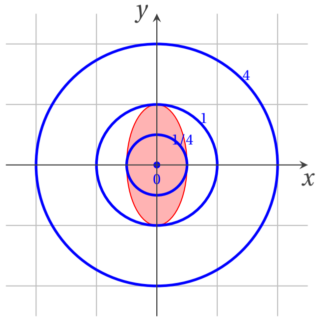
Exercice 1

On se propose de déterminer les extrema de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^2 + y^2$ dans l'ensemble $\mathscr{E} = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x^2 + y^2 \le 1 \}$.

1. Étudier la nature des points critiques de f lorsque $(x, y) \in \mathring{\mathscr{E}} = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x^2 + y^2 < 1 \}$.
2. Étudier la nature des points critiques du lagrangien, *i.e.* de f lorsque $(x, y) \in \partial\mathscr{E} = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x^2 + y^2 = 1 \}$.
3. En déduire les maxima et minima globaux de f dans $\mathscr{E}$.

Correction. La fonction étant de classe $\mathscr{C}^\infty$ (somme de fonctions $\mathscr{C}^\infty$) sur $\mathscr{E}$ fermé borné, on peut appliquer le théorème de Weierstrass et affirmer que f atteint son minimum global (au moins en un point du compact $\mathscr{E}$) et son maximum global (au moins en un point du compact $\mathscr{E}$). Ces points sont à chercher parmi les minima et maxima locaux de f sur $\mathscr{E}$, c'est-à-dire parmi les minima et maxima locaux de f dans l'ouvert $\mathring{\mathscr{E}}$ (*i.e.* optimisation libre d'une fonction $\mathscr{C}^\infty$ sur un ouvert) et parmi les minima et maxima locaux de f sur le bord $\partial\mathscr{E}$ (*i.e.* optimisation liée d'une fonction $\mathscr{C}^\infty$ sous une contrainte $\mathscr{C}^\infty$).



Dans la figure ci-contre on a tracé les courbes de niveau 0, 0.25, 1 et 4 de f ainsi que l'ensemble $\mathscr{E}$. Il semblerait que

- ▷ le point $(0, 0)$ est un minimum global,
- ▷ le point $(0, 1)$ est un maximum global,
- ▷ le point $(0, -1)$ est un maximum global,
- ▷ le point $(1/2, 0)$ est un minimum local,
- ▷ le point $(-1/2, 0)$ est un minimum local.

1. Considérons l'ensemble $\mathring{\mathscr{E}} = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x^2 + y^2 < 1 \}$.

   Recherche des points critiques de f

   $$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} \qquad \text{donc} \qquad \nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 2x = 0, \\ 2y = 0. \end{cases}$$

   L'unique point critique de f est le point $(x_0, y_0) = (0, 0)$.

   Étude de la nature du point critique

   Méthode 1 :

   $$\partial_{xx} f(x, y) = 2 \qquad \partial_{yy} f(x, y) = 2 \qquad \partial_{xy} f(x, y) = 0$$

   donc

   $$H_f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \text{dét}(H_f(x_0, y_0)) = 4 > 0.$$

   Conclusion : $(0, 0)$ est un minimum local de f dans $\mathring{E}$.

   Méthode 2 : On n'est pas obligé d'utiliser la matrice Hessienne pour établir la nature du point (x_0, y_0). En effet, il suffit d'étudier le signe de la fonction distance au voisinage du point critique :

   $$d(h, k) \equiv f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = h^2 + k^2 \qquad \text{pour } (h, k) \simeq (0, 0).$$

   Puisque $d(h, k) \le 0$ pour $(h, k) \simeq (0, 0)$, on conclut que le point (x_0, y_0) est un minimum local.

   Conclusion $f(x, y) > f(0, 0)$ pour tout $(x, y) \in \mathscr{E} \setminus \{(0, 0)\}$ donc $(0, 0)$ est un minimum global et le maximum global, dont l'existence est assurée par le théorème de Weierstrass, est atteint en un ou plusieurs points du bord du domaine.

