L1 Mathématiques – semestre 1 – Contrôle continu 2 – CORRIGÉ

Exercice 1 (Tangente)**.** On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{1+e^{-x}}$.

(1) Calculer la dérivée de f.
(2) Donner l'équation de la tangente au graphe de f au point $x = 0$.

---

(1) La fonction f est la composée $h \circ g$ des fonctions $g : x \mapsto 1 + e^{-x}$ et $h : x \mapsto \frac{1}{x}$. L'image de $\mathbb{R}$ par g est $]1, +\infty[$ et h est dérivable sur $]1, +\infty[$, donc $f = h \circ g$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée :

$$f'(x) = (h \circ g)'(x) = h'(g(x)) \times g'(x) = -\frac{1}{g(x)^2} \times (-e^{-x}) = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}.$$

(2) L'équation de la tangente au graphe de f au point $x = 0$ est

$$y = f'(0)(x-0) + f(0) = \frac{e^{-0}}{(1+e^{-0})^2}\,x + \frac{1}{1+e^{-0}} = \frac{1}{(1+1)^2}\,x + \frac{1}{1+1}.$$

ce qui donne pour équation $y = \frac{1}{4}\,x + \frac{1}{2}$.

Exercice 2 (Limite et prolongement par continuité)**.** Soit f la fonction définie sur $]-1, +\infty[\,\setminus\{0\}$ par

$$f(x) = \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}.$$

(1) En utilisant la règle de l'Hôpital (dont on vérifiera les hypothèses), calculer la limite de f en 0.
(2) La fonction f est-elle prolongeable par continuité en 0 ?

---

(1) La fonction $g : x \mapsto \ln(1+x) - x$ vaut 0 en $x = 0$, et g est dérivable pour x proche de 0, de dérivée

$$g'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{1-(1+x)}{1+x} = -\frac{x}{1+x}.$$

De plus, la fonction $h : x \mapsto x^2$ vaut 0 en $x = 0$, h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et de dérivée $h'(x) = 2x$. Le quotient

$$\frac{g'(x)}{h'(x)} = \frac{-\frac{x}{1+x}}{2x} = -\frac{x}{(1+x)2x} = -\frac{1}{2(1+x)}$$

a pour limite $-\frac{1}{2}$ quand x tend vers 0.

Puisque $g(0) = h(0) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{g'(x)}{h'(x)} = -\dfrac{1}{2}$, on peut appliquer la règle de l'Hôpital et on obtient $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\dfrac{1}{2}$.

(2) D'après la question précédente, la fonction f est prolongeable en 0 en posant $f(0) = -\frac{1}{2}$.

Exercice 3 (Etude d'une fonction)**.** Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{x^2}{2} - \ln(x)$$

(1) Donner le domaine de définition de la fonction f. Calculer les limites de f en 0 et $+\infty$.

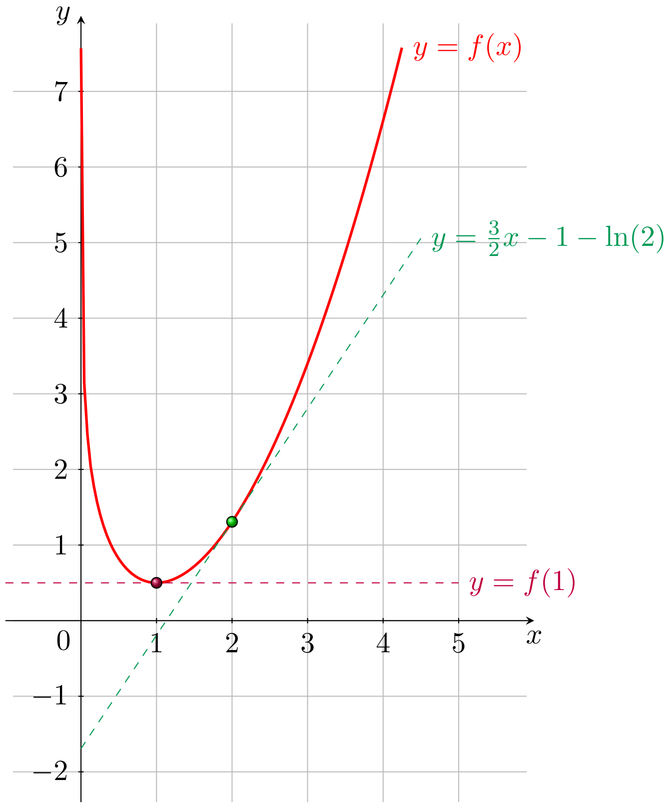
(2) Calculer la dérivée f' de f. Vérifier que la dérivée seconde est $f''(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2}$.

