On cherche les extrema de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = 4x^2 + y^2$ dans le disque $x^2 + y^2 \leq 4$.

Dans la figure ci-contre on a tracé les courbes de niveau $0, 1, 4, 9, 16$ de $f$ ainsi que le disque. Il semblerait que :
- le point $(0, 0)$ est un minimum global,
- le point $(2, 0)$ est un maximum global,
- le point $(-2, 0)$ est un maximum global,
- le point $(0, 2)$ est un minimum local,
- le point $(0, -2)$ est un minimum local.

Étude de $f$ dans l’ouvert, i.e. l’ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 < 4\}$

Recherche des points critiques de $f$

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 8x \\ 2y \end{pmatrix}$$

Donc

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \implies \quad \begin{cases} 8x = 0 \\ 2y = 0 \end{cases}$$

L’unique point critique de $f$ est le point $(x_0, y_0) = (0, 0)$.

Étude de la nature du point critique par matrice Hessienne

$$\partial_{xx} f(x, y) = 8 \quad \partial_{yy} f(x, y) = 2 \quad \partial_{xy} f(x, y) = 0$$

Donc

$$H_f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

et $\det(H_f(x_0, y_0)) = 16 > 0$.

Conclusion : le point $(0, 0)$ est un minimum local de $f$.

Étude directe de la nature du point critique

On n’est pas obligé d’utiliser la matrice Hessienne pour établir la nature du point $(x_0, y_0)$. En effet, il suffit d’étudier le signe de la fonction distance au voisinage du point critique :

$$d(h, k) \equiv f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = 4(x_0 + h)^2 + (y_0 + k)^2 - 4x_0^2 - y_0^2 = 4h^2 + k^2 \geq 0 \quad \text{pour} \ (h, k) = (0, 0).$$

Puisque $d(h, k) \geq 0$, on conclut que le point $(x_0, y_0)$ est un minimum local de $f$.

Conclusion : $(0, 0)$ est un minimum local de $f$ et $f(0, 0) = 0$ ; comme $f(x, y) > f(0, 0)$ pour tout $(x, y) \neq (0, 0)$, on conclut que $(0, 0)$ est un minimum global de $f$.

Étude de $f$ sur le bord, i.e. dans l’ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 4\}$

Soit $g(x, y) = x^2 + y^2 - 4$ et $L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y) = 4x^2 + y^2 - \lambda(x^2 + y^2 - 4)$.

Recherche des points critiques de $L$

$$\nabla L(x, y, \lambda) = \begin{pmatrix} 8x - 2\lambda x \\ 2y - 2\lambda y \\ 4 - 2x^2 - 2y^2 \end{pmatrix}$$

Donc

$$\nabla L(x, y, \lambda) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \implies \quad \begin{cases} 2x(4 - \lambda) = 0, \\ 2y(1 - \lambda) = 0, \\ x^2 + y^2 = 4. \end{cases}$$

Les points critiques de $L$ sont les points

$$\begin{align*}
(x_1, y_1, \lambda_1) &= (2, 0, 4), \\
(x_2, y_2, \lambda_2) &= (-2, 0, 4), \\
(x_3, y_3, \lambda_3) &= (0, 2, 1), \\
(x_4, y_4, \lambda_4) &= (0, -2, 1).
\end{align*}$$
Étude de la nature des points critiques

On a
\[ \partial_{xx}\mathcal{L}(x, y, \lambda) = 8 - 2\lambda \quad \partial_{yy}\mathcal{L}(x, y, \lambda) = 2 - 2\lambda \quad \partial_{xy}\mathcal{L}(x, y, \lambda) = 0 \]

