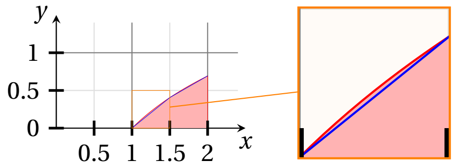
Exercice 1

On considère l'intégrale
$$I=\int_1^2 \ln(x)\,\mathrm{d}x.$$

1. Évaluer numériquement cette intégrale par la méthode des trapèzes composite avec $m=4$ sous-intervalles et comparer le résultat ainsi obtenu avec la valeur exacte. Pourquoi la valeur numérique est-elle inférieure à la valeur exacte ? Est-ce vrai quel que soit m ? (Justifier la réponse.)
2. Quel nombre de sous-intervalles m faut-il choisir pour avoir une erreur E_m inférieure à 10^{-2} ? On rappelle que, pour une fonction f de classe $\mathscr{C}^2$, l'erreur de quadrature E_m associée à la méthode des trapèzes composite avec une discrétisation uniforme de pas $h=(b-a)/m$ de l'intervalle $[a,b]$ en m sous-intervalles vérifie
$$|E_m|=\left|\frac{(b-a)}{12}h^2 f''(\xi)\right|, \qquad \xi\in]a;b[.$$

Correction.

1. La méthode des trapèzes composite à $m+1$ points (m sous-intervalles) pour calculer l'intégrale d'une fonction f sur l'intervalle $[a,b]$ s'écrit
$$\int_a^b f(t)\,dt \simeq h\left(\frac{1}{2}f(a)+\sum_{i=1}^{m-1} f(a+ih)+\frac{1}{2}f(b)\right) \qquad \text{avec } h=\frac{b-a}{m}.$$
Ici on a $f(x)=\ln(x)$, $a=1$, $b=2$, $m=4$ d'où $h=\frac{1}{4}$ et on obtient
$$I\simeq\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}f(1)+f\left(\frac{5}{4}\right)+f\left(\frac{3}{2}\right)+f\left(\frac{7}{4}\right)+\frac{1}{2}f(2)\right)=\frac{1}{4}\left(\ln\left(\frac{5}{4}\right)+\ln\left(\frac{3}{2}\right)+\ln\left(\frac{7}{4}\right)+\frac{1}{2}\ln(2)\right)\approx 0.3836995094.$$
Une primitive de $\ln(x)$ est $F(x)=x(\ln(x)-1)$. La valeur exacte est alors $I=[x(\ln(x)-1)]_{x=1}^{x=2}=2\ln(2)-1\approx 0.386294361$. La valeur numérique obtenue est inférieure à celle exacte quelque soit le pas h choisi car la fonction f est concave, ce qui signifie qu'une corde définie par deux points de la courbe $y=\ln(x)$ sera toujours en-dessous de la courbe, donc l'aire sous les trapèzes sera inférieure à l'aire exacte. Pour bien visualiser la construction considérons $m=2$:



2. L'erreur est majorée par
$$|E_m|\le\frac{(b-a)}{12}h^2\sup_{\xi\in]a;b[}|f''(\xi)|=\frac{(b-a)^3}{12m^2}\sup_{\xi\in]a;b[}|f''(\xi)|.$$
On a $f(x)=\ln(x)$, $f'(x)=1/x$ et $f''(x)=-1/x^2$, ainsi
$$|E_m|\le\frac{1}{12m^2}\max_{\xi\in]1;2[}\frac{1}{\xi^2}=\frac{1}{12m^2}.$$
Pour que $|E_m|<10^{-2}$ il suffit que $\frac{1}{12m^2}<10^{-2}$, *i.e.* $m>10/\sqrt{12}\approx 2.886$. À partir de 3 sous-intervalles, l'erreur de quadrature est inférieure à 10^{-2}.

Exercice 2

L'évolution de la concentration de certaines réactions chimiques au cours du temps peut être décrite par l'équation différentielle
$$y'(t)=-\frac{1}{1+t^2}y(t).$$
Sachant qu'à l'instant $t=0$ la concentration est $y(0)=5$, déterminer la concentration à $t=2$ à l'aide de la méthode d'**Euler implicite** avec un pas $h=0.5$.

