Calculatrices et documents interdits.

Exercice 1 *(2 pts)*

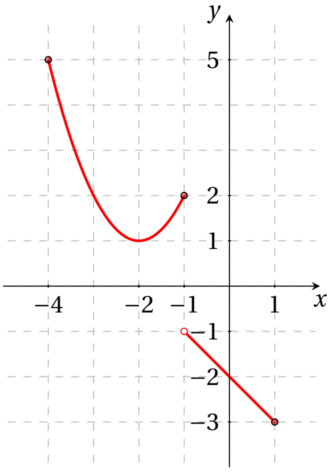
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x + 5 & \text{si } x \le -1, \\ -x - 2 & \text{si } x > -1, \end{cases}$$

et représentée ci-contre. Soit $A = [-4, 1]$. Trouver

1. $f(A)$,
2. $f^{-1}\big(f(A)\big)$.

Il n'est pas nécessaire de justifier la réponse.



CORRECTION.

1. $f(A) = [-3; -1[\cup [1; 5]$,
2. $f^{-1}\big(f(A)\big) = [-4; -1] \cup]-1; 1] = A$.

Exercice 2 *Chaque connexion correcte vaut 1 pts, chaque connexion fausse enlève 1/2 pts.*

Attention : dans cet exercice la note est comprise entre −2 pts et 4 pts.

Soit E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une application. Relier les phrases équivalentes :

1. f est injective
2. f est surjective

a. tout élément x de E n'a qu'une image par f

b. pour tous x et y de E, la relation $f(x) = f(y)$ implique $x = y$

c. tout élément y de F a exactement un antécédent par f

d. tout élément y de F a au moins un antécédent par f

e. tout élément y de F a au plus un antécédent par f

f. $\forall x, y \in E, \quad x \neq y \implies f(x) \neq f(y)$

CORRECTION.

a. Cette assertion exprime que f est une application

b. $\boxed{\text{I}}$

c. Cette assertion pourrait compléter la définition d'une application bijective

d. $\boxed{\text{S}}$

e. $\boxed{\text{I}}$

f. $\boxed{\text{I}}$

Exercice 3 *(4 pts)*

Démontrer **par récurrence** la proposition

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \sum_{i=1}^{n} (2i) = n(n+1).$$

CORRECTION. On considère une propriété P_n qui dépend d'un entier naturel n et on souhaite démontrer par récurrence qu'elle est vraie à partir d'un certain rang. Pour cela il faut

1. montrer que la propriété P_n est vraie pour un entier particulier n_0 (par exemple 0 ou 1) ;
2. montrer que si elle est vraie pour un certain n, cela implique qu'elle est vraie pour son successeur $n+1$.

Dans notre cas :

1. Pour $n = 1$ la somme se réduit à $\sum_{i=1}^{1}(2i) = 2 \times 1 = 2$ et est égale à $n(n+1) = 1 \times (1+1) = 2$.
2. On suppose maintenant que le résultat est vrai pour un certain n, c'est-à-dire que $\sum_{i=1}^{n}(2i) = n(n+1)$. Alors $\sum_{i=1}^{n+1}(2i) = \sum_{i=1}^{n}(2i) + 2(n+1) = n(n+1) + 2(n+1) = (n+1)(n+2)$. Le résultat est donc vrai pour l'entier $n+1$.

NOM : . . . .
PRÉNOM : . . . .

Exercice 4 *(4 pts)*

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x) = \ln\left(|x| + \frac{1}{e}\right)$.

1. f est-elle injective ?
2. f est-elle surjective ?
3. Montrer que la restriction $g : [0, +\infty[\to [-1, +\infty[$ avec $g(x) = f(x)$ est une bijection et calculer la fonction réciproque h.

Attention : vous pouvez vous aider en traçant le graphe de f et en considérant les intersections de ce graphe avec des droites horizontales, mais cela ne constitue pas une preuve !

CORRECTION.

1. f n'est pas injective car $f(x) = f(-x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (la fonction est paire)
2. f n'est pas surjective car tout $y < -1$ n'a pas d'antécédents
3. Soit $y \in [-1, +\infty[$, alors les solutions possibles de $g(x) = y$ sont $x = \pm(e^y - 1/e)$. Or, seul $x = e^y - 1/e \in [0, +\infty[$ donc pour $g : [0, +\infty[\to [-1, +\infty[$ on a trouvé une inverse $h : [-1, +\infty[\to [0, +\infty[$ définie par $h(y) = e^y - 1/e$, donc g est une bijection.

Exercice 5 *(3 pts)*

Donner l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{1-x} \qquad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sqrt{x} \qquad h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2$$

Donner l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes et écrire explicitement l'expression de la composition : $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ g \circ h$.

CORRECTION. $\mathscr{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $\mathscr{D}_g = \mathbb{R}_+$, $\mathscr{D}_h = \mathbb{R}$.

