Exercice 1

Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ et $x_0 \in \mathscr{D}_f$. Soit ℓ le polynôme d'interpolation de LAGRANGE de f en x_0 et h le polynôme d'interpolation d'HERMITE en x_0. Calculer $h(x) - \ell(x)$.

CORRECTION. Le polynôme d'interpolation de LAGRANGE de f en x_0 est l'unique polynôme $\ell \in \mathbb{R}_0[x]$ qui vérifie $\ell(x_0) = f(x_0)$, donc $\ell(x) = f(x_0)$. Le polynôme d'interpolation d'HERMITE de f en x_0 est l'unique polynôme $h \in \mathbb{R}_1[x]$ qui vérifie $h(x_0) = f(x_0)$ et $h'(x_0) = f'(x_0)$. On cherche alors a_0 et a_1 tels que $h(x) = a_0 + a_1 x$:

$$\begin{cases} h(x_0) = f(x_0), \\ h'(x_0) = f'(x_0), \end{cases} \iff \begin{cases} a_0 + a_1 x_0 = f(x_0), \\ a_1 = f'(x_0), \end{cases} \iff \begin{cases} a_0 = f(x_0) - x_0 f'(x_0), \\ a_1 = f'(x_0), \end{cases}$$

donc $h(x) = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0)$ et $h(x) - \ell(x) = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0) - f(x_0) = (x - x_0) f'(x_0)$.

Exercice 2

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$ qui s'annule au moins une fois et dont la dérivée ne s'annule pas. Soit $x_0 \in \mathscr{D}_f$ donné. Pour $i \in \mathbb{N}$ construisons la suite $(x_i)_i$ comme suit : x_{i+1} est la racine du polynôme interpolateur d'HERMITE de f en x_i. Quelle méthode reconnait-on ? Justifier la réponse.

CORRECTION. Le polynôme d'HERMITE d'une fonction f en x_i a équation $q(x) = f(x_i) + (x - x_i) f'(x_i)$: il s'agit de la droite tangente au graphe de f en x_i. On cherche x_{i+1} tel que $f(x_i) + (x - x_i) f'(x_i) = 0$, d'où $x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$. On a alors la suite définie par récurrence

$$\begin{cases} x_0 \text{ donnée}, \\ x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}, \end{cases}$$

qui correspond à la méthode de NEWTON pour l'approximation de la racine de f.

Exercice 3

On considère le problème du calcul de $\ell \in [0, \pi]$ tel que $\ell = 1 - \frac{1}{4}\cos(\ell)$.

1. Montrer qu'on peut utiliser la méthode de la dichotomie pour approcher ℓ. Que vaut l'approximation de ℓ après 3 itérations ? Quel est l'erreur maximale qu'on obtient après 3 itérations ?

k	0	1	2	3
$[a_k, b_k]$	$[0, \pi]$			
ℓ_k	$\frac{\pi}{2}$			

2. On considère la méthode de point fixe suivante :

$$\begin{cases} x_0 \in [0, \pi], \\ x_{k+1} = g(x_k) \text{ pour tout } k \geq 0, \end{cases} \tag{1}$$

avec $g : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(x) = 1 - \frac{1}{4}\cos(x)$.

2.1. Étudier graphiquement la convergence de cette méthode.

2.2. Montrer rigoureusement que la méthode converge pour tout $x_0 \in [0, \pi]$.

2.3. Montrer que l'erreur satisfait l'inégalité $|x_k - \ell| \leq C^k |x_0 - \ell|$. Donner une estimation de la constante C et l'utiliser pour minorer le nombre d'itérations nécessaires pour approcher ℓ à 10^{-3} près.

2.4. Montrer que si on utilise le critère d'arrêt $|x_{k+1} - x_k| \leq \varepsilon$ alors $|x_{k+1} - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{1-C}$. Quelle valeur de ε faut-il choisir pour approcher ℓ à 10^{-3} près ?

