Exercice A.1

1. Écrire le DL de $\cos(x)$ et de e^{2x} en 0 à l'ordre 2. En déduire le DL de $\frac{\cos(x)}{e^{2x}}$ en 0 à l'ordre 2.
2. Écrire le DL de $\ln(1+u)$ en 0 à l'ordre 2. En déduire le DL de $\ln\left(\frac{\cos(x)}{e^{2x}}\right)$ en 0 à l'ordre 2
3. Calculer
$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln\left(\frac{\cos(x)}{e^{2x}}\right)+2x}{x^2}$$

CORRECTION.

1. $\cos(x)=1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)$ et $e^{2x}=1+2x+2x^2+o(x^2)$ lorsque $x\simeq 0$. On pose la division suivant les puissances croissantes en ne gardant que les termes de degré inférieur ou égal à 2 :
$$\begin{array}{rrrr|l}
1 & & -\frac{1}{2}x^2 & +o(x^2) & 1+2x+2x^2+o(x^2) \\ \cline{5-5}
-1 & -2x & -2x^2 & +o(x^2) & 1-2x+\frac{3}{2}x^2 \\ \cline{1-4}
 & -2x & -\frac{5}{2}x^2 & +o(x^2) & \\
 & 2x & +4x^2 & +o(x^2) & \\ \cline{2-4}
 & & \frac{3}{2}x^2 & +o(x^2) & \\
 & & -\frac{3}{2}x^2 & +o(x^2) & \\ \cline{3-4}
 & & & o(x^2) &
\end{array}$$
Donc $\dfrac{\cos(x)}{e^{2x}}=\dfrac{1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{1+2x+2x^2+o(x^2)}=1-2x+\frac{3}{2}x^2+o(x^2)$ lorsque $x\simeq 0$.
2. $\ln(1+u)=u-\frac{u^2}{2}+o(u^2)$ lorsque $u\simeq 0$ donc $\ln\left(\frac{\cos(x)}{e^{2x}}\right)=-2x-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)$ lorsque $x\simeq 0$. Notons que dans ce cas il n'est pas nécessaire de calculer d'abord le DL de $\frac{\cos(x)}{e^{2x}}$ mais il suffit le DL de $\cos(x)$ car $\ln\left(\frac{\cos(x)}{e^{2x}}\right)=\ln(\cos(x))-\ln(e^{2x})=\ln(\cos(x))-2x=\ln\left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)-2x=-\frac{x^2}{2}+o(x^2)-2x$ lorsque $x\simeq 0$.
3. Le DL précédent permet de calculer facilement la limite donnée :
$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln\left(\frac{\cos(x)}{e^{2x}}\right)+2x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-2x-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)+2x}{x^2}=-\frac{1}{2}.$$

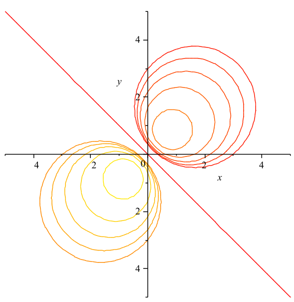
Exercice A.2

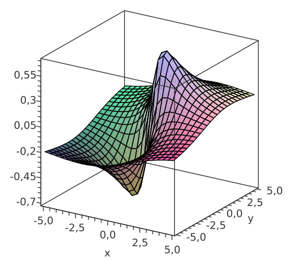
Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y)=\dfrac{x+y}{1+x^2+y^2}$.

1. Déterminer et représenter ses courbes de niveau.
2. Calculer ses dérivées partielles premières.
3. Écrire l'équation du plan tangent à f en $(0,0)$.

CORRECTION.

1. Les courbes de niveau de f sont les courbes d'équation $f(x,y)=k$, *i.e.* la droite d'équation $y=-x$ pour $k=0$ et les courbes d'équation $x^2+y^2-\frac{1}{k}x-\frac{1}{k}y+1=0$ pour $0<k^2<1/2$ qui sont des cercles de centre $\left(\frac{1}{2k},\frac{1}{2k}\right)$ et rayon $\sqrt{\frac{1}{2k^2}-1}$.





2. Les deux dérivées premières partielles de f sont

$$\partial_x f(x,y) = \frac{1-x^2-2xy+y^2}{(1+x^2+y^2)^2}, \qquad \partial_y f(x,y) = \frac{1+x^2-2xy-y^2}{(1+x^2+y^2)^2}.$$

3. L'équation du plan tangent à f en $(0,0)$ est

$$z = f(0,0) + x\partial_x(0,0) + y\partial_y(0,0) = x + y.$$

Exercice A.3

Déterminer si les limites suivantes existent :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2\sin^2(x)}{x^4+y^4}.$$

Correction.