2. Considérons l'ensemble $\partial\mathscr{E} = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x^2 + y^2 = 1 \}$. Pour chercher les candidats extrema de f sur le bord du domaine, on utilise la méthode du lagrangien : soit $g(x, y) = 4x^2 + y^2 - 1$ et $\mathscr{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y) = x^2 + y^2 - \lambda(4x^2 + y^2 - 1)$.

   Recherche des points critiques de $\mathscr{L}$

   $$\nabla \mathscr{L}(x, y, \lambda) = \begin{pmatrix} 2x - 8\lambda x \\ 2y - 2\lambda y \\ 1 - 4x^2 - y^2 \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad \nabla \mathscr{L}(x, y, \lambda) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x(1 - 4\lambda) = 0, \\ y(1 - \lambda) = 0, \\ 4x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

Les points critiques de $\mathscr{L}$ sont les points

$$(x_1, y_1, \lambda_1) = (0, 1, 1), \qquad (x_2, y_2, \lambda_2) = (0, -1, 1), \qquad (x_3, y_3, \lambda_3) = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4}\right), \qquad (x_4, y_4, \lambda_4) = \left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4}\right).$$

Conclusion partielle : étant donné que $f(0, \pm 1) = 1$, $f(\pm 1/2, 0) = 1/4$ et que le maximum global, dont l'existence est assurée par le théorème de WEIERSTRASS, est atteint en un ou plusieurs points du bord du domaine, on peut conclure que les points $(0, 1)$ et $(0, -1)$ sont des maxima globaux. En revanche, il faut encore étudier les points $(0, 1/2)$ et $(0, -1/2)$ qui peuvent être des minima locaux, des maxima locaux ou ne pas être des extrema.

Étude de la nature des points critiques À la lumière de la conclusion précédente, il suffit d'étudier la nature des deux points critiques $(0, 1/2)$ et $(0, -1/2)$. Cependant, dans un souci d'exhaustivité, on effectue l'analyse pour chacun des quatre points critiques du lagrangien. On a

$$\partial_{xx}\mathscr{L}(x, y, \lambda) = 2(1 - 4\lambda) \qquad \partial_{yy}\mathscr{L}(x, y, \lambda) = 2(1 - \lambda) \qquad \partial_{xy}\mathscr{L}(x, y, \lambda) = 0$$

donc $\partial_{xx}\mathscr{L}(x_i, y_i, \lambda_i) \times \partial_{yy}\mathscr{L}(x_i, y_i, \lambda_i) - (\partial_{xy}\mathscr{L}(x_i, y_i, \lambda_i))^2 = 0$ pour $i = 1, 2, 3, 4$: la méthode du lagrangien permet juste de trouver les candidats extrema de f sous la contrainte g mais ne permet pas de conclure sur leur nature. On étudie alors le comportement de f au voisinage de chaque point critique en restant sur le bord $\partial\mathscr{E}$. Pour cela, on étudie le signe de la fonction distance définie par

$$d_i(h, k) \equiv f(x_i + h, y_i + k) - f(x_i, y_i), \qquad i = 1, 2, 3, 4$$

pour $(h, k) \simeq (0, 0)$ et $g_i(x_i + h, y_i + k) = 0$:

▷ $d_i(h, k) = (x_i + h)^2 + (y_i + k)^2 - x_i^2 - y_i^2$

▷ $g_i(x_i + h, y_i + k) = 4(x_i + h)^2 + (y_i + k)^2 - 1$

Pour étudier le signe de la fonction d_i avec h et k liés par la relation $g_i(x_i + h, y_i + k) = 0$, on essaye d'exprimer h en fonction de k ou réciproquement k en fonction de h à partir de la relation $g_i(x_i + h, y_i + k) = 0$. Cela nécessite l'emploi du théorème des fonctions implicites dont il faudra vérifier les hypothèses avant d'exprimer une variable en fonction de l'autre. Ainsi :

