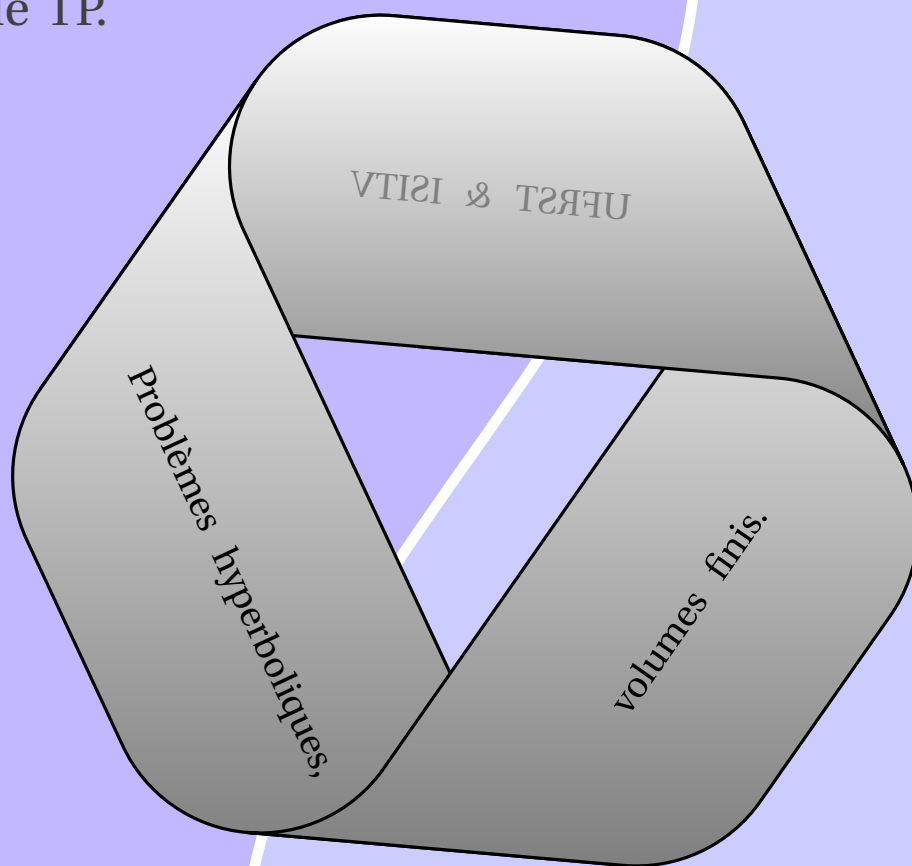


3<sup>ème</sup> MARINE

M2 MATH

2011/2012

Aide mémoire,  
Exemples,  
Sujets de TP.



---

*Les TP seront évalués.*

*Vous avez jusqu'au 22 février 2012 pour rendre un rapport avec le code associé pour rendre compte de votre travail.*

*Vous pouvez écrire le rapport seul ou en binôme avec un autre membre de votre groupe.*

Gloria FACCANONI

IMATH Bâtiment U-318  
Université du Sud Toulon-Var  
Avenue de l'université  
83957 LA GARDE - FRANCE

☎ 0033 (0)4 94 14 23 81

✉ [gloria.faccanoni@univ-tln.fr](mailto:gloria.faccanoni@univ-tln.fr)

🌐 <http://faccanoni.univ-tln.fr>

# Table des matières

<b>1 TP1 - résolution de l'équation de transport</b>	<b>11</b>
1.1 Code	12
1.2 Exercice	13
1.3 Exemples	13
<b>2 TP2 - résolution d'une équation non-linéaire</b>	<b>18</b>
2.1 Rappels	18
2.2 Exemple : équation de Burgers	18
2.3 Schémas	25
2.4 Code	26
2.5 Exercice	27
<b>3 TP3 - systèmes hyperboliques</b>	<b>28</b>
3.1 Schémas numériques	28
3.2 Exemple	29
3.3 Code associé à l'exemple	38
3.4 Exercice	39



# Rappels sur les différences finies

À part dans quelques cas très particulier, il est impossible de calculer explicitement des solutions de modèles issus de la physique. Il est donc nécessaire d'avoir recours au calcul numérique sur ordinateur pour estimer qualitativement et quantitativement ces solutions. Le principe de toutes les méthodes de résolution numérique des équations aux dérivées partielles est d'obtenir des valeurs numériques discrètes (c'est-à-dire en nombre fini) qui *approchent* (en un sens convenable à préciser) la solution exacte. Dans ce procédé il faut bien être conscient de deux points fondamentaux : premièrement, on ne calcul pas des solutions exactes mais approchées ; deuxièmement, on *discrétise* le problème en représentant des fonctions par un nombre finis de valeurs, c'est-à-dire que l'on passe du *continu* au *discret*.

Il existe de nombreuses méthodes d'approximation numérique des solutions d'équations aux dérivées partielles. Pour simplifier la présentation, nous nous limiterons dans ce chapitre à la dimension un d'espace.

## Principe de la méthode des différences finies

Soit  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ .

Comme

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

il est naturel d'introduire les approximations

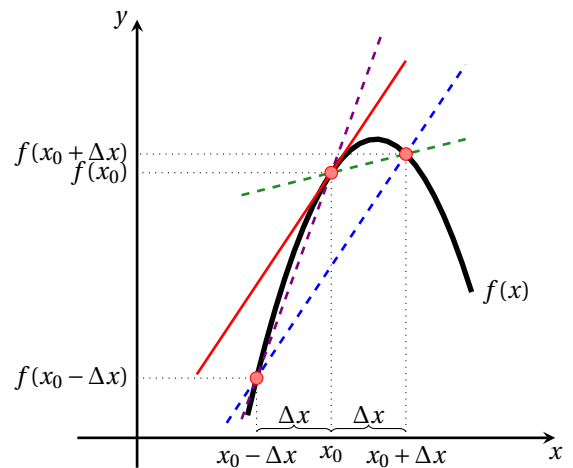
$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}, \quad (1)$$

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0) - f(x_0 - \Delta x)}{\Delta x}, \quad (2)$$

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0 - \Delta x)}{2\Delta x}. \quad (3)$$

De manière analogue, la dérivée seconde peut être approchée par

$$f''(x_0) \approx \frac{f(x_0 + \Delta x) - 2f(x_0) + f(x_0 - \Delta x))}{(\Delta x)^2}.$$



Si on fait un développement de Taylor en  $x$  autour du point  $x_0$

$$f(x_0 \pm \Delta x) = f(x_0) \pm \Delta x f'(x_0) + (\Delta x)^2 f''(x_0) + O((\Delta x)^3),$$

on a

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_0) + \Delta x f'(x_0) + (\Delta x)^2 f''(x_0) + O((\Delta x)^3) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) + O(\Delta x),$$

$$\frac{f(x_0) - f(x_0 - \Delta x)}{\Delta x} = \frac{f(x_0) - f(x_0) + \Delta x f'(x_0) - (\Delta x)^2 f''(x_0) + O((\Delta x)^3)}{\Delta x} = f'(x_0) + O(\Delta x),$$

$$\begin{aligned} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0 - \Delta x)}{2\Delta x} &= \frac{f(x_0) + \Delta x f'(x_0) + (\Delta x)^2 f''(x_0) + O((\Delta x)^3) - f(x_0) + \Delta x f'(x_0) - (\Delta x)^2 f''(x_0)}{2\Delta x} \\ &= f'(x_0) + O((\Delta x)^2), \end{aligned}$$

et pour l'approximation de la dérivée seconde on a

$$\begin{aligned} \frac{f(x_0 + \Delta x) - 2f(x_0) + f(x_0 - \Delta x))}{(\Delta x)^2} &= \frac{f(x_0) + \Delta x f'(x_0) + (\Delta x)^2 f''(x_0) + O((\Delta x)^3) - 2f(x_0) + f(x_0) - \Delta x f'(x_0) + (\Delta x)^2 f''(x_0)}{(\Delta x)^2} \\ &= f''(x_0) + O((\Delta x)^2). \end{aligned}$$

Si  $\Delta x$  est «petit», ces formules sont des «bonnes» approximations.

## Généralisation aux équations aux dérivées partielles

Nous nous limitons pour le moment à la dimension un d'espace et considérons une équation aux dérivées partielles  $F(u) = 0$  définie pour  $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$  avec une condition initiale  $u(x, 0) = g(x)$  pour  $x \in \mathbb{R}$  (remarquons que  $F(u)$  est une notation pour une fonction de  $u$  et de ses dérivées partielles en tout point). Pour discrétiser le domaine  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ , on introduit un pas d'espace  $\Delta x > 0$  et un pas de temps  $\Delta t > 0$  et on définit les nœuds d'un maillage régulier

$$(x_j, t^n) = (j\Delta x, n\Delta t) \quad \text{pour } j \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}.$$

On note  $u_j^n$  la valeur d'une solution discrète approchée au point  $(x_j, t^n)$  et  $u(x, t)$  la solution exacte (inconnue). Le principe de la méthode des différences finies est de remplacer les dérivées par des différences finies en utilisant des formules de Taylor dans lesquelles on néglige les restes.

Dans tous schéma il y a bien sûr une donnée initiale pour démarrer les itération en  $n$  : les valeurs initiales  $(u_j^0)_{j \in \mathbb{Z}}$  sont définies par exemple par  $u_j^0 = g(x_j)$  où  $g$  est la donnée initiale de l'équation.

S'il y a un second membre  $f(x, t)$  dans l'équation aux dérivées partielles, alors les schémas se modifient en remplaçant zéro au second membre par une approximation consistante de  $f(x, t)$  au point  $(x_j, t^n)$ .

Si l'équation est définie sur un domaine borné, par exemple  $x \in [\alpha; \beta]$ , le maillage spatiale sera restreint à cet intervalle c'est-à-dire  $j \in \{0, 1, \dots, N\}$  avec  $x_0 = \alpha$  et  $x_N = \beta$  et  $\Delta x = (\beta - \alpha)/(N + 1)$ . Il faut de plus ajouter des conditions aux limites qui peuvent être de plusieurs types.

Par exemple, si on a des conditions aux limites de Dirichlet

$$u(\alpha, t) = L, \quad u(\beta, t) = R, \quad \text{pour } t \in \mathbb{R}_*^+,$$

elles se traduisent au niveau discret en

$$u_0^n = L, \quad u_{N+1}^n = R, \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}.$$

Si on a des conditions de Neumann

$$\partial_x u(\alpha, t) = L, \quad \partial_x u(\beta, t) = R, \quad \text{pour } t \in \mathbb{R}_*^+,$$

elles se traduisent au niveau discret en

$$\frac{u_1^n - u_0^n}{\Delta x} = L, \quad \frac{u_N^n - u_{N-1}^n}{\Delta x} = R, \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}.$$

Si on a des conditions périodiques

$$u(x + \beta, t) = u(x + \alpha, t), \quad \text{pour } x \in [\alpha; \beta], t \in \mathbb{R}_*^+$$

elles se traduisent au niveau discret en

$$u_0^n = u_N^n, \quad \text{pour } n \in \mathbb{N},$$

et plus généralement  $u_j^n = u_{N+j}^n$ .

**Niveaux et stencil** Un schéma est dit à  $m$  niveaux s'il ne fait intervenir que  $m$  indices de temps. Les schémas les plus populaires sont des schémas à deux ou trois niveaux.

La collection des couples  $(j', n')$  qui interviennent dans l'équation discrète au point  $(j, n)$  est appelé *stencil* du schéma (qu'on peut essayer de traduire par support). En général, plus le stencil est large, plus le schéma est coûteux et difficile à programmer.

## Consistance et ordre de précision

De manière générale, un schéma aux différences finies est défini, pour tous les indices possibles  $j \in \mathbb{Z}$  et  $n \in \mathbb{N}$ , par la formule

$$F_{\Delta x, \Delta t} \left( \left\{ u_{j+k}^{n+m} \right\}_{\substack{k^- \leq k \leq k^+ \\ m^- \leq m \leq m^+}} \right) = 0$$

où les entiers  $k^-$ ,  $k^+$ ,  $m^-$  et  $m^+$  définissent la largeur du stencil du schéma.

Un des buts de l'analyse numérique est de comparer et de sélectionner les meilleurs schémas suivant des critères de précision, de coût ou de robustesse.

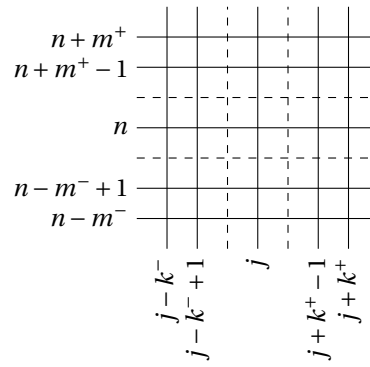


FIGURE 1: Exemple de stencil pour un schéma à  $m^- + m^+ + 1$  niveaux et  $k^- + k^+ + 1$  points.

**Erreur de troncature** Considérons le schéma aux différences finies  $F_{\Delta x, \Delta t}(\{u_{j+k}^{n+m}\})$  pour l'approximation de l'équation aux dérivées partielles  $F(u) = 0$ . Soit  $u(x, t)$  une solution suffisamment régulière de cette équation. On appelle *erreur de troncature* du schéma la quantité

$$\tau_j^n \equiv F_{\Delta x, \Delta t} \left( \left\{ u(x + k\Delta x, t + m\Delta t) \right\}_{\substack{k^- \leq k \leq k^+ \\ m^- \leq m \leq m^+}} \right).$$

Concrètement on calcule l'erreur de troncature d'un schéma en remplaçant  $u_{j+k}^{n+m}$  dans la formule par  $u(x + k\Delta x, t + m\Delta t)$ .

**Consistance** Le schéma aux différences finies  $F_{\Delta x, \Delta t}(\{u_{j+k}^{n+m}\})$  est dit *consistant* avec l'équation aux dérivées partielles  $F(u) = 0$  si l'*erreur de troncature* du schéma tend vers zéro, uniformément par rapport à  $(x, t)$ , lorsque  $\Delta x$  et  $\Delta t$  tendent vers zéro indépendamment.

**Ordre de consistance** Le schéma aux différences finies  $F_{\Delta x, \Delta t}(\{u_{j+k}^{n+m}\})$  est *précis à l'ordre  $p$  en espace et à l'ordre  $q$  en temps* avec l'équation aux dérivées partielles  $F(u) = 0$  si l'*erreur de troncature* du schéma tend vers zéro comme  $O((\Delta x)^p + (\Delta t)^q)$  lorsque  $\Delta x$  et  $\Delta t$  tendent vers zéro.