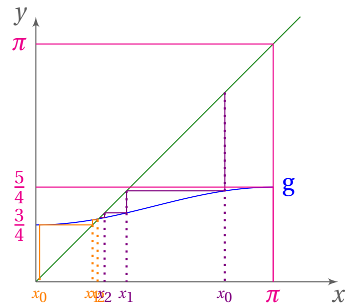
CORRECTION.

1. Soit $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = 1 - \frac{1}{4}\cos(x) - x$. Elle est de classe $\mathscr{C}^\infty$, $f(0) = 3/4 > 0$ et $f(\pi) = 5/4 - \pi < 0$, le théorème des valeurs intermédiaires permet de conclure qu'il existe au moins un $\ell \in [0, \pi]$ tel que $f(\ell) = 0$. De plus, comme $f'(x) = \frac{1}{4}\cos(x) - 1 < 0$, ce zéro est unique. On peut alors utiliser la méthode de la dichotomie pour approcher ℓ et l'on a

k	0	1	2	3
$[a_k, b_k]$	$[0, \pi]$	$[0, \frac{\pi}{2}]$	$[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$	$[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{8}]$
ℓ_k	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{5\pi}{16}$

2. On considère la méthode de point fixe de fonction d'itération g.

2.1. Étude graphique de la convergence :



- ⋆ g est de classe $\mathscr{C}^\infty$, $g(0) = 3/4$, $g(\pi) = 5/4$, $g'(x) = \frac{1}{4}\sin(x) \in [0, 1/4]$, g est croissante sur $[0, \pi]$.
- ⋆ La suite x_n est monotone croissante si $x_0 < \ell$ et monotone décroissante si $x_0 > \ell$.

2.2. $g([0,\pi]) = [3/4, 5/4] \subset [0,\pi]$ et $|g'(x)| \le 1/4 < 1$: la méthode de point fixe converge vers ℓ pour tout $x_0 \in [0,\pi]$.

2.3. Pour tout $k \in \mathbb{N}$ il existe ξ_k compris entre ℓ et x_k tel que $|x_k - \ell| = |g(x_{k-1}) - g(\ell)| \le |g'(\xi_k)||x_{k-1} - \ell| \le \frac{1}{4^k}|x_0 - \ell| \le \frac{\pi}{4^k}$. Donc, pour approcher ℓ à 10^{-3} près, il faut prendre le plus petit $k \in \mathbb{N}$ qui vérifie $k \ge \log_4(10^3\pi) \approx 5.9$, *i.e.* $k = 6$.

2.4. Pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a $|x_k - \ell| - |x_{k+1} - x_k| \le |x_{k+1} - x_k + x_k - \ell| = |x_{k+1} - \ell| \le C|x_k - \ell|$ avec $C = 1/4$ d'où

$$|x_{k+1} - \ell| \le \frac{1}{1-C}|x_{k+1} - x_k| \le \frac{\varepsilon}{1-C}.$$

Pour que l'erreur soit inférieur à 10^{-3} il faut alors choisir $\varepsilon \le (1-C)10^{-3}$.

Exercice 4

Pour calculer les racines de la fonction $f(x) = x^3 - x^2 + 8x - 8$ on utilise 4 méthodes de point fixe différentes décrites par les fonctions d'itération suivantes :

$$\varphi_1(x) = -x^3 + x^2 - 7x + 8 \qquad \varphi_2(x) = \frac{8 - x^3}{8 - x} \qquad \varphi_3(x) = -\frac{1}{10}x^3 + \frac{1}{10}x^2 + \frac{1}{5}x + \frac{4}{5} \qquad \varphi_4(x) = \frac{2x^3 - x^2 + 8}{3x^2 - 2x + 8}$$

Dans le tableau suivant sont reportées les suites des itérées obtenues par ces quatre méthodes.

