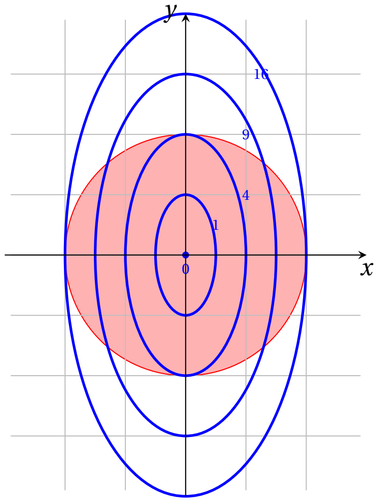
On cherche les extrema de la fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = 4x^2 + y^2$ dans le disque $x^2 + y^2 \le 4$.



Dans la figure ci-contre on a tracé les courbes de niveau $0, 1, 4, 9, 16$ de f ainsi que le disque. Il semblerait que

▷ le point $(0,0)$ est un minimum global,
▷ le point $(2,0)$ est un maximum global,
▷ le point $(-2,0)$ est un maximum global,
▷ le point $(0,2)$ est un minimum local,
▷ le point $(0,-2)$ est un minimum local.

Étude de f dans l'ouvert, *i.e.* l'ensemble $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2+y^2<4\right\}$

Recherche des points critiques de f

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 8x \\ 2y \end{pmatrix} \qquad \text{donc} \qquad \nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 8x = 0 \\ 2y = 0 \end{cases}$$

L'unique point critique de f est le point $(x_0, y_0) = (0,0)$.

Étude de la nature du point critique par matrice Hessienne

$$\partial_{xx} f(x,y) = 8 \qquad \partial_{yy} f(x,y) = 2 \qquad \partial_{xy} f(x,y) = 0$$

donc

$$H_f(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} 8>0 & 0 \\ 0 & 2>0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \text{dét}(H_f(x_0,y_0)) = 16 > 0.$$

Conclusion : le point $(0,0)$ est un minimum local de f.

Étude directe de la nature du point critique On n'est pas obligé d'utiliser la matrice Hessienne pour établir la nature du point (x_0, y_0). En effet, il suffit d'étudier le signe de la fonction distance au voisinage du point critique :

$$d(h,k) \equiv f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) = 4(x_0+h)^2 + (y_0+k)^2 - 4x_0^2 - y_0^2 = 4h^2 + k^2 \ge 0 \qquad \text{pour } (h,k) \simeq (0,0).$$

Puisque $d(h,k) \ge 0$, on conclut que le point (x_0,y_0) est un minimum local de f.

Conclusion : $(0,0)$ est un minimum local de f et $f(0,0) = 0$; comme $f(x,y) > f(0,0)$ pour tout $(x,y) \neq (0,0)$, on conclut que $(0,0)$ est un minimum global de f.

Étude de f sur le bord, *i.e.* dans l'ensemble $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2+y^2=4\right\}$

Soit $g(x,y) = x^2 + y^2 - 4$ et $\mathscr{L}(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x,y) = 4x^2 + y^2 - \lambda(x^2+y^2-4)$.

Recherche des points critiques de $\mathscr{L}$

$$\nabla \mathscr{L}(x,y,\lambda) = \begin{pmatrix} 8x - 2\lambda x \\ 2y - 2\lambda y \\ 4 - x^2 - y^2 \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad \nabla \mathscr{L}(x,y,\lambda) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 2x(4-\lambda) = 0, \\ 2y(1-\lambda) = 0, \\ x^2 + y^4 = 4. \end{cases}$$

Les points critiques de $\mathscr{L}$ sont les points

$$(x_1, y_1, \lambda_1) = (2, 0, 4), \qquad (x_2, y_2, \lambda_2) = (-2, 0, 4), \qquad (x_3, y_3, \lambda_3) = (0, 2, 1), \qquad (x_4, y_4, \lambda_4) = (0, -2, 1).$$

