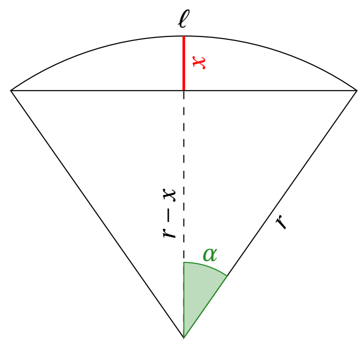
MP23 - L1 PC - Examen - Mai 2013

- ▷ Durée de l'épreuve : 2 heures.
- ▷ Ce sujet comporte 5 exercices indépendants.
- ▷ **Documents et calculatrices autorisés.**
- ► *On attachera le plus grand soin à la rédaction et à la présentation claire et lisible des résultats dont il sera tenu compte lors de la correction. Aucun raisonnement vague ou insuffisant ne sera pris en compte.* ***Une grande valeur sera attribuée à la rigueur et à la concision des raisonnements.***
- ► Si une question pose problème, admettre le résultat et passer à la suivante.
- ► ***Le texte est long, mais il n'est pas nécessaire de tout faire pour obtenir la note maximale.*** *Le barème (dont le total est de 27 points) est donné à titre indicatif et est susceptible de varier.*

Exercice 1 *(2 points)*

Considérons un secteur circulaire de rayon r et angle 2α, avec α petit.

- ▷ Exprimer x en fonction de $\cos(\alpha)$. Utiliser un développement limité en 0 à l'ordre 3 de $\cos(\alpha)$ pour approcher x par un polynôme en α et r.
- ▷ En approchant la Terre par une sphère de rayon $r = 6360\,\text{km}$, utiliser le résultat ainsi obtenu pour estimer de combien un arc de $\ell = 100\,\text{km}$ s'écarte de sa corde (*i.e.* estimer x).



CORRECTION.

$$r - x = r\cos(\alpha)$$

et

$$\cos(\alpha) \simeq \frac{\cos(0)}{0!}(\alpha-0)^0 + \frac{-\sin(0)}{1!}(\alpha-0)^1 + \frac{-\cos(0)}{2!}(\alpha-0)^2 + \frac{\sin(0)}{3!}(\alpha-0)^3 = 1 - \frac{1}{2}\alpha^2 \qquad \text{lorsque } \alpha \simeq 0$$

donc

$$x \simeq \frac{r\alpha^2}{2} \qquad \text{lorsque } \alpha \simeq 0.$$

Si $\ell = 100\,\text{km}$ alors $\alpha = \frac{\ell}{r} = \frac{100}{6360} = \frac{5}{318} \simeq 0$ donc $x \simeq \frac{6360\times 100^2}{2\times 6360^2} = \frac{125}{159} \simeq 0.79\,\text{km}$.

Exercice 2 *(4 points)*

Soit $\omega(x,y) = (ye^{xy}-1)\,\mathrm{d}x + xe^{xy}\,\mathrm{d}y$ une forme différentielle et notons $\mathscr{D}_\omega$ son domaine de définition. Montrer qu'elle est fermée. Expliquer pourquoi on peut en déduire qu'elle est exacte et en calculer une primitive. Soit $\gamma\colon [0,8\pi] \to \mathscr{D}_\omega$ la courbe définie par $\gamma(t) = (t+\arcsin(\sin(t)), (2/\pi)\arcsin(\sin(t)))$. Calculer l'intégrale curviligne $\int_\gamma \omega$.

CORRECTION.

$\partial_y(\omega_1(x,y)) - \partial_x(\omega_2(x,y)) = \partial_y\left(ye^{xy}-1\right) - \partial_x\left(xe^{xy}\right) = 0$: la forme différentielle est fermée.

$\mathscr{D}_\omega \equiv \mathbb{R}^2$ est simplement connexe et ω est fermée : le théorème de POINCARÉ permet de conclure que ω est exacte.

