M33 - L2 MATHS/MASS - Rattrapage - Juin 2013

- ▷ Ce sujet comporte 5 exercices indépendants.
- ▷ **Documents interdis, calculatrices autorisées.**
- ► *On attachera le plus grand soin à la rédaction et à la présentation claire et lisible des résultats dont il sera tenu compte lors de la correction. Aucun raisonnement vague ou insuffisant ne sera pris en compte.* ***Une grande valeur sera attribuée à la rigueur des raisonnements.***
- ► Si une question pose problème, admettre le résultat et passer à la suivante.

Exercice 1 *(3 points)*

Soit $\mathbb{V}_n$ la matrice de VANDERMONDE :

$$\mathbb{V}_n = \begin{pmatrix} 1 & a_0 & a_0^2 & \dots & a_0^n \\ 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^n \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^n \end{pmatrix}.$$

Quel est le lien entre cette matrice et l'interpolation polynomiale de l'ensemble de points $\{(a_i; b_i)\}_{i=0}^n$?

CORRECTION. Soit $p(x) = \sum_{i=0}^n c_i x^i$ le seul polynôme de degré n qui interpole l'ensemble de $(n+1)$ points $\{(a_i; b_i)\}_{i=0}^n$, *i.e.* $b_i = p(a_i) = \sum_{i=0}^n c_i a^i$. Alors le vecteur $\mathbf{c} = (c_0, c_1, \dots, c_n)^T$ est solution du système linéaire $\mathbb{V}\mathbf{c} = \mathbf{b}$.

Exercice 2 *(5 points)*

Soit $f, g \colon [a; b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions monotones de classe $\mathscr{C}^1([a; b])$. On suppose qu'il existe un et un seul $\ell \in [a; b]$ tel que $f(\ell) = g(\ell)$. À partir de $x_0 \in [a; b]$, on construit une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la relation $f(x_{n+1}) = g(x_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que si $\left|\frac{g'(\ell)}{f'(\ell)}\right| < 1$ alors il existe un intervalle $[\alpha; \beta] \subset [a; b]$ tel que $x_n \to \ell$ pour tout $x_0 \in [\alpha; \beta]$.
2. Dans le cas où $\left|\frac{g'(\ell)}{f'(\ell)}\right| > 1$, proposer une méthode itérative convergente pour calculer ℓ.

CORRECTION.

1. La fonction f est inversible donc la méthode donnée correspond à une méthode de point fixe $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ où $\varphi = f^{-1} \circ g \colon [a; b] \to [a; b]$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^1([a; b])$ et $\varphi'(x) = \frac{g'(x)}{f'(f^{-1}(g(x)))}$. Donc $\varphi'(\ell) = \frac{g'(\ell)}{f'(f^{-1}(g(\ell)))} = \frac{g'(\ell)}{f'(\ell)}$. Si $|g'(\ell)/f'(\ell)| < 1$ alors, pour le théorème d'OSTROWSKI, il existe un intervalle $[\alpha; \beta] \subset [a; b]$ tel que $x_n \to \ell$ pour tout $x_0 \in [\alpha; \beta]$.
2. Si $|g'(\ell)/f'(\ell)| > 1$, il suffit de construire la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la relation $f(x_n) = g(x_{n+1})$ pour $n \in \mathbb{N}$ et appliquer le raisonnement du point précédant.

Exercice 3 *(5 points)*

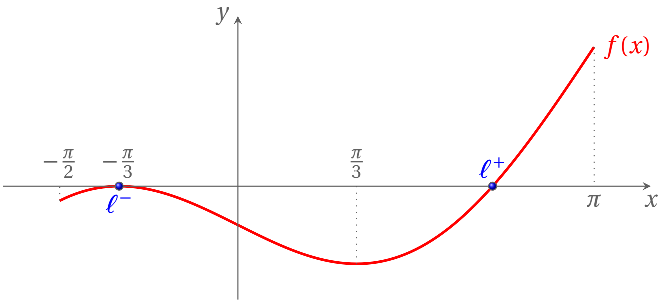
L'objectif de cet exercice est de déterminer les zéros de la fonction $f \colon [-\frac{\pi}{2}; \pi] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{x}{2} - \sin(x) + \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

1. Montrer qu'il existe deux solutions $\ell^- < 0$ et $\ell^+ > 0$ de l'équation $f(x) = 0$ pour $x \in [-\frac{\pi}{2}; \pi]$.
2. Peut-on appliquer la méthode de la bissection pour calculer les deux racines ? Pourquoi ? Dans le cas où c'est possible, estimer le nombre minimal d'itérations nécessaires pour calculer le(s) zéro(s) avec une tolérance $\varepsilon = 10^{-10}$ après avoir choisi un intervalle convenable.
3. Écrire la méthode de NEWTON pour la fonction f. À l'aide du graphe de la fonction f, déduire l'ordre de convergence de la méthode pour les deux zéros.

