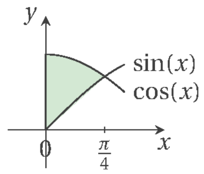
Exercice 1

Soit $\mathscr{D}$ la région comprise entre le graphe de la fonction d'équation $y=\sin(x)$ et le graphe de la fonction $y=\cos(x)$ pour x entre 0 et $\frac{\pi}{4}$. Décrire le domaine d'intégration $\mathscr{D}$ en coordonnées cartésiennes et calculer l'intégrale $\iint_{\mathscr{D}}(y+1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

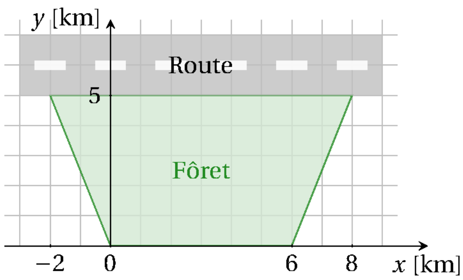
CORRECTION. $\mathscr{D}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, 0\le x\le \frac{\pi}{4}, \sin(x)\le y\le\cos(x)\right\}$

$$
\begin{aligned}
\iint_{\mathscr{D}}(y+1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_0^{\pi/4}\int_{\sin(x)}^{\cos(x)}(y+1)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/4}\left[\frac{y^2}{2}+y\right]_{\sin(x)}^{\cos(x)}\mathrm{d}x\\
&= \int_0^{\pi/4}\left(\frac{\cos^2(x)-\sin^2(x)}{2}+\cos(x)-\sin(x)\right)\mathrm{d}x\\
&= \int_0^{\pi/4}\left(\frac{\cos(2x)}{2}+\cos(x)-\sin(x)\right)\mathrm{d}x\\
&= \left[\frac{\sin(2x)}{4}+\sin(x)+\cos(x)\right]_0^{\pi/4} = \sqrt{2}-\frac{3}{4}.
\end{aligned}
$$



Exercice 2 *Population de lapins*

Une fôret est à coté d'une route (voir la figure ci-contre). La densité de la population de lapins qui vivent dans la fôret est proportionnelle à la distance de la route. Plus précisément, elle vaut 0 au niveau de la route et vaut 10 lapins par kilomètre carré au coté opposé de la fôret. Estimer la population totale de lapins dans la fôret.



CORRECTION.

▷ La fôret (domaine d'intégration) s'écrit

$$
\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, -2\le x\le 0, -\frac{5}{2}x\le y\le 5\right\}\cup\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, 0\le x\le 6, 0\le y\le 5\right\}\cup\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, 6\le x\le 8, \frac{5}{2}x-15\le y\le 5\right\}
$$

ou encore, ce qui est plus simple,

$$
\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, 0\le y\le 5, -\frac{2}{5}y\le x\le \frac{2}{5}(15+y)\right\}
$$

▷ La densité est une fonction affine de la seule variable y (comme la route est horizontale, la distance ne dépend que de la coordonnées y), *i.e.* $\delta(y)=my+q$ avec m et q à déterminer. On sait que $\delta(5)=0$ et $\delta(0)=10$ donc $\delta(y)=2(5-y)$.

▷ La population totale de lapins qui vivent dans la fôret est

$$
\int_0^5\int_{-\frac{2}{5}y}^{\frac{2}{5}(15+y)}\delta(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 2\int_0^5(5-y)\int_{-\frac{2}{5}y}^{\frac{2}{5}(15+y)}1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 2\int_0^5(5-y)\frac{2}{5}(15+2y)\,\mathrm{d}y = \frac{4}{5}\int_0^5 75-5y-2y^2\,\mathrm{d}y = \frac{550}{3}.
$$

Exercice 3 *Distance moyenne parcourue à pied pour rejoindre une porte d'embarquement*

Dans les aéroports, les portes d'embarquements dans un terminal sont souvent alignées. Si on arrive à une porte d'embarquement et on doit rejoindre une autre porte d'embarquement pour une correspondance, quelle proportion de la longueur du terminal doit-on parcourir en moyenne ? Un manière de modéliser cette situation est de choisir au hasard deux nombres $x\in[0;1]$, $y\in[0;1]$ et de calculer la valeur moyenne de $|x-y|$, *i.e.* $\int_0^1\int_0^1|x-y|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$. Calculer cette intégrale.