On cherche $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que $\mathrm{d}f(x,y) = \omega(x,y)$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Comme $\partial_y f(x,y) = xe^{xy}$, alors $f(x,y) = e^{xy} + g(x)$ où $g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est une fonction à déterminer ; alors $\partial_x f(x,y) = ye^{xy} + g'(x)$ et on sait que $\partial_x f(x,y) = (xe^{xy}-1)$ donc $g'(x) = -1$, par conséquent $g(x) = -x + c$ et on conclut que $f(x,y) = e^{xy} - x + c$, $c \in \mathbb{R}$.

Comme ω est exacte et $\gamma(0) = (0,0)$, $\gamma(8\pi) = (8\pi, 0)$, alors $\int_\gamma \omega = f(8\pi,0) - f(0,0) = 8\pi$.

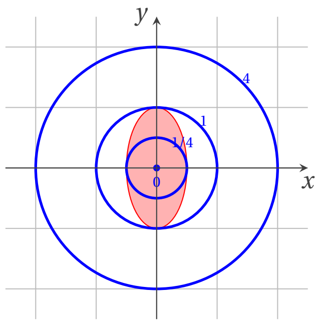
Exercice 3 *(8 points)*

On se propose de déterminer les extrema de la fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x^2 + y^2$ dans l'ensemble $\mathscr{E} = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, 4x^2+y^2 \le 1\right\}$.

1. Étudier la nature des points critiques de f lorsque $(x,y) \in \mathring{\mathscr{E}} = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, 4x^2+y^2 < 1\right\}$.

2. Étudier la nature des points critiques du lagrangien, *i.e.* de f lorsque $(x,y)\in\partial\mathscr{E}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,\middle|\,4x^2+y^2=1\right\}$.
3. En déduire les maxima et minima globaux de f dans $\mathscr{E}$.

CORRECTION.



Dans la figure ci-contre on a tracé les courbes de niveau 0, 0.25, 1 et 4 de f ainsi que l'ensemble $\mathscr{E}$. Il semblerait que

- ▷ le point $(0,0)$ est un minimum global,
- ▷ le point $(0,1)$ est un maximum global,
- ▷ le point $(0,-1)$ est un maximum global,
- ▷ le point $(1/2,0)$ est un minimum local,
- ▷ le point $(-1/2,0)$ est un minimum local.

1. Considérons l'ensemble $\mathring{\mathscr{E}}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,\middle|\,4x^2+y^2<1\right\}$.

   Recherche des points critiques de f

   $$\nabla f(x,y)=\begin{pmatrix}2x\\2y\end{pmatrix}\qquad\text{donc}\qquad\nabla f(x,y)=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\iff\begin{cases}2x=0,\\2y=0.\end{cases}$$

   L'unique point critique de f est le point $(x_0,y_0)=(0,0)$.

   Étude de la nature du point critique

   Méthode 1 :

   $$\partial_{xx}f(x,y)=2\qquad\qquad\partial_{yy}f(x,y)=2\qquad\qquad\partial_{xy}f(x,y)=0$$

   donc

   $$H_f(x_0,y_0)=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}\qquad\text{et}\qquad\text{dét}(H_f(x_0,y_0))=4>0.$$

   Conclusion : $(0,0)$ est un minimum local de f dans $\mathring{E}$.

   Méthode 2 : On n'est pas obligé d'utiliser la matrice Hessienne pour établir la nature du point (x_0,y_0). En effet, il suffit d'étudier le signe de la fonction distance au voisinage du point critique :

   $$d(h,k)\equiv f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)=h^2+k^2\qquad\text{pour }(h,k)\simeq(0,0).$$

   Puisque $d(h,k)\leq 0$ pour $(h,k)\simeq(0,0)$, on conclut que le point (x_0,y_0) est un minimum local.

   Conclusion : $f(x,y)>f(0,0)$ pour tout $(x,y)\in E\setminus\{(0,0)\}$ donc $(0,0)$ est un minimum global.

2. Considérons l'ensemble $\partial\mathscr{E}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,\middle|\,4x^2+y^2=1\right\}$. Soit $g(x,y)=4x^2+y^2-1$ et $\mathscr{L}(x,y,\lambda)=f(x,y)-\lambda g(x,y)=x^2+y^2-\lambda(4x^2+y^2-1)$.

