M33 - L2 - Examen - Janvier 2012

- ▷ Ce sujet comporte 5 exercices indépendants.
- ▷ **Documents et calculatrices autorisés.**
- ► *On attachera le plus grand soin à la rédaction et à la présentation claire et lisible des résultats dont il sera tenu compte lors de la correction. Aucun raisonnement vague ou insuffisant ne sera pris en compte.* ***Une grande valeur sera attribuée à la rigueur des raisonnements.***
- ► Si une question pose problème, admettre le résultat et passer à la suivante.
- ► ***Le texte est long, mais il n'est pas nécessaire de tout faire pour obtenir la note maximale.*** *(Le barème est donné à titre indicatif et est susceptible de varier.)*

Exercice 1 *Recherche de zéro d'une fonction non-linéaire (6 pts)*

L'objectif de cet exercice est de déterminer le zéro d'une fonction $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ vérifiant $1 < f'(x) < 2$ sur $\mathbb{R}$. On définit la suite $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}$ par la récurrence suivante

$$x_{n+1} = g(x_n),$$

où $\alpha > 0$ et $x_0 \in \mathbb{R}$ sont donnés et la fonction $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est définie par $g(x) = x - \alpha f(x)$.

1. Montrer que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et en déduire qu'il existe un unique $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $f(\ell) = 0$.
2. Montrer que si $0 < \alpha < 1$, la fonction g vérifie $|g'(x)| < 1$ sur $\mathbb{R}$. En déduire la convergence de la suite $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ pour tout $\alpha \in]0;1[$ quel que soit $x_0 \in \mathbb{R}$.
3. Donner l'ordre de convergence de la suite $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de $\alpha \in]0;1[$.
4. Comme d'un point de vue pratique on ne peut pas choisir $\alpha = \frac{1}{f'(\ell)}$, on va l'approcher par $\alpha_n = \frac{1}{f'(x_n)}$ et on obtient la suite $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ définie par
$$x_{n+1} = x_n - \alpha_n f(x_n).$$
Quel est le nom de cette méthode itérative ? Montrer que la suite $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge quel que soit $x_0 \in \mathbb{R}$.

CORRECTION.

1. Puisque f est de classe $\mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $f'(x) > 0$ sur $\mathbb{R}$ alors f est monotone croissante. De plus, $f'(x) > 1$ sur $\mathbb{R}$ donc
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$
NB : seul la condition $f'(x) > 1$ permet de conclure car une fonction peut être monotone croissante mais avoir une limite finie ! En effet, la condition $f'(x) > 1$ garantie que la fonction croit plus vite qu'une droite comme on peut facilement vérifier :
$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} \overset{[H]}{=} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f'(x)}{1} \geq 1.$$
Puisque $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty < 0$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty > 0$, pour le théorème des valeurs intermédiaires il existe au moins un $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $f(\ell) = 0$. Puisque $f'(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, ce ℓ est unique.
2. g est de classe $\mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Puisque $1 < f'(x) < 2$ et $0 < \alpha < 1$ on a
$$-1 < 1 - 2\alpha < g'(x) = 1 - \alpha f'(x) < 1 - \alpha < 1$$
Autrement dit
$$|g'(x)| < 1 \qquad \text{sur } \mathbb{R}.$$
On étudie alors la suite
$$x_{n+1} = g(x_n)$$
et on va vérifier qu'il s'agit d'une méthode de point fixe pour le calcul du zéro ℓ de f.
   - 2.1. On vérifie d'abord que, si la suite converge vers un point fixe de g, ce point est bien un zéro de f (ici le réciproque est vrai aussi) : soit $\ell \in \mathbb{R}$, alors
$$\ell = g(\ell) \iff \ell = \ell - \alpha f(\ell) \iff 0 = \alpha f(\ell) \overset{\alpha\neq 0}{\iff} f(\ell) = 0;$$
   - 2.2. vérifions maintenant que la suite converge vers un point fixe de g (et donc, grâce à ce qu'on a vu au point précédant, elle converge vers l'unique zéro de f) : $g \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et pour tout x dans $\mathbb{R}$ on a prouvé que $|g'(x)| < 1$, *i.e.* g est contractante, alors la suite $x_{n+1} = g(x_n)$ converge vers ℓ point fixe de g et zéro de f.

