L1 Sciences et Techniques – Semestre 1 – Mathématiques M11

Corrigé de l'examen du jeudi 10 janvier 2013

Exercice 1 (Logique *(3 points)*)**.** On effectue une expérience chimique pour laquelle on peut seulement faire varier la température ou ajouter un catalyseur. On connait le principe suivant :

> Si on augmente la température de 10 degrés et si on n'ajoute pas de catalyseur alors la réaction va deux fois plus vite que normalement.

(1) Écrire la contraposée du principe ci-dessus, c'est-à-dire compléter la phrase "Si la réaction ne va pas deux fois plus vite que normalement alors…".

(2) On observe que la température a augmenté de 10 degrés et que la réaction va 3 fois plus vite que normalement, que peut-on en déduire ? *Justifier en moins de* 5 *lignes*

(3) On observe que la réaction va 2 fois plus vite que normalement, peut-on en déduire quelque chose sur la variation de température ? *Justifier en moins de* 5 *lignes*

---

(1) La contraposée de "si P alors Q" (autrement dit $P \Rightarrow Q$) est "si non(Q) alors non(P)". Ici la proposition P est de la forme "A et B", donc sa négation est de la forme "non(A) ou non(B)". On obtient donc comme contraposée :

> Si la réaction ne va pas deux fois plus vite que normalement alors on n'a pas augmenté la température de 10 degrés ou on a ajouté du catalyseur.

Remarque : cette contraposée est logiquement équivalente au principe donné dans l'énoncé.

(2) La contraposée indique qu'on a ajouté du catalyseur : on est dans le cas où "la réaction ne va pas deux fois plus vite" (puisqu'elle va trois fois plus vite), donc "on n'a pas augmenté la tempeérature de 10 degrés ou on a ajouté du catalyseur". Comme la température a augmenté de 10 degrés, cela signifie qu'on a ajouté du catalyseur.

(3) On ne peut peut rien déduire sur la variation de température : le principe ne donne aucune indication dans ce sens.

Exercice 2 (Tracés de courbes *(3 points)*)**.** On considère la fonction gaussienne

$$f : x \mapsto f(x) = e^{-x^2}.$$

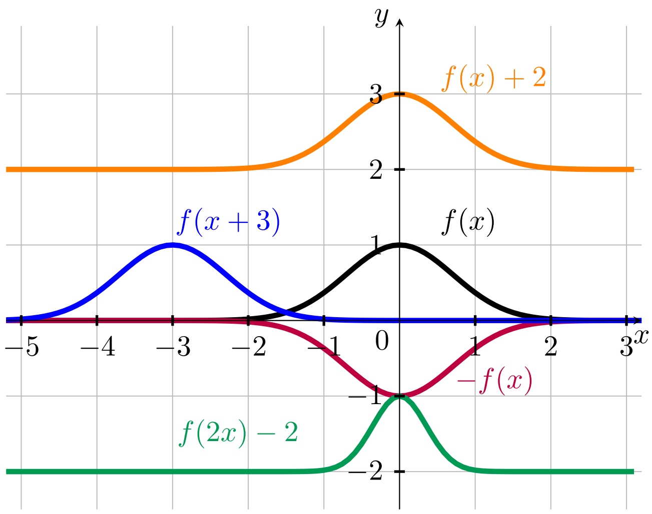
Tracer à main levée, dans le repère ci-contre, les courbes représentatives des fonctions :

(1) $x \mapsto -f(x)$,

(2) $x \mapsto f(x) + 2$,

(3) $x \mapsto f(x + 3)$,

(4) $x \mapsto f(2x) - 2$.



Exercice 3 (Étude d'une fonction *(8 points)*)**.** Soit f la fonction d'une variable réelle définie par

$$f(x) = \frac{e^x}{1+x}$$

(1) Donner le domaine de définition de la fonction f et calculer les limites en ses extrémités.

(2) Calculer la dérivée f' de f. Vérifier que la dérivée seconde est $f''(x) = \dfrac{e^x(1+x^2)}{(1+x)^3}$.

(3) La fonction f a-t-elle un point d'inflexion sur son domaine de définition ? Déterminer les intervalles où f est convexe et ceux où f est concave.

(4) Étudier le signe de la dérivée f', et donner le tableau de variations de f. Indiquer si f atteint un minimum ou un maximum local sur son domaine de définition.

(5) La courbe représentative de f admet-elle une droite asymptote en $-\infty$? Si oui, écrire son équation.

(6) La courbe représentative de f admet-elle une droite asymptote en $+\infty$? *Justifier la réponse.*

(7) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe en $x = 1$. En déduire pour quelle valeur elle croise l'axe des abscisses. Même question avec la tangente en $x = 2$.

(8) Tracer la courbe représentative de f ainsi que ses tangentes en $x = 1$ et $x = 2$.