   Recherche des points critiques de $\mathscr{L}$

   $$\nabla\mathscr{L}(x,y,\lambda)=\begin{pmatrix}2x-8\lambda x\\2y-2\lambda y\\1-4x^2-y^2\end{pmatrix}\quad\text{donc}\quad\nabla\mathscr{L}(x,y,\lambda)=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\iff\begin{cases}x(1-4\lambda)=0,\\y(1-\lambda)=0,\\4x^2+y^2=1.\end{cases}$$

   Les points critiques de $\mathscr{L}$ sont les points

   $$(x_1,y_1,\lambda_1)=(0,1,1),\qquad(x_2,y_2,\lambda_2)=(0,-1,1),\qquad(x_3,y_3,\lambda_3)=\left(\frac12,0,\frac14\right),\qquad(x_4,y_4,\lambda_4)=\left(-\frac12,0,\frac14\right).$$

   Étude de la nature des points critiques On a

   $$\partial_{xx}\mathscr{L}(x,y,\lambda)=2(1-4\lambda)\qquad\partial_{yy}\mathscr{L}(x,y,\lambda)=2(1-\lambda)\qquad\partial_{xy}\mathscr{L}(x,y,\lambda)=0$$

   donc $\partial_{xx}\mathscr{L}(x_i,y_i,\lambda_i)\times\partial_{yy}\mathscr{L}(x_i,y_i,\lambda_i)-(\partial_{xy}\mathscr{L}(x_i,y_i,\lambda_i))^2=0$ pour $i=1,2,3,4$. Conclusion : la méthode du lagrangien permet juste de trouver les candidats extrema de f sous la contrainte g mais ne permet pas de conclure. On étudie alors le signe de la fonction distance

   $$d_i(h,k)\equiv f(x_i+h,y_i+k)-f(x_i,y_i),\qquad i=1,2,3,4$$

   pour $(h,k)\simeq(0,0)$ et $g(x_i+h,y_i+k)=0$:

- ▷ $d_i(h,k) = (x_i+h)^2 + (y_i+k)^2 - x_i^2 - y_i^2$
- ▷ $g_i(x_i+h, y_i+k) = 4(x_i+h)^2 + (y_i+k)^2 - 1$
- ▷ si $\partial_y g(x_i, y_i) \neq 0$ alors l'équation $g(x_i+h, y_i+k) = 0$ définit implicitement k en fonction de h au voisinage de $h=0$: en résolvant $g(x_i+h, y_i+k) = 0$ on trouve $(y_i+k)^2 = 1-4(x_i+h)^2$; en remplaçant l'expression ainsi trouvée dans $d_i(h,k)$ on trouve la fonction d'une seule variable

$$\tilde{d}_i(h) = 1 - 3(x_i+h)^2 - x_i^2 - y_i^2$$

- ▷ si $\partial_x g(x_i, y_i) \neq 0$ alors l'équation $g(x_i+h, y_i+k) = 0$ définit implicitement h en fonction de k au voisinage de $k=0$: en résolvant $g(x_i+h, y_i+k) = 0$ on trouve $(x_i+h)^2 = (1-(y_i+k)^2)/4$; en remplaçant l'expression ainsi trouvée dans $d_i(h,k)$ on trouve la fonction d'une seule variable

$$\tilde{d}_i(k) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}(y_i+k)^2 - x_i^2 - y_i^2$$

Conclusion :
- ▷ $\tilde{d}_1(h) = -3h^2 \le 0$ donc le point (x_1, y_1) est un maximum,
- ▷ $\tilde{d}_2(h) = -3h^2 \le 0$ donc le point (x_2, y_2) est un maximum,
- ▷ $\tilde{d}_3(k) = \frac{3}{4}k^2 \ge 0$ donc le point (x_3, y_3) est un minimum,
- ▷ $\tilde{d}_4(k) = \frac{3}{4}k^2 \ge 0$ donc le point (x_4, y_4) est un minimum.

Conclusion : les points $(0,1)$ et $(0,-1)$ sont des maxima de f sous la contrainte g et $f(0,\pm1) = 1$, les points $(1/2, 0)$ et $(-1/2, 0)$ sont des minima de f sous la contrainte g et $f(\pm 1/2, 0) = 1/4$.