	Méthode A	Méthode B	Méthode C	Méthode D
x_0	0.5000000000000000	0.500000000000000	0.5000000000000000	0.5000000000000000
x_1	0.9125000000000001	1.032258064516129	4.625000000000000	1.050000000000000
x_2	0.9897857421875000	1.000235245684712	−101.9160156250000	0.9845143884892086
x_3	0.9989578145726552	1.000000012299503	$1.069697123778202 \times 10^6$	1.004312677086027
x_4	0.9998955643403695	1.000000000000000	$-1.224001861234915 \times 10^{18}$	0.9987590594698483
x_5	0.9999895542527895	1.000000000000000	$1.833775789385161 \times 10^{54}$	1.000353832012369
x_6	0.9999989554034564	1.000000000000000	$-6.166499545700052 \times 10^{162}$	0.9998988463640411

① Montrer que $\ell = 1$ est l'unique racine réelle de f.

② Associer chaque méthode à sa fonction d'itération (justifier chaque réponse).

Correction. Les fonctions φ_i sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ au voisinage de ℓ. De plus, on remarque que $f(x) = (x-1)(x^2+8)$, donc l'unique racine réelle de f est $\ell = 1$. On sait que

- ⋆ si $|\varphi_i'(\ell)| < 1$, alors il existe un intervalle $[c; d] \ni \ell$ tel que la suite $(x_k)_k$ converge vers ℓ pour tout $x_0 \in [c; d]$; plus précisément, si $0 < \varphi_i'(\ell) < 1$ la suite converge de façon monotone, c'est-à-dire, l'erreur $x_k - \ell$ garde un signe constant quand k varie, tandis que si $-1 < \varphi_i'(\ell) < 0$ la suite converge de façon oscillante, c'est-à-dire, l'erreur $x_k - \ell$ change de signe quand k varie ;
- ⋆ si $|\varphi_i'(\ell)| > 1$ la suite diverge ; plus précisément, si $\varphi_i'(\ell) > 1$ la suite diverge de façon monotone, tandis que pour $\varphi_i'(\ell) < -1$ elle diverge en oscillant ;
- ⋆ si $|\varphi_i'(\ell)| = 1$, on ne peut en général tirer aucune conclusion : selon le problème considéré, il peut y avoir convergence ou divergence.
- ⋆ Enfin, si $\varphi_i^{(j)}(\ell) = 0$ pour $1 \le j \le p$ et $\varphi_i^{(p+1)}(\ell) \ne 0$, alors la méthode de point fixe associée à la fonction d'itération φ_i est d'ordre $p+1$.

Calculons donc $\varphi_i'(\ell)$ pour $i = 1, 2, 3, 4$:

1. $\varphi_1'(x) = -3x^2 + 2x - 7$ et $\varphi_1'(1) = -8$: la suite diverge en oscillant (colonne C) ;
2. $\varphi_2'(x) = \frac{-3x^3(8-x)+(8-x^3)}{(8-x)^2}$ et $\varphi_2'(1) = -\frac{14}{49}$: la suite converge de façon oscillante (colonne D) ;
3. $\varphi_3'(x) = -\frac{3}{10}x^2 + \frac{1}{5}x + \frac{1}{5}$ et $\varphi_3'(1) = \frac{4}{10}$: la suite converge de façon monotone (colonne A ou B) ;
4. $\varphi_4'(x) = \frac{(6x^2-2x)(3x^2-2x+8)-(2x^3-x^2+8)(6x-2)}{(3x^2-2x+8)^2}$ et $\varphi_4'(1) = 0$: la suite converge à l'ordre au moins 2 (colonne B).

Exercice 1

Vérifier que le polynôme d'interpolation d'HERMITE d'une fonction f en un point coïncide avec le polynôme de TAYLOR d'ordre 1 de f en ce point.