## Convergence

La convergence d'un schéma aux différences finies est une propriété naturelle qui assure que, pour des valeurs suffisamment petites des pas d'espace et de temps, la solution numérique calculée sera proche de la solution exacte du problème de départ.

**Convergence** Le schéma aux différences finies  $F_{\Delta x, \Delta t}(\{u_{j+k}^{n+m}\})$  utilisé pour la résolution numérique de l'équation aux dérivées partielles  $F(u) = 0$  est *convergent* si, pour toute solution  $u$  de l'équation  $F(u) = 0$ , la suite  $u_j^n$  converge vers  $u(x_j, t^n)$  avec  $(\Delta x, \Delta t) \rightarrow (0, 0)$ .

Malheureusement la notion de consistance ne suffit pas à garantir que le schéma soit convergent comme on verra sur des exemples. Pour introduire un critère (très pratique) qui permet de voir si un schéma donné est convergent nous allons introduire la notion de stabilité.

## Stabilité

Autre les outils qui permettent de comparer les performances des différents schémas, on doit également choisir les pas  $\Delta x$  et  $\Delta t$  de sorte que le schéma correspondant donnera une solution approchée correcte, au sens où une petite perturbation de la donnée initiale  $g$  n'induit pas une perturbation trop grande sur la solution calculée au temps final. Cette idée, déjà rencontrée pour la définition de problème bien posé, est à la base du concept de stabilité pour les schémas aux différences finies.

Soit  $u^n \equiv (u_j^n)_{1 \leq j \leq N-1}$  la solution numérique d'un schéma.

**Stabilité** Un schéma aux différences finies est dit *stable* pour la norme  $\|\cdot\|$  s'il existe une constante  $K > 0$  indépendante de  $\Delta x$  et  $\Delta t$  (lorsque ces valeurs tendent vers zéro) telle que

$$\|u^n\| \leq K \|u^0\| \quad \text{pour tout } n \geq 0,$$

quelle que soit la donnée initiale  $u^0$ . Si cette inégalité n'a lieu que pour des pas  $\Delta x$  et  $\Delta t$  astreints à certaines inégalités, on dit que le schéma est *conditionnellement stable*.

On définit les normes classiques

$$\|u^n\|_p = \left( \sum_{j=1}^{N-1} \Delta x |u_j^n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{pour } 1 \leq p < +\infty,$$

$$\|u^n\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq N-1} |u_j^n|.$$

**Schéma linéaire** Un schéma aux différences finies est dit linéaire si la formule  $F_{\Delta x, \Delta t}(\{u_{j+k}^{n+m}\}) = 0$  qui le définit est linéaire par rapport à ses arguments  $u_{j+k}^{n+m}$ .

La stabilité d'un schéma linéaire à deux niveaux est facile à interpréter. En effet, par linéarité tout schéma linéaire à deux niveaux peut s'écrire sous la forme condensée

$$\mathbb{A}u^n = u^{n+1},$$

où  $\mathbb{A}$  est une matrice (dite d'itération) et on obtient  $\mathbb{A}^n u^0 = u^{n+1}$  (attention, la notation  $\mathbb{A}^n$  désigne ici la puissance  $n$ -ème de  $\mathbb{A}$ ) et par conséquent la stabilité du schéma est équivalente à

$$\|\mathbb{A}^n u^0\| \leq K \|u^0\|, \quad \forall n \geq 0, \forall u^0 \in \mathbb{R}^{N-1}.$$

Introduisant la norme matricielle subordonnée  $\|\mathbb{M}\| = \sup_{u \in \mathbb{R}^{N-1}, u \neq 0} \frac{\|\mathbb{M}u\|}{\|u\|}$ , la stabilité du schéma est équivalente à

$$\|\mathbb{A}^n\| \leq K \quad \forall n \geq 0$$

qui veut dire que la suite des puissances de  $\mathbb{A}$  est bornée.

**Principe du maximum discret - stabilité  $L^\infty$**  Un schéma aux différences finies vérifie le principe du maximum discret si pour tout  $n \geq 0$  et tout  $1 \leq j \leq N-1$  on a

$$\min_{0 \leq j \leq N} (u_j^0) \leq u_j^n \leq \max_{0 \leq j \leq N} (u_j^0)$$

quelle que soit la donnée initiale  $u^0$ .

### Stabilité $L^2$

La norme  $L^2$  se prête bien à l'étude de la stabilité grâce à l'outil très puissant de l'analyse de Fourier. Supposons désormais que les conditions aux limites pour l'équation aux dérivées partielles sont des conditions aux limites de périodicité. À chaque vecteur  $u^n \equiv (u_j^n)_{1 \leq j \leq N-1}$  on associe une fonction  $u^n(x)$ , constante par morceaux, périodique, définie sur  $[\alpha; \beta]$  par

$$u^n(x) = u_j^n \quad \text{si } x_{j-1/2} < x < x_{j+1/2}$$

avec  $x_{j+1/2} = \alpha + (j+1/2)\Delta x$  pour  $0 \leq j \leq N$ ,  $x_{-1/2} = \alpha$  et  $x_{N+1/2} = \beta$ . Ainsi définie, la fonction  $u^n(x)$  appartient à  $L^2([\alpha; \beta])$ , elle peut donc se décomposer en la somme de Fourier

$$u^n(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{u}^n(k) e^{2i\pi kx}$$

avec  $\hat{u}^n(k) = \int_\alpha^\beta u^n(x) e^{-2i\pi kx} dx$  et la formule de Plancherel

$$\int_\alpha^\beta |u^n(x)|^2 dx = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{u}^n(k)|^2.$$

Remarquons que même si  $u^n(x)$  est une fonction réelle, les coefficients  $\hat{u}^n(k)$  de la série de Fourier sont complexes. Une propriété importante pour l'étude de stabilité de la transformée de Fourier des fonctions périodiques est la suivantes : si on note  $v^n(x) = u^n(x + \Delta x)$  alors  $\hat{v}^n(k) = \hat{u}^n(k) e^{2i\pi k \Delta x}$ .

«**Recette**» pour un schéma à deux niveaux On injecte dans le schéma un mode de Fourier, on obtient ainsi

$$u_j^n = A(k)^n e^{2i\pi kx_j}$$



et on en déduit la valeur du facteur d'amplification  $A(k)$ . Rappelons que pour l'instant nous nous sommes limité au cas scalaire, c'est-à-dire que  $A(k)$  est un nombre complexe. On appelle *condition de stabilité de Von Neumann* l'inégalité

$$|A(k)| \leq 1 \quad \text{pour tout mode } k \in \mathbb{Z}.$$

Si la condition de stabilité de Von Neumann est satisfaite (avec éventuellement des restrictions sur  $\Delta x$  et  $\Delta t$ ), alors le schéma est stable pour la norme  $L^2$ , sinon il est instable.

Dans la plupart des cas, on va trouver des restrictions sur  $\Delta x$  et  $\Delta t$  pour obtenir la stabilité au sens  $L^2$  du schéma. Comme  $\Delta x$  est initialement fixé, ceci nous oblige à nous donner un pas de temps  $\Delta t$  petit. Plus cette condition de stabilité est restrictive, plus le schéma sera coûteux à utiliser d'un point de vue du temps de calcul. Au contrario, les schémas inconditionnellement stables ne nécessitent aucune restriction particulière et donc peuvent être à priori utilisés pour une valeur quelconque de  $\Delta t$ . Ceci ne signifie pas pour autant qu'ils seront des «bons» schémas, et notamment que la solution calculée sera proche de la solution exacte. En effet, un choix trop grand de  $\Delta t$  donne une mauvaise approximation de la dérivée partielle par rapport au temps. En pratique, un schéma instable est inutilisable car, même si on part d'une donnée initiale spécialement préparée de manière à ce qu'aucun des modes de Fourier instables ne soit excité par elle, les inévitables erreurs d'arrondi vont créer des composantes non nulles (bien que très petites) de la solution sur ces modes instables. La croissance exponentielle de ces modes instables entraîne qu'après seulement quelque pas en temps ces modes deviennent énormes et polluent complètement le reste de la solution numérique.

## Stabilité + Consistance = Convergence

**Théorème de Lax** Soit  $u(x, t)$  la solution suffisamment régulière de l'équation aux dérivées partielles  $F(u) = 0$  avec des conditions aux limites appropriées. Soit  $u_j^n$  la solution numérique discrète obtenue par un schéma aux différences finies avec la donnée initiale  $u_j^0 = g(x_j)$ . Si le schéma est linéaire, à deux niveaux, consistant et stable pour une norme  $\|\cdot\|$ , alors le schéma est convergent au sens où

$$\forall T > 0, \quad \lim_{\Delta x, \Delta t \rightarrow 0} \left( \sup_{t^n \leq T} \|u_j^n - u(x_j, t^n)\| \right) = 0.$$

De plus, si le schéma est précis à l'ordre  $p$  en espace et à l'ordre  $q$  en temps, alors pour tout  $T > 0$  il existe une constante  $C_T > 0$  telle que

$$\sup_{t^n \leq T} \|u_j^n - u(x_j, t^n)\| \leq C_T ((\Delta x)^p + (\Delta t)^q).$$

D'un point de vue pratique ce théorème est très rassurant : si l'on utilise un schéma consistant (ils sont construits pour cela en général) et que l'on n'observe pas d'oscillations numériques (c'est-à-dire qu'il est stable), alors la solution numérique est proche de la solution exacte (le schéma converge).

## Équation équivalente : diffusion et dispersion

Pour comparer divers schémas consistants et stables (donc convergents) d'un point de vue pratique, un concept pertinent (quoique formel) est celui d'équation équivalente.

**Équation équivalente** On appelle équation équivalente d'un schéma l'équation obtenue en ajoutant au modèle étudié la partie principale (c'est-à-dire le terme d'ordre le plus bas) de l'erreur de troncature.

Tous les schémas qu'on va voir sont consistants. Cependant, si on ajoute à l'équation la partie principale de l'erreur de troncature d'un schéma, alors ces schémas non seulement sont encore consistants avec cette nouvelle équation «équivalente», mais sont même strictement plus précis pour cette équation équivalente. En d'autres termes, les schémas sont «plus consistants» avec l'équation équivalente qu'avec l'équation qu'on veut approcher.

Cette équation va nous donner des renseignements précieux sur le comportement numérique du schéma. Le coefficient de diffusion (c'est-à-dire le coefficient de la dérivée seconde) de l'équation équivalente est appelé diffusion numérique. S'il est grand on dit que le schéma est diffusif (ou dissipatif). Le comportement typique d'un schéma diffusif est sa tendance à étaler artificiellement les données initiales au cours du temps. Si le schéma est précis d'ordre 2 alors l'équation équivalente ne contient pas de terme de diffusion mais un terme du troisième ordre, dit dispersif. Le comportement typique d'un schéma dispersif est qu'il produit des oscillations lorsque la solution est discontinue. En effet, le terme dispersif modifie la vitesse de propagation des modes de Fourier de la solution (particulièrement des modes de fréquence élevée), alors qu'un terme diffusif ne fait qu'atténuer son amplitude.



# 1 TP1 - résolution de l'équation de transport

On considère le problème de transport en une dimension d'espace dans le domaine borné  $[0; L]$  avec une vitesse  $c$  constante non nulle et des conditions aux limites de périodicité

$$\begin{cases} \partial_t u(x, t) + c \partial_x u(x, t) = 0 & \text{pour } (x, t) \in [0; L] \times [0; T], \\ u(x + L, t) = u(x, t) & \text{pour } (x, t) \in [0; L] \times [0; T], \\ u(x, 0) = g(x) & \text{pour } x \in [0; L]. \end{cases}$$

On souhaite calculer la valeur de la solution  $u$  en un ensemble discret de points en espace et en temps. Plus précisément, en fixant un pas d'espace  $\Delta x = L/N > 0$  ( $N$  entier positif) et un pas de temps  $\Delta t > 0$ , on cherche à calculer  $u_j^n \approx u(j\Delta x, n\Delta t)$  la valeur d'une solution discrète approchée au point  $(x_j, t^n)$ . On sait que  $u(x, t) = g(x - ct)$  est la solution exacte. Les conditions aux limites de périodicité conduisent aux égalités  $u_1^n = u_{N+1}^n$  pour tout  $n \geq 0$ , par conséquent l'inconnue discrète à chaque pas de temps est un vecteur  $u^n = (u_j^n)_{1 \leq j \leq N}$ .

Notre stratégie consiste à remplacer des opérateurs différentiels par des quotients aux différences finies. En utilisant différentes façon d'évaluer les dérivées partielles, beaucoup de choix de schémas sont possibles. Nous voulons en étudier ici quelques uns.

Soit  $\alpha := c \frac{\Delta t}{\Delta x}$ . On considérera les schémas aux différences finies suivants :

- ❶ le schéma décentré à gauche

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} = 0 \quad \text{i.e.} \quad u_j^{n+1} = u_j^n - \alpha(u_j^n - u_{j-1}^n)$$

- ❷ le schéma décentré à droite

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} = 0 \quad \text{i.e.} \quad u_j^{n+1} = u_j^n - \alpha(u_{j+1}^n - u_j^n)$$

- ❸ le schéma centré

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0 \quad \text{i.e.} \quad u_j^{n+1} = u_j^n - \alpha \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2}$$

- ❹ le schéma upwind (décentré amont)

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \frac{c + |c|}{2\Delta x} (u_j^n - u_{j-1}^n) + \frac{c - |c|}{2\Delta x} (u_{j+1}^n - u_j^n) = 0$$

i.e.

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \begin{cases} \frac{\alpha + |\alpha|}{2} (u_j^n - u_{j-1}^n) + \frac{\alpha - |\alpha|}{2} (u_{j+1}^n - u_j^n) & \text{si } \alpha > 0, \\ \frac{\alpha + |\alpha|}{2} (u_j^n - u_{j-1}^n) & \text{si } \alpha < 0. \end{cases}$$

- ❺ le schéma de Lax-Friedrichs

$$\frac{u_j^{n+1} - \frac{u_{j+1}^n + u_{j-1}^n}{2}}{\Delta t} + c \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0 \quad \text{i.e.} \quad u_j^{n+1} = \frac{1 - \alpha}{2} u_{j+1}^n + \frac{1 + \alpha}{2} u_{j-1}^n$$

- ❻ le schéma de Lax-Wendroff

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} - \frac{c^2 \Delta t}{2} \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{(\Delta x)^2} = 0$$

i.e.