3. Étant donné que
$$g'(\ell) = 1 - \alpha f'(\ell)$$
avec $0 < f'(\ell) < 2$ et $0 < \alpha < 1$, on peut conclure que
   - ⋆ la méthode de point fixe converge à l'ordre 2 si $\alpha = \frac{1}{f'(\ell)}$,
   - ⋆ la méthode de point fixe converge à l'ordre 1 si $\alpha \neq \frac{1}{f'(\ell)}$.
4. D'un point de vue pratique on ne peut pas choisir $\alpha = \frac{1}{f'(\ell)}$ car on ne connaît pas ℓ. Si on choisit d'approcher $\alpha = \frac{1}{f'(\ell)}$ par $\alpha_n = \frac{1}{f'(x_n)}$ et on considère la suite $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ définie par
$$x_{n+1} = x_n - \alpha_n f(x_n),$$
on obtient la méthode de NEWTON (qui est d'ordre 2).
De plus, comme $1 < f'(x) < 2$ alors $0 < \alpha_n < 1$ donc la suite $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge quel que soit $x_0 \in \mathbb{R}$.

Exercice 2 *Interpolation et quadratures (5 pts)*

Soit f une fonction $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On se donne les points $\{x_i\}_{i=0}^{i=n}$ de subdivision uniforme de l'intervalle $[a;b]$ définis par $x_i = a + ih$ avec $h = \frac{b-a}{n}$. Le but de l'exercice est de trouver une formule de quadrature composite pour approcher l'intégrale
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

1. Soit p le polynôme de Lagrange qui interpole f aux points -1 et 1. Écrire le polynôme p, en déduire une formule de quadrature basée sur l'approximation
$$\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x \approx \int_{-1}^{1} p(x)\,\mathrm{d}x$$
et étudier le degré d'exactitude de cette formule de quadrature.
2. À l'aide d'un changement de variable affine, en déduire une formule de quadrature pour l'intégrale
$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,\mathrm{d}x.$$
3. En utilisant le résultat au point précédent, proposer une formule de quadrature composite pour le calcul approché de l'intégrale
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$
Quelle méthode de quadrature reconnait-on ?

CORRECTION.

1. On a deux points, donc le polynôme interpolateur de Lagrange est un polynôme de $\mathbb{R}_1[x]$. On cherche alors les coefficients α et β du polynôme $p(x) = \alpha + \beta x$ tels que
$$\begin{cases} f(-1) = p(-1) = \alpha - \beta, & \text{(1a)} \\ f(1) = p(1) = \alpha + \beta. & \text{(1b)} \end{cases}$$
La somme des équations (1b)+(1a) donne $\alpha = \frac{f(1)+f(-1)}{2}$ et la soustraction des équations (1b)−(1a) donne $\beta = \frac{f(1)-f(-1)}{2}$. On en déduit la méthode de quadrature
$$\int_{-1}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t \approx \int_{-1}^{1} p(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} \alpha + \beta t\,\mathrm{d}t = 2\alpha = f(-1) + f(1).$$
Par construction, cette formule de quadrature a degré d'exactitude au moins 1. Soit $f(x) = x^2$, alors $\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = 2/3$ tandis que $f(-1) + f(1) = 2$: la formule est exacte pour les polynômes de degré au plus 1.
2. Soit $x = mt + q$, alors
$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,\mathrm{d}x = m\int_{-1}^{1} f(mt+q)\,\mathrm{d}t \quad \text{avec} \quad \begin{cases} x_i = -m + q, \\ x_{i+1} = m + q, \end{cases}$$
d'où le changement de variable $x = x_i + (t+1)\frac{x_{i+1}-x_i}{2}$. On déduit la formule de quadrature (exacte sur l'espace des polynôme de degré au plus 1)
$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{x_{i+1}-x_i}{2}\int_{-1}^{1} f\left(x_i + (t+1)\frac{x_{i+1}-x_i}{2}\right)\mathrm{d}t \approx \frac{x_{i+1}-x_i}{2}\left[f(x_i) + f(x_{i+1})\right].$$

