy}(x,y) &= 20 & h_{xy}(40,40) &= 20,\\
h_{yy}(x,y) &= \frac{2560000}{y^3} & h_{yy}(40,40) &= 40,\\
D(40,40) &\equiv \partial_{xx}h(40,40)\partial_{yy}h(40,40) - (\partial_{xy}h(40,40))^2 = 1200 > 0.
\end{aligned}$$

On a donc que $(40,40)$ est bien un minimum et $z(40,40) = 5/2$.

Exercice 4

Un glacier produit deux types de glace, la glace A et la glace B. Si en une semaine il produit x kilogrammes de glace de type A et y kilogrammes de glace de type B, le coût total est

$$c(x,y) = 600 + 200x + 200y - 2x^2y.$$

Peut-il minimiser le coût hebdomadaire en produisant les deux types de glace en une quantité inférieure ou égale à 300 kilogrammes ? Pour répondre à cette question on analyse d'abord le cas d'une utilisation à pleine capacité du laboratoire et on étudie ensuite si cette stratégie est la meilleure possible.

1. En supposant qu'il désire utiliser à pleine capacité son laboratoire, trouver la répartition de la production permettant de minimiser le coût. Prouver qu'il s'agit bien d'un minimum absolu.
2. Le glacier s'interroge sur la pertinence de vouloir utiliser à pleine capacité son laboratoire. Il se demande si la solution qu'il obtiendrait sans cette contrainte serait plus intéressante. Aidez-le à répondre à cette question en trouvant s'il existe une solution qui minimise le coût sans cette contrainte. La solution obtenue est-elle réalisable ?
3. En exploitant les résultats obtenus aux point précédents, suggériez-vous au glacier de diminuer la production totale hebdomadaire ou d'utiliser à pleine capacité son laboratoire ?

Correction. Il s'agit de minimiser la fonction

$$\begin{aligned} c\colon \mathscr{E} &\to \mathbb{R}_+ \\ (x,y) &\mapsto 600 + 200x + 200y - 2x^2y \end{aligned}$$

où

$$\mathscr{E} = \left\{ (x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2 \;\middle|\; x + y \le 300 \right\}.$$

Recherche sur le bord.

- ▷ Si on ne produit que de la glace de type A, *i.e.* $y = 0$, alors le coût totale est $a(x) \equiv c(x,0) = 600 + 200x$ qui est minimal pour $x = 0$ avec $c(0,0) = 600$ et maximale pour $x = 300$ avec $c(300,0) = 1200$.
- ▷ Si on ne produit que de la glace de type B, *i.e.* $x = 0$, alors le coût totale est $b(y) \equiv c(0,y) = 600 + 200y$ qui est minimal pour $y = 0$ avec $c(0,0) = 600$ et maximale pour $y = 300$ avec $c(0,300) = 1200$.
- ▷ Il s'agit maintenant de résoudre le problème

  $$\text{minimiser } c(x,y) \text{ sous la contrainte } x + y = 300.$$

  Pour cela, on peut utiliser l'une des deux méthodes suivantes :

  Méthode 1 On maximise $\tilde{c}(x) = c(x, 300-x) = 600 + 200x + 200(300-x) - 2x^2(300-x) = 60600 - 600x^2 + 2x^3$.

  Points critiques $\tilde{c}'(x) = -1200x + 6x^2 = 6x(x-200)$, $\tilde{c}'(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$ ou $x = 200$.

Classification $\tilde{c}''(x) = -1200 + 12x$, $\tilde{c}''(0) = -1200 < 0$ et $\tilde{c}''(200) = 1200 > 0$.

Conclusion $x = 0$ est un maximum de $\tilde{c}$; $x = 200$ est un minimum de $\tilde{c}$ et $y(x) = 300 - x = 100$. Pour minimiser le coût le glacier doit produire 200 kilogrammes de glace de type A et 100 kilogrammes de glace de type B pour un coût hebdomadaire de $-7\,939\,400$€.

Méthode 2 On maximise le lagrangien $L(x, y, \lambda) = c(x, y) - \lambda(x + y - 300) = 600 + 200x + 200y - 2x^2y - \lambda(x + y - 300)$.

Points critiques $\nabla L(x, y, \lambda) = \begin{pmatrix} 200 - 4xy - \lambda \\ 200 - 2x^2 - \lambda \\ 300 - x - y \end{pmatrix}$, $\nabla L(x, y, \lambda) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ si et seulement si $(x, y, \lambda) = (200, 100, -79800)$.

Classification Soit $D(x, y, \lambda) \equiv \partial_{xx}L(x, y, \lambda)\partial_{yy}L(x, y, \lambda) - (\partial_{xy}L(x, y, \lambda))^2 = -16x^2$. On a $D(200, 100, -79800) < 0$: on ne peut pas conclure directement.

Étudions alors le signe de la différence

$$d(h, k) \equiv c(200 + h, 100 + k) - c(200, 100) = 8000000 + 200(h + k) - 2(200 + h)^2(100 + k)^2$$

h et k étant liés par la relation $(200 + h) + (100 + k) = 300$, soit encore $k = -h$. On a alors $\tilde{d}(h) = d(h, -h) = 2h^2(300 + h) \geq 0$ lorsque $h \simeq 0$: le point $(200, 100)$ est alors un minimum local de c sous la contrainte $x + y = 300$.

Conclusion $(x, y) = (200, 100)$ est un minimum de c sous la contrainte $x + y = 300$ avec $c(200, 100) = -7939400$€

Recherche dans l'ouvert. On minimise d'abord $c(x, y)$ sans contraintes et on vérifie à posteriori si la solution obtenue appartient à l'ensemble $\mathring{\mathscr{E}}$.

Points critiques $\nabla c(x, y) = \begin{pmatrix} 200 - 4xy \\ 200 - 2x^2 \end{pmatrix}$, $\nabla c(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ si et seulement si $(x, y) = (10, 5)$.

Classification $D(x, y) = \partial_{xx}c(x, y)\partial_{yy}c(x, y) - (\partial_{xy}c(x, y))^2 = (-4y) \times (0) - (-4x)^2 = -16x^2$ donc $D(10, 5) < 0$.

Conclusion $(x, y) = (10, 5)$ est un point-selle de c. La solution obtenue, bien que réalisable car $10 + 5 < 300$ (*i.e.* $(10, 5) \in \mathring{\mathscr{E}}$), ne minimise pas le coût.

Conclusion Pour une rente optimale on conseil au glacier d'utiliser à pleine capacité son laboratoire en produisant 200 kilogrammes de glace de type A et 100 kilogrammes de glace de type B.