CORRECTION.

$$\int_0^1\int_0^1 |x-y|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1\int_0^x (x-y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \int_0^1\int_x^1 (y-x)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left[xy-\frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{y=x}\mathrm{d}x + \int_0^1 \left[\frac{y^2}{2}-xy\right]_{y=x}^{y=1}\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2}\right)\mathrm{d}x + \int_0^1 \left(\frac{1}{2}-x+\frac{x^2}{2}\right)\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\frac{1}{2}-x+x^2\right)\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{3}.$$

Exercice 4

Trouver les erreurs :

1. soit $\mathscr{D} = \left\{ (x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2+y^2\le 4 \right\}$, alors

$$\iint_{\mathscr{D}} (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi}\int_0^2 r^2\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\vartheta = \left(\int_0^{2\pi} 1\,\mathrm{d}\vartheta\right)\times\left(\int_0^2 r^2\,\mathrm{d}r\right) = \frac{16}{3}\pi;$$

2. soit $\mathscr{D}$ la région délimitée par la droite d'équation $x=1$, la droite d'équation $y=0$ et la droite d'équation $y=x$; alors, si on passe aux coordonnées polaires, on a

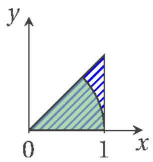
$$\iint_{\mathscr{D}} x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{\pi/4}\int_0^1 r^2\cos(\vartheta)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\vartheta.$$

CORRECTION.

1. Quand on passe aux coordonnées polaires on a $x=r\cos(\vartheta)$, $y=r\sin(\vartheta)$ et $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\vartheta$ donc

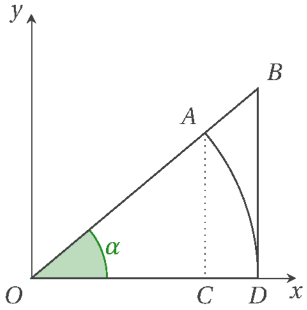
$$\iint_{\mathscr{D}} (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi}\int_0^2 r^3\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\vartheta = \left(\int_0^{2\pi} 1\,\mathrm{d}\vartheta\right)\times\left(\int_0^2 r^3\,\mathrm{d}r\right) = 8\pi.$$

2. Le domaine $\mathscr{D} = \left\{ (x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0\le x\le 1, 0\le y\le x \right\}$ est un triangle (hachuré dans la figure ci-dessous) tandis que le domaine $\left\{ (r,\vartheta)\in\mathbb{R}_+^*\times[0,2\pi[\;\middle|\; 0\le r\le 1, 0\le\vartheta\le\frac{\pi}{4} \right\}$ (colorié dans la figure ci-dessous) est un huitième du disque unitaire :



Comme les domaines d'intégration sont différents, les deux intégrales sont différentes aussi. Si on utilise les coordonnées polaires pour décrire l'ensemble $\mathscr{D}$ on a

$$\left\{ (r,\vartheta)\in\mathbb{R}_+^*\times[0,2\pi[\;\middle|\; 0\le\vartheta\le\frac{\pi}{4}, 0\le r\le\sqrt{1+\tan^2(\vartheta)} \right\} = \left\{ (r,\vartheta)\in\mathbb{R}_+^*\times[0,2\pi[\;\middle|\; 0\le\vartheta\le\frac{\pi}{4}, 0\le r\le\frac{1}{\cos(\vartheta)} \right\}.$$



$OA = OD = R$

$OC = R\cos(\alpha)$

$BD = R\tan(\alpha)$

$OB = R\sqrt{1+\tan^2(\alpha)}$

En effet,

$$\iint_{\mathscr{D}} x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1\int_0^x x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^1 [xy]_{y=0}^{y=x}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3};$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\frac{1}{\cos(\vartheta)}} r^2\cos(\vartheta)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\vartheta = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[\frac{r^3}{3}\cos(\vartheta)\right]_{r=0}^{r=\frac{1}{\cos(\vartheta)}}\mathrm{d}\vartheta = \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos^2(\vartheta)}\,\mathrm{d}\vartheta = \frac{1}{3}\Big[\tan(\vartheta)\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{3}.$$