3. On subdivise l'intervalle $[a;b]$ en n intervalles $[x_i;x_{i+1}]$ de largeur $h=\frac{b-a}{n}=\frac{x_{i+1}-x_i}{2}$ pour $i=0,\dots,n$. On trouve ainsi la formule de quadrature composite

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,\mathrm{d}x\approx\sum_{i=0}^{n-1}\frac{x_{i+1}-x_i}{2}\left[f(x_i)+f(x_{i+1})\right]=\frac{h}{2}\sum_{i=0}^{n-1}\left[f(x_i)+f(x_{i+1})\right]$$
$$=\frac{h}{2}\left[f(a)+f(b)+2\sum_{i=1}^{n-1}f(x_i)\right]=\frac{h}{2}\left[f(a)+f(b)+2\sum_{i=1}^{n-1}f(a+ih)\right].$$

Il s'agit de la méthode des trapèzes composite.

Exercice 3 *EDO (4.5 pts)*

Soit $\beta>0$ un nombre réel positif et considérons le problème de CAUCHY

$$\begin{cases} y'(t)=-\beta y(t), & \text{pour } t>0,\\ y(0)=y_0, \end{cases} \tag{2}$$

où y_0 est une valeur donnée. Soit $h>0$ un pas de temps donné, $t_i=ih$ pour $i\in\mathbb{N}$ et y_i une approximation de $y(t_i)$. Écrire le schéma du trapèze (appelé aussi de CRANCK-NICHOLSON) permettant de calculer y_{i+1} à partir de y_i. Sous quelle condition sur h le schéma du trapèze est-il A-stable ? Autrement dit, pour quelles valeurs de h la relation $\lim_{i\to+\infty} y_i=0$ a-t-elle lieu ?

CORRECTION. Le problème (2) est un problème du type

trouver $y\colon I\subset\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ tel que

$$\begin{cases} y'(t)=f(t,y(t)), & \forall t\in I,\\ y(t_0)=y_0. \end{cases}$$

Le principe des méthodes d'approximation est de subdiviser l'intervalle I en sous-intervalles de longueur h et, pour chaque nœud $t_i=t_0+ih$ ($i\in\mathbb{N}$), on cherche la valeur inconnue y_i qui approche $y(t_i)$. L'ensemble de valeurs $\{y_0,y_1,\dots\}$ représente la solution numérique. Les schémas numériques permettent de calculer y_{i+1} à partir de y_i et il est donc possible de calculer successivement y_1, y_2,... en partant de y_0.

1. Si nous intégrons l'EDO $y'(t)=f(t,y(t))$ entre t_i et t_{i+1} nous obtenons

$$y(t_{i+1})-y(t_i)=\int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t,y(t))\,\mathrm{d}t.$$

Soit y_i une approximation de $y(t_i)$ et y_{i+1} une approximation de $y(t_{i+1})$. Si on utilise la formule du trapèze, *i.e.*

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t,y(t))\,\mathrm{d}t\approx\frac{h}{2}\big(f(t_i,y(t_i))+f(t_{i+1},y(t_{i+1}))\big)$$

on obtient le *schéma du trapèze ou de* CRANCK-NICHOLSON

$$\begin{cases} y_0=y(t_0),\\ y_{i+1}-\frac{h}{2}f(t_{i+1},y_{i+1})=y_i+\frac{h}{2}f(t_i,y_i), & \text{pour } i=0,1,2,\dots \end{cases}$$