3. $(0,0)$ est le minimum global et les points $(0,1)$ et $(0,-1)$ sont les maxima globaux, autrement dit

$$f(0,0) \le f(x,y) \le f(0,\pm1) \qquad \forall (x,y) \in \mathscr{E}.$$

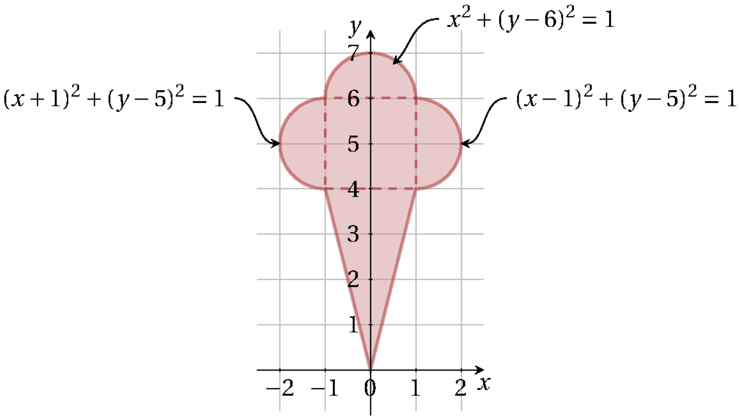
Exercice 4 *(6 points)*

Calculer

$$\iint_{\mathscr{D}} y \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

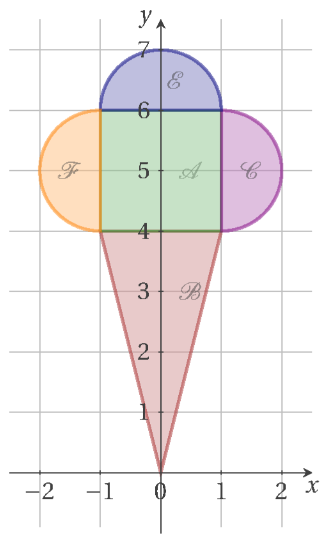
où l'ensemble d'intégration est celui colorié dans la figure ci-contre.

(Le trait discontinue suggère un découpage du domaine d'intégration)



Correction.

Méthode I On décompose le domaine d'intégration en cinq parties sur lesquelles sera facile de calculer l'intégrale donnée :



$$\iint_{\mathscr{D}} y \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \iint_{\mathscr{A}} y \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y + \iint_{\mathscr{B}} y \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y + \iint_{\mathscr{C}} y \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y + \iint_{\mathscr{E}} y \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y + \iint_{\mathscr{F}} y \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

$\mathscr{A} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, -1 \le x \le 1, 4 \le y \le 6 \right\}$,

$\mathscr{B} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 0 \le y \le 4, -\frac{y}{4} \le x \le \frac{y}{4} \right\}$,

$\mathscr{C} = \left\{ (r,t) \in \mathbb{R}_+^* \times [-\pi;\pi[\,\middle|\, 0 \le r \le 1, -\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2} \right\}$, avec $x = 1 + r\cos(t)$, $y = 5 + r\sin(t)$,

$\mathscr{E} = \left\{ (r,t) \in \mathbb{R}_+^* \times [0;2\pi[\,\middle|\, 0 \le r \le 1, 0 \le t \le \pi \right\}$, avec $x = r\cos(t)$, $y = 6 + r\sin(t)$,

$\mathscr{F} = \left\{ (r,t) \in \mathbb{R}_+^* \times [0;2\pi[\,\middle|\, 0 \le r \le 1, \frac{\pi}{2} \le t \le \frac{3\pi}{2} \right\}$, avec $x = -1 + r\cos(t)$, $y = 5 + r\sin(t)$,

$$\iint_{\mathscr{A}} y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-1}^{1}\int_{4}^{6} y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \left(\int_{-1}^{1} 1 \,\mathrm{d}x\right)\times\left(\int_{4}^{6} y \,\mathrm{d}y\right) = 2\times\left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=4}^{y=6} = 20$$