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \alpha \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2} + \alpha^2 \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{2}$$

⑦ le schéma de Beam-Warming (pour  $c > 0$ )

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c \frac{g(u_{j-1}^n, u_j^n) - g(u_{j-2}^n, u_{j-1}^n)}{\Delta x} = 0 \quad \text{avec } g(A, B) = \frac{c(c \frac{\Delta t}{\Delta x} - 1)}{2} A + \frac{c(3 - c \frac{\Delta t}{\Delta x})}{2} B$$

i.e.

$$u_j^{n+1} = \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2} u_{j-2}^n + \alpha(2 - \alpha) u_{j-1}^n + \frac{(\alpha - 1)(\alpha - 2)}{2} u_j^n$$

⑧ le schéma de Fromm (pour  $c > 0$ )

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c \frac{g(u_{j-1}^n, u_j^n, u_{j+1}^n) - g(u_{j-2}^n, u_{j-1}^n, u_j^n)}{\Delta x} = 0 \quad \text{avec } g(A, B, C) = \frac{c(c \frac{\Delta t}{\Delta x} - 1)}{4} A + cB + \frac{c(1 - c \frac{\Delta t}{\Delta x})}{4} C$$

i.e.

$$u_j^{n+1} = \frac{\alpha(\alpha - 1)}{4} u_{j-2}^n + \frac{\alpha(5 - \alpha)}{4} u_{j-1}^n + \frac{(1 - \alpha)(\alpha + 4)}{4} u_j^n + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{4} u_{j+1}^n$$

⑨ le schéma anti-diffusif de Després-Lagoutière (pour  $c > 0$ )

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c \frac{g(u_{j-1}^n, u_j^n, u_{j+1}^n) - g(u_{j-2}^n, u_{j-1}^n, u_j^n)}{\Delta x} = 0$$

i.e.

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \alpha(g(u_{j-1}^n, u_j^n, u_{j+1}^n) - g(u_{j-2}^n, u_{j-1}^n, u_j^n))$$

avec

$$g(L, C, R) = \begin{cases} A, & \text{si } R \leq A, \\ B, & \text{si } R \geq B, \\ R, & \text{sinon,} \end{cases}$$

où

$$A = \max(L, C) + \frac{C - \max(L, C)}{\alpha}, \quad B = \min(L, C) + \frac{C - \min(L, C)}{\alpha}.$$

## 1.1 Code

**Langage** : Fortran 90

**Éditeur** : Programmer's Notepad (sous Windows, coloration syntaxique de Fortran 90)

**Système d'exploitation** : Linux (via Cygwin)

**Visualisation** : Gnuplot

Copier dans un sous-dossier du dossier C:/cygwin le fichier transport.f90 et le dossier data où seront sauvegardés les sorties.

Lancer Cygwin depuis le menu : Start → Cygwin-X → XWin-Serveur

Pour compiler le programme transport.f90 on utilisera la commande

```
gfortran transport.f90 -o transport.o
```

L'exécutable ainsi créé s'appelle transport.o qu'on lancera en tapant

```
./transport.o
```

Les deux instruction peuvent être exécutés l'une à la suite de l'autre en utilisant && :

```
gfortran transport.f90 -o transport.o && ./transport.o
```

Les résultats sont sauvegardés dans les fichiers transportN.dat où N=0...Smax est le numéro de la sauvegarde. Ces fichiers se trouvent dans le dossier data. Un fichier transportN.dat comporte NX lignes et 11 colonnes :

x	décentré	décentré	centré	upwind	lax-	lax-	beam-	fromm	antidiffusif
	gauche	droite			friedrichs	wendroff	warming		

Pour comparer la solution approchée du schéma XXX avec la solution exacte au cours du temps, on tapera

```
cd data
gnuplot plot_XXX.gnu
```

Pour comparer les solutions approchées des schémas avec la solution exacte à l'instant final et sauvegarder l'image dans le fichier `comparaison_finale.png` on tapera

```
gnuplot plot_comaparaision_finale.gnu
```

Pour revenir au dossier précédent taper

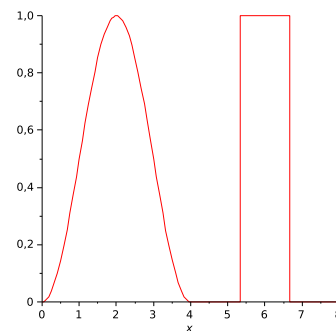
```
cd ..
```

## 1.2 Exercice

Soit la largeur du domaine  $L = 8$  et le temps final  $T = 24$ .

On considère la condition initiale

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sin\left(\frac{4\pi}{L}x - \frac{\pi}{2}\right) & \text{si } x \in \left]0; \frac{L}{2}\right[ , \\ 0 & \text{si } x \in \left] \frac{L}{2}; \frac{2L}{3} \right[ \cup \left] \frac{5L}{6}; L \right[ , \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$



- ① Compléter le code avec les schémas qui manquent (lorsque le schéma a été donné pour  $c > 0$ , réfléchir à comment il faut le modifier pour  $c < 0$  et compléter le code).
- ② Pour  $c = 1$  et une grille de  $Nx = 50$  mailles, comparer les schémas ❶-❹ : d'abord on prendra la constante de Courant-Friedrichs-Levy égale à  $cf1 = 0.99$ , puis  $cf1 = 0.1$  et enfin  $cf1 = 1.1$ . Que remarque-t-on à propos de la stabilité? Que remarque-t-on à propos de la diffusion? Et de la dispersion? Répéter les calculs sur une grille de  $Nx = 500$  mailles. Répéter les calculs pour  $c = -1$ .
- ③ Étudier (analytiquement) la stabilité  $L^2$  et l'ordre de consistance des schémas ❷, ❸, ❺ et ❻ comme dans les exemples ci-dessous ; en déduire une condition CFL le cas échéant. On vérifiera notamment que
  - ▷ le schéma ❷ est stable  $L^2$  sous condition CFL  $-1 < \alpha < 0$  et consistants d'ordre 1 en temps et en espace,
  - ▷ le schéma ❸ est stable  $L^2$  sous condition CFL  $|\alpha| < 1$  et consistant d'ordre 1 en temps et en espace,
  - ▷ les schémas ❺ et ❻ sont stables  $L^2$  sous condition CFL  $0 < \alpha < 2$  et consistants d'ordre 1 en temps et 2 en espace.

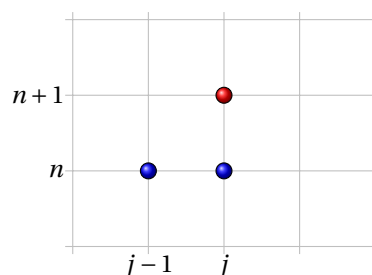
Pour l'étude de stabilité du schéma ❹ voir <http://www.math.u-psud.fr/~lagoutie/publi.html>

## 1.3 Exemples

### Étude du schéma ❶ (décentré à gauche)

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} = 0 \quad \text{i.e.} \quad u_j^{n+1} = u_j^n - \alpha(u_j^n - u_{j-1}^n)$$

#### Stencil



**Stabilité  $L^2$ .** On utilise l'analyse de Fourier : pour  $k \in \mathbb{Z}$ , le coefficient de Fourier  $\hat{u}^n(k)$  de la solution du schéma vérifie

$$\hat{u}^{n+1}(k) = \left[ 1 - \alpha + \alpha e^{-i2\pi k \Delta x} \right] \hat{u}^n(k).$$

En notant  $\xi \equiv 2\pi k \Delta x$ , on a

$$\begin{aligned} \hat{u}^{n+1}(k) &= \left[ 1 - \alpha + \alpha e^{-i\xi} \right] \hat{u}^n(k) = \\ &= \left[ 1 - \alpha + \alpha (\cos(-\xi) + i \sin(-\xi)) \right] \hat{u}^n(k) = \\ &= [1 - \alpha + \alpha \cos(\xi) - i \alpha \sin(\xi)] \hat{u}^n(k). \end{aligned}$$

Après simplification on obtient

$$|\hat{u}^{n+1}(k)|^2 = |A(k)|^2 |\hat{u}^n(k)|^2$$

avec

$$\begin{aligned} |A(k)|^2 &\equiv [1 - \alpha + \alpha \cos(\xi)]^2 + \alpha^2 \sin^2 \xi = \\ &= 1 + 2\alpha(\alpha - 1)(1 - \cos(\xi)). \end{aligned}$$

On a

$$|A(k)| \leq 1 \quad \forall k \in \mathbb{Z} \iff 2\alpha(\alpha - 1)(1 - \cos(\xi)) \geq 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{R} \iff \alpha(\alpha - 1) \geq 0.$$

Pour  $0 \leq \alpha \leq 1$  on a  $|A(k)| \leq 1$  pour toute fréquence  $k \in \mathbb{Z}$ , ce qui prouve que le schéma est stable en norme  $L^2$  sous la condition CFL  $0 \leq \alpha \leq 1$ .

**Ordre de consistance.** On remplace  $u_i^m$  par  $u(x_i, t^m)$  où  $u$  est une fonction régulière,  $i = j - 1, j$  et  $m = n, n + 1$ . On définit l'erreur de troncature par

$$\tau_j^n \equiv \frac{u(x_j, t^{n+1}) - u(x_j, t^n)}{\Delta t} + c \frac{u(x_j, t^n) - u(x_{j-1}, t^n)}{\Delta x}.$$

On fait un développement de Taylor en  $x$  autour du point  $x_j$  et en  $t$  autour du point  $t^n$  et, comme  $u$  est solution de l'équation  $\partial_t u = -c \partial_x u$ , on a

$$\begin{aligned} u(x_{j-1}, t^n) &= u(x_j, t^n) - \Delta x \frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t^n) + \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t^n) + O((\Delta x)^3), \\ u(x_j, t^{n+1}) &= u(x_j, t^n) + \Delta t \frac{\partial u}{\partial t}(x_j, t^n) + \frac{(\Delta t)^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j, t^n) + O((\Delta t)^3) \\ &= u(x_j, t^n) + \Delta t \left( -c \frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t^n) \right) + \frac{(\Delta t)^2}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left( -c \frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t^n) \right) + O((\Delta t)^3) \\ &= u(x_j, t^n) - c \Delta t \frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t^n) - c \frac{(\Delta t)^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial t}(x_j, t^n) \right) + O((\Delta t)^3) \\ &= u(x_j, t^n) - c \Delta t \frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t^n) + c^2 \frac{(\Delta t)^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t^n) + O((\Delta t)^3). \end{aligned}$$

Par conséquent l'erreur de troncature se réécrit

$$\begin{aligned} \tau_j^n &\equiv \frac{u(x_j, t^{n+1}) - u(x_j, t^n)}{\Delta t} + c \frac{u(x_j, t^n) - u(x_{j-1}, t^n)}{\Delta x} \\ &= \left( c^2 \frac{\Delta t}{2} - c \frac{\Delta x}{2} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t^n) + O((\Delta x)^2 + (\Delta t)^2) \\ &= O((\Delta x) + (\Delta t)). \end{aligned}$$

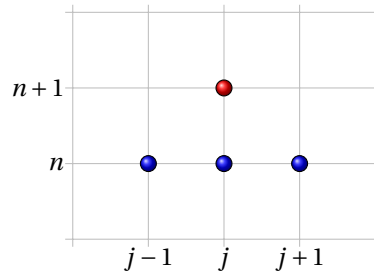
Le schéma est donc d'ordre 1 en temps et en espace.

*On aurait pu s'arrêter un ordre avant dans les développements de Taylor, mais vous voyez bien que même si on va plus loin on obtient le bon résultat! Cependant, dans la consigne de l'exercice je vous ai suggéré l'ordre pour éviter de faire des calculs inutiles. Dans les exemples qui suivent on va s'arrêter au minimum nécessaire.*

### Exemple : étude du schéma $\textcircled{B}$ (centré)

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0 \quad \text{i.e.} \quad u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\alpha}{2} (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n)$$

**Stencil**



**Stabilité  $L^2$ .** On utilise l'analyse de Fourier : pour  $k \in \mathbb{Z}$ , le coefficient de Fourier  $\hat{u}^n(k)$  de la solution du schéma vérifie

$$\hat{u}^{n+1}(k) = \left[ 1 - \frac{\alpha}{2} \left( e^{i2\pi k \Delta x} - e^{-i2\pi k \Delta x} \right) \right] \hat{u}^n(k).$$

En notant  $\xi \equiv 2\pi k \Delta x$ , on a

$$\begin{aligned} \hat{u}^{n+1}(k) &= \left[ 1 - \frac{\alpha}{2} \left( e^{i\xi} - e^{-i\xi} \right) \right] \hat{u}^n(k) = \\ &= \left[ 1 - \frac{\alpha}{2} \left( \cos(\xi) + i \sin(\xi) - \cos(-\xi) - i \sin(-\xi) \right) \right] \hat{u}^n(k) = \\ &= [1 - i\alpha \sin(\xi)] \hat{u}^n(k). \end{aligned}$$

Après simplification on obtient

$$|\hat{u}^{n+1}(k)|^2 = |A(k)|^2 |\hat{u}^n(k)|^2$$

avec

$$|A(k)|^2 \equiv 1 + \alpha^2 \sin^2(\xi).$$

On a

$$|A(k)| \leq 1 \quad \forall k \in \mathbb{Z} \iff \alpha^2 \sin^2(\xi) \leq 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{R} \iff \alpha \in \mathbb{R}.$$

Ce qui prouve que le schéma est inconditionnellement instable en norme  $L^2$ .