Il s'agit d'un schéma implicite car il ne permet pas d'écrire directement y_{i+1} en fonction de y_i lorsque la fonction f n'est pas triviale. En appliquant le schéma du trapèze au problème (2) on obtient la suite définie par récurrence suivante

$$\begin{cases} y_0=y(t_0),\\ \left(1+\frac{h}{2}\beta\right)y_{i+1}=\left(1-\frac{h}{2}\beta\right)y_i. \end{cases}$$

Par induction on obtient

$$y_i=\left(\frac{2-\beta h}{2+\beta h}\right)^i y_0.$$

Par conséquent, $\lim_{i\to+\infty} y_i=0$ si et seulement si

$$\left|\frac{2-\beta h}{2+\beta h}\right|<1.$$

Notons x le produit $\beta h>0$ et q la fonction $q(x)=\frac{2-x}{2+x}=1-2\frac{x}{2+x}$. Nous avons $0<\frac{x}{2+x}<1$ pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$, donc $|q(x)|<1$ pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$. La relation $\lim_{i\to+\infty} y_i=0$ est donc satisfaite pour tout $h>0$.

2. Pour éviter le calcul implicite de y_{i+1} dans le schéma du trapèze, nous pouvons utiliser une prédiction d'EULER progressive et remplacer le y_{i+1} dans le terme $f(t_{i+1}, y_{i+1})$ par $\tilde{y}_{i+1} = y_i + hf(t_i, y_i)$. Nous avons construit ainsi le *schéma de* HEUN. Plus précisément, cette méthode s'écrit

$$\begin{cases} y_0 = y(t_0), \\ y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\left(f(t_i, y_i) + f\left(t_{i+1}, y_i + hf(t_i, y_i)\right)\right), \quad \text{pour } i = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

En appliquant le schéma de HEUN au problème (2) on obtient la suite définie par récurrence suivante

$$\begin{cases} y_0 = y(t_0), \\ y_{i+1} = \left(1 - \beta h + \frac{(\beta h)^2}{2}\right) y_i. \end{cases}$$

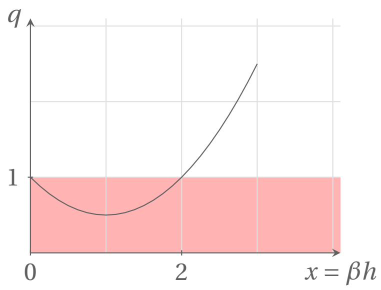
Par induction on obtient

$$y_i = \left(1 - \beta h + \frac{(\beta h)^2}{2}\right)^i y_0.$$

Par conséquent, $\lim\limits_{i\to+\infty} y_i = 0$ si et seulement si

$$\left|1 - \beta h + \beta^2 \frac{(h)^2}{2}\right| < 1.$$

Notons x le produit βh et q le polynôme $q(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + 1$ dont le graphe est représenté en figure.



Nous avons $|q(x)| < 1$ si et seulement si $0 < x < 2$. La relation $\lim\limits_{i\to+\infty} y_i = 0$ est donc satisfaite si et seulement si

$$h < \frac{2}{\beta}.$$

Exercice 4 *Courbe de meilleure approximation (4 pts)*

On considère un ensemble de points expérimentaux $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^n$ et on suppose que les deux grandeurs x et y sont liées, au moins approximativement, par une relation de la forme $y = a\sin(\frac{\pi}{2}x) + b\cos(\frac{\pi}{2}x)$. On souhaite alors trouver les constantes a et b pour que la courbe d'équation $y = a\sin(\frac{\pi}{2}x) + b\cos(\frac{\pi}{2}x)$ s'ajuste le mieux possible aux points observés (on parle de *courbe de meilleure approximation*).