$$\iint_{\mathscr{B}} y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-0}^{4}\int_{-y/4}^{y/4} y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{0}^{4} [yx]_{x=-y/4}^{x=y/4} \,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int_0^4 y^2 \,\mathrm{d}x = \left[\frac{y^3}{6}\right]_{y=0}^{y=4} = \frac{32}{3}$$

$$\iint_{\mathscr{C}} y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{0}^{1}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} r(5+r\sin(t)) \,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}r = \left(\int_0^1 5r \,\mathrm{d}r\right)\times\left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 1 \,\mathrm{d}t\right)+\left(\int_0^1 r^2 \,\mathrm{d}r\right)\times\left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin(t) \,\mathrm{d}t\right)$$

$$= \left[5\frac{r^2}{2}\right]_{r=0}^{r=1}\times\left[t\right]_{t=-\pi/2}^{t=\pi/2}+\left[\frac{r^3}{3}\right]_{r=0}^{r=1}\times\left[-\cos(t)\right]_{t=-\pi/2}^{t=\pi/2} = \frac{5\pi}{2}$$

$$\iint_{\mathscr{E}} y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{0}^{1}\int_{0}^{\pi} r(6+r\sin(t)) \,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}r = \left(\int_0^1 6r \,\mathrm{d}r\right)\times\left(\int_{0}^{\pi} 1 \,\mathrm{d}t\right)+\left(\int_0^1 r^2 \,\mathrm{d}r\right)\times\left(\int_{0}^{\pi} \sin(t) \,\mathrm{d}t\right)$$

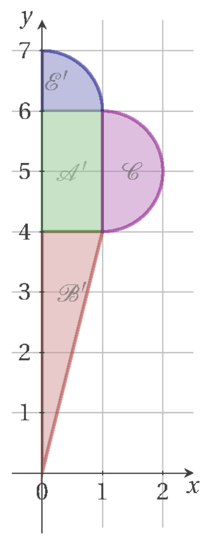
$$= \left[6\frac{r^2}{2}\right]_{r=0}^{r=1}\times\left[t\right]_{t=0}^{t=\pi}+\left[\frac{r^3}{3}\right]_{r=0}^{r=1}\times\left[-\cos(t)\right]_{t=0}^{t=\pi} = 3\pi+\frac{2}{3}$$

$$\iint_{\mathscr{F}} y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{\mathscr{C}} y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Conclusion :

$$\iint_{\mathscr{D}} y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 20+\frac{34}{3}+8\pi.$$

Méthode II La fonction et le domaine d'intégration sont symétriques par rapport au plan d'équation $x=0$, par conséquent il suffit de calculer l'intégrale sur une moitié du domaine d'intégration :



$$\iint_{\mathscr{D}} y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 2\left(\iint_{\mathscr{A}'} y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\iint_{\mathscr{B}'} y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\iint_{\mathscr{C}} y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\iint_{\mathscr{E}'} y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right)$$

$\mathscr{A}' = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0\le x\le 1, 4\le y\le 6\right\}$,

$\mathscr{B}' = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0\le x\le 1, 4x\le y\le 4\right\}$,

$\mathscr{C} = \left\{(r,t)\in\mathbb{R}_+^*\times[-\pi;\pi[\;\middle|\; 0\le r\le 1, -\frac{\pi}{2}\le t\le\frac{\pi}{2}\right\}$, avec $x=1+r\cos(t)$, $y=5+r\sin(t)$,

$\mathscr{E}' = \left\{(r,t)\in\mathbb{R}_+^*\times[0;2\pi[\;\middle|\; 0\le r\le 1, 0\le t\le\frac{\pi}{2}\right\}$, avec $x=r\cos(t)$, $y=6+r\sin(t)$,

$$\iint_{\mathscr{A}'} y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{0}^{1}\int_{4}^{6} y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \left(\int_{0}^{1} 1 \,\mathrm{d}x\right)\times\left(\int_{4}^{6} y \,\mathrm{d}y\right) = 1\times\left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=4}^{y=6} = 10$$

$$\iint_{\mathscr{B}'} y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{0}^{1}\int_{4x}^{4} y \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=4x}^{y=4} \mathrm{d}x = 8\int_0^1 (1-x^2)\,\mathrm{d}x = 8\left[x-\frac{x^3}{3}\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{16}{3}$$