**Ordre de consistance.** On remplace  $u_j^n$  par  $u(x_j, t^n)$  où  $u$  est une fonction régulière,  $i = j-1, j, j+1$  et  $m = n, n+1$ . On définit l'erreur de troncature par

$$\tau_j^n \equiv \frac{u(x_j, t^{n+1}) - u(x_j, t^n)}{\Delta t} + c \frac{u(x_{j+1}, t^n) - u(x_{j-1}, t^n)}{2\Delta x}.$$

On fait un développement de Taylor en  $x$  autour du point  $x_j$  et en  $t$  autour du point  $t^n$  et, comme  $u$  est solution de l'équation  $\partial_t u = -c \partial_x u$ , on a

$$\begin{aligned} u(x_{j-1}, t^n) &= u(x_j, t^n) - \Delta x \frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t^n) + \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t^n) + O((\Delta x)^3), \\ u(x_{j+1}, t^n) &= u(x_j, t^n) + \Delta x \frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t^n) + \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t^n) + O((\Delta x)^3), \\ u(x_j, t^{n+1}) &= u(x_j, t^n) + \Delta t \frac{\partial u}{\partial t}(x_j, t^n) + O((\Delta t)^2) \\ &= u(x_j, t^n) + \Delta t \left( -c \frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t^n) \right) + O((\Delta t)^2) \\ &= u(x_j, t^n) - c \Delta t \frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t^n) + O((\Delta t)^2). \end{aligned}$$

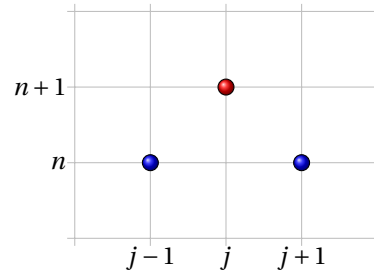
Par conséquent l'erreur de troncature se réécrit

$$\tau_j^n \equiv \frac{u(x_j, t^{n+1}) - u(x_j, t^n)}{\Delta t} + c \frac{u(x_{j+1}, t^n) - u(x_{j-1}, t^n)}{2\Delta x} = O((\Delta x)^2 + (\Delta t)).$$

Le schéma est donc d'ordre 1 en temps et 2 en espace.

**Exemple : étude du schéma (Lax-Friedrichs)**

$$\frac{u_j^{n+1} - \frac{u_{j+1}^n + u_{j-1}^n}{2}}{\Delta t} + c \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0 \quad \text{i.e.} \quad u_j^{n+1} = \frac{1-\alpha}{2} u_{j+1}^n + \frac{1+\alpha}{2} u_{j-1}^n$$

**Stencil**

**Stabilité**  $L^2$ . On utilise l'analyse de Fourier : pour  $k \in \mathbb{Z}$ , le coefficient de Fourier  $\hat{u}^n(k)$  de la solution du schéma vérifie

$$\hat{u}^{n+1}(k) = \left[ \frac{1-\alpha}{2} e^{i2\pi k \Delta x} - \frac{1+\alpha}{2} e^{-i2\pi k \Delta x} \right] \hat{u}^n(k).$$

En notant  $\xi \equiv 2\pi k \Delta x$ , on a

$$\hat{u}^{n+1}(k) = \left[ \frac{1-\alpha}{2} e^{i\xi} + \frac{1+\alpha}{2} e^{-i\xi} \right] \hat{u}^n(k) = [\cos(\xi) - i\alpha \sin(\xi)] \hat{u}^n(k).$$

Après simplification on obtient

$$|\hat{u}^{n+1}(k)|^2 = |A(k)|^2 |\hat{u}^n(k)|^2$$

avec

$$|A(k)|^2 \equiv \cos^2(\xi) + \alpha^2 \sin^2(\xi).$$

On a

$$|A(k)| \leq 1 \quad \forall k \in \mathbb{Z} \iff \cos^2(\xi) + \alpha^2 \sin^2(\xi) \geq 1 \quad \forall \xi \in \mathbb{R} \iff \alpha^2 \leq 1.$$

Ce qui prouve que le schéma est stable en norme  $L^2$  sous la condition CFL  $|\alpha| \leq 1$ .

**Ordre de consistance.** On remplace  $u_i^m$  par  $u(x_i, t^m)$  où  $u$  est une fonction régulière,  $i = j-1, j, j+1$  et  $m = n, n+1$ . On définit l'erreur de troncature par

$$\tau_j^n \equiv \frac{u(x_j, t^{n+1}) - \frac{u(x_{j+1}, t^n) + u(x_{j-1}, t^n)}{2}}{\Delta t} + c \frac{u(x_{j+1}, t^n) - u(x_{j-1}, t^n)}{2\Delta x}.$$

On fait un développement de Taylor en  $x$  autour du point  $x_j$  et en  $t$  autour du point  $t^n$  et, comme  $u$  est solution de l'équation  $\partial_t u = -c \partial_x u$ , on a

$$\begin{aligned} u(x_{j-1}, t^n) &= u(x_j, t^n) - \Delta x \frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t^n) + O((\Delta x)^2), \\ u(x_{j+1}, t^n) &= u(x_j, t^n) + \Delta x \frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t^n) + O((\Delta x)^2), \\ u(x_j, t^{n+1}) &= u(x_j, t^n) + \Delta t \frac{\partial u}{\partial t}(x_j, t^n) + O((\Delta t)^2) \\ &= u(x_j, t^n) + \Delta t \left( -c \frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t^n) \right) + O((\Delta t)^2) \\ &= u(x_j, t^n) - c \Delta t \frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t^n) + O((\Delta t)^2). \end{aligned}$$

Par conséquent l'erreur de troncature se réécrit

$$\tau_j^n \equiv \frac{u(x_j, t^{n+1}) - u(x_j, t^n)}{\Delta t} + c \frac{u(x_{j+1}, t^n) - u(x_{j-1}, t^n)}{2\Delta x} = O\left((\Delta x) + (\Delta t) + \frac{(\Delta x)^2}{\Delta t}\right).$$

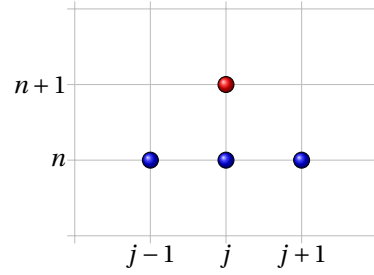
Étant donné que, sous la condition CFL calculée précédemment,  $O\left(\frac{(\Delta x)^2}{\Delta t}\right) = O(\Delta x)$ , le schéma est donc d'ordre 1 en temps et en espace.

**Exemple : étude du schéma ⑥ (Lax-Wendroff)**

Pour  $j = 0, \dots, N-1$  et  $n \in \mathbb{N}$ , le schéma de Lax-Wendroff s'écrit

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} - c^2 \Delta t \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{2(\Delta x)^2} = 0 \quad \text{i.e.} \quad u_j^{n+1} = u_j^n - \alpha \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2} + \alpha^2 \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{2}$$



**Stencil**

**Stabilité**  $L^2$ . On utilise l'analyse de Fourier : pour  $k \in \mathbb{Z}$ , le coefficient de Fourier  $\hat{u}^n(k)$  de la solution du schéma vérifie

$$\hat{u}^{n+1}(k) = \left[ \frac{-\alpha + \alpha^2}{2} e^{i2\pi k \Delta x} + 1 - 2\alpha^2 + \frac{\alpha + \alpha^2}{2} e^{-i2\pi k \Delta x} \right] \hat{u}^n(k).$$

En notant  $\xi \equiv 2\pi k \Delta x$ , on a

$$\hat{u}^{n+1}(k) = \left[ \frac{-\alpha + \alpha^2}{2} e^{i\xi} + 1 - \alpha^2 + \frac{\alpha + \alpha^2}{2} e^{-i\xi} \right] \hat{u}^n(k) = [1 - \alpha^2(1 - \cos(\xi)) - i\alpha \sin(\xi)] \hat{u}^n(k).$$

Après simplification on obtient

$$|\hat{u}^{n+1}(k)|^2 = |A(k)|^2 |\hat{u}^n(k)|^2$$

avec

$$|A(k)|^2 \equiv \alpha^2(\alpha^2 - 1)(\cos(\xi) - 1)^2 + 1.$$

On a

$$|A(k)| \leq 1 \quad \forall k \in \mathbb{Z} \iff \alpha^2 \leq 1.$$

Ce qui prouve que le schéma est stable en norme  $L^2$  sous la condition CFL  $|\alpha| \leq 1$ .

**Ordre de consistance.** On remplace  $u_i^m$  par  $u(x_i, t^m)$  où  $u$  est une fonction régulière,  $i = j-1, j, j+1$  et  $m = n, n+1$ . On définit l'erreur de troncature par

$$\tau_j^n \equiv \frac{u(x_j, t^{n+1}) - u(x_j, t^n)}{\Delta t} + c \frac{u(x_{j+1}, t^n) - u(x_{j-1}, t^n)}{2\Delta x} - c^2 \Delta t \frac{u(x_{j+1}, t^n) - 2u(x_j, t^n) + u(x_{j-1}, t^n)}{2(\Delta x)^2} = 0.$$

On fait un développement de Taylor en  $x$  autour du point  $x_j$  et en  $t$  autour du point  $t^n$  et, comme  $u$  est solution de l'équation  $\partial_t u = -c \partial_x u$ , on a

$$\begin{aligned} u(x_{j-1}, t^n) &= u(x_j, t^n) - \Delta x \frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t^n) + \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t^n) + O((\Delta x)^3), \\ u(x_{j+1}, t^n) &= u(x_j, t^n) + \Delta x \frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t^n) + \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t^n) + O((\Delta x)^3), \\ u(x_j, t^{n+1}) &= u(x_j, t^n) + \Delta t \frac{\partial u}{\partial t}(x_j, t^n) + \frac{(\Delta t)^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j, t^n) + O((\Delta t)^3) \\ &= u(x_j, t^n) + \Delta t \left( -c \frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t^n) \right) + \frac{(\Delta t)^2}{2} \left( c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t^n) \right) + O((\Delta t)^3) \\ &= u(x_j, t^n) - c \Delta t \frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t^n) + c^2 \frac{(\Delta t)^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t^n) + O((\Delta t)^3). \end{aligned}$$

Par conséquent l'erreur de troncature se réécrit

$$\tau_j^n \equiv \frac{u(x_j, t^{n+1}) - u(x_j, t^n)}{\Delta t} + c \frac{u(x_{j+1}, t^n) - u(x_{j-1}, t^n)}{2\Delta x} - c^2 \Delta t \frac{u(x_{j+1}, t^n) - 2u(x_j, t^n) + u(x_{j-1}, t^n)}{2(\Delta x)^2} = O((\Delta t)^2) + O((\Delta x)^2).$$

car, sous la condition CFL calculée précédemment,  $O(c \frac{\Delta t}{\Delta x}) = O(1)$ , le schéma est donc d'ordre 2 en temps et en espace.

# 2 TP2 - résolution d'une équation non-linéaire

## 2.1 Rappels

On cherche

$$u: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$$
$$(x, t) \mapsto u(x, t)$$

solution faible entropique du problème

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x q(u) = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, 0) = g(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

avec le flux

$$q: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$u \mapsto q(u)$$

**Courbes caractéristiques** : on appelle courbe caractéristique de l'EDP une courbe  $x = x(t)$  dans le demi-espace  $t > 0$  le long de laquelle la solution  $u$  est constante.

Si pour un point  $(x, t)$  passe une et une seule caractéristique et cette caractéristique a pied en  $(\xi, 0)$ , alors  $u(x, t) = g(\xi)$ .

La caractéristique de pied  $(\xi, 0)$  a équation

$$x(t) = \xi + q'(g(\xi))t.$$

Pour  $t$  suffisamment petit, la solution  $u$  est définie implicitement par l'équation

$$u = g(x - q'(g(\xi))t).$$

**Condition de Rankine-Hugoniot** : si deux caractéristiques s'intersectent elles génèrent une discontinuité dans la solution.

La courbe de discontinuité est appelée onde de choc et si elle est régulière et a équation  $x = s(t)$  alors  $u$  doit vérifier les relations de Rankine-Hugoniot : si on appelle  $u_R$  et  $u_L$  respectivement les traces de  $u$  à droite et à gauche de la courbe de choc, on a

$$s'(t) = \frac{q(u_R(s(t), t)) - q(u_L(s(t), t))}{u_R(s(t), t) - u_L(s(t), t)}.$$

Si  $(x_0; t_0)$  est le premier point où les caractéristiques s'intersectent, alors on obtient l'équation de la courbe de choc en résolvant l'EDO avec la condition initiale  $s(t_0) = x_0$ .

**Condition d'entropie** : une condition qui permet de sélectionner parmi les solutions faibles qui vérifient les relations de saut de Rankine-Hugoniot la solution «physique» est la condition d'entropie de Lax le long de la courbe de choc  $x = s(t)$  :

$$q(u_R(s(t), t)) < s'(t) < q(u_L(s(t), t)).$$

**Onde de raréfaction ou de détente** : dans les régions du demi-espace  $t > 0$  qui ne sont pas rejointes par les caractéristiques on construit la solution (qui se connecte avec continuité avec les autres régions du demi-espace) par des ondes de raréfaction.

Une onde de raréfaction centrée en  $(x_0, t_0)$  a équation

$$u(x, t) = (q')^{-1}\left(\frac{x - x_0}{t - t_0}\right).$$

## 2.2 Exemple : équation de Burgers

Considérons l'équation de Burgers  $\partial_t u + \partial_x \left(\frac{u^2}{2}\right) = 0$  avec la donnée initiale  $u(x, 0) = g(x)$ . Il s'agit d'une équation de type  $\partial_t u + \partial_x q(u) = 0$  avec

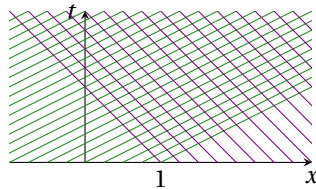
$$q(u) = \frac{u^2}{2}, \quad q'(u) = u, \quad (q')^{-1}(r) = r.$$

**Donnée "2-1"** Considérons la donnée initiale

$$u(x, 0) = g(x) \equiv \begin{cases} 2, & \text{si } x < 1, \\ -1, & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

L'équation de la caractéristique de pied  $(\xi, 0)$  est donc

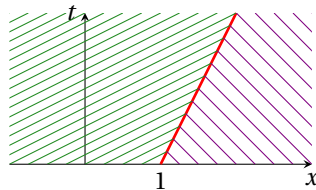
$$x(t) = \xi + q'(g(\xi))t = \xi + (g(\xi))t = \begin{cases} \xi + 2t, & \xi < 1, \\ \xi - t, & \xi > 1. \end{cases}$$



La donnée initiale du problème de Riemann a un saut décroissant et le flux est convexe donc l'unique solution entropique présente une onde de choc qui part en  $(1, 0)$ . Pour calculer l'équation  $x = s(t)$  de l'onde de choc on utilise les relations de Rankine-Hugoniot :

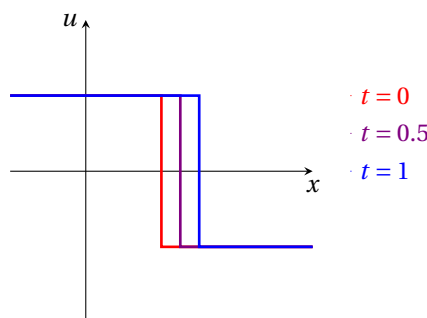
$$s'(t) = \frac{q(u_R) - q(u_L)}{u_R - u_L} = \frac{u_R + u_L}{2} = \frac{1}{2}$$

avec la donnée initiale  $s(0) = 1$ . On trouve donc  $x = s(t) = 1 + \frac{1}{2}t$ .