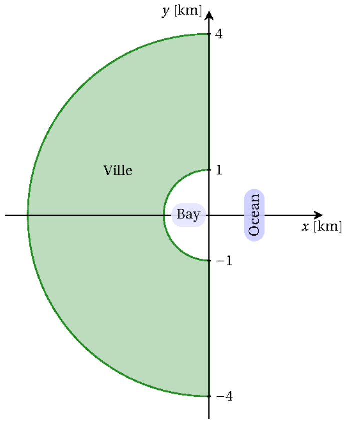
Exercice 5

Considérons un disque de métal de rayon 3 cm et prenons un repère centré dans son centre. À la distance r de l'origine, la densité du métal par unité de surface est $\frac{1}{r^2+1}$. Calculer la masse du disque.

CORRECTION. Décrivons le disque en coordonnées polaires centrées dans le centre du disque. La masse du disque est

$$\int_0^3 \int_0^{2\pi} \frac{r}{r^2+1}\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}r = \left(\int_0^3 \frac{r}{r^2+1}\,\mathrm{d}r\right) \times \left(\int_0^{2\pi} 1\,\mathrm{d}\vartheta\right) = \pi\left(\int_0^3 \frac{2r}{r^2+1}\,\mathrm{d}r\right) = \pi\left[\ln(r^2+1)\right]_{r=0}^{r=3} = \pi\ln(10).$$

Exercice 6



Une ville entoure une baie comme dans la figure ci-contre. La densité de population de la ville (en milliers de personnes par kilomètre carré) est $\delta(r,\vartheta)$, où r et ϑ sont les coordonnées polaires et les distances sont mesurées en kilomètres. Plus loin on vit de la baie et plus la densité de population diminue. De même, plus loin on vit de l'océan et plus la densité de population diminue. Laquelle des fonctions suivantes décrit au mieux cette situation ?

1. $\delta(r,\vartheta) = (4-r)(2+\cos(\vartheta))$
2. $\delta(r,\vartheta) = (4-r)(2+\sin(\vartheta))$
3. $\delta(r,\vartheta) = (4+r)(2+\cos(\vartheta))$

En déduire une estimation de la population totale de la ville.

CORRECTION.

▷ La ville (domaine d'intégration) s'écrit

$$\left\{ (r,\vartheta) \in \mathbb{R}_+^* \times [0;2\pi[\;\middle|\; 1 \le r \le 4, \frac{\pi}{2} \le \vartheta \le \frac{3\pi}{2} \right\}.$$

▷ La fonctions qui décrit au mieux la densité de population est $\delta(r,\vartheta) = (4-r)(2+\cos(\vartheta))$; en effet, pour tout ϑ_0 fixé dans $[\pi/2;3\pi/2]$, la fonction $f_{\vartheta_0}(r) \equiv \delta(r,\vartheta_0)$ est monotone décroissante et pour tout r_0 fixé dans $[1;4]$, la fonction $g_{r_0}(\vartheta) \equiv \delta(r_0,\vartheta)$ est monotone décroissante sur $[\pi/2;\pi]$ et monotone croissante sur $[\pi;3\pi/2]$.

▷ La population totale qui vit dans la ville est

$$\begin{aligned}\int_1^4 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \delta(r,\vartheta) r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\vartheta &= \int_1^4 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} r(4-r)(2+\cos(\vartheta))\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\vartheta = \left(\int_1^4 r(4-r)\,\mathrm{d}r\right) \times \left(\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (2+\cos(\vartheta))\,\mathrm{d}\vartheta\right) \\ &= \left[2r^2 - \frac{r^3}{3}\right]_{r=1}^{r=4} \times \left[2\vartheta + \sin(\vartheta)\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} = 18(\pi-1).\end{aligned}$$