Soit $d_i = y_i - (a\sin(\frac{\pi}{2}x_i) + b\cos(\frac{\pi}{2}x_i))$ l'écart vertical du point (x_i, y_i) par rapport à la courbe. La méthode de régression (ou des moindres carrés) est celle qui choisit a et b de sorte que la somme des carrés de ces déviations soit minimale. Pour cela, on doit minimiser la fonction $\mathscr{E}$ définie par

$$\begin{aligned} \mathscr{E}\colon \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}_+ \\ (a, b) &\mapsto \mathscr{E}(a, b) = \sum_{i=0}^n d_i^2. \end{aligned}$$

Écrire le système linéaire qui permet de calculer a et b.

CORRECTION. Pour minimiser $\mathscr{E}$ on cherche ses points stationnaires. Puisque

$$\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial a}(a, b) = -2\left(\sum_{i=0}^n \left(y_i - \left(a\sin\left(\frac{\pi}{2}x_i\right) + b\cos\left(\frac{\pi}{2}x_i\right)\right)\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}x_i\right)\right),$$

$$\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial b}(a, b) = -2\left(\sum_{i=0}^n \left(y_i - \left(a\sin\left(\frac{\pi}{2}x_i\right) + b\cos\left(\frac{\pi}{2}x_i\right)\right)\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}x_i\right)\right),$$

on obtient

$$
\begin{cases}\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial a}(a,b)=0\\ \frac{\partial \mathscr{E}}{\partial b}(a,b)=0\end{cases}
\iff \begin{cases}\sum_{i=0}^n \left(y_i-\left(a\sin\left(\frac{\pi}{2}x_i\right)+b\cos\left(\frac{\pi}{2}x_i\right)\right)\right)\sin(\frac{\pi}{2}x_i)=0\\ \sum_{i=0}^n \left(y_i-\left(a\sin\left(\frac{\pi}{2}x_i\right)+b\cos\left(\frac{\pi}{2}x_i\right)\right)\right)\cos(\frac{\pi}{2}x_i)=0\end{cases}
$$

$$
\iff \begin{cases}\sum_{i=0}^n \left(\left(a\sin\left(\frac{\pi}{2}x_i\right)+b\cos\left(\frac{\pi}{2}x_i\right)\right)\right)\sin(\frac{\pi}{2}x_i)=\sum_{i=0}^n y_i\sin(\frac{\pi}{2}x_i)\\ \sum_{i=0}^n \left(\left(a\sin\left(\frac{\pi}{2}x_i\right)+b\cos\left(\frac{\pi}{2}x_i\right)\right)\right)\cos(\frac{\pi}{2}x_i)=\sum_{i=0}^n y_i\cos(\frac{\pi}{2}x_i)\end{cases}
$$

$$
\iff \begin{bmatrix}\sum_{i=0}^n \sin^2\left(\frac{\pi}{2}x_i\right) & \sum_{i=0}^n \sin\left(\frac{\pi}{2}x_i\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}x_i\right)\\ \sum_{i=0}^n \sin\left(\frac{\pi}{2}x_i\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}x_i\right) & \sum_{i=0}^n \cos^2\left(\frac{\pi}{2}x_i\right)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sum_{i=0}^n y_i\sin\left(\frac{\pi}{2}x_i\right)\\ \sum_{i=0}^n y_i\cos\left(\frac{\pi}{2}x_i\right)\end{bmatrix}.
$$

Si on note

$$
U=\sum_{i=0}^n \sin^2\left(\tfrac{\pi}{2}x_i\right),\qquad V=\sum_{i=0}^n \sin\left(\tfrac{\pi}{2}x_i\right)\cos\left(\tfrac{\pi}{2}x_i\right),\qquad W=\sum_{i=0}^n \cos^2\left(\tfrac{\pi}{2}x_i\right),\qquad P=\sum_{i=0}^n y_i\sin\left(\tfrac{\pi}{2}x_i\right),\qquad Q=\sum_{i=0}^n y_i\cos\left(\tfrac{\pi}{2}x_i\right),
$$

on doit résoudre le système linéaire

$$
\begin{pmatrix}U & V\\ V & W\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}P\\ Q\end{pmatrix}
$$