---

(1) Le domaine de définition de f est $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ et on a

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{1+x} = 0, \quad \lim_{\substack{x<-1\\x\to-1}} \frac{e^x}{1+x} = -\infty, \quad \lim_{\substack{x>-1\\x\to-1}} \frac{e^x}{1+x} = +\infty \quad \textit{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{1+x} = +\infty$$

où la limite en $+\infty$ est la seule forme indéterminée, et se déduit de la croissance comparée de e^x et de x en $+\infty$.

(2) On trouve $f'(x) = \dfrac{xe^x}{(1+x)^2}$ et

$$f''(x) = \frac{(e^x + xe^x)(1+x)^2 - xe^x 2(1+x)}{((1+x)^2)^2} = \frac{(e^x + xe^x)(1+x) - 2xe^x}{(1+x)^3} = \frac{e^x(1+x^2)}{(1+x)^3}.$$

(3) Le numérateur de f'' ne s'annule pas sur le domaine de définition de f, donc f'' ne s'annule pas et f n'a pas de point d'inflexion. Comme $f''(x)$ est du signe de $(1+x)^3$, f est concave sur $]-\infty, -1[$ et convexe sur $]-1, +\infty[$.

(4) $f'(x)$ est du signe de x, d'où le tableau de variations de f :

	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
f'		$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
f	0	$\searrow$	$-\infty$ $\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

f atteint un minimum local en $x = 0$.

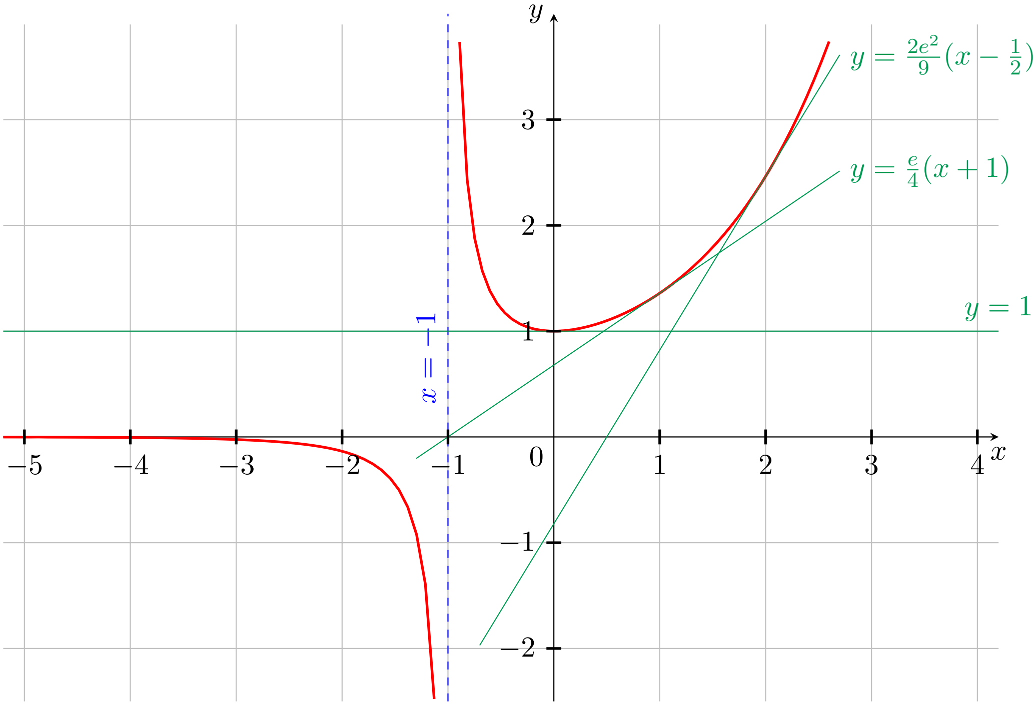
(5) Comme $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$, la courbe représentative de f admet la droite $y = 0$ comme droite asymptote en $-\infty$.

(6) Comme $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$ (croissance comparée de e^x et de x^2 en $+\infty$), la courbe représentative de f n'admet pas de droite asymptote en $+\infty$.

(7) L'équation de la tangente à la courbe en $x = 1$ est $y = \frac{e}{4}x + \frac{e}{4}$. Cette droite croise l'axe des abscisses pour $0 = \frac{e}{4}x + \frac{e}{4}$ ce qui donne $x = -1$.

L'équation de la tangente à la courbe en $x = 2$ est $y = \frac{2e^2}{9}x - \frac{e^2}{9}$. Cette droite croise l'axe des abscisses pour $0 = \frac{2e^2}{9} - \frac{e^2}{9}$ et donc $x = \frac{1}{2}$.

(8) Tracé de la courbe représentative de f et de ses tangentes en $x = 1$ et $x = 2$:



Exercice 4 (Équation différentielle ordinaire *(3 points)*).

(1) Quelles sont les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'(x) = -3y(x)$?

(2) Calculer une primitive de la fonction $x \mapsto xe^{2x}$.

