Exercice 1 *(5 points)*

Établir la nature des points critiques de la fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy + 3$.

CORRECTION.

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \iff \begin{cases}3(x^2-y)=0\\3(y^2-x)=0\end{cases} \iff (x,y) \in \{(0,0),(1,1)\}.$$

On a deux points critiques : $(0,0)$ et $(1,1)$.

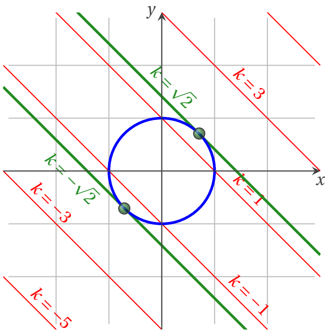
$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix}6x & -3\\-3 & 6y\end{pmatrix}, \qquad \text{dét}(H_f(x,y)) = 36xy - 9.$$

$\text{dét}(H_f(0,0)) = -9 < 0$ donc $(0,0)$ est un point-selle ; $\text{dét}(H_f(1,1)) = 27 > 0$ et $\partial_{xx} f(1,1) = 6 > 0$, donc $(1,1)$ est un minimum.

Exercice 2 *(5 points)*

On cherche les extrema de la fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x+y$ sous la contrainte $x^2+y^2 = 1$. Faire d'abord une étude des courbes de niveau de f et de leurs intersections avec le graphe de la contrainte. En déduire les extrema ainsi que leur nature. Vérifier ensuite que cette étude est correcte en étudiant la nature des points critiques du lagrangien.

CORRECTION.



- ▷ $f(x,y) = k$ ssi $y = k - x$: les courbes de niveau de f sont des droites parallèles de pente -1.
- ▷ $x^2 + y^2 = 1$ est l'équation du cercle de centre $(0,0)$ et rayon 1.
- ▷ Les courbes de niveau de f qui sont tangentes à la contraintes sont les droites $y = -x - \sqrt{2}$ et $y = -x + \sqrt{2}$ respectivement aux points $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ et $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.
- ▷ En analysant le sens de croissance de f le long de la contrainte, on en déduit que $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ est un minimum et $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ un maximum.

Introduisons le lagrangien :

$$\begin{aligned} L\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} &\to \mathbb{R}\\ (x,y,\lambda) &\mapsto x + y - \lambda(x^2+y^2-1). \end{aligned}$$

On cherche les points critiques de L :

$$\nabla L(x,y,\lambda) = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \iff \begin{cases}1-2\lambda x = 0,\\1-2\lambda y = 0,\\1-x^2-y^2 = 0,\end{cases} \iff (x,y,\lambda) \in \left\{\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}$$

On étudie la nature de ces points critiques :

$$\begin{array}{cccc}
\partial_{xx}L(x,y,\lambda) = -2\lambda & \partial_{yy}L(x,y,\lambda) = -2\lambda & \partial_{xy}L(x,y,\lambda) = 0 & \Delta(x,y,\lambda) = 4\lambda^2\\
\partial_{xx}L\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2} > 0 & \partial_{yy}L\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2} & \partial_{xy}L\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0 & \Delta\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2 > 0\\
\partial_{xx}L\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\sqrt{2} < 0 & \partial_{yy}L\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\sqrt{2} & \partial_{xy}L\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0 & \Delta\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2 > 0
\end{array}$$

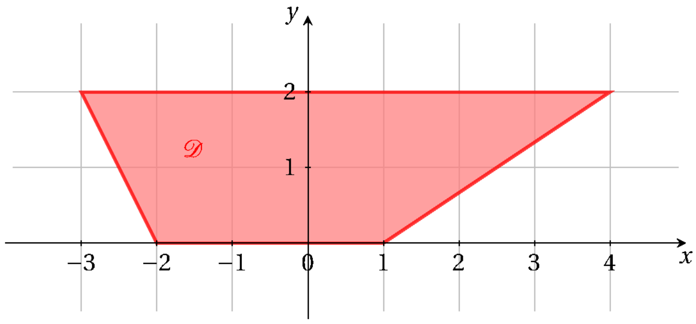
donc $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ est un minimum et $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ un maximum pour f sous la contrainte $x^2+y^2 = 1$.

Exercice 3 *(5 points)*

Calculer

$$\iint_{\mathscr{D}} y \, dx \, dy$$

où l'ensemble d'intégration est esquissé dans la figure ci-contre.



CORRECTION.

$$\mathscr{D} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -3 \le x \le -2, -2x-4 \le y \le 2 \right\} \cup \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -2 \le x \le 1, 0 \le y \le 2 \right\} \cup \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 1 \le x \le 4, \frac{2}{3}x - \frac{2}{3} \le y \le 2 \right\}$$

ou encore, ce qui est plus simple,

$$\mathscr{D} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 0 \le y \le 2, -\frac{1}{2}y - 2 \le x \le \frac{3}{2}y + 1 \right\},$$

donc

$$\iint_{\mathscr{D}} y \, dy \, dx = \int_0^2 \int_{-\frac{1}{2}y-2}^{\frac{3}{2}y+1} y \, dx \, dy = \int_0^2 \left[yx \right]_{x=-\frac{1}{2}y-2}^{x=\frac{3}{2}y+1} dy = \int_0^2 y(2y+3) \, dy = \frac{34}{3}.$$

Exercice 4 *(5 points)*

Soit $\omega(x,y) = 3(x^2 - y)\,dx + 3(y^2 - x)\,dy$ une forme différentielle et notons $\mathscr{D}_\omega$ son domaine de définition. Montrer qu'elle fermée. Expliquer pourquoi on peut en déduire qu'elle est exacte et en calculer une primitive. Soit $\gamma\colon [0, 2\pi] \to \mathscr{D}_\omega$ la courbe définie par $\gamma(t) = (2\cos(t), 3\sin(t))$. Calculer l'intégrale curviligne $\int_\gamma \omega$.

CORRECTION. $\partial_y \left(3(x^2 - y)\right) - \partial_x \left(3(y^2 - x)\right) = 0$: la forme différentielle est fermée.

$\mathscr{D}_\omega \equiv \mathbb{R}^2$ est simplement connexe et ω est fermée : le théorème de POINCARÉ permet de conclure que ω est exacte.

On cherche $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que $df(x,y) = \omega(x,y)$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Comme $\partial_x f(x,y) = 3(x^2 - y)$, alors $f(x,y) = x^3 - 3xy + g(y)$ où $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction à déterminer ; alors $\partial_y f(x,y) = -3x + g'(y)$ et on sait que $\partial_y f(x,y) = 3(y^2 - x)$ donc $g'(y) = 3y^2$, par conséquent $g(y) = y^3 + c$ et on conclut que $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy + c$ pour tout $c \in \mathbb{R}$.

Comme ω est exacte et $\gamma(0) = \gamma(2\pi)$, alors $\int_\gamma \omega = 0$.