Étude de la nature des points critiques On a

$$\partial_{xx}\mathscr{L}(x,y,\lambda)=8-2\lambda \qquad \partial_{yy}\mathscr{L}(x,y,\lambda)=2-2\lambda \qquad \partial_{xy}\mathscr{L}(x,y,\lambda)=0$$

donc

$$\begin{aligned}
\partial_{xx}\mathscr{L}(x_1,y_1,\lambda_1)\times\partial_{yy}\mathscr{L}(x_1,y_1,\lambda_1)-(\partial_{xy}\mathscr{L}(x_1,y_1,\lambda_1))^2=0,\\
\partial_{xx}\mathscr{L}(x_2,y_2,\lambda_2)\times\partial_{yy}\mathscr{L}(x_2,y_2,\lambda_2)-(\partial_{xy}\mathscr{L}(x_2,y_2,\lambda_2))^2=0,\\
\partial_{xx}\mathscr{L}(x_3,y_3,\lambda_3)\times\partial_{yy}\mathscr{L}(x_3,y_3,\lambda_3)-(\partial_{xy}\mathscr{L}(x_3,y_3,\lambda_3))^2=0,\\
\partial_{xx}\mathscr{L}(x_4,y_4,\lambda_4)\times\partial_{yy}\mathscr{L}(x_4,y_4,\lambda_4)-(\partial_{xy}\mathscr{L}(x_4,y_4,\lambda_4))^2=0.
\end{aligned}$$

Conclusion : la méthode du lagrangien permet seulement de trouver les candidats extrema de f sous la contrainte g mais ne permet pas de conclure s'ils sont effectivement des extrema.

Étude directe de la nature des points critiques On n'est pas obligé d'utiliser la sous-matrice Hessienne de $\mathscr{L}$ pour établir la nature des points critiques. En effet, il suffit d'étudier le signe de la fonction distance

$$d_i(h,k)\equiv f(x_i+h,y_i+k)-f(x_i,y_i), \qquad i=1,2,3,4$$

pour $(h,k)\simeq(0,0)$ et $g(x_i+h,y_i+k)=0$:

- ▷ $d_i(h,k)=4(x_i+h)^2+(y_i+k)^2-4x_i^2-y_i^2$
- ▷ $g_i(x_i+h,y_i+k)=(x_i+h)^2+(y_i+k)^2-4$
- ▷ si $\partial_y g(x_i,y_i)\neq 0$ alors l'équation $g(x_i+h,y_i+k)=0$ définit implicitement k en fonction de h au voisinage de $h=0$: en résolvant $g(x_i+h,y_i+k)=0$ on trouve $(y_i+k)^2=4-(x_i+h)^2$; en remplaçant l'expression ainsi trouvée dans $d_i(h,k)$ on trouve la fonction d'une seule variable

$$\tilde{d}_i(h)=3(x_i+h)^2+4-4x_i^2-y_i^2$$

- ▷ si $\partial_x g(x_i,y_i)\neq 0$ alors l'équation $g(x_i+h,y_i+k)=0$ définit implicitement h en fonction de k au voisinage de $k=0$: en résolvant $g(x_i+h,y_i+k)=0$ on trouve $(x_i+h)^2=4-(y_i+k)^2$; en remplaçant l'expression ainsi trouvée dans $d_i(h,k)$ on trouve la fonction d'une seule variable

$$\tilde{d}_i(k)=16-3(y_i+k)^2-4x_i^2-y_i^2$$

Conclusion :

- ▷ $\tilde{d}_1(k)=-3k^2\le 0$ donc le point (x_1,y_1) est un minimum local de f sous la contrainte g,
- ▷ $\tilde{d}_2(k)=-3k^2\le 0$ donc le point (x_2,y_2) est un minimum local de f sous la contrainte g,
- ▷ $\tilde{d}_3(h)=3h^2\ge 0$ donc le point (x_3,y_3) est un maximum local de f sous la contrainte g,
- ▷ $\tilde{d}_4(h)=3h^2\ge 0$ donc le point (x_4,y_4) est un maximum local de f sous la contrainte g.

Conclusion : les points $(\pm 2,0)$ sont des minima locaux de f sous la contrainte g et $f(\pm 2,0)=16$; les points $(0,\pm 2)$ sont des maxima locaux (et donc globaux) de f sous la contrainte g et $f(0,\pm 2)=4$.