CORRECTION. La méthode d'EULER implicite est une méthode d'intégration numérique d'EDO du premier ordre de la forme $y'(t) = F(t, y(t))$. C'est une méthode itérative : en choisissant un pas de discrétisation h, la valeur y à l'instant $t+h$ se déduit de la valeur de y à l'instant t par l'approximation linéaire

$$y(t+h) \approx y(t) + hy'(t+h) = y(t) + hF(t+h, y(t+h)).$$

On pose alors $t_k = t_0 + kh$, $k \in \mathbb{N}$. En résolvant l'équation non-linéaire

$$y_{k+1} = y_k + hF(t_{k+1}, y_{k+1}),$$

on obtient une suite $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ qui approche les valeurs de la fonction y en t_k. Dans notre cas, l'équation non-linéaire s'écrit

$$y_{k+1} = y_k - \frac{h}{1+t_{k+1}^2} y_{k+1}.$$

Elle peut être résolue algébriquement et cela donne la suite

$$y_{k+1} = \frac{y_k}{1 + \frac{h}{1+t_{k+1}^2}}.$$

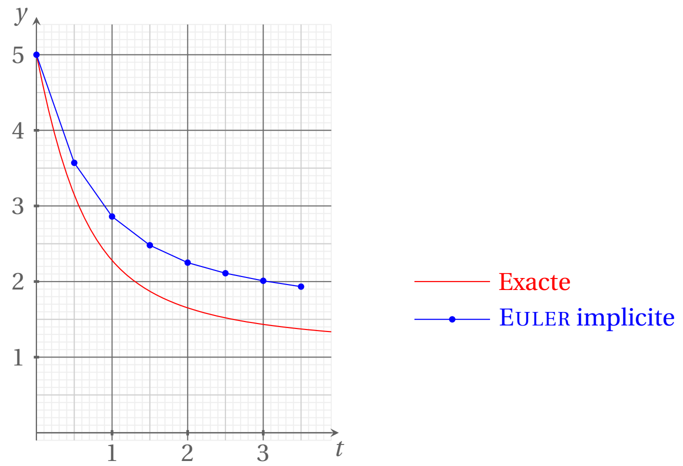
Si à l'instant $t = 0$ la concentration est $y(0) = 5$, et si $h = 1/2$, alors $t_k = k/2$ et

$$y_{k+1} = \frac{4+(k+1)^2}{6+(k+1)^2} y_k.$$

On obtient donc

k	t_k	y_k
0	0	5
1	0.5	$\frac{4+1^2}{6+1^2}5 = \frac{5}{7}5 = \frac{25}{7} \approx 3.57$
2	1.0	$\frac{4+2^2}{6+2^2}\frac{25}{7} = \frac{8}{10}\frac{25}{7} = \frac{20}{7} \approx 2.86$
3	1.5	$\frac{4+3^2}{6+3^2}\frac{20}{7} = \frac{13}{15}\frac{20}{7} = \frac{52}{21} \approx 2.48$
4	2.0	$\frac{4+4^2}{6+4^2}\frac{52}{21} = \frac{20}{22}\frac{52}{21} = \frac{520}{231} \approx 2.25$

La concentration à $t = 2$ est d'environ 2.25. Comparons avec le calcul exact : $y(2) = 5e^{-\arctan(2)} \approx 1.652499838$.



Exercice 3

Considérons une matrice $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (avec $n \geq 3$) dont les éléments vérifient

- $a_{ij} = 1$ si $i = j$ ou $j = n$,
- $a_{ij} = -1$ si $i > j$,
- $a_{ij} = 0$ sinon.

Calculer la factorisation $\mathbb{LU}$ de $\mathbb{A}$.