CORRECTION. Le polynôme d'interpolation d'HERMITE en un point $(x_0, f(x_0), f'(x_0))$ est l'unique polynôme $q \in \mathbb{R}_1[x]$ qui vérifie $q(x_0) = f(x_0)$ et $q'(x_0) = f'(x_0)$. On cherche alors a_0 et a_1 tels que $q(x) = a_0 + a_1 x$:

$$\begin{cases} q(x_0) = f(x_0), \\ q'(x_0) = f'(x_0), \end{cases} \iff \begin{cases} a_0 + a_1 x_0 = f(x_0), \\ a_1 = f'(x_0), \end{cases} \iff \begin{cases} a_0 = f(x_0) - x_0 f'(x_0), \\ a_1 = f'(x_0), \end{cases}$$

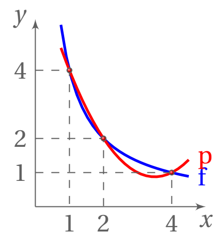
donc $q(x) = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0)$.

Exercice 2

1. Calculer le polynôme p de LAGRANGE qui interpole la fonction $f(x) = \frac{4}{x}$ aux points d'abscisse $x_0 = 1$, $x_1 = 2$ et $x_2 = 4$. Esquisser les graphes de f et de p pour $x \in [1, 4]$.
2. Vérifier que l'erreur $\varepsilon(x) \equiv f(x) - p(x)$ prend sa valeur maximale en un unique point $\tilde{x}$ dans l'intervalle $[2, 4]$. Calculer ensuite $\tilde{x}$ à 10^{-1} près (on pourra utiliser la méthode de dichotomie).
3. Comparer la fonction ε avec l'estimation théorique de l'erreur.

CORRECTION.

1. f est une hyperbole et p est la parabole qui passe par les points $(1, 4)$, $(2, 2)$ et $(4, 1)$: $p(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{7}{2}x + 7$



2. On a $\varepsilon(x) \equiv f(x) - p(x) = \frac{4}{x} - 7 + \frac{7}{2}x - \frac{1}{2}x^2$. Comme $\varepsilon'(x) = \frac{7}{2} - x - \frac{4}{x^2}$, il s'agit de trouver $\tilde{x}$ tel que $\varepsilon'(x) = 0$. Une simple comparaison des graphes des fonctions $u\colon x \mapsto \frac{7}{2} - x$ et $v\colon x \mapsto \frac{4}{x^2}$ montre que $\varepsilon'(x) = 0$ admet une solution dans l'intervalle $[1, 2]$ et une solution dans l'intervalle $[2, 4]$ (en effet, $\varepsilon'(1) = u(1) - v(1) = 2.5 - 4 < 0$, $\varepsilon'(2) = u(2) - v(2) = 1.5 - 1 > 0$ et $\varepsilon'(4) = u(4) - v(4) < 0$). On a $\varepsilon''(x) = -1 + 8/x^3$: l'erreur étant convexe pour $x < 2$ et concave pour $x > 2$, on conclut qu'elle prend sa valeur maximale pour $x = \tilde{x} \in [2, 4]$. On cherche alors $\tilde{x} \in [2, 4]$ tel que $\varepsilon'(\tilde{x}) = 0$ par la méthode de dichotomie. Pour que l'erreur soit inférieur à 10^{-1}, il faut $E\left(\log_2\left(\frac{4-2}{10^{-1}}\right)\right) + 1 = E\left(2\log_2(2) + \log_2(5)\right) + 1 = 5$ étapes :

k	0	1	2	3	4	5
$[a_k, b_k]$	$[2, 4]$	$[3, 4]$	$[3, \frac{7}{2}]$	$[3, \frac{13}{4}]$	$[3, \frac{25}{8}]$	$[\frac{49}{16}, \frac{25}{8}]$
ℓ_k	3	$\frac{7}{2}$	$\frac{13}{4}$	$\frac{25}{8}$	$\frac{49}{16}$	$\frac{99}{32}$
$b_k - a_k$	$2 > 10^{-1}$	$1 > 10^{-1}$	$0.5 > 10^{-1}$	$0.25 > 10^{-1}$	$0.125 > 10^{-1}$	$0.0625 < 10^{-1}$

L'erreur prend sa valeur maximale pour $\tilde{x} \approx \frac{99}{32} = 3.09375$ et vaut $\varepsilon(\tilde{x}) \approx 0.01166653913$.