▷ si $\partial_y g_i(x_i, y_i) \neq 0$ alors l'équation $g_i(x_i + h, y_i + k) = 0$ définit implicitement k en fonction de h au voisinage de $h = 0$: en résolvant $g_i(x_i + h, y_i + k) = 0$ on trouve $(y_i + k)^2 = 1 - 4(x_i + h)^2$; en remplaçant l'expression ainsi trouvée dans $d_i(h, k)$ on trouve la fonction d'une seule variable

$$\tilde{d}_i(h) = 1 - 3(x_i + h)^2 - x_i^2 - y_i^2;$$

on remarque que si $\partial_y g_i(x_i, y_i) = 0$, on peut toujours résoudre l'équation $g_i(x_i + h, y_i + k) = 0$ et on trouve $(x_i + h)^2 = (1 - (y_i + k)^2)/4$; en remplaçant l'expression ainsi trouvée dans $d_i(h, k)$ on trouve la fonction d'une seule variable $\delta_i(k) \equiv d_i(h(k), k) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}(y_i + k)^2 - x_i^2 - y_i^2$, cependant l'étude du signe de cette fonction n'est d'aucune utilité car on a violé les hypothèses du théorème des fonctions implicites ;

▷ si $\partial_x g_i(x_i, y_i) \neq 0$ alors l'équation $g_i(x_i + h, y_i + k) = 0$ définit implicitement h en fonction de k au voisinage de $k = 0$: en résolvant $g_i(x_i + h, y_i + k) = 0$ on trouve $(x_i + h)^2 = (1 - (y_i + k)^2)/4$; en remplaçant l'expression ainsi trouvée dans $d_i(h, k)$ on trouve la fonction d'une seule variable

$$\tilde{d}_i(k) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}(y_i + k)^2 - x_i^2 - y_i^2;$$

on remarque que si $\partial_x g_i(x_i, y_i) = 0$, on peut toujours résoudre l'équation $g_i(x_i + h, y_i + k) = 0$ et on trouve $(y_i + h)^2 = 1 - 4(x_i + k)^2$; en remplaçant l'expression ainsi trouvée dans $d_i(h, k)$ on trouve la fonction d'une seule variable $\delta_i(h) \equiv d_i(h, k(h)) = 1 - 3(x_i + h)^2 - x_i^2 - y_i^2$, cependant l'étude du signe de cette fonction n'est d'aucune utilité car on a violé les hypothèses du théorème des fonctions implicites.

Conclusion :

▷ $\tilde{d}_1(h) = -3h^2 \leq 0$ donc le point (x_1, y_1) est un maximum,
(on remarque que $\delta_1(k) = 3k(k+2)/4$ qui change de signe) ;

▷ $\tilde{d}_2(h) = -3h^2 \leq 0$ donc le point (x_2, y_2) est un maximum,
(on remarque que $\delta_2(k) = 3k(k-2)/4$ qui change de signe) ;

▷ $\tilde{d}_3(k) = \frac{3}{4}k^2 \geq 0$ donc le point (x_3, y_3) est un minimum,
(on remarque que $\delta_3(h) = 3h(h+1)$ qui change de signe) ;

▷ $\tilde{d}_4(k) = \frac{3}{4}k^2 \geq 0$ donc le point (x_4, y_4) est un minimum,
(on remarque que $\delta_4(h) = 3h(h-1)$ qui change de signe).

Conclusion : les points $(0, 1)$ et $(0, -1)$ sont des maxima de f sous la contrainte g et $f(0, \pm 1) = 1$, les points $(1/2, 0)$ et $(-1/2, 0)$ sont des minima de f sous la contrainte g et $f(\pm 1/2, 0) = 1/4$.

3. $(0, 0)$ est le minimum global et les points $(0, 1)$ et $(0, -1)$ sont les maxima globaux, autrement dit

$$f(0, 0) \leq f(x, y) \leq f(0, \pm 1) \qquad \forall (x, y) \in \mathscr{E}.$$