CORRECTION. Factorisation $\mathbb{LU}$ de la matrice $\mathbb{A}$:

$$
\begin{pmatrix}
1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1\\
-1 & 1 & \ddots & & \vdots & \vdots\\
\vdots & \ddots & 1 & \ddots & \vdots & \vdots\\
\vdots & & \ddots & \ddots & 0 & \vdots\\
\vdots & & & \ddots & 1 & 1\\
-1 & \dots & \dots & \dots & -1 & 1
\end{pmatrix}
\xrightarrow{\substack{L_2\leftarrow L_2+L_1\\ \vdots\\ L_n\leftarrow L_n+L_1}}
\begin{pmatrix}
1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1\\
0 & 1 & \ddots & & \vdots & 2\\
\vdots & -1 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots\\
\vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots\\
\vdots & \vdots & & \ddots & 1 & 2\\
0 & -1 & \dots & \dots & -1 & 2
\end{pmatrix}
\xrightarrow{\substack{L_3\leftarrow L_3+L_2\\ \vdots\\ L_n\leftarrow L_n+L_2}}
\begin{pmatrix}
1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1\\
0 & 1 & \ddots & & \vdots & 2\\
\vdots & 0 & 1 & \ddots & \vdots & 4\\
\vdots & \vdots & -1 & \ddots & 0 & \vdots\\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 & 4\\
0 & 0 & -1 & \dots & -1 & 4
\end{pmatrix}
$$

$$
[\dots]\xrightarrow{L_n\leftarrow L_n+L_{n-1}}
\begin{pmatrix}
1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 2^0\\
0 & 1 & \ddots & & \vdots & 2^1\\
\vdots & \ddots & 1 & \ddots & \vdots & 2^2\\
\vdots & & \ddots & \ddots & 0 & \vdots\\
\vdots & & & \ddots & 1 & 2^{n-2}\\
0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 2^{n-1}
\end{pmatrix}
$$

On obtient les matrices

$$
\mathbb{L}=
\begin{pmatrix}
1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0\\
-1 & 1 & \ddots & & & \vdots\\
\vdots & \ddots & 1 & \ddots & & \vdots\\
\vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\
\vdots & & & \ddots & 1 & 0\\
-1 & \dots & \dots & \dots & -1 & 1
\end{pmatrix}
\qquad \text{et} \qquad
\mathbb{U}=
\begin{pmatrix}
1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 2^0\\
0 & 1 & \ddots & & \vdots & 2^1\\
\vdots & \ddots & 1 & \ddots & \vdots & 2^2\\
\vdots & & \ddots & \ddots & 0 & \vdots\\
\vdots & & & \ddots & 1 & 2^{n-2}\\
0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 2^{n-1}
\end{pmatrix}.
$$

i.e.

- ⋆ $\ell_{ii}=1$ pour $i=1,\dots,n,$,
- ⋆ $\ell_{ij}=-1$ si $i>j$
- ⋆ $\ell_{ij}=0$ sinon ;

- ⋆ $u_{ii}=1$ pour $i=1,\dots,n-1$,
- ⋆ $u_{in}=2^{i-1}$ pour $i=1,\dots,n$,
- ⋆ $u_{ij}=0$ sinon.

Exercice 4

La méthode de régression s'étend facilement à des données qui dépendent de deux ou plusieurs variables. On considère un ensemble de points expérimentaux $\{(x_i,y_i,z_i)\}_{i=0}^{n}$ et on suppose que les trois grandeurs x, y et z sont liées, au moins approximativement, par une relation affine de la forme $z=a+bx+cy$. On souhaite alors trouver les constantes a, b et c pour que le plan d'équation $z=a+bx+cy$ s'ajuste le mieux possible aux points observés (on parle de *plan de meilleure approximation*).

Soit $d_i=z_i-(a+bx_i+cy_i)$ l'écart vertical du point (x_i,y_i,z_i) par rapport au plan. La méthode de régression (ou des moindres carrés) est celle qui choisit a, b et c de sorte que la somme des carrés de ces déviations soit minimale. Pour cela, on doit minimiser la fonction $\mathscr{E}$ définie par

$$
\begin{aligned}
\mathscr{E}\colon \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}_+\\
(a,b,c) &\mapsto \mathscr{E}(a,b,c)=\sum_{i=0}^{n} d_i^2.
\end{aligned}
$$

1. Écrire le système linéaire qui permet de calculer a, b et c
2. Calculer l'équation du plan de meilleure approximation pour l'ensemble $\{(x_i,y_i,z_i)\}_{i=0}^{5}$ où

i	0	1	2	3	4	5
x_i	0	0	1	2	2	2
y_i	0	1	0	0	1	2
z_i	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1

   On utilisera la méthode du pivot de GAUSS pour la résolution du système linéaire.