dont la solution est

$$
a=\frac{WP-VQ}{UW-V^2},\qquad\qquad b=\frac{UQ-VP}{UW-V^2}.
$$

Exercice 5 *Systèmes linéaires (6 pts)*

On considère la matrice tridiagonale inversible $\mathbb{A}\in\mathbb{R}^{n\times n}$

$$
\mathbb{A}=\begin{pmatrix}
a_1 & c_1 & 0 & \dots & \dots & 0\\
b_2 & a_2 & c_2 & \ddots & & \vdots\\
0 & b_3 & a_3 & \ddots & \ddots & \vdots\\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0\\
\vdots & & \ddots & b_{n-1} & a_{n-1} & c_{n-1}\\
0 & \dots & \dots & 0 & b_n & a_n
\end{pmatrix}
$$

1. Montrer que les matrices $\mathbb{L}$ et $\mathbb{U}$ de la factorisation $\mathbb{LU}$ de $\mathbb{A}$ sont bidiagonales, *i.e.* si $a_{ij}=0$ pour $|i-j|>1$ alors $\ell_{ij}=0$ pour $i>1+j$ (et pour $i<j$ car triangulaire inférieure) et $u_{ij}=0$ pour $i<j-1$ (et pour $i>j$ car triangulaire supérieure).
   Soit $\mathbb{A}^{(k)}$, $k=0,\dots,n-1$ la matrice obtenue à l'étape k de la méthode de Gauss, avec $\mathbb{A}^{(0)}=\mathbb{A}$ et $\mathbb{A}^{(n-1)}=\mathbb{U}$. On montrera par récurrence sur k que $\mathbb{A}^{(k)}$ est tridiagonale pour tout $k=0,\dots,n-1$, *i.e.* $a_{ij}^{(k)}=0$ pour $|i-j|>1$.

   Initialisation : pour $k=0$, $\mathbb{A}^{(0)}=\mathbb{A}$ est une matrice tridiagonale.

   Hérédité : soit $\mathbb{A}^{(k)}$ une matrice tridiagonale (*i.e.* $a_{ij}^{(k)}=0$ pour $|i-j|>1$) et montrons que $\mathbb{A}^{(k+1)}$ l'est aussi.
   - ⋆ Si $i\le k$, que valent-ils les coefficients $a_{ij}^{(k+1)}$?
   - ⋆ Si $i>k$ alors on va considérer séparément les cas suivants :
     - ⋆ si $j\le k$, que valent-ils les coefficients $a_{ij}^{(k+1)}$?
     - ⋆ si $j>k$ et $j<i-1$, que valent-ils les coefficients $a_{ik}^{(k)}$ et $\ell_{ik}^{(k)}$? Que peut-on déduire sur les coefficients $a_{ij}^{(k+1)}$?
     - ⋆ si $j>k$ et $j>i+1$, que valent-ils les coefficients $a_{kj}^{(k)}$ et $\ell_{ik}^{(k)}$? Que peut-on déduire sur les coefficients $a_{ij}^{(k+1)}$?

   NB : Justifier succinctement chaque réponse !

2. On a montré au point précédent que les matrices $\mathbb{L}$ et $\mathbb{U}$ de la factorisation $\mathbb{LU}$ de $\mathbb{A}$ sont bidiagonales, écrivons-les sous la forme

$$
\mathbb{L}=\begin{pmatrix}
1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0\\
\beta_2 & 1 & \ddots & & & \vdots\\
0 & \beta_3 & 1 & \ddots & & \vdots\\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\
\vdots & & \ddots & \beta_{n-1} & 1 & 0\\
0 & \dots & \dots & 0 & \beta_n & 1
\end{pmatrix},\qquad
\mathbb{U}=\begin{pmatrix}
\alpha_1 & \gamma_1 & 0 & \dots & \dots & 0\\
0 & \alpha_2 & \gamma_2 & \ddots & & \vdots\\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\
\vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0\\
\vdots & & & \ddots & \alpha_{n-1} & \gamma_{n-1}\\
0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \alpha_n
\end{pmatrix}.
$$

Calculer $(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)$, $(\beta_2,\beta_3,\dots,\beta_n)$ et $(\gamma_1,\gamma_2,\dots,\gamma_{n-1})$ en fonction de $(a_1,a_2,\dots,a_n)$, $(b_2,b_3,\dots,b_n)$ et $(c_1,c_2,\dots,c_{n-1})$. En déduire un algorithme de factorisation.