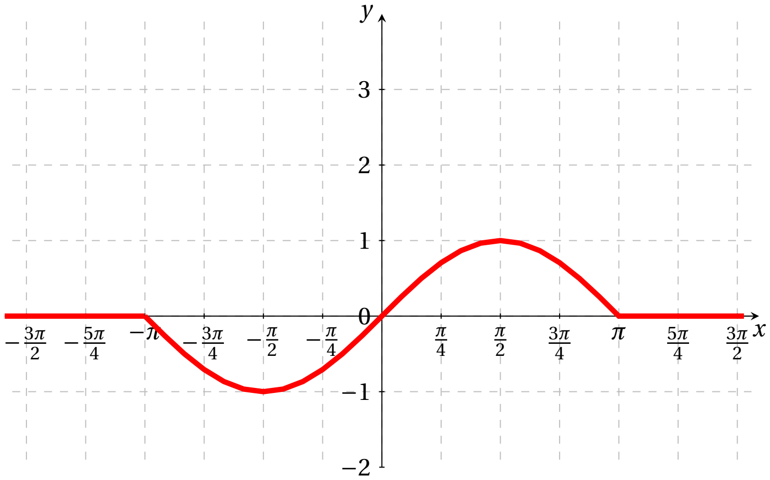
$\mathscr{D}_{f\circ g} = \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$ et $f(g(x)) = \frac{1}{1-\sqrt{x}}$, $\mathscr{D}_{g\circ f} = \{ x \in \mathbb{R} \mid x < 1 \}$ et $g(f(x)) = \sqrt{\frac{1}{1-x}}$, $\mathscr{D}_{f\circ g\circ h} = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ et $f(g(h(x))) = \frac{1}{1-|x|}$.

Exercice 6 *(3 pts)*

Dans la figure ci-dessous on a représenté la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

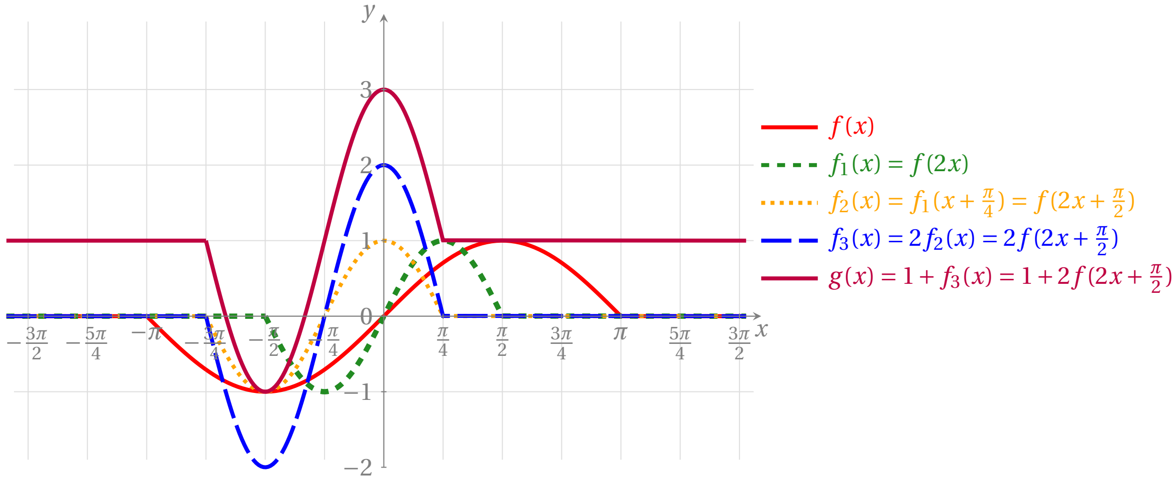
$$f(x) = \begin{cases} \sin(x) & \text{si } x \in [-\pi; \pi], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Tracer dans la même figure le graphe de la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = 1 + 2f\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$.



Suggestion : utiliser les transformations élémentaires $f_1(x) = f(2x)$, $f_2(x) = f_1\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = f\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$, $f_3(x) = 2f_2(x) = 2f\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$ et $g(x) = 1 + f_3(x) = 1 + 2f\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$.

CORRECTION.



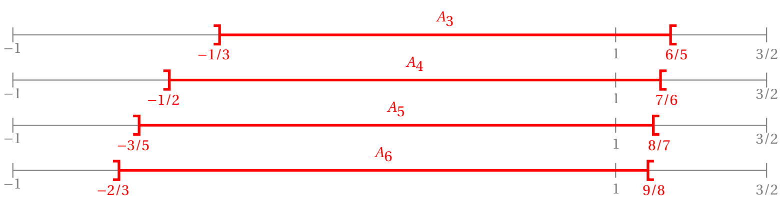
Exercice 7 *(4 pts)*

Soient E un ensemble et F et G deux parties de E. On note $C_E(F) = E \setminus F$ le complémentaire de F par rapport à E.