3. Comparons ce résultat avec l'estimation théorique de l'erreur. $n = 2$ et f est de classe $\mathscr{C}^\infty([1, 4])$, donc pour tout $x \in [1, 2]$ il existe $\xi_x \in [1, 4]$ tel que

$$\varepsilon(x) = \frac{f'''(\xi_x)}{3!}(x-1)(x-2)(x-4) = -\frac{3}{\xi_x^4}(x^3 - 7x^2 + 14x - 8).$$

Comme $\varepsilon(x) = \frac{4}{x} - 7 + \frac{7}{2}x - \frac{1}{2}x^2$, on obtient $\xi_x = \sqrt[4]{6x}$.

Exercice 3

On considère le problème du calcul de $\ell \in [0, \pi]$ tel que $\ell = 1 + \frac{1}{2}\sin(\ell)$.

1. Montrer qu'on peut utiliser la méthode de la dichotomie pour approcher ℓ. Que vaut l'approximation de ℓ après 3 itérations ?
2. On considère la méthode de point fixe suivante :

$$\begin{cases} x_0 \in [0, \pi], \\ x_{k+1} = g(x_k) \text{ pour tout } k \geq 0, \end{cases} \tag{2}$$

avec $g\colon [0, \pi] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(x) = 1 + \frac{1}{2}\sin(x)$.

2.1. Étudier graphiquement la convergence de cette méthode.

2.2. Montrer rigoureusement que la méthode converge pour tout $x_0 \in [0,\pi]$.

2.3. Montrer que l'erreur satisfait l'inégalité $|x_k - \ell| \le C^k |x_0 - \ell|$. Donner une estimation de la constante C et l'utiliser pour minorer le nombre d'itérations nécessaires pour approcher ℓ à 10^{-3} près.

2.4. Montrer que si on utilise le critère d'arrêt $|x_{k+1} - x_k| \le \varepsilon$ alors $|x_{k+1} - \ell| \le \frac{\varepsilon}{1-C}$. Quelle valeur de ε faut-il choisir pour approcher ℓ à 10^{-3} près ? *(Rappel : $|a-c| - |c-b| \le |a-b| \le |a-c| + |c-b|$ pour tout $a,b,c \in \mathbb{R}$)*

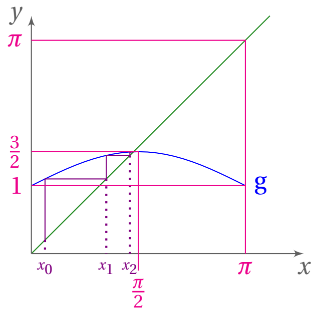
CORRECTION.

1. Soit $f\colon [0,\pi] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = 1 + \frac{1}{2}\sin(x) - x$. Elle est de classe $\mathscr{C}^\infty$, $f(0) = 1 > 0$ et $f(\pi) = 1 - \pi < 0$, le théorème des valeurs intermédiaires permet de conclure qu'il existe au moins un $\ell \in [0,\pi]$ tel que $f(\ell) = 0$. De plus, comme $f'(x) = \frac{1}{2}\cos(x) - 1 < 0$, ce zéro est unique. On peut alors utiliser la méthode de la dichotomie pour approcher ℓ et l'on a

k	0	1	2	3
$[a_k, b_k]$	$[0,\pi]$	$[0,\frac{\pi}{2}]$	$[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}]$	$[\frac{3\pi}{8},\frac{\pi}{2}]$
ℓ_k	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{7\pi}{16}$

2. On considère la méthode de point fixe de fonction d'itération g.
   2.1. Étude graphique de la convergence :

   g est de classe $\mathscr{C}^\infty$, $g(0) = g(\pi) = 1$, $g'(x) = \frac{1}{2}\cos(x) \in [-1/2, 1/2]$, g est croissante sur $[0,\frac{\pi}{2}]$, décroissante sur $[\frac{\pi}{2},\pi]$ et $g(\pi/2) = 3/2 < \pi$



   2.2. $g([0,\pi]) = [1,3/2] \subset [0,\pi]$ et $|g'(x)| \le 1/2 < 1$: la méthode de point fixe converge pour tout $x_0 \in [0,\pi]$.