$$\iint_{\mathscr{C}} y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{0}^{1}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} r(5+r\sin(t)) \,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}r = \left(\int_0^1 5r \,\mathrm{d}r\right)\times\left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 1 \,\mathrm{d}t\right)+\left(\int_0^1 r^2 \,\mathrm{d}r\right)\times\left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin(t) \,\mathrm{d}t\right)$$

$$= \left[5\frac{r^2}{2}\right]_{r=0}^{r=1}\times\left[t\right]_{t=-\pi/2}^{t=\pi/2}+\left[\frac{r^3}{3}\right]_{r=0}^{r=1}\times\left[-\cos(t)\right]_{t=-\pi/2}^{t=\pi/2} = \frac{5\pi}{2}$$

$$\iint_{\mathscr{E}'} y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{0}^{1}\int_{0}^{\pi/2} r(6+r\sin(t)) \,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}r = \left(\int_0^1 6r \,\mathrm{d}r\right)\times\left(\int_{0}^{\pi/2} 1 \,\mathrm{d}t\right)+\left(\int_0^1 r^2 \,\mathrm{d}r\right)\times\left(\int_{0}^{\pi/2} \sin(t) \,\mathrm{d}t\right)$$

$$= \left[6\frac{r^2}{2}\right]_{r=0}^{r=1}\times\left[t\right]_{t=0}^{t=\pi/2}+\left[\frac{r^3}{3}\right]_{r=0}^{r=1}\times\left[-\cos(t)\right]_{t=0}^{t=\pi/2} = \frac{3}{2}\pi+\frac{1}{3}$$

Conclusion :

$$\iint_{\mathscr{D}} y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 2\left(10+\frac{17}{3}+4\pi\right).$$

Exercice 5 *(7 points)*

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ une constante et $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction ainsi définie

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x^2+y^2)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ \alpha & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1. *Étude de la fonction sur* $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ *:*
   1.1. calculer le gradient de f pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$;
   1.2. montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$; que peut-on conclure sur la différentiabilité de f ?
2. *Étude de la fonction en* $(0,0)$ *:*
   2.1. calculer le DL de $\ln(1+r^2)$ à l'ordre 4 lorsque $r \simeq 0$;
   2.2. calculer $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ et en déduire qu'il existe une valeur α_0 de α (à préciser) pour laquelle f est continue en $(0,0)$;
   2.3. montrer que f est dérivable en $(0,0)$ si et seulement si $\alpha = \alpha_0$ et calculer $\nabla f(0,0)$;
   2.4. soit $\alpha = \alpha_0$, montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ en $(0,0)$; que peut-on déduire sur la différentiabilité en $(0,0)$?
   2.5. soit $\alpha = \alpha_0$, utiliser la définition pour prouver qu'effectivement f est différentiable en $(0,0)$.

CORRECTION.

1. *Étude de la fonction sur* $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
   1.1. Le gradient de f pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ est le vecteur de composantes

$$\partial_x f(x,y) = \frac{2x}{(x^2+y^2)}\left(\frac{1}{1+x^2+y^2} - \frac{\ln(1+x^2+y^2)}{x^2+y^2}\right), \qquad \partial_y f(x,y) = \frac{2y}{(x^2+y^2)}\left(\frac{1}{1+x^2+y^2} - \frac{\ln(1+x^2+y^2)}{x^2+y^2}\right).$$

   1.2. f et ses dérivées partielles sont continues sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ car composition et quotients de fonctions continues dont les dénominateurs ne s'annulent pas, f est donc de classe $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$. Comme tout fonction de classe $\mathscr{C}^1$ est différentiable, on conclut que f est différentiable sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
2. *Étude de la fonction en* $(0,0)$.
   2.1. $\ln(1+x) \simeq x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ lorsque $x \simeq 0$ donc $\ln(1+r^2) \simeq r^2 - \frac{r^4}{2} + o(r^4)$ lorsque $r \simeq 0$.
   2.2. Passons en coordonnées polaires :

$$\begin{aligned} \tilde{f}\colon \mathbb{R}_+^* \times [0;2\pi[&\to \mathbb{R} \\ (r,\vartheta) &\mapsto \tilde{f}(r,\vartheta) \equiv f(r\cos(\vartheta), r\sin(\vartheta)) = \frac{\ln(1+r^2)}{r^2}. \end{aligned}$$