1. Montrer que
$$C_E(F \cup G) = (C_E F) \cap (C_E G).$$
2. Soit I un ensemble et $\{A\}_{i\in I}$ une partie de $\mathscr{P}(E)$. On suppose que la propriété suivante est vraie :
$$C_E\Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big) = \bigcap_{i\in I} C_E A_i.$$
Considérons l'intervalle $A_m = \left]\dfrac{2-m}{m};\dfrac{m+3}{m+2}\right[$ pour $m \in \mathbb{M} = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq 3\}$. Expliciter (sans justifier) les ensembles
$$\bigcup_{m\in\mathbb{M}} A_m, \qquad C_{\mathbb{R}}\Big(\bigcup_{m\in\mathbb{M}} A_m\Big), \qquad C_{\mathbb{R}}(A_m), \qquad \bigcap_{m\in\mathbb{M}} C_{\mathbb{R}}(A_m).$$

CORRECTION.

1. $x \in C_E(F\cup G) \iff x \notin (F\cup G) \iff x \notin F$ ET $x \notin G \iff x \in C_E(F)$ ET $x \in C_E(G) \iff x \in (C_E F) \cap (C_E G)$
2. Notons que $\dfrac{2-m}{m} \to -1^+$ et que $\dfrac{m+3}{m+2} \to 1^+$:



On peut alors conclure que

$$\bigcup_{m\in\mathbb{M}} A_m = \left]-1;\frac{6}{5}\right[\qquad C_{\mathbb{R}}\Big(\bigcup_{m\in\mathbb{M}} A_m\Big) =]-\infty;-1] \cup \left[\frac{6}{5};+\infty\right[$$

$$C_{\mathbb{R}}(A_m) = \left]-\infty;\frac{2-m}{m}\right] \cup \left[\frac{m+3}{m-2};+\infty\right[\qquad \bigcap_{m\in\mathbb{M}} C_{\mathbb{R}}(A_m) =]-\infty;-1] \cup \left[\frac{6}{5};+\infty\right[$$

L'exercice suivant est hors barème et peut apporter jusqu'à 5 pts supplémentaires.

Exercice Bonus *Le crible de* MATIYASEVITCH *(hors barème)*

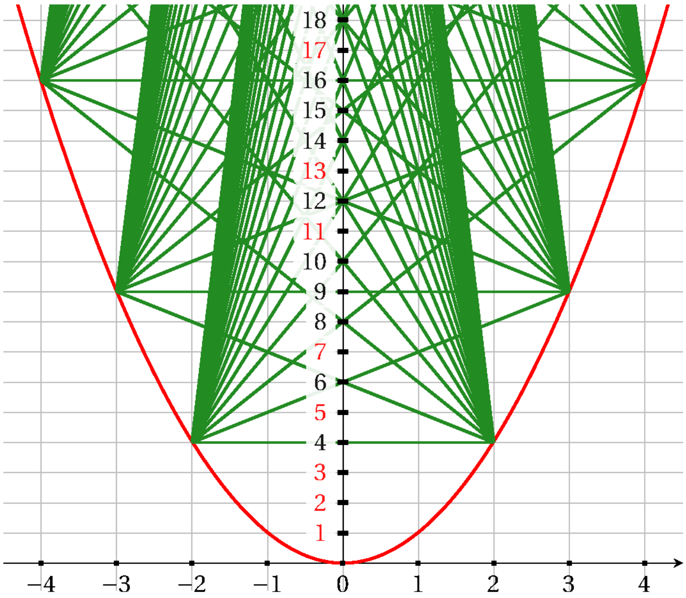
Traçons la parabole d'équation $y = x^2$. Sur ce graphe, on va considérer deux familles de points :

- pour tout $i \geq 2$, i entier, on note A_i le point de coordonnées $(-i, i^2)$,
- pour tout $j \geq 2$, j entier, on note B_i le point de coordonnées (j, j^2).

Relions tous les points A_i à tous les points B_j.

1. Montrer que tous les segments $[A_i B_j]$ croisent l'axe des ordonnées en un point de coordonnées $(0, n)$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Montrer qu'un nombre situé sur l'axe des ordonnées n'est pas premier si, et seulement si, un des segments $[A_i B_j]$ traverse l'axe des ordonnées en ce point.
3. Que représente-t-il le nombre de segments qui passent par les points de coordonnées $(0, n)$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et n non premier ?

Rappel : un nombre $n \in \mathbb{N}^*$ est premier s'il n'est divisible que par 1 et lui même.



CORRECTION.

1. Le segment $[A_i B_j]$ appartient à la droite d'équation
$$y = \frac{j^2 - i^2}{j + i}(x - j) + j^2 = (j - i)x + ij$$
et il croise l'axe des ordonnées en le point de coordonnées $(0, ij)$. Comme $i, j \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, le produit ij appartient à $\mathbb{N}$.
2. Un nombre $n \in \mathbb{N}^*$ situé sur l'axe des ordonnées n'est pas premier si, et seulement si, il existe un couple $(i, j) \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ tel que $n = ij$ donc si, et seulement si, il existe un couple $(i, j) \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ tel que le segment $[A_i B_j]$ traverse l'axe des ordonnées en ce point.
3. Le nombre de segments qui passent par les points de coordonnées $(0, n)$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et n non premier représente le double du nombre de diviseurs propres de n si n n'est pas un carré parfait, sinon c'est le nombre de diviseurs propres de n.