La solution est donc

$$u(x, t) = \begin{cases} 2, & x < 1 + \frac{1}{2}t, \\ -1, & x > 1 + \frac{1}{2}t. \end{cases}$$

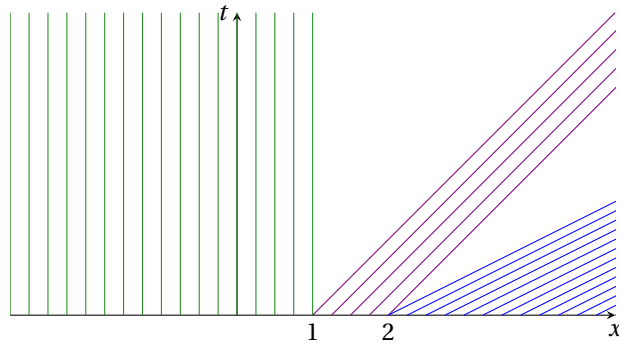


**Donnée "012"**

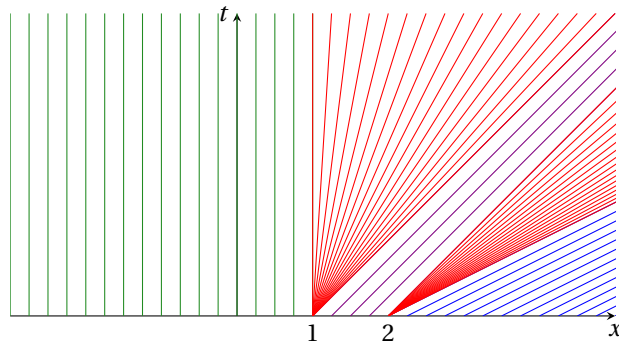
$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1, \\ 1 & \text{si } 1 < x < 2, \\ 2 & \text{si } x > 2. \end{cases}$$

L'équation de la caractéristique de pied  $(\xi, 0)$  est

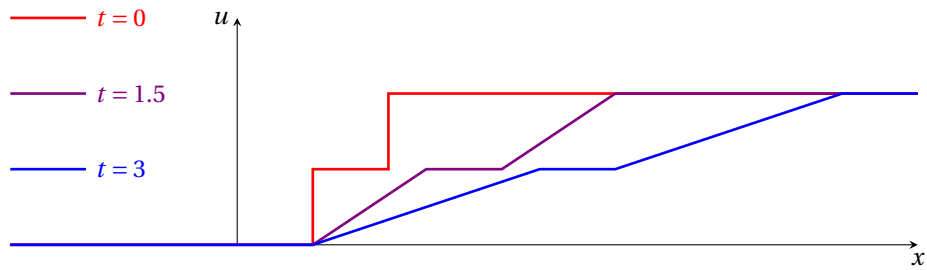
$$x(t) = \xi + q'(g(\xi))t = \xi + (g(\xi))t = \begin{cases} \xi, & \xi < 1, \\ \xi + t, & 1 < \xi < 2, \\ \xi + 2t, & \xi > 2. \end{cases}$$



La donnée initiale a deux sauts croissants, un en  $x = 1$  et l'autre en  $x = 2$ . Puisque  $q$  est convexe, on s'attend à ce que la solution faible entropique présente deux ondes de raréfaction centrées l'une en  $(1, 0)$  et l'autre en  $(2, 0)$ .



$$u(x, t) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 1, \\ \frac{x-1}{t}, & \text{si } 1 < x < 1+t, \\ 1, & \text{si } 1+t < x < 2+t, \\ \frac{x-2}{t}, & \text{si } 2+t < x < 2+2t, \\ 2, & \text{si } x > 2t+2, \end{cases}$$



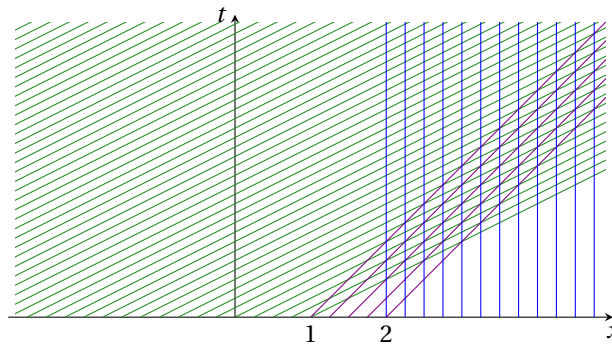
**Donnée "210"** Considérons la donnée initiale

$$g(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < 1, \\ 1 & \text{si } 1 < x < 2, \\ 0 & \text{si } x > 2. \end{cases}$$

Elle a deux sauts décroissants, un en  $x = 1$  et un en  $x = 2$ . Puisque  $q$  est convexe, on s'attend à ce que la solution faible entropique présente deux ondes de choc qui partent de  $(1, 0)$  et de  $(2, 0)$ .

▷ En effet, l'équation de la caractéristique de pied  $(\xi, 0)$  est

$$x(t) = \xi + q'(g(\xi))t = \xi + (g(\xi))t = \begin{cases} \xi + 2t, & \xi < 1, \\ \xi + t, & 1 < \xi < 2, \\ \xi, & \xi > 2. \end{cases}$$



▷ Pour calculer les équations des deux ondes de choc on utilise les relations de Rankine-Hugoniot :

▷ choc de pied (1, 0)

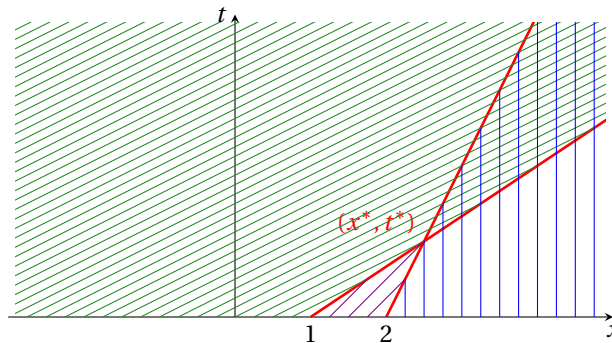
$$\begin{cases} s'(t) = \frac{q(u_R) - q(u_L)}{u_R - u_L} = \frac{(u_R)^2 - (u_L)^2}{2(u_R - u_L)} = \frac{1-4}{2(1-2)} = \frac{3}{2} \\ s(0) = 1 \end{cases}$$

d'où  $x = s(t) = \frac{3}{2}t + 1$  ;

▷ choc de pied (2, 0)

$$\begin{cases} s'(t) = \frac{q(u_R) - q(u_L)}{u_R - u_L} = \frac{(u_R)^2 - (u_L)^2}{2(u_R - u_L)} = \frac{0-1}{2(0-1)} = \frac{1}{2} \\ s(0) = 2 \end{cases}$$

d'où  $x = s(t) = \frac{1}{2}t + 2$ .



Ces deux chocs vont ensuite interagir à partir d'un  $(x^*, t^*)$  qu'on détermine en résolvant le système linéaire

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}t + 2, \\ x = \frac{3}{2}t + 1. \end{cases}$$

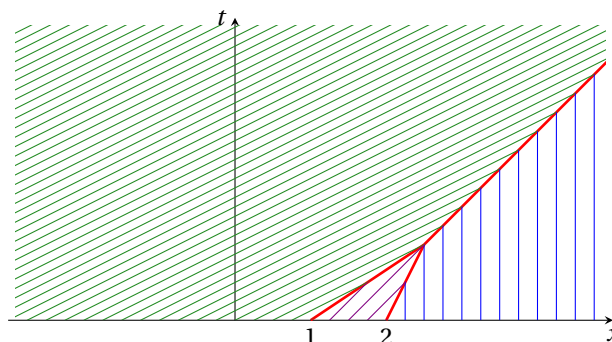
On obtient ainsi le pied de la nouvelle onde de choc qui est  $(x^*, t^*) = (\frac{5}{2}, 1)$ . Donc la solution pour  $0 < t < 1$  est

$$u(x, t) = \begin{cases} 2, & \text{si } x < \frac{3}{2}t + 1, \\ 1, & \text{si } \frac{3}{2}t + 1 < x < \frac{1}{2}t + 2, \\ 0, & \text{si } x > \frac{1}{2}t + 2, \end{cases}$$

▷ Pour  $t \geq 1$  seule les données initiales pour  $x < 1$  et  $x > 2$  sont transportées et ce nouveau choc, qui part de  $(\frac{5}{2}, 1)$ , vérifie encore la relation de Rankine-Hugoniot :

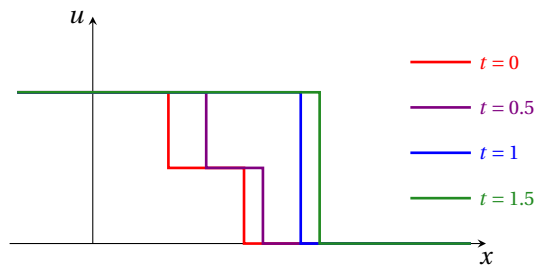
$$\begin{cases} s'(t) = \frac{q(u_R) - q(u_L)}{u_R - u_L} = \frac{(u_R)^2 - (u_L)^2}{2(u_R - u_L)} = \frac{0-4}{2(0-2)} = 1 \\ s(1) = \frac{5}{2} \end{cases}$$

d'où  $x = s(t) = t + \frac{3}{2}$ .



L'unique solution faible entropique pour tout  $t > 0$  est donc

$$u(x, t) = \begin{cases} 2, & \text{si } x < \min\{\frac{3}{2}t + 1, t + \frac{3}{2}\}, \\ 1, & \text{si } \frac{3}{2}t + 1 < x < \frac{1}{2}t + 2, \\ 0, & \text{si } x > \max\{\frac{1}{2}t + 2, t + \frac{3}{2}\}, \end{cases}$$

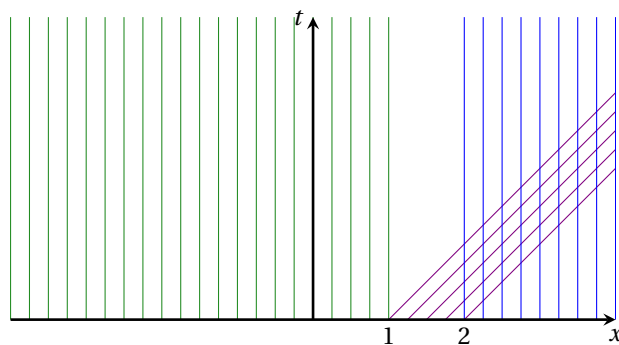


**Donnée "010"** Considérons la donnée initiale

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1, \\ 1 & \text{si } 1 < x < 2, \\ 0 & \text{si } x > 2. \end{cases}$$

L'équation de la caractéristique de pied  $(\xi, 0)$  est

$$x(t) = \xi + q'(g(\xi))t = \xi + (g(\xi))t = \begin{cases} \xi, & \xi < 1, \\ \xi + t, & 1 < \xi < 2, \\ \xi, & \xi > 2. \end{cases}$$



On s'attend donc à ce que la solution faible entropique présente une onde de raréfaction centrée en  $(1, 0)$  et une onde de choc qui part de  $(2, 0)$  et que, après un certain temps, les deux ondes interagissent.

▷ La raréfaction est comprise entre la droite d'équation

$$x(t) = 1$$

et la droite d'équation

$$x(t) = 1 + t$$

et a équation

$$u(x, t) = (q')^{-1}\left(\frac{x-1}{t-0}\right) = \frac{x-1}{t}.$$

▷ Pour déterminer l'équation de l'onde de choc qui a pied en  $(2, 0)$  on utilise les relations de Rankine-Hugoniot :

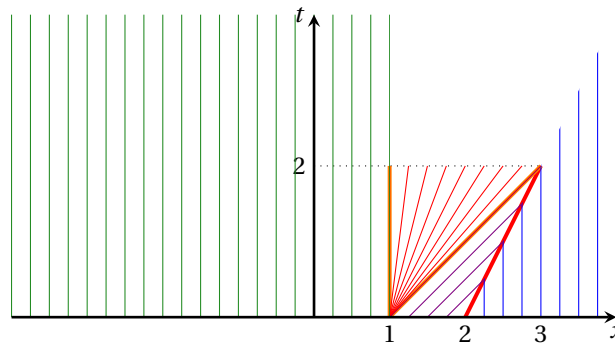
$$\begin{cases} s'(t) = \frac{q(u_R) - q(u_L)}{u_R - u_L} = \frac{(u_R)^2 - (u_L)^2}{2(u_R - u_L)} = \frac{1-0}{2(1-0)} = \frac{1}{2} \\ s(0) = 2 \end{cases}$$

d'où  $x = s(t) = \frac{1}{2}t + 2$ .

Ces considérations sont valables jusqu'à ce que l'onde de choc et l'onde de raréfaction se touchent, c'est-à-dire jusqu'à  $t = 2$ .

Donc la solution pour  $0 < t < 2$  est

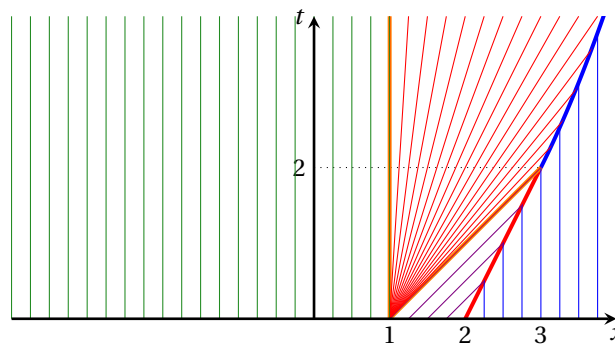
$$u(x, t) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 1, \\ \frac{x-1}{t}, & \text{si } 1 < x < t+1, \\ 1, & \text{si } t+1 < x < \frac{1}{2}t+2, \\ 0, & \text{si } x > \frac{1}{2}t+2. \end{cases}$$



▷ Pour  $t > 2$  on continue à avoir une onde de choc mais l'état gauche n'est plus constante car il est donné par la raréfaction i.e.  $u_L = \frac{s(t)-1}{t}$  donc le nouveau choc a pied en  $(3, 2)$  et vérifie

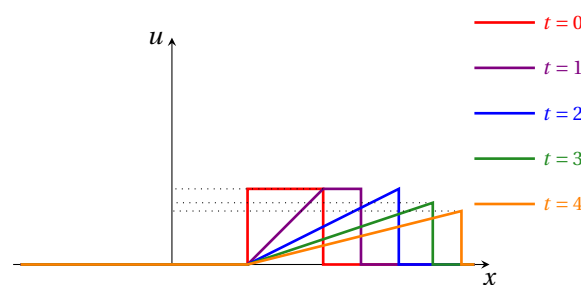
$$\begin{cases} s'(t) = \frac{q(u_R) - q(u_L)}{u_R - u_L} = \frac{(u_R)^2 - (u_L)^2}{2(u_R - u_L)} = \frac{0 - \left(\frac{s(t)-1}{t}\right)^2}{2(0 - \frac{s(t)-1}{t})} = \frac{s(t)-1}{2t} \\ s(2) = 3 \end{cases}$$

d'où l'équation  $x = 1 + \sqrt{2t}$ .