   Comme $\tilde{f}(r,\vartheta) \xrightarrow[r\to 0]{} 1$ alors $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 1$. Pour que f soit continue en $(0,0)$ il faut que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$ donc pour que f soit continue en $(0,0)$ il faut que α soit égal à $\alpha_0 = 1$.
   2.3. Le gradient de f en $(0,0)$ est le vecteur de composantes

$$\partial_x f(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\ln(1+x^2)}{x^2} - \alpha}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(\frac{\ln(1+x^2)}{x^2} - \alpha\right) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(\frac{x^2 - \frac{x^4}{2}}{x^2} - \alpha\right), = \lim_{x\to 0} \frac{1-\alpha}{x} - \frac{x}{2},$$

$$\partial_y f(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = \lim_{y\to 0} \frac{\frac{\ln(1+y^2)}{y^2} - \alpha}{y}.$$

   Ces deux limites existent et sont finies si et seulement si $\alpha = 1$. Dans ce cas, $\nabla f(0,0) = (0,0)^T$.
   2.4. Pour que f soit de classe $\mathscr{C}^1$ en $(0,0)$ il faut que les dérivées partielles premières soient continues, autrement dit il faut que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \partial_x f(x,y) = \partial_x f(0,0) \qquad \text{et} \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \partial_y f(x,y) = \partial_y f(0,0).$$

   Comme

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \partial_x f(x,y) &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x}{(x^2+y^2)}\left(\frac{1}{1+x^2+y^2} - \frac{\ln(1+x^2+y^2)}{x^2+y^2}\right) \\ &= \lim_{\substack{r\to 0\\ \forall\vartheta}} \frac{2r\cos(\vartheta)}{r^2}\left(\frac{1}{1+r^2} - \frac{\ln(1+r^2)}{r^2}\right) = \lim_{\substack{r\to 0\\ \forall\vartheta}} \frac{2\cos(\vartheta)}{r}\left(\frac{1}{1+r^2} - 1 + \frac{r^2}{2}\right) = \lim_{\substack{r\to 0\\ \forall\vartheta}} \frac{r(r^2-1)}{(r^2+1)}\cos(\vartheta) = 0, \end{aligned}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \partial_y f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2y}{(x^2+y^2)}\left(\frac{1}{1+x^2+y^2} - \frac{\ln(1+x^2+y^2)}{x^2+y^2}\right)$$
$$= \lim_{\substack{r\to 0\\ \forall\vartheta}} \frac{2r\sin(\vartheta)}{r^2}\left(\frac{1}{1+r^2} - \frac{\ln(1+r^2)}{r^2}\right) = \lim_{\substack{r\to 0\\ \forall\vartheta}} \frac{r(r^2-1)}{(r^2+1)}\sin(\vartheta) = 0,$$

par conséquent $\partial_x f$ et $\partial_y f$ sont continues en $(0,0)$. Comme f aussi est continue en $(0,0)$, on conclut que f est de classe $\mathscr{C}^1$ en $(0,0)$ ce qui implique que f est différentiable en $(0,0)$.

2.5. Pour prouver que f est différentiable en $(0,0)$ il faut montrer que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - \partial_x f(0,0)(x-0) - \partial_y f(0,0)(y-0)}{\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}} = 0.$$

Notons $h(x,y) = \frac{f(x,y)-f(0,0)-\partial_x f(0,0)(x-0)-\partial_y f(0,0)(y-0)}{\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}} = \frac{\frac{\ln(1+x^2+y^2)}{x^2+y^2}-1}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Passons en coordonnées polaires :

$$\tilde{h}(r,\vartheta) = h(r\cos(\vartheta), r\sin(\vartheta)) = \frac{1}{r}\left(\frac{\ln(1+r^2)}{r^2} - 1\right) \simeq -\frac{r}{2} \xrightarrow[r\to 0]{} 0.$$

donc f est bien différentiable en $(0,0)$.