donc
\[ \partial_{xx}\mathcal{L}(x_1, y_1, \lambda_1) \times \partial_{yy}\mathcal{L}(x_1, y_1, \lambda_1) - (\partial_{xy}\mathcal{L}(x_1, y_1, \lambda_1))^2 = 0, \]
\[ \partial_{xx}\mathcal{L}(x_2, y_2, \lambda_2) \times \partial_{yy}\mathcal{L}(x_2, y_2, \lambda_2) - (\partial_{xy}\mathcal{L}(x_2, y_2, \lambda_2))^2 = 0, \]
\[ \partial_{xx}\mathcal{L}(x_3, y_3, \lambda_3) \times \partial_{yy}\mathcal{L}(x_3, y_3, \lambda_3) - (\partial_{xy}\mathcal{L}(x_3, y_3, \lambda_3))^2 = 0, \]
\[ \partial_{xx}\mathcal{L}(x_4, y_4, \lambda_4) \times \partial_{yy}\mathcal{L}(x_4, y_4, \lambda_4) - (\partial_{xy}\mathcal{L}(x_4, y_4, \lambda_4))^2 = 0. \]

Conclusion : la méthode du lagrangien permet seulement de trouver les candidats extrema de \( f \) sous la contrainte \( g \) mais ne permet pas de conclure s'ils sont effectivement des extrema.

Étude directe de la nature des points critiques

On n'est pas obligé d'utiliser la sous-matrice Hessienne de \( \mathcal{L} \) pour établir la nature des points critiques. En effet, il suffit d'étudier le signe de la fonction distance

\[ d_i(h, k) \equiv f(x_i + h, y_i + k) - f(x_i, y_i), \quad i = 1, 2, 3, 4 \]

pour \((h, k) = (0, 0)\) et \( g(x_i + h, y_i + k) = 0 \):

\[ d_i(h, k) = 4(x_i + h)^2 + (y_i + k)^2 - 4x_i^2 - y_i^2 \]
\[ g(x_i + h, y_i + k) = (x_i + h)^2 + (y_i + k)^2 - 4 \]
\[ \text{si } \partial_x g(x_i, y_i) \neq 0 \text{ alors l'équation } g(x_i + h, y_i + k) = 0 \text{ définit implicitement } k \text{ en fonction de } h \text{ au voisinage de } h = 0 : \]

en résolvant \( g(x_i + h, y_i + k) = 0 \) on trouve \((y_i + k)^2 = 4 - (x_i + h)^2\); en remplaçant l'expression ainsi trouvée dans \( d_i(h, k) \) on trouve la fonction d'une seule variable

\[ \tilde{d}_i(h) = 3(x_i + h)^2 + 4 - 4x_i^2 - y_i^2 \]

\[ \text{si } \partial_y g(x_i, y_i) \neq 0 \text{ alors l'équation } g(x_i + h, y_i + k) = 0 \text{ définit implicitement } h \text{ en fonction de } k \text{ au voisinage de } k = 0 : \]

en résolvant \( g(x_i + h, y_i + k) = 0 \) on trouve \((x_i + h)^2 = 4 - (y_i + k)^2\); en remplaçant l'expression ainsi trouvée dans \( d_i(h, k) \) on trouve la fonction d'une seule variable

\[ \tilde{d}_i(k) = 16 - 3(y_i + k)^2 - 4x_i^2 - y_i^2 \]

Conclusion :

\[ \tilde{d}_1(k) = -3k^2 \leq 0 \text{ donc le point } (x_1, y_1) \text{ est un minimum local de } f \text{ sous la contrainte } g, \]
\[ \tilde{d}_2(k) = -3k^2 \leq 0 \text{ donc le point } (x_2, y_2) \text{ est un minimum local de } f \text{ sous la contrainte } g, \]
\[ \tilde{d}_3(k) = 3h^2 \geq 0 \text{ donc le point } (x_3, y_3) \text{ est un maximum local de } f \text{ sous la contrainte } g, \]
\[ \tilde{d}_4(k) = 3h^2 \geq 0 \text{ donc le point } (x_4, y_4) \text{ est un maximum local de } f \text{ sous la contrainte } g. \]

Conclusion : les points \((\pm 2, 0)\) sont des minima locaux de \( f \) sous la contrainte \( g \) et \( f(\pm 2, 0) = 16 \); les points \((0, \pm 2)\) sont des maxima locaux (et donc globaux) de \( f \) sous la contrainte \( g \) et \( f(0, \pm 2) = 4 \).