L'unique solution faible entropique pour  $t > 0$  est donc

$$u(x, t) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 1, \\ \frac{x-1}{t}, & \text{si } 1 < x < \min\{1+t, 1+\sqrt{2t}\}, \\ 1, & \text{si } 1+t < x < \frac{1}{2}t+2, \\ 0, & \text{si } x > \frac{1}{2}t+2 \text{ et } t < 2, \\ 0, & \text{si } x > 1+\sqrt{2t} \text{ et } t \geq 2. \end{cases}$$



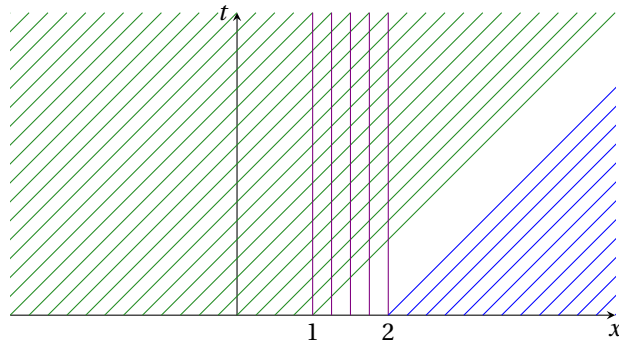
Remarquons que l'amplitude du choc vaut  $\sqrt{\frac{2}{t}}$  et le choc se déplace à vitesse  $\sqrt{\frac{1}{2t}}$ . Par conséquent, pour  $t \rightarrow \infty$ , l'amplitude et la vitesse du choc tendent vers zéro.

Donnée "101"

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 1, \\ 0 & \text{si } 1 < x < 2, \\ 1 & \text{si } x > 2. \end{cases}$$

L'équation de la caractéristique de pied  $(\xi, 0)$  est

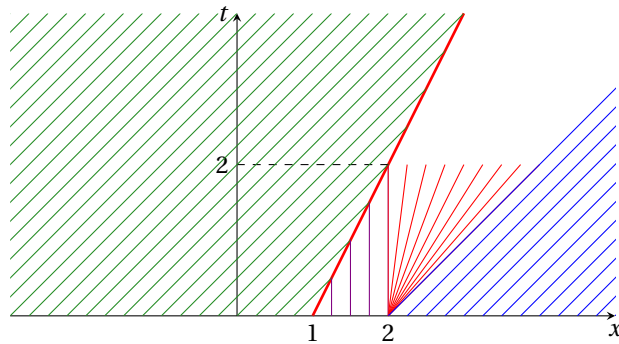
$$x(t) = \xi + q'(g(\xi))t = \xi + (g(\xi))t = \begin{cases} \xi + t, & \xi < 1, \\ \xi, & 1 < \xi < 2, \\ \xi + t, & \xi > 2. \end{cases}$$



La donnée initiale a un saut décroissant en  $x = 1$  et un saut croissant en  $x = 2$ . Puisque  $q$  est convexe, on s'attend à ce que la solution faible entropique présente une onde de choc qui part de  $(1, 0)$  et une onde de raréfaction centrée en  $(2, 0)$ . Pour déterminer l'équation de l'onde de choc on utilise les relations de Rankine-Hugoniot :

$$\begin{cases} s'(t) = \frac{q(u_R) - q(u_L)}{u_R - u_L} = \frac{(u_R)^2 - (u_L)^2}{2(u_R - u_L)} = \frac{1 - 0}{2(1 - 0)} = \frac{1}{2} \\ s(0) = 1 \end{cases}$$

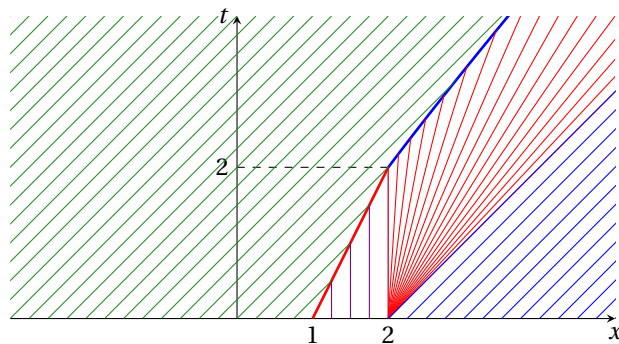
d'où  $x = \frac{1}{2}t + 1$ .



Ces considérations sont valables jusqu'à  $t = 2$ , ensuite on continue à avoir une onde de choc mais avec

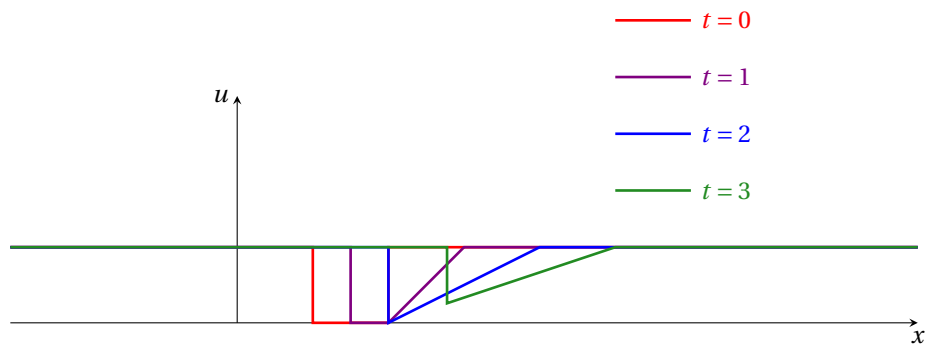
$$\begin{cases} s'(t) = \frac{q(u_R) - q(u_L)}{u_R - u_L} = \frac{(u_R)^2 - (u_L)^2}{2(u_R - u_L)} = \frac{1^2 - \left(\frac{s(t)}{t}\right)^2}{2\left(1 - \frac{s(t)}{t}\right)} = \frac{1}{2} + \frac{s(t)}{2t} \\ s(2) = 2 \end{cases}$$

d'où l'équation  $x = t - \sqrt{2t} + 2$ .



$$u(x, t) = \begin{cases} 1, & \text{si } x < \min\{t/2 + 1, t - \sqrt{2t} + 2\}, \\ 0, & \text{si } t + 1 < x < 2 \text{ et } t < 2, \\ \frac{x-2}{t}, & \text{si } \max\{2, t - \sqrt{2t} + 2\} < x < t + 2, \\ 1, & \text{si } x > t + 2. \end{cases}$$





### 2.3 Schémas

Soit  $\alpha := \frac{\Delta t}{\Delta x}$  et  $cf1$  une constante réelle positive et posons

$$u_j^n \approx \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} u(x, n\Delta t) dx$$

la solution approchée dans la mailles de centre  $(j\Delta x, n\Delta t)$ .

❶ On considère tout d'abord le schéma upwind, qui se base sur la forme non-conservative

$$\partial_t u + q'(u) \partial_x u = 0,$$

tel qu'on l'a écrit pour l'équation de transport :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \frac{q'(u_j^n) + |q'(u_j^n)|}{2\Delta x} (u_j^n - u_{j-1}^n) + \frac{q'(u_j^n) - |q'(u_j^n)|}{2\Delta x} (u_{j+1}^n - u_j^n) = 0$$

i.e.

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \alpha \left( \frac{q'(u_j^n) + |q'(u_j^n)|}{2} (u_j^n - u_{j-1}^n) + \frac{q'(u_j^n) - |q'(u_j^n)|}{2} (u_{j+1}^n - u_j^n) \right) = \begin{cases} u_j^n - \alpha q'(u_j^n) (u_j^n - u_{j-1}^n) & \text{si } q'(u_j^n) > 0, \\ u_j^n - \alpha q'(u_j^n) (u_{j+1}^n - u_j^n) & \text{si } q'(u_j^n) < 0. \end{cases}$$

On considère ensuite des schémas de type *Volumes Finis* qui se basent sur la forme conservative de l'équation non-linéaire

$$\partial_t u + \partial_x q(u) = 0.$$

**Principe :** on intègre l'EDP entre  $x_{j-1/2} \equiv (j-1/2)\Delta x$  et  $x_{j+1/2} \equiv (j+1/2)\Delta x$  pour tout  $t > 0$  :

$$\partial_t \left( \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} u(x, t) dx \right) + \partial_x \left( \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} q(u(x, t)) dx \right) = 0.$$

On pose

$$u_j(t) = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} u(x, t) dx$$

ce qui donne

$$\partial_t (u_j(t)) + \partial_x \left( \frac{q(u_{j+1/2}(t)) - q(u_{j-1/2}(t))}{\Delta x} \right) = 0.$$

**Idée :** approcher  $q(u_{j+1/2}(t)) \approx g(u_j(t), u_{j+1}(t))$  où  $g$  est le flux numérique du schéma qu'il faut définir :

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \alpha (g(u_{j-1}^n, u_j^n) - g(u_j^n, u_{j+1}^n)) \quad \text{avec} \quad \Delta t \leq cf1 \frac{\Delta x}{\sup_j |q'(u_j^n)|},$$

Les différents schémas se caractérisent par la définition du flux numérique  $g$  qui est une approximation du flux  $q$  :

❷ le schéma de Lax-Friedrichs :

$$g(L, R) = \frac{q(L) + q(R) + \frac{L-R}{\alpha}}{2}$$

③ le schéma de Lax-Wendroff :

$$g(L, R) = \frac{q(L) + q(R) - \alpha(q(R) - q(L))q'(\frac{L+R}{2})}{2}$$

④ le schéma de Godunov : si on dénote  $w(\frac{x}{t}, L, R)$  la solution exacte du problème de Riemann à deux états donnés par  $L$  (gauche) et  $R$  (droite), le flux numérique s'écrit

$$g(L, R) = q(w(0, L, R))$$

⑤ le schéma de Murman-Roe :

$$g(L, R) = \begin{cases} q(L) & \text{si } a(L, R) \in \{0, 1\}, \\ q(R) & \text{si } a(L, R) = -1 \end{cases} \quad \text{où } a(L, R) = \begin{cases} \text{signe}(q(L) - q(R)) \cdot \text{signe}(L - R) & \text{si } L \neq R, \\ \text{signe}(q'(L)) & \text{sinon.} \end{cases}$$

## 2.4 Code

**Langage** : Fortran 90

**Éditeur** : Programmer's Notepad (sous Windows, coloration syntaxique de Fortran 90)

**Système d'exploitation** : Linux (via Cygwin)

**Visualisation** : Gnuplot

Le code `burgers.f90` résout l'équation de Burgers.

Copier dans un sous-dossier du dossier `C:/cygwin` le fichier `burgers.f90` et le dossier `data` où seront sauvegardé les sorties.

Lancer Cygwin depuis le menu : Start → Cygwin-X → XWin-Serveur

Pour compiler le programme `burgers.f90` on utilisera la commande

```
gfortran burgers.f90 -o burgers.o
```

L'exécutable ainsi créé s'appelle `burgers.o` qu'on lancera en tapant

```
./burgers.o
```

Les deux instruction peuvent être exécutés l'une à la suite de l'autre en utilisant `&&` :

```
gfortran burgers.f90 -o burgers.o && ./burgers.o
```

Les résultats sont sauvegardés dans les fichiers `burgersN.dat` où  $N = 0 \dots S_{\max}$  est le numéro de la sauvegarde. Ces fichiers se trouvent dans le dossier `data`. Un fichier `burgersN.dat` comporte  $NX$  lignes et 7 colonnes :

$x$	$u_{up}$	$u_{lf}$	$u_{lw}$	$u_{go}$	$u_{mr}$	$u_{gl}$
-----	----------	----------	----------	----------	----------	----------

Pour comparer la solution approchée du schéma XXX avec la solution exacte au cours du temps, taper

```
cd data
gnuplot plot_XXX.gnu
```

où XXX est Up ou LF ou LW ou Go ou MR ou GL.

Pour comparer les solutions approchées des schémas avec la solution exacte à l'instant final et sauvegarder l'image dans le fichier `comparaison_finale.png` on tapera

```
gnuplot plot_comparaison_finale.gnu
```

Pour revenir au dossier précédent, taper

```
cd ..
```

## 2.5 Exercice

Dans les exemples précédents on a résolu certains problèmes de Cauchy associés à l'équation de Burgers. Dans cet exercice on va appliquer la même méthode pour l'étude théorique et numérique de l'équation non-linéaire

$$\partial_t(u) + \partial_x(q(u)) = 0 \quad \text{avec} \quad q(u) = \frac{u(2-u)}{2}$$

pour différentes données initiales du type  $u(x,0) = g(x)$ .