1. On utilise les coordonnées polaires : $x = r\cos(\vartheta)$, $y = r\sin(\vartheta)$; alors $f(r,\vartheta) = r(\cos^3(\vartheta)+\sin^3(\vartheta))$ et comme $|f(r,\vartheta)| \le |2r| \xrightarrow[r\to 0]{} 0$, on en déduit que $\lim_{r\to 0} f(r,\vartheta) = 0$ indépendamment de ϑ, ce qui prouve que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.
2. La restriction de f à la courbe continue $y=0$ qui passe par le point $(0,0)$ est la fonction $f(x,0)=0$. La restriction de f à la courbe continue $y=x$ qui passe par le point $(0,0)$ est la fonction $f(x,x) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2$. Comme $f(x,x) \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{1}{2}$ mais $f(x,0)=0$, la limite $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{y^2\sin^2(x)}{x^4+y^4}$ n'existe pas.

Exercice A.4

Vérifier, en utilisant la définition, que la fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = |y|\ln(1+x)$ est différentiable en $(0,0)$.

Correction. Comme $f(x,0) = f(0,y) = 0$ alors $\partial_x f(0,0) = \partial_y f(0,0) \equiv 0$ donc

$$\frac{f(x,y)-f(x_0,y_0)-\partial_x f(x_0,y_0)(x-x_0)-\partial_y f(x_0,y_0)(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} = \frac{|y|\ln(1+x)}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

On passe aux coordonnées polaires : $x = r\cos(\theta)$ et $y = r\sin(\theta)$ et on a

$$\left|\frac{|y|\ln(1+x)}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| = \left|\sin(\vartheta)\ln(1+r\cos(\vartheta))\right| \le 2r|\sin(\vartheta)\cos(\vartheta)| \le 2r \xrightarrow[r\to 0]{} 0.$$

La fonction est donc différentiable en $(0,0)$.

Exercice B.1

1. Écrire le DL de $\cos(2x)$ et de e^x en 0 à l'ordre 2. En déduire le DL de $\frac{\cos(2x)}{e^x}$ en 0 à l'ordre 2.
2. Écrire le DL de $\ln(1+u)$ en 0 à l'ordre 2. En déduire le DL de $\ln\left(\frac{\cos(2x)}{e^x}\right)$ en 0 à l'ordre 2
3. Calculer

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln\left(\frac{\cos(2x)}{e^x}\right)+x}{x^2}$$

CORRECTION.

1. $\cos(2x) = 1 - 2x^2 + o(x^2)$ et $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$ lorsque $x \simeq 0$. On pose la division suivant les puissances croissantes en ne gardant que les termes de degré inférieur ou égal à 2 :

$$
\begin{array}{cccc|l}
1 & & -2x^2 & +o(x^2) & 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \\ \cline{5-5}
-1 & -x & -\frac{1}{2}x^2 & +o(x^2) & 1 - x - \frac{3}{2}x^2 \\ \cline{1-4}
 & -x & -\frac{5}{2}x^2 & +o(x^2) & \\
 & x & +x^2 & +o(x^2) & \\ \cline{2-4}
 & & -\frac{3}{2}x^2 & +o(x^2) & \\
 & & \frac{3}{2}x^2 & +o(x^2) & \\ \cline{3-4}
 & & & o(x^2) &
\end{array}
$$

Donc $\dfrac{\cos(2x)}{e^x} = \dfrac{1 - 2x^2 + o(x^2)}{1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)} = 1 - x - \frac{3}{2}x^2 + o(x^2)$ lorsque $x \simeq 0$.

2. $\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + o(u^2)$ lorsque $u \simeq 0$ donc $\ln\left(\frac{\cos(2x)}{e^x}\right) = -x - 2x^2 + o(x^2)$ lorsque $x \simeq 0$. Notons que dans ce cas il n'est pas nécessaire de calculer d'abord le DL de $\frac{\cos(2x)}{e^x}$ mais il suffit le DL de $\cos(2x)$ car $\ln\left(\frac{\cos(2x)}{e^x}\right) = \ln(\cos(2x)) - \ln(e^x) = \ln(\cos(2x)) - x = \ln(1 - 2x^2 + o(x^2)) - x = -2x^2 + o(x^2) - x$ lorsque $x \simeq 0$.
3. Le DL précédent permet de calculer facilement la limite donnée :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln\left(\frac{\cos(x)}{e^{2x}}\right) + x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-x - 2x^2 + o(x^2) + x}{x^2} = -2.$$

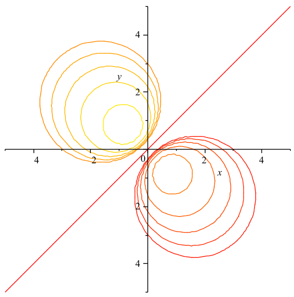
Exercice B.2

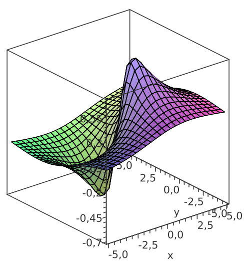
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y) = \dfrac{x-y}{1+x^2+y^2}$.