3. À l'aide des formules trouvées au point précédent, écrire l'algorithme pour résoudre le système linéaire $\mathbb{A}\mathbf{x}=\mathbf{f}$ où $\mathbf{f}=(f_1,f_2,\dots,f_n)^T\in\mathbb{R}^n$.

Correction.

1. Soit $\mathbb{A}^{(k)}$, $k=0,\dots,n-1$ la matrice obtenue à l'étape k de la méthode de Gauss, avec $\mathbb{A}^{(0)}=\mathbb{A}$ et $\mathbb{A}^{(n-1)}=\mathbb{U}$. On montrera par récurrence sur k que $\mathbb{A}^{(k)}$ est tridiagonale, *i.e.* $a_{ij}^{(k)}=0$ pour $|i-j|>1$.

   Initialisation : pour $k=0$, $\mathbb{A}^{(0)}=\mathbb{A}$ qui est une matrice tridiagonale.

   Hérédité : soit $\mathbb{A}^{(k)}$ une matrice tridiagonale (*i.e.* $a_{ij}^{(k)}=0$ pour $|i-j|>1$) et montrons que $\mathbb{A}^{(k+1)}$ l'est aussi.

   ⋆ Si $i\le k$ alors $a_{ij}^{(k+1)}=a_{ij}^{(k)}=0$ (les lignes $L_1,\dots,L_k$ de la matrice $\mathbb{A}^{(k)}$ ne sont pas modifiées à l'étape k).

   ⋆ Soit $i>k$, alors les lignes $L_{k+1},\dots,L_n$ de la matrice $\mathbb{A}^{(k)}$ vont être modifiées selon la relation)

$$a_{ij}^{(k+1)}=a_{ij}^{(k)}-\frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}a_{kj}^{(k)}.$$

   Pour chaque ligne $i>k$, considérons séparément les colonnes $j\le k$ et les colonnes $j>k$:

   ⋆ si $j\le k$, $a_{ij}^{(k+1)}=0$ (zéros qu'on fait apparaitre avec la méthode de Gauss pour une matrice quelconque),

   ⋆ soit $j>k$:

      ⋆ si $j<i-1$, comme $i,j>k$ alors $a_{ij}^{(k)}=0$ et $i>j+1>k+1$, c'est-à-dire $i-k>1$ et donc $a_{ik}^{(k)}=0$ et $\ell_{ik}^{(k)}=0$. Donc $a_{ij}^{(k+1)}=0$.

      ⋆ si $j>i+1$, comme $i,j>k$ alors $a_{ij}^{(k)}=0$ et $j>i+1>k+1$, c'est-à-dire $j-k>1$ et donc $a_{kj}^{(k)}=0$. Donc $a_{ij}^{(k+1)}=0$.

2. Les coefficients $(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)$, $(\beta_2,\beta_3,\dots,\beta_n)$ et $(\gamma_1,\gamma_2,\dots,\gamma_{n-1})$ se calculent en imposant l'égalité $\mathbb{L}\mathbb{U}=\mathbb{A}$. L'algorithme se déduit en parcourant les étapes de la méthode de Gauss :