- ① Calculer la solution exacte pour les données initiales suivantes :

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 1, \\ 0 & \text{si } x > 1, \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1, \\ 1 & \text{si } x > 1, \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < 1, \\ 1 & \text{si } x \in ]1;2[, \\ 0 & \text{si } x > 2, \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1, \\ 1 & \text{si } x \in ]1;2[, \\ 2 & \text{si } x > 2, \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < 1, \\ 0 & \text{si } x \in ]1;2[, \\ 1 & \text{si } x > 2, \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 1, \\ 0 & \text{si } x \in ]1;2[, \\ 2 & \text{si } x > 2, \end{cases}$$

- ② Modifier le code fortran (écrit pour l'équation de Burgers) pour qu'il résout numériquement cette équation non-linéaire. Il faudra notamment modifier la routine `Calcul_Exacte` et les fonctions `flux`, `fluxprime` et `g_Go`. On remarquera notamment que lorsque l'on considère le générique problème de Riemann

$$g(x) = \begin{cases} u_L, & \text{si } x < 0 \\ u_R, & \text{si } x > 0, \end{cases}$$

- ▷ si le flux est convexe (exemple  $q(u) = u^2/2$ ) on a
    - ▷ une onde de choc ssi  $u_L > u_R$
    - ▷ une onde de raréfaction ssi  $u_L < u_R$
  - ▷ si le flux est concave (exemple  $q(u) = u(2-u)/2$ ) on a
    - ▷ une onde de choc ssi  $u_L < u_R$
    - ▷ une onde de raréfaction ssi  $u_L > u_R$
- ③ Implémenter dans le code les solutions exactes calculées au premier point et les comparer avec les solutions numériques obtenues avec les schémas ❶-❺ : on prendra  $T = 6.0$ , une grille de 500 mailles et  $L = 10$  (i.e. on travaille sur l'intervalle  $[0;10]$ ) avec des conditions au bord de Neumann homogènes. Pour tester les solutions exactes on pourra faire confiance au schéma de Lax-Friedrichs. Lorsqu'on est convaincu que la solution exacte est correcte, on pourra alors comparer les schémas ❶-❺ avec  $cf1 = 0.5$ , puis avec  $cf1 = 1$ ,  $cf1 = 2$  et enfin avec  $cf1 = 3$ . Que peut-on conclure à propos de la stabilité? Est-ce que la vitesse de l'onde de choc numérique est correcte pour tous les schémas? La solution numérique converge-t-elle toujours vers une solution faible? Et vers une solution faible entropique? Les schémas ❶-❺ sont-ils monotones?

*Facultatif*: décrire et implémenter le schéma de Glimm (voir par exemple le livre de E. F. TORO *Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics. A practical introduction*. Second edition. Springer-Verlag, Berlin, 1999.)

**Nota Bene** : d'autres schémas ont été implémentés dans le code mais l'exercice demande la comparaison seulement des schémas ❶-❺.

## 3 TP3 - systèmes hyperboliques

Dans ce dernier chapitre on s'intéresse à la résolution de problèmes de Riemann associés aux systèmes hyperboliques non-linéaires en une dimension d'espace. Plus précisément, on cherche une fonction

$$\begin{aligned} \mathbf{W}: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^p \\ (t, x) &\mapsto \mathbf{W}(t, x) \end{aligned}$$

qui vérifie (au sens faible) le système d'EDPs

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{W} + \partial_x \mathbf{F}(\mathbf{W}) = \mathbf{0}, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ \mathbf{W}(0, x) = \begin{cases} \mathbf{W}_L & \text{si } x < 0, \\ \mathbf{W}_R & \text{si } x > 0, \end{cases} \end{cases}$$

avec le flux

$$\begin{aligned} \mathbf{F}: \mathbb{R}^p &\rightarrow \mathbb{R}^p \\ \mathbf{W} &\mapsto \mathbf{F}(\mathbf{W}) \end{aligned}$$

Pour des solutions régulières on peut réécrire ce système sous la forme quasi-linéaire

$$\partial_t \mathbf{W} + \mathbb{B}(\mathbf{W}) \partial_x \mathbf{W} = \mathbf{0}$$

avec  $\mathbb{B}(\mathbf{W})$  la matrice jacobienne du flux  $\mathbf{F}$  et on note  $\lambda_1(\mathbf{W}) < \lambda_2(\mathbf{W}) < \dots < \lambda_p(\mathbf{W})$  ses valeurs propres.

### 3.1 Schémas numériques

Pour  $j \in \mathbb{Z}$  et  $n \in \mathbb{N}$  on pose

$$\mathbf{W}_j^n \approx \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \mathbf{W}(x, t^n) dx \quad \text{et} \quad \mathbf{G}(\mathbf{W}_j^n, \mathbf{W}_{j+1}^n) \approx \mathbf{F}(\mathbf{W}(x_{j+1/2}, t^n)).$$

On considère des schémas Volumes Finis :

$$\mathbf{W}_j^{n+1} = \mathbf{W}_j^n - \frac{\Delta t^n}{\Delta x} \left[ \mathbf{G}(\mathbf{W}_j^n, \mathbf{W}_{j+1}^n) - \mathbf{G}(\mathbf{W}_{j-1}^n, \mathbf{W}_j^n) \right],$$

à savoir

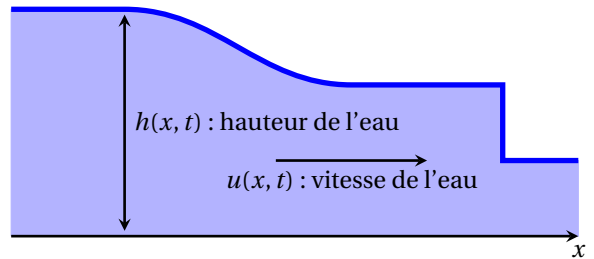
le schéma de Lax-Friedrichs	$\mathbf{G}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{\mathbf{F}(\mathbf{a}) + \mathbf{F}(\mathbf{b}) - \frac{\Delta x}{\Delta t^n} (\mathbf{b} - \mathbf{a})}{2}$
le schéma de Rusanov	$\mathbf{G}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{\mathbf{F}(\mathbf{a}) + \mathbf{F}(\mathbf{b})}{2} - \max_{k=1, \dots, p} \{  \lambda_k(\mathbf{a}) ,  \lambda_k(\mathbf{b})  \} \frac{\mathbf{b} - \mathbf{a}}{2}$

On associe à ces schémas la condition de stabilité de Courant-Friedrichs-Lewy

$$\Delta t^n \leq \frac{\Delta x}{2 \max_{j \in \mathbb{Z}} \{ |\lambda_1(\mathbf{W}_j^n)|, \dots, |\lambda_p(\mathbf{W}_j^n)| \}}.$$

### 3.2 Exemple

On cherche à simuler un écoulement d'eau sous l'hypothèse de faible profondeur dans le cas 1D et à fond plat. De plus, l'eau sera considérée comme un fluide incompressible non visqueux et les frottements air/eau et eau/sol seront négligés. Les inconnues, fonction du temps  $t \in [0; +\infty[$  et de l'espace  $x \in \mathbb{R}$ , sont  $h \equiv h(x, t) > 0$  la hauteur de l'eau et  $u \equiv u(x, t) \in \mathbb{R}$  sa vitesse horizontale (on suppose qu'elle est la même sur toute la hauteur de l'eau). On note  $g > 0$  la constante de gravité. En dimension un d'espace et pour une topographie plate, on modélise ce type d'écoulements par le système de Saint Venant (ou des eaux peu profondes)



$$\begin{cases} \partial_t h + \partial_x(hu) = 0, \\ \partial_t(hu) + \partial_x(hu^2 + gh^2/2) = 0, \end{cases} \text{ avec } x \in \mathbb{R}, t > 0. \tag{3.1}$$

Sous forme vectorielle il s'écrit

$$\partial_t \mathbf{U} + \partial_x \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \mathbf{0}$$

ayant défini

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} h \\ hu \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} hu \\ hu^2 + \frac{g}{2}h^2 \end{pmatrix}.$$

1. Soit  $\mathbf{W} = (h, u)$ , alors le système (3.1) se réécrit, pour des solutions régulières, sous la forme quasi-linéaire

$$\partial_t \mathbf{W} + \mathbb{A}(\mathbf{W}) \partial_x \mathbf{W} = \mathbf{0}. \tag{3.2}$$

Montrer que la matrice  $\mathbb{A}(\mathbf{W})$  s'écrit

$$\begin{pmatrix} u & h \\ g & u \end{pmatrix}.$$

2. Calculer les deux valeurs propres  $\lambda_1(\mathbf{W})$  et  $\lambda_2(\mathbf{W})$  de la matrice  $\mathbb{A}(\mathbf{W})$ . Afin de fixer les notations on ordonne les deux valeurs propres selon  $\lambda_1(\mathbf{W}) < \lambda_2(\mathbf{W})$ . Proposer une base associée de vecteurs propres à droite  $\{\mathbf{r}_1(\mathbf{W}), \mathbf{r}_2(\mathbf{W})\}$ . En déduire que le système (3.1) est strictement hyperbolique.
3. Vérifier que les champs 1 et 2 sont vraiment non linéaires.
4. On note  $I_k$  l'invariant de Riemann du  $k$ -ème champ caractéristique. Montrer qu'un choix possible pour  $I_1$  et  $I_2$  est

$$\begin{aligned} I_1 &= u + 2\sqrt{gh}, \\ I_2 &= u - 2\sqrt{gh}. \end{aligned}$$

5. Pour un état gauche  $\mathbf{W}_L = (h_L, u_L)$  donné on cherche les états  $\mathbf{W} = (h, u)$  qui peuvent être relié à  $\mathbf{W}_L$  par une onde de détente.
  - 5.1. Considérons le 1-champ. Montrer que  $u > u_L, h < h_L$ . Calculer  $u$  en fonction de  $h_L, u_L$  et  $h$ . Plus précisément, montrer que  $u$  peut se mettre su la forme

$$u = u_L + r(h_L, h)$$

en explicitant la fonction  $r$ . Étudier la fonction  $h \mapsto u = u_L + r(h_L, h)$  et tracer son graphe dans le plan  $(h, u)$ .

- 5.2. Reprendre la question pour le 2-champ.

6. Pour un état gauche  $\mathbf{W}_L = (h_L, u_L)$  donné on cherche les états  $\mathbf{W} = (h, u)$  qui peuvent être relié à  $\mathbf{W}_L$  par une onde de choc entropique de vitesse  $\sigma_k$ .

- 6.1. Montrer que les relations de Rankine-Hugoniot peuvent s'écrire sous la forme

$$\begin{cases} j = h(u - \sigma_k) = h_L(u_L - \sigma_k), \\ uh(u - \sigma_k) + \frac{g}{2}h^2 = u_L h_L(u_L - \sigma_k) + \frac{g}{2}h_L^2. \end{cases}$$

En déduire que

$$j = \frac{g}{2} \frac{h_L^2 - h^2}{u - u_L}.$$

- 6.2. Considérons le 1-champ. Calculer  $u$  en fonction de  $h_L, u_L$  et  $h$ . Plus précisément, montrer que  $u$  peut se mettre sous la forme

$$u = u_L + d(h_L, h)$$

en explicitant la fonction  $d$ . Étudier la fonction  $h \mapsto u = u_L + d(h_L, h)$  et tracer son graphe dans le plan  $(h, u)$ . Montrer que  $u < u_L, h > h_L$ .

6.3. Reprendre la question pour le 2-champ.

7. À l'aide du dessin d'onde dans le plan  $(h, u)$  résoudre le problème de Riemann : pour un état gauche  $\mathbf{W}_L$  et un état droit  $\mathbf{W}_R$  on construira une solution composée d'une 1-onde et d'une 2-onde séparant un état intermédiaire  $\mathbf{W}^*$ . On précisera les valeurs de cet état intermédiaire ainsi que les vitesses des ondes.
8. Cherchons maintenant une entropie pour le système (3.1). Montrer que la fonction

$$\eta(\mathbf{W}) = \frac{hu^2}{2} + \frac{gh^2}{2}$$

est une entropie du système avec flux d'entropie

$$\Phi(\mathbf{W}) = \frac{hu^3}{2} + gh^2u.$$

## Solution

1. On développe les dérivées du système (3.1) pour des solutions régulières :

$$\begin{cases} \partial_t h + u\partial_x h + h\partial_x u = 0, \\ u\partial_t h + h\partial_t u + 2hu\partial_x u + u^2\partial_x h + gh\partial_x h = 0. \end{cases}$$

Il se réécrit alors

$$\begin{cases} \partial_t h + u\partial_x h + h\partial_x u = 0, \\ u(-u\partial_x h - h\partial_x u) + h\partial_t u + 2hu\partial_x u + u^2\partial_x h + gh\partial_x h = 0 \end{cases}$$

et on trouve le système quasi-linéaire suivant :

$$\partial_t \begin{pmatrix} h \\ u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u & h \\ g & u \end{pmatrix} \partial_x \begin{pmatrix} h \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2. On cherche les deux solutions  $\lambda_k(\mathbf{W})$  de l'équation  $\det(\mathbb{A}(\mathbf{W}) - \lambda(\mathbf{W})\mathbf{Id}) = 0$ , i.e. de l'équation

$$(u - \lambda)^2 - hg = 0.$$

On obtient

$$\lambda_1(\mathbf{W}) = u - \sqrt{gh} < \lambda_2(\mathbf{W}) = u + \sqrt{gh}.$$

Puisque  $h \neq 0$ , les valeurs propres sont réelles et distinctes donc le système (3.1) est strictement hyperbolique. On peut alors prendre

$$\mathbf{r}_1(\mathbf{W}) = \begin{pmatrix} -\sqrt{h} \\ \sqrt{g} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_2(\mathbf{W}) = \begin{pmatrix} \sqrt{h} \\ \sqrt{g} \end{pmatrix}.$$

3. Pour déterminer la nature des deux champs caractéristiques on calcule  $(\nabla \lambda_k)^T \cdot \mathbf{r}_k$  pour  $k = 1, 2$  :

$$(\nabla \lambda_1(\mathbf{W}))^T \cdot \mathbf{r}_1(\mathbf{W}) = \frac{\partial(u - \sqrt{gh})}{\partial h} (-\sqrt{h}) + \frac{\partial(u - \sqrt{gh})}{\partial u} \sqrt{g} = \frac{3}{2}\sqrt{g} > 0, \quad \text{1-champ VNL,}$$

$$(\nabla \lambda_2(\mathbf{W}))^T \cdot \mathbf{r}_2(\mathbf{W}) = \frac{\partial(u + \sqrt{gh})}{\partial h} \sqrt{h} + \frac{\partial(u + \sqrt{gh})}{\partial u} \sqrt{g} = \frac{3}{2}\sqrt{g} > 0, \quad \text{2-champ VNL.}$$

Étant donné qu'aucun champ n'est LD, il n'y aura aucune discontinuité de contact.

4. On vérifie que  $(\nabla I_k(\mathbf{W}))^T \cdot \mathbf{r}_k(\mathbf{W}) = 0$  pour  $k = 1, 2$  :

$$(\nabla I_1(\mathbf{W}))^T \cdot \mathbf{r}_1(\mathbf{W}) = \frac{\partial(u + 2\sqrt{gh})}{\partial h} (-\sqrt{h}) + \frac{\partial(u + 2\sqrt{gh})}{\partial u} \sqrt{g} = 0,$$

$$(\nabla I_2(\mathbf{W}))^T \cdot \mathbf{r}_2(\mathbf{W}) = \frac{\partial(u - 2\sqrt{gh})}{\partial h} \sqrt{h} + \frac{\partial(u - 2\sqrt{gh})}{\partial u} \sqrt{g} = 0.$$

5. Étude des détentes : on cherche à déterminer les états droits  $\mathbf{W} = (h, u)$  qui peuvent être reliés à un état gauche  $\mathbf{W}_L = (h_L, u_L)$  par une onde de détente.