CORRECTION.

1. Pour minimiser $\mathscr{E}$ on cherche ses points stationnaires. Puisque

$$\frac{\partial\mathscr{E}}{\partial a}(a,b,c) = -2\left(\sum_{i=0}^{n}(z_i-(a+bx_i+cy_i))\right),$$
$$\frac{\partial\mathscr{E}}{\partial b}(a,b,c) = -2\left(\sum_{i=0}^{n}(z_i-(a+bx_i+cy_i))x_i\right),$$
$$\frac{\partial\mathscr{E}}{\partial c}(a,b,c) = -2\left(\sum_{i=0}^{n}(z_i-(a+bx_i+cy_i))y_i\right),$$

on obtient

$$\begin{cases}\frac{\partial\mathscr{E}}{\partial a}(a,b,c)=0\\ \frac{\partial\mathscr{E}}{\partial b}(a,b,c)=0\\ \frac{\partial\mathscr{E}}{\partial c}(a,b,c)=0\end{cases} \iff \begin{cases}\sum_{i=0}^{n}(z_i-(a+bx_i+cy_i))=0\\ \sum_{i=0}^{n}(z_i-(a+bx_i+cy_i))x_i=0\\ \sum_{i=0}^{n}(z_i-(a+bx_i+cy_i))y_i=0\end{cases} \iff \begin{cases}\sum_{i=0}^{n}(a+bx_i+cy_i)=\sum_{i=0}^{n}z_i\\ \sum_{i=0}^{n}(ax_i+bx_i^2+cy_ix_i)=\sum_{i=0}^{n}z_ix_i\\ \sum_{i=0}^{n}(ay_i+bx_iy_i+cy_i^2)=\sum_{i=0}^{n}z_iy_i\end{cases}$$
$$\iff \begin{pmatrix}(n+1) & \sum_{i=0}^{n}x_i & \sum_{i=0}^{n}y_i\\ \sum_{i=0}^{n}x_i & \sum_{i=0}^{n}x_i^2 & \sum_{i=0}^{n}x_iy_i\\ \sum_{i=0}^{n}y_i & \sum_{i=0}^{n}x_iy_i & \sum_{i=0}^{n}y_i^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sum_{i=0}^{n}z_i\\ \sum_{i=0}^{n}z_ix_i\\ \sum_{i=0}^{n}z_iy_i\end{pmatrix}.$$

2. Dans notre cas,

$$\sum_{i=0}^{n}x_i=7 \qquad \sum_{i=0}^{n}y_i=4 \qquad \sum_{i=0}^{n}z_i=\frac{11}{2}$$
$$\sum_{i=0}^{n}x_iy_i=6 \qquad \sum_{i=0}^{n}x_iz_i=\frac{7}{2} \qquad \sum_{i=0}^{n}y_iz_i=\frac{9}{2}$$
$$n+1=6 \qquad \sum_{i=0}^{n}x_i^2=13 \qquad \sum_{i=0}^{n}y_i^2=6$$

donc on a le système linéaire

$$\begin{pmatrix}6&7&4\\7&13&6\\4&6&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11/2\\7/2\\9/2\end{pmatrix}$$

qu'on peut résoudre par la méthode de GAUSS

$$\left(\begin{array}{ccc|c}6&7&4&11/2\\7&13&6&7/2\\4&6&6&9/2\end{array}\right)\xrightarrow[L_3\leftarrow L_3-\frac{2}{3}L_1]{L_2\leftarrow L_2-\frac{7}{6}L_1}\left(\begin{array}{ccc|c}6&7&4&11/2\\0&29/6&4/3&-35/12\\0&4/3&10/3&5/6\end{array}\right)\xrightarrow{L_3\leftarrow L_3-\frac{8}{29}L_2}\left(\begin{array}{ccc|c}6&7&4&11/2\\0&29/6&4/3&-35/12\\0&0&86/29&95/58\end{array}\right)$$

dont la solution est

$$\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}123/86\\-65/86\\95/172\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}1.430232557\\-0.7558139503\\0.5523255766\end{pmatrix}.$$