(3) La fonction f a-t'elle un point d'inflexion sur $]0,+\infty[$? La fonction f est-elle convexe ou concave ?

(4) Etudier le signe de la dérivée f', et donner le tableau de variations de f. Indiquer si f atteint son minimum ou son maximum sur $]0,+\infty[$.

(5) Calculer la limite $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$. La courbe représentative de f admet-elle une droite asymptote en $+\infty$?

(6) Tracer la courbe représentative de f ainsi que ses tangentes en $x=1$ et $x=2$ (on pourra utiliser la valeur $\ln(2) \simeq 0,7$) sur le quadrillage suivant :



---

(1) La fonction $x \mapsto x^2$ est définie sur $\mathbb{R}$ et la fonction $x \mapsto \ln(x)$ est définie sur $]0,+\infty[$ donc la fonction f est définie sur $]0,+\infty[$.

On sait que $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{2} = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$ donc $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0 - (-\infty) = +\infty$.

De plus pour $x > 0$ on peut écrire $f(x) = \dfrac{x^2}{2} - \ln(x) = x^2\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{\ln(x)}{x^2}\right)$, et comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} = 0$ on obtient $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \times \frac{1}{2} = +\infty$.

(2) La dérivée de f est $f'(x) = x - \dfrac{1}{x}$ pour tout $x > 0$.

On obtient donc $f''(x) = 1 - \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = 1 + \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x^2+1}{x^2}$ sur $]0,+\infty[$.

(3) La dérivée seconde f'' de f ne s'annule pas sur $]0,+\infty[$ donc la fonction f n'a pas de point d'inflexion sur $]0,+\infty[$. De plus f'' est strictement positive sur l'intervalle $]0,+\infty[$ donc f est convexe sur $]0,+\infty[$.

(4) On a $f'(x) = \frac{x^2-1}{x}$, et comme $x > 0$ la dérivée $f'(x)$ est du signe de $x^2 - 1$: on en déduit que $f'(x) < 0$ pour $x \in]0,1[$ et $f'(x) > 0$ pour $x \in]1,+\infty[$. On obtient ainsi le tableau de variations de f :

$$
\begin{array}{c|c|ccccc}
 & 0 & & & 1 & & +\infty \\
\hline
f' & || & & - & 0 & + & \\
\hline
 & || & +\infty & & & & +\infty \\
f & || & & \searrow & & \nearrow & \\
 & || & & & \frac{1}{2} & &
\end{array}
$$

En particulier, f atteint son minimum $]0,+\infty[$ en $x=1$, avec $f(1)=\frac{1}{2}$.

(5) On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{2}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x}=0$ donc

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{2}-\frac{\ln(x)}{x}=+\infty.$$

On en conclut que la courbe représentative de f n'a pas de droite asymptote en $+\infty$.

(6) L'équation de la tangente au graphe de f au point $x=1$ est

$$y=f'(1)(x-1)+f(1)=0\times(x-1)+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

ce qui donne pour équation $y=\frac{1}{2}$.

L'équation de la tangente au graphe de f au point $x=2$ est

$$y=f'(2)(x-2)+f(2)=\left(2-\frac{1}{2}\right)\times(x-2)+\frac{2^2}{2}-\ln(2)=\frac{3}{2}(x-2)+2-\ln(2).$$

ce qui donne pour équation $y=\frac{3}{2}x-1-\ln(2)\simeq\frac{3}{2}x-1,7$.

D'après la question (3) la fonction f est convexe sur $]0,+\infty[$ donc sa courbe représentative est toujours au-dessus de ses tangentes.