CORRECTION.

1. Étude de la fonction f :
   - ⋆ f est classe $\mathscr{C}^\infty([-\frac{\pi}{2};\pi])$;
   - ⋆ $f(-\frac{\pi}{2}) = 1-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{12} \approx -0.12785 < 0$, $f(0) = \frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2} \approx -0.34244 < 0$, $f(\pi) = \frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 1.2284 > 0$;
   - ⋆ $f'(x) = \frac{1}{2}-\cos(x)$;
   - ⋆ f est croissante sur $[-\frac{\pi}{2};-\frac{\pi}{3}] \cup [\frac{\pi}{3};\pi]$, décroissante sur $[-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}]$;
   - ⋆ $x = -\frac{\pi}{3}$ est un maximum local et $f(-\frac{\pi}{3}) = 0$; $x = \frac{\pi}{3}$ est un minimum local et $f(\frac{\pi}{3}) < 0$;
   - ⋆ $f''(x) = \sin(x)$;
   - ⋆ f est concave sur $[-\frac{\pi}{2};0]$, convexe sur $[0;\pi]$.



Par conséquence $\ell^- = -\frac{\pi}{3}$ est l'unique solution de l'équation $f(x) = 0$ pour $x \in [-\frac{\pi}{2};0]$ et il existe un et un seul ℓ^+ solution de l'équation $f(x) = 0$ pour $x \in [0;\pi]$. On peut même améliorer l'encadrement et conclure que $\ell^+ \in [\frac{\pi}{3};\pi]$.

2. La méthode de dichotomie ne peut pas être utilisée pour approcher ℓ^- car il est impossible de trouver un intervalle $]a,b[\subset \mathbb{R}^-$ sur lequel $f(a)f(b) < 0$. En ce qui concerne l'approximation de ℓ^+, en partant de $[a,b] = [\frac{\pi}{3};\pi]$, la méthode de dichotomie converge en $\log_2\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right) \approx 35$ itérations vers la valeur 2.246005589.

3. La méthode de NEWTON est une méthode de point fixe

$$\begin{cases} x_{k+1} = \phi(x_k), \\ x_0 \text{ donné}, \end{cases}$$

avec ϕ l'application définie par $\phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$. Ici donc elle s'écrit

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{x_k - 2\sin(x_k) + \frac{\pi}{3} - \sqrt{3}}{1-2\cos(x_k)}.$$

À l'aide du graphe de la fonction f, on voit que la méthode converge vers ℓ^+ quel que soit $x_0 \in [-\pi/2;\pi/3]$ avec un ordre de convergence quadratique et converge vers ℓ^- quel que soit $x_0 \in [\pi/3;\pi]$ avec un ordre de convergence linéaire (car $f(\ell^-) = f'(\ell^-) = 0$).

Exercice 4 *(4 points)*

Soit f une fonction $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

1. On considère l'approximation

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{1}{12}\Big(11 f\big(-\tfrac{3}{5}\big) + f\big(-\tfrac{1}{5}\big) + f\big(\tfrac{1}{5}\big) + 11 f\big(\tfrac{3}{5}\big)\Big).$$

Quel est le degré d'exactitude de cette formule de quadrature ?

2. On se donne les points $\{x_i\}_{i=0}^{i=n}$ de subdivision de l'intervalle $[a;b]$: $x_i = a + ih$ avec $h = \frac{b-a}{n}$. À l'aide d'un changement de variable affine, en déduire une formule de quadrature pour l'intégrale

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

En tirer une formule de quadrature composite pour l'intégrale $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

3. Écrire l'algorithme pour approcher $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

CORRECTION.

1. On a

k	$p_k(x)=x^k$	$\int_{-1}^{1} p_k(x)\,\mathrm{d}x$	$\frac{1}{12}(11p_k(-3/5)+p_k(-1/5)+p_k(1/5)+11p_k(3/5))$	Degré d'exactitude
0	1	2	2	au moins 0
1	x	0	0	au moins 1
2	x^2	$2/3$	$2/3$	au moins 2
3	x^3	0	0	au moins 3
4	x^4	$2/5$	$446/1875$	≤ 3

La formule est donc exacte de degré 3.