1. Déterminer et représenter ses courbes de niveau.
2. Calculer ses dérivées partielles premières.
3. Écrire l'équation du plan tangent à f en $(0,0)$.

CORRECTION.

1. Les courbes de niveau de f sont les courbes d'équation $f(x,y) = k$, *i.e.* la droite d'équation $y = x$ pour $k = 0$ et les courbes d'équation $x^2 + y^2 - \frac{1}{k}x + \frac{1}{k}y + 1 = 0$ pour $0 < k^2 < 1/2$ qui sont des cercles de centre $\left(\frac{1}{2k}, -\frac{1}{2k}\right)$ et rayon $\sqrt{\frac{1}{2k^2} - 1}$.





2. Les dérivées premières de f sont

$$\partial_x f(x,y) = \frac{1 - x^2 + 2xy + y^2}{(1+x^2+y^2)^2}, \qquad \partial_y f(x,y) = \frac{-1 - x^2 - 2xy + y^2}{(1+x^2+y^2)^2}.$$

3. L'équation du plan tangent à f en $(0,0)$ est

$$z = f(0,0) + x\partial_x(0,0) + y\partial_y(0,0) = x - y.$$

Exercice B.3

Déterminer si les limites suivantes existent :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, \qquad\qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2\sin^2(y)}{x^4+y^4}.$$

Correction.

1. On utilise les coordonnées polaires : $x = r\cos(\vartheta)$, $y = r\sin(\vartheta)$; alors $f(r,\vartheta) = r(\cos^3(\vartheta)+\sin^3(\vartheta))$ et comme $|f(r,\vartheta)| \le 2r \xrightarrow[r\to 0]{} 0$, on en déduit que $\lim_{r\to 0} f(r,\vartheta) = 0$ indépendamment de ϑ, ce qui prouve que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.
2. La restriction de f à la courbe continue $x = 0$ qui passe par le point $(0,0)$ est la fonction $f(0,y) = 0$. La restriction de f à la courbe continue $y = x$ qui passe par le point $(0,0)$ est la fonction $f(x,x) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2$. Comme $f(x,x) \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{1}{2}$ mais $f(x,0) = 0$, la limite $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2\sin^2(y)}{x^4+y^4}$ n'existe pas.

Exercice B.4

Vérifier, en utilisant la définition, que la fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = |x|\ln(1+y)$ est différentiable en $(0,0)$.

Correction. Comme $f(x,0) = f(0,y) = 0$ alors $\partial_x f(0,0) = \partial_y f(0,0) = 0$ donc

$$\frac{f(x,y)-f(x_0,y_0)-\partial_x f(x_0,y_0)(x-x_0)-\partial_y f(x_0,y_0)(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} = \frac{|x|\ln(1+y)}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

On passe aux coordonnées polaires : $x = r\cos(\theta)$ et $y = r\sin(\theta)$ on a

$$\left|\frac{|x|\ln(1+y)}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| = \left|\cos(\vartheta)\ln(1+r\sin(\vartheta))\right| \le 2r|\cos(\vartheta)\sin(\vartheta)| \le 2r \xrightarrow[r\to 0]{} 0.$$

La fonction est donc différentiable en $(0,0)$.

Exercice C.1

1. Écrire le DL de $\sin(2x)$ et de e^{2x} en 0 à l'ordre 2. En déduire le DL de $\frac{\sin(2x)}{e^{2x}}$ en 0 à l'ordre 2.
2. Écrire le DL de $\ln(1+u)$ en 0 à l'ordre 1. En déduire le DL de $\ln\left(\frac{\sin(2x)}{2xe^{2x}}\right)$ en 0 à l'ordre 1
3. Calculer
$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln\left(\frac{\sin(2x)}{2xe^{2x}}\right)+2x}{x}$$

Correction.