$$\mathbb{A}^{(0)}=\begin{pmatrix} a_1 & c_1 & 0 & \dots & \dots & 0\\ b_2 & a_2 & c_2 & \ddots & & \vdots\\ 0 & b_3 & a_3 & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0\\ \vdots & & \ddots & b_{n-1} & a_{n-1} & c_{n-1}\\ 0 & \dots & \dots & 0 & b_n & a_n \end{pmatrix} \xrightarrow[\beta_2=\frac{b_2}{a_1}]{L_2\leftarrow L_2-\beta_2 L_1} \mathbb{A}^{(1)}=\begin{pmatrix} \alpha_1=a_1 & \gamma_1=c_1 & 0 & \dots & \dots & 0\\ 0 & \alpha_2=a_2-\beta_2c_1 & \gamma_2=c_2 & \ddots & & \vdots\\ 0 & b_3 & a_3 & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0\\ \vdots & & \ddots & b_{n-1} & a_{n-1} & c_{n-1}\\ 0 & \dots & \dots & 0 & b_n & a_n \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\beta_3=\frac{b_3}{\alpha_2}]{L_3\leftarrow L_3-\beta_3 L_2} \mathbb{A}^{(2)}=\begin{pmatrix} \alpha_1=a_1 & \gamma_1=c_1 & 0 & \dots & \dots & 0\\ 0 & \alpha_2=a_2-\beta_2c_1 & \gamma_2=c_2 & \ddots & & \vdots\\ 0 & 0 & \alpha_3=a_3-\beta_3c_2 & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0\\ \vdots & & \ddots & b_{n-1} & a_{n-1} & c_{n-1}\\ 0 & \dots & \dots & 0 & b_n & a_n \end{pmatrix} \xrightarrow[\beta_4=\frac{b_4}{\alpha_3}]{L_4\leftarrow L_4-\beta_4 L_3} [\cdots]$$

$$[\cdots]\xrightarrow[\beta_n=\frac{b_n}{\alpha_n}]{L_n\leftarrow L_n-\beta_n L_{n-1}} \mathbb{A}^{(n-1)}=\begin{pmatrix} \alpha_1=a_1 & \gamma_1=c_1 & 0 & \dots & \dots & 0\\ 0 & \alpha_2=a_2-\beta_2c_1 & \gamma_2=c_2 & \ddots & & \vdots\\ 0 & 0 & \alpha_3=a_3-\beta_3c_2 & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0\\ \vdots & & \ddots & 0 & \alpha_{n-1}=a_{n-1}-\beta_{n-1}c_{n-2} & \gamma_{n-1}=c_{n-1}\\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \alpha_n=a_n-\beta_nc_{n-1} \end{pmatrix}$$

   Donc $\gamma_i=c_i$ pour $i=1,\dots,n$, $\alpha_1=a_1$ et on définie par récurrence

$$\begin{cases}\beta_i &=\frac{b_i}{\alpha_{i-1}}\\ \alpha_i &=a_i-\beta_ic_{i-1}\end{cases}\qquad \text{pour } i=2,\dots,n.$$

3. La résolution du système linéaire $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{f}$ se ramène à la résolution des deux systèmes linéaires $\mathbb{L}\mathbf{y} = \mathbf{f}$ et $\mathbb{U}\mathbf{x} = \mathbf{y}$, pour lesquels on obtient les formules suivantes :

$$\begin{cases} y_1 = f_1, \\ y_i = f_i - \beta_i y_{i-1}, \quad \text{pour } i = 2, \dots, n, \end{cases} \qquad \textit{i.e.} \qquad \begin{cases} y_1 = f_1, \\ y_i = f_i - \frac{b_i}{a_i - \beta_i c_{i-1}} y_{i-1}, \quad \text{pour } i = 2, \dots, n; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_n = \frac{y_n}{\alpha_n}, \\ x_i = \frac{y_i - \gamma_i x_{i+1}}{\alpha_i}, \quad \text{pour } i = n-1, \dots, 1, \end{cases} \qquad \textit{i.e.} \qquad \begin{cases} x_n = \frac{y_n}{\alpha_n}, \\ x_i = \frac{y_i - c_i x_{i+1}}{a_i - \beta_i c_{i-1}}, \quad \text{pour } i = n-1, \dots, 2, \\ x_1 = \frac{y_i - c_i x_2}{a_1}. \end{cases}$$