2. Soit $x=mt+q$, alors

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,\mathrm{d}x = m\int_{-1}^{1} f(mt+q)\,\mathrm{d}t \quad \text{avec} \quad \begin{cases} x_i=-m+q,\\ x_{i+1}=m+q,\end{cases}$$

d'où le changement de variable $x=x_i+(t+1)\frac{x_{i+1}-x_i}{2}$. On déduit la formule de quadrature (exacte sur l'espace des polynôme de degré au plus 3)

$$\begin{aligned}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,\mathrm{d}x &= \frac{x_{i+1}-x_i}{2}\int_{-1}^{1} f\left(x_i+(t+1)\frac{x_{i+1}-x_i}{2}\right)\mathrm{d}t\\ &\approx \frac{x_{i+1}-x_i}{36}\left[11f\left(\frac{x_{i+1}-x_i}{5}\right)+f\left(2\frac{x_{i+1}-x_i}{5}\right)+f\left(3\frac{x_{i+1}-x_i}{5}\right)+11f\left(4\frac{x_{i+1}-x_i}{5}\right)\right].\end{aligned}$$

Soit $h=x_{i+1}-x_i=\frac{b-a}{n}$. La formule précédente se réécrit

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{h}{36}\left[11f\left(x_i+\frac{h}{5}\right)+f\left(x_i+\frac{2h}{5}\right)+f\left(x_i+\frac{3h}{5}\right)+11f\left(x_i+\frac{4h}{5}\right)\right].$$

et la formule de quadrature composite déduite de cette approximation est

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{h}{36}\sum_{i=0}^{n-1}\left[11f\left(x_i+\frac{h}{5}\right)+f\left(x_i+\frac{2h}{5}\right)+f\left(x_i+\frac{3h}{5}\right)+11f\left(x_i+\frac{4h}{5}\right)\right].$$

3. Algorithme d'approximation de $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

Require: f, a, $b>a$, $n>0$
  $h \leftarrow \frac{b-a}{n}$
  $s \leftarrow 0$
  for $i=0$ to $n-1$ **do**
    $x \leftarrow a+ih$
    $s \leftarrow s+11f(x+\frac{h}{5})+f(x+\frac{2h}{5})+f(x+\frac{3h}{5})+11f(x+\frac{4h}{5})$
  end for
  return $I \leftarrow \frac{h}{36}s$

Exercice 5 *(3 points)*

Soit le problème de CAUCHY :

$$\begin{cases} u'(t)+\dfrac{\sqrt{u(t)}}{2}=0, \quad \forall t\in\mathbb{R}^+,\\ u(0)=u_0>0.\end{cases}$$

1. Soit le schéma numérique défini par la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suivante

$$\frac{u_{n+1}-u_n}{\Delta t}+\frac{u_{n+1}}{2\sqrt{u_n}}=0, \qquad \forall n\in\mathbb{N},$$

pour $\Delta t>0$ fixé. Expliciter l'expression de u_{n+1} en fonction de u_n.

2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite positive, décroissante et convergente vers 0.
3. Ce schéma est-il inconditionnellement A-stable ?

CORRECTION.

C'est un problème de CAUCHY du type

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)), & \forall t \in \mathbb{R}, \\ u(0) = u_0 > 0, \end{cases}$$

avec $f(t, u(t)) = g(u(t)) = -\frac{\sqrt{u(t)}}{2}$.

1. Pour $\Delta t > 0$ fixé on obtient une formule de récurrence rendue explicite par un calcul élémentaire :

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + \frac{\Delta t}{2\sqrt{u_n}}} = \frac{2(u_n)^{3/2}}{2\sqrt{u_n} + \Delta t}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

2. On étudie la suite

$$\begin{cases} u_0 > 0, \\ u_{n+1} = \frac{2(u_n)^{3/2}}{2\sqrt{u_n}+\Delta t}, & \forall n \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

pour $\Delta t > 0$ fixé.

Par récurrence on montre que si $u_0 > 0$ alors $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. De plus, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{1+\frac{\Delta t}{2\sqrt{u_n}}} < 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$: la suite est monotone décroissante. On a alors une suite décroissante et bornée par zéro, donc elle converge. Soit ℓ la limite de cette suite, alors $\ell \geq 0$ et $\ell = \frac{2\ell^{3/2}}{2\sqrt{\ell}+\Delta t}$ donc $\ell = 0$.

3. Ce schéma est donc inconditionnellement A-stable.