1. $\sin(2x) = 2x + o(x^2)$ et $e^{2x} = 1+2x+2x^2+o(x^2)$ lorsque $x \simeq 0$. On pose la division suivant les puissances croissantes en ne gardant que les termes de degré inférieur ou égal à 2 :

$$\begin{array}{rrr|l}
2x & & +o(x^2) & 1+2x+2x^2+o(x^2) \\ \cline{4-4}
-2x & -4x^2 & +o(x^2) & 2x-4x^2 \\ \cline{1-3}
 & -4x^2 & +o(x^2) & \\
 & +4x^2 & +o(x^2) & \\ \cline{2-3}
 & & o(x^2) &
\end{array}$$

Donc $\displaystyle\frac{\sin(2x)}{e^{2x}} = \frac{2x+o(x^2)}{1+2x+2x^2+o(x^2)} = 2x-4x^2+o(x^2)$ lorsque $x \simeq 0$.

2. $\ln(1+u) = u + o(u)$ lorsque $u \simeq 0$ donc $\ln\left(\frac{\sin(2x)}{2xe^{2x}}\right) = \ln\left(\frac{2x-4x^2+o(x^2)}{2x}\right) = \ln(1-2x+o(x)) = -2x+o(x)$ lorsque $x \simeq 0$.
3. Le DL précédent permet de calculer facilement la limite donnée :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln\left(\frac{\sin(2x)}{2xe^{2x}}\right)+2x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{-2x+o(x)+2x}{x} = 0.$$

Exercice C.2

Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y) = \dfrac{y-x}{1+x^2+y^2}$.

1. Déterminer et représenter ses courbes de niveau.
2. Calculer ses dérivées partielles premières.
3. Écrire l'équation du plan tangent à f en $(0,0)$.

Correction.

1. Les courbes de niveau de f sont les courbes d'équation $f(x,y) = k$, *i.e.* la droite d'équation $y = x$ pour $k = 0$ et les courbes d'équation $x^2+y^2+\frac{1}{k}x-\frac{1}{k}y+1 = 0$ pour $0 < k^2 < 1/2$ qui sont des cercles de centre $\left(-\frac{1}{2k}, \frac{1}{2k}\right)$ et rayon $\sqrt{\frac{1}{2k^2}-1}$.
2. Les deux dérivées premières partielles de f sont

$$\partial_x f(x,y) = \frac{-1+x^2-2xy-y^2}{(1+x^2+y^2)^2}, \qquad \partial_y f(x,y) = \frac{1+x^2+2xy-y^2}{(1+x^2+y^2)^2}.$$

3. L'équation du plan tangent à f en $(0,0)$ est

$$z = f(0,0) + x\partial_x(0,0) + y\partial_y(0,0) = y - x.$$

Exercice C.3

Déterminer si les limites suivantes existent :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2\sin^2(y)}{x^4+y^4}.$$

Correction.

1. On utilise les coordonnées polaires : $x = r\cos(\vartheta)$, $y = r\sin(\vartheta)$; alors $f(r,\vartheta) = r(\cos^3(\vartheta)+\sin^3(\vartheta))$ et comme $|f(r,\vartheta)| \le 2r \xrightarrow[r\to 0]{} 0$, on en déduit que $\lim_{r\to 0} f(r,\vartheta) = 0$ indépendamment de ϑ, ce qui prouve que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.
2. La restriction de f à la courbe continue $x = 0$ qui passe par le point $(0,0)$ est la fonction $f(0,y) = 0$. La restriction de f à la courbe continue $y = x$ qui passe par le point $(0,0)$ est la fonction $f(x,x) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2$. Comme $f(x,x) \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{1}{2}$ mais $f(x,0) = 0$, la limite $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2\sin^2(y)}{x^4+y^4}$ n'existe pas.

Exercice C.4

Vérifier, en utilisant la définition, que la fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = |x|\ln(1+y)$ est différentiable en $(0,0)$.

Correction. Comme $f(x,0) = f(0,y) = 0$ alors $\partial_x f(0,0) = \partial_y f(0,0) = 0$ donc

$$\frac{f(x,y)-f(x_0,y_0)-\partial_x f(x_0,y_0)(x-x_0)-\partial_y f(x_0,y_0)(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} = \frac{|x|\ln(1+y)}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

On passe aux coordonnées polaires : $x = r\cos(\theta)$ et $y = r\sin(\theta)$ on a

$$\left|\frac{|x|\ln(1+y)}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| = \left|\cos(\vartheta)\ln(1+r\sin(\vartheta))\right| \le 2r|\cos(\vartheta)\sin(\vartheta)| \le 2r \xrightarrow[r\to 0]{} 0.$$

La fonction est donc différentiable en $(0,0)$.