   2.3. Pour tout $k \in \mathbb{N}$ il existe ξ_k compris entre ℓ et x_k tel que $|x_k - \ell| = |g(x_{k-1}) - g(\ell)| \le |g'(\xi_k)||x_{k-1} - \ell| \le \frac{1}{2^k}|x_0 - \ell| \le \frac{\pi}{2^k}$. Donc, pour approcher ℓ à 10^{-3} près, il faut prendre le plus petit $k \in \mathbb{N}$ qui vérifie $k \ge \log_2(10^3\pi) \approx 11.7$, *i.e.* $k = 12$.

   2.4. Pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a $[|x_k - \ell| - |x_{k+1} - x_k| \le |x_{k+1} - x_k + x_k - \ell| = |x_{k+1} - \ell| \le C|x_k - \ell|$ d'où

$$|x_{k+1} - \ell| \le \frac{1}{1-C}|x_{k+1} - x_k| \le \frac{\varepsilon}{1-C}.$$

   Pour que l'erreur soit inférieur à 10^{-3} il faut alors choisir $\varepsilon \le 2 \times 10^{-3}$.

Exercice 4

Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = x^3 - 2$. On veut approcher le zéro α de f par la méthode de point fixe suivante :

$$\begin{cases} x_0 \text{ donné,} \\ x_{k+1} = g_\omega(x_k) \text{ pour tout } k \ge 0, \end{cases} \tag{3}$$

avec $g_\omega\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $\quad g_\omega(x) = (1-\omega)x^3 + \left(1 - \frac{\omega}{3}\right)x + 2(\omega - 1) + \frac{2\omega}{3x^2}, \qquad \omega \in \mathbb{R}.$

1. Pour quelles valeurs du paramètre ω la méthode de point fixe (3) est-elle consistante (*i.e.* α est un point fixe de g_ω) ?
2. Pour quelles valeurs du paramètre ω la méthode de point fixe (3) est-elle d'ordre 2 ?
3. Existe-t-il des valeurs du paramètre ω pour lesquelles la méthode de point fixe (3) est-elle d'ordre 3 ?

CORRECTION. Comme α est le zéro de f, on a $\alpha^3 = 2$.

1. La méthode de point fixe (3) est consistante pour tout $\omega \in \mathbb{R}$ car
$$g_\omega(\alpha) = (1-\omega)\alpha^3 + \left(1 - \frac{\omega}{3}\right)\alpha + 2(\omega - 1) + \frac{2\omega}{3\alpha^2} = (1-\omega)(\alpha^3 - 2) + \left(1 - \frac{\omega}{3}\right)\alpha + \frac{2\omega}{3\alpha^2} = \alpha - \frac{\omega\alpha}{3} + \frac{2\omega}{3\alpha^2} = \alpha - \frac{\omega(\alpha^3 - 2)}{3\alpha^2} = \alpha.$$
2. La méthode de point fixe (3) est au moins d'ordre 2 si $g'(\alpha) = 0$. On a
$$g'_\omega(\alpha) = 3(1-\omega)\alpha^2 + 1 - \frac{\omega}{3} - \frac{4\omega}{3\alpha^3} = 3(1-\omega)\alpha^2 + 1 - \omega = (1-\omega)(3\alpha^2 + 1)$$
donc la méthode de point fixe (3) est au moins d'ordre 2 si $\omega = 1$.
3. Pour que la méthode de point fixe (3) soit d'ordre 3 il faudrait $g'(\alpha) = g''(\alpha) = 0$. Puisque $g'(\alpha) = 0$ si et seulement si $\omega = 1$ et $g''_1(\alpha) = \frac{4\omega}{\alpha^4} \neq 0$, il n'est pas possible d'avoir une convergence d'ordre supérieur à 2.