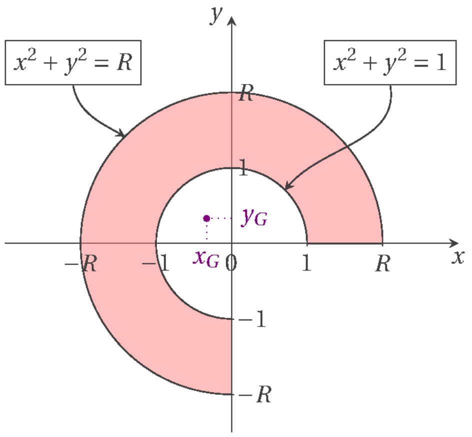
Exercice 7

Soit $R > 1$. Après avoir représenté graphiquement la région

$$\mathscr{D} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y \ge 0, 1 \le x^2+y^2 \le R \right\} \cup \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; xy \ge 0, 1 \le x^2+y^2 \le R \right\},$$

calculer les coordonnées de son centre de gravité en supposant la région $\mathscr{D}$ homogène. À partir de quelle valeur de R le centre de gravité appartient à $\mathscr{D}$?

CORRECTION. On trace d'abord les courbes d'équation $x^2+y^2 = 1$ et $x^2+y^2 = R$ avec $R > 1$ et on colore l'ensemble $\mathscr{D}$.



On décrit ensuite $\mathscr{D}$ en coordonnées polaires centrées en $(0,0)$: on a une bijection de $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ dans lui même définie par $x=r\cos(\vartheta)$, $y=r\sin(\vartheta)$ pour $(r,\vartheta)\in\mathbb{R}_+^*\times[0,2\pi[$, ainsi

$$\mathscr{D}=\left\{(r,\vartheta)\in\mathbb{R}_+^*\times[0,2\pi[\;\middle|\;0<r\le R, 0\le\vartheta\le\frac{3\pi}{2}\right\}.$$

Le centre de gravité a coordonnées (x_G,y_G) données par

$$x_G=\frac{\iint_{\mathscr{D}}x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\iint_{\mathscr{D}}1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y},\qquad y_G=\frac{\iint_{\mathscr{D}}y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\iint_{\mathscr{D}}1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}.$$

On calcule alors

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathscr{D}}1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y&=\int_1^R\int_0^{3\pi/2}r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\vartheta=\left(\int_1^R r\,\mathrm{d}r\right)\times\left(\int_0^{3\pi/2}1\,\mathrm{d}\vartheta\right)=\frac{3\pi(R^2-1)}{4};\\
\iint_{\mathscr{D}}x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y&=\int_1^R\int_0^{3\pi/2}r^2\cos(\vartheta)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\vartheta=\left(\int_1^R r^2\,\mathrm{d}r\right)\times\left(\int_0^{3\pi/2}\cos(\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta\right)=-\frac{(R^3-1)}{3};\\
\iint_{\mathscr{D}}y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y&=\int_1^R\int_0^{3\pi/2}r^2\sin(\vartheta)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\vartheta=\left(\int_1^R r^2\,\mathrm{d}r\right)\times\left(\int_0^{3\pi/2}\sin(\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta\right)=\frac{(R^3-1)}{3}.
\end{aligned}$$

On obtient finalement

$$x_G=\frac{-\frac{(R^3-1)}{3}}{\frac{3\pi(R^2-1)}{4}}=-\frac{4(R^2+R+1)}{9\pi(R+1)},\qquad y_G=\frac{\frac{(R^3-1)}{3}}{\frac{3\pi(R^2-1)}{4}}=\frac{4(R^2+R+1)}{9\pi(R+1)}.$$

Le centre de gravité appartient à $\mathscr{D}$ si et seulement si $1\le x_G^2+y_G^2\le R$:

$$1\le\left(-\frac{4(R^2+R+1)}{9\pi(R+1)}\right)^2+\left(\frac{4(R^2+R+1)}{9\pi(R+1)}\right)^2\le 4\iff\begin{cases}\frac{R^2+R+1}{R+1}\ge\frac{9\pi}{4\sqrt{2}},\\ \frac{R^2+R+1}{R+1}\le\frac{9\pi\sqrt{2}}{4},\end{cases}\quad\iff R>\frac{c+\sqrt{c^2+4c}}{2}\approx 4.826617132$$

avec $c\equiv\frac{9\pi}{4\sqrt{2}}-1$.