(3) Quelles sont les solutions de l'équation différentielle $y'(x) = -3y(x) + xe^{-x}$?

---

(1) Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'(x) = -3y(x)$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto C\,e^{-3x}$ où C est une constante réelle.

(2) Par intégration par parties, on a

$$\int xe^{2x}dx = \int x\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)' dx = \frac{x}{2}e^{2x} - \int 1 \times \frac{1}{2}e^{2x}dx = \frac{x}{2}e^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} = \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\right)e^{2x}$$

donc une primitive de la fonction $x \mapsto xe^{2x}$ est $x \mapsto \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\right)e^{2x}$.

(3) On applique la méthode de la variation de la constante : on cherche une solution de l'équation différentielle de la forme $x \mapsto C(x)\,e^{-3x}$, et on obtient l'équation différentielle $C'(x)\,e^{-3x} = xe^{-x}$ c'est-à-dire $C'(x) = xe^{2x}$. D'après la question précédente, $C : x \mapsto \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\right)e^{2x}$ convient, ce qui donne comme solution particulière $x \mapsto \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\right)e^{-x}$. Les solutions de l'équation différentielle $y'(x) = -3y(x) + xe^{-x}$ sont donc les fonctions de la forme $x \mapsto B\,e^{-3x} + \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\right)e^{-x}$ où B est une constante réelle.

Exercice 5 (Au choix 1 : Nombres complexes *(3 points)*)**.** Racines carrées et forme trigonométrique d'un nombre complexe :

(1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation
$$z^2 = -2 + 2\sqrt{3}\,\mathrm{i}.$$
(2) Donner le module de z et l'argument principal de z.

(3) Écrire chacune de ces deux solutions sous forme trigonométrique.

---

(1) Si $z = a + i\,b$, alors $z^2 = -2 + 2\sqrt{3}\,\mathrm{i}$ correspond au système
$$\begin{cases} a^2 - b^2 = -2 \\ 2ab = 2\sqrt{3} \end{cases}$$
En ajoutant l'égalité des modules $|z^2| = |-2 + 2\sqrt{3}\,\mathrm{i}|$ on obtient le système
$$\begin{cases} a^2 - b^2 = -2 \\ 2ab = 2\sqrt{3} \\ a^2 + b^2 = \sqrt{4+12} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = -2 \\ 2a^2 = 4 - 2 = 2 \\ ab > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 1 \\ b^2 = 4 - 1 = 3 \\ ab > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \pm 1 \\ b = \pm\sqrt{3} \\ ab > 0 \end{cases}$$
donc on trouve les deux solutions $z_1 = 1 + \sqrt{3}\,\mathrm{i}$ et $z_2 = -1 - \sqrt{3}\,\mathrm{i}$.

(2) z_1 et z_2 ont pour module 2, l'argument principal de z_1 est $\frac{\pi}{3}$ et celui de z_2 est $-\frac{2\pi}{3}$.

(3) On a donc $z_1 = 2e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} = 2(\cos(\frac{\pi}{3}) + \mathrm{i}\,\sin(\frac{\pi}{3}))$ et $z_2 = 2e^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}} = 2(\cos(-\frac{2\pi}{3}) + \mathrm{i}\,\sin(-\frac{2\pi}{3}))$.

Exercice 6 (Au choix 2 : Étude de suite (3 points))**.** Soit a et b deux nombres réels, on considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par
$$\begin{cases} u_0 = a, \\ u_{n+1} = 3u_n + b \quad \text{pour tout } n \geq 0. \end{cases}$$

(1) Rappeler la définition d'une suite géométrique.

(2) Pour tout $n \geq 0$ on pose $v_n = u_n + \frac{b}{2}$. Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n et en déduire que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison q, dont on précisera la valeur.

(3) En déduire l'expression $u_n = (a + \frac{b}{2})q^n - \frac{b}{2}$ pour tout n.

(4) Quelles valeurs faut-il prendre pour a et b afin que $u_1 = 0$ et $u_2 = 1$?

---

(1) Une suite $(w_n)_{n\geq 0}$ est une suite géométrique s'il existe un nombre réel q tel que pour tout $n \geq 0$ on a $w_{n+1} = qw_n$.

(2) Pour $n \geq 0$ on calcule que $v_{n+1} = 3v_n$, donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q = 3$.

(3) Puisque $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q = 3$, on a $v_n = v_0 3^n$ pour tout $n \geq 0$. Comme $v_0 = a + \frac{b}{2}$, on obtient $u_n = (a + \frac{b}{2})q^n - \frac{b}{2}$ pour tout $n \geq 0$.

(4) Il s'agit de résoudre le système
$$\begin{cases} 3(a + \frac{b}{2}) - \frac{b}{2} = 0 \\ 9(a + \frac{b}{2}) - \frac{b}{2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a + b = 0 \\ 9a + 4b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a + b = 0 \\ b = 1 \end{cases}$$
et on trouve $a = -\frac{1}{3}$ et $b = 1$.