5.1. 1-champ :

▷ Dans une détente les invariants de Riemann sont conservés. Ici  $k = 1$  d'où

$$I_1(\mathbf{W}_L) = I_1(\mathbf{W})$$

donc

$$u_L + 2\sqrt{gh_L} = u + 2\sqrt{gh}$$

d'où  $h \rightarrow u = u_L + 2\sqrt{g}(\sqrt{h_L} - \sqrt{h})$ .

▷ La condition d'entropie  $\lambda_1(\mathbf{W}_L) < \lambda_1(\mathbf{W})$  se réécrit  $u_L - \sqrt{gh_L} < u - \sqrt{gh}$  donc  $u > u_L + \sqrt{g}(\sqrt{h} - \sqrt{h_L})$ . Comme  $u = u_L + 2\sqrt{g}(\sqrt{h_L} - \sqrt{h})$ , on obtient

$$h < h_L \quad \text{et} \quad u > u_L.$$

On obtient ainsi

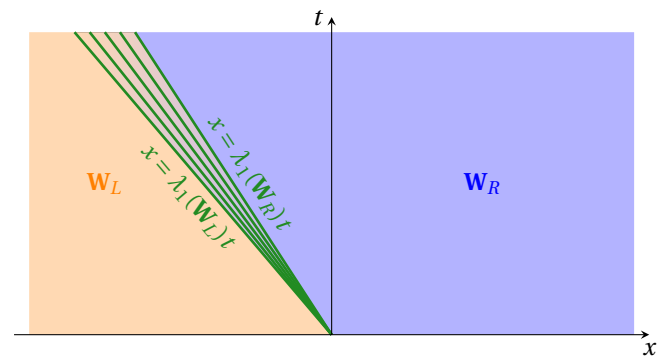
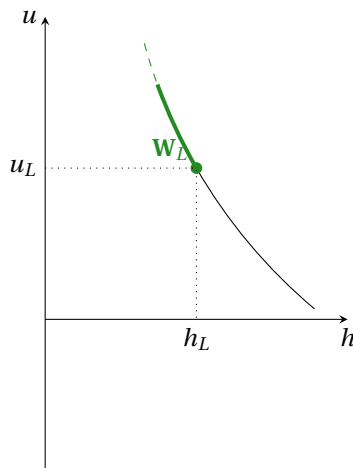
$$u = u_L + r(h_L, h) \quad \text{pour } h < h_L$$

avec  $r(h_L, h) = 2\sqrt{g}(\sqrt{h_L} - \sqrt{h})$ . De plus,

$$u'(h) = -\sqrt{\frac{g}{h}} < 0, \quad \text{pour } h < h_L,$$

$$u''(h) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{h^3}} > 0, \quad \text{pour } h < h_L.$$

On a donc les graphes suivants :



Pour calculer la solution en un point  $(\hat{x}, \hat{t})$  à l'intérieur de l'onde on considère la caractéristique qui relie ce point à l'origine de l'onde  $(0, 0)$ . La vitesse caractéristique de l'onde est  $\frac{dx}{dt} = \lambda_1$ , c'est-à-dire  $\frac{\hat{x}}{\hat{t}} = u - \sqrt{gh}$ . De plus, l'invariant de Riemann est conservé dans l'onde, c'est-à-dire  $u + 2\sqrt{gh} = u_L + 2\sqrt{gh_L}$ . On obtient  $u(\hat{x}, \hat{t}) = \frac{1}{3} \left( u_L + 2\sqrt{gh_L} + 2\frac{\hat{x}}{\hat{t}} \right)$  et  $h(\hat{x}, \hat{t}) = \frac{1}{9g} \left( u_L + 2\sqrt{gh_L} - \frac{\hat{x}}{\hat{t}} \right)^2$ .

### 5.2. 2-champ :

▷ Dans une détente les invariants de Riemann sont conservés. Ici  $k = 2$  d'où

$$I_2(\mathbf{W}_L) = I_2(\mathbf{W})$$

donc

$$u_L - 2\sqrt{gh_L} = u - 2\sqrt{gh}$$

d'où  $h \rightarrow u = u_L + 2\sqrt{g}(\sqrt{h} - \sqrt{h_L})$ .

▷ La condition d'entropie  $\lambda_2(\mathbf{W}_L) < \lambda_2(\mathbf{W})$  se réécrit  $u_L + \sqrt{gh_L} < u + \sqrt{gh}$  donc  $u > u_L + \sqrt{g}(\sqrt{h_L} - \sqrt{h})$ . Comme  $u = u_L + 2\sqrt{g}(\sqrt{h} - \sqrt{h_L})$ , on obtient

$$h > h_L \quad \text{et} \quad u > u_L.$$

On obtient ainsi

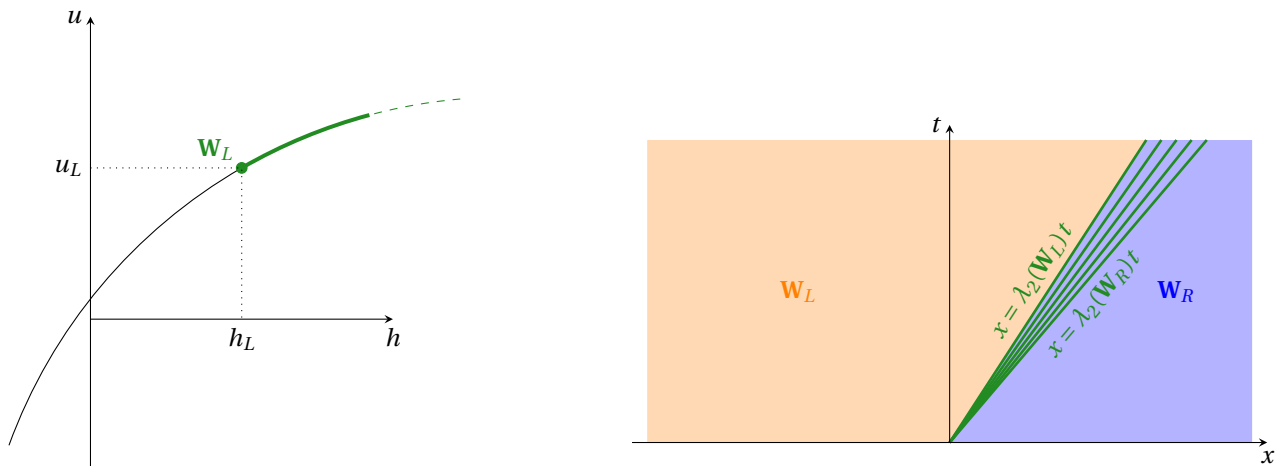
$$u = u_L + r(h_L, h) \quad \text{pour } h < h_L$$

avec  $r(h_L, h) = 2\sqrt{g}(\sqrt{h} - \sqrt{h_L})$ . De plus,

$$u'(h) = \sqrt{\frac{g}{h}} > 0, \quad \text{pour } h > h_L,$$

$$u''(h) = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{h^3}} < 0, \quad \text{pour } h > h_L.$$

On a donc les graphes suivants :



Pour calculer la solution en un point  $(\hat{x}, \hat{t})$  à l'intérieur de l'onde on considère la caractéristique qui relie ce point à l'origine de l'onde  $(0, 0)$ . La vitesse caractéristique de l'onde est  $\frac{dx}{dt} = \lambda_2$ , c'est-à-dire  $\frac{\hat{x}}{\hat{t}} = u + \sqrt{gh}$ . De plus, l'invariant de Riemann est conservé dans l'onde, c'est-à-dire  $u - 2\sqrt{gh} = u_R - 2\sqrt{gh_R}$ . On obtient  $u(\hat{x}, \hat{t}) = \frac{1}{3} \left( -u_R + 2\sqrt{gh_R} + 2\frac{\hat{x}}{\hat{t}} \right)$  et  $h(\hat{x}, \hat{t}) = \frac{1}{9g} \left( u_R - 2\sqrt{gh_R} + \frac{\hat{x}}{\hat{t}} \right)^2$ .

6. **Étude des chocs** : on cherche à déterminer les états droits  $\mathbf{W} = (h, u)$  qui peuvent être reliés à un état gauche  $\mathbf{W}_L = (h_L, u_L)$  par une discontinuité de vitesse  $\dot{\sigma}_k$ . Les relations de Rankine-Hugoniot pour un choc de vitesse  $\dot{\sigma}_k$  s'écrivent

$$\begin{cases} \dot{\sigma}_k = \frac{h_L u_L - hu}{h_L - h}, \\ \dot{\sigma}_k = \frac{h_L u_L^2 + (g/2)h_L^2 - hu^2 - (g/2)h^2}{h_L u_L - hu}, \end{cases}$$

qu'on peut réécrire comme

$$\begin{cases} hu - \dot{\sigma}_k h = h_L u_L - \dot{\sigma}_k h_L, \\ (u - \dot{\sigma}_k)hu - (u_L - \dot{\sigma}_k)h_L u_L = (g/2)(h_L^2 - h^2), \end{cases}$$

ou encore

$$\begin{cases} j_k \equiv h(u - \dot{\sigma}_k) = h_L(u_L - \dot{\sigma}_k), \\ j_k(u - u_L) = (g/2)(h_L^2 - h^2). \end{cases}$$

6.1. 1-champ : la condition d'entropie (Lax) pour  $k = 1$  demande à ce que la vitesse  $\dot{\sigma}_1$  du 1-choc vérifie

$$\begin{cases} \lambda_1(\mathbf{W}) < \dot{\sigma}_1 < \lambda_2(\mathbf{W}), \\ \dot{\sigma}_1 < \lambda_1(\mathbf{W}_L), \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} u - \sqrt{gh} < \dot{\sigma}_1 < u + \sqrt{gh}, \\ \dot{\sigma}_1 < u_L - \sqrt{gh_L}, \end{cases}$$

donc

$$\begin{cases} u - \sqrt{gh} < \dot{\sigma}_1 \\ \dot{\sigma}_1 < u + \sqrt{gh}, \\ \dot{\sigma}_1 < u_L - \sqrt{gh_L}, \end{cases} \implies \begin{cases} j_1 < h\sqrt{gh} \\ j_1 > -h\sqrt{gh}, \\ j_1 > h_L\sqrt{gh_L}, \end{cases} \implies \begin{cases} h > h_L, \\ j_1 > 0, \end{cases} \implies \begin{cases} j_1 = \frac{g(h_L^2 - h^2)}{2(u - u_L)} \\ \implies u < u_L \end{cases}$$

et on conclut que

$$h > h_L \quad \text{et} \quad u < u_L.$$

En éliminant  $\dot{\sigma}_1$  dans les relations de Rankine-Hugoniot on trouve

$$h \mapsto u = u_L + d(h_L, h) \quad \text{pour } h > h_L$$

avec  $d(h_L, h) = (h_L - h) \sqrt{\frac{g}{2} \frac{h_L + h}{h_L h}}$  et la vitesse du 1-choc est

$$\dot{\sigma}_1 = u_L - h \sqrt{\frac{g}{2} \frac{h_L + h}{h_L h}}.$$

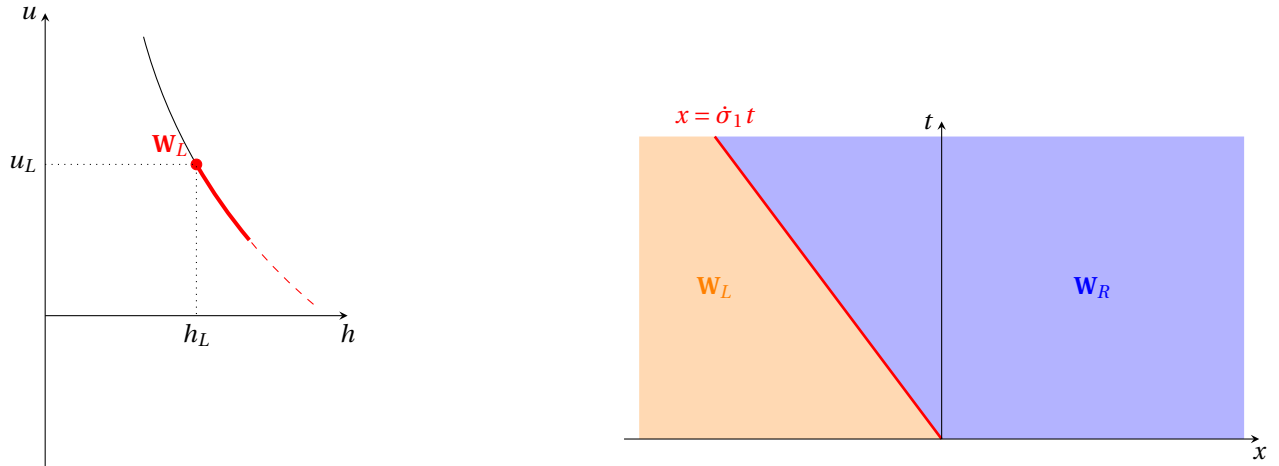


De plus,

$$u'(h) = -\sqrt{\frac{g}{8}} \frac{h_L h + 2h^2 + h_L^2}{\sqrt{h^3 h_L (h_L + h)}} < 0, \quad \text{pour } h > h_L,$$

$$u''(h) = \sqrt{\frac{g}{32}} \frac{\sqrt{h_L^3 (5h + 3h_L)}}{\sqrt{h^5 (h_L + h)^3}} > 0. \quad \text{pour } h > h_L.$$

On a donc les graphes suivants :



6.2. 2-champ : la condition d'entropie (Lax) pour  $k = 2$  demande à ce que la vitesse  $\dot{\sigma}_2$  du 2-choc vérifie

$$\begin{cases} \lambda_2(\mathbf{W}) < \dot{\sigma}_2, \\ \lambda_1(\mathbf{W}_L) < \dot{\sigma}_2 < \lambda_2(\mathbf{W}_L), \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} u + \sqrt{gh} < \dot{\sigma}_2, \\ u_L - \sqrt{gh_L} < \dot{\sigma}_2 < u_L + \sqrt{gh_L}, \end{cases}$$

donc

$$\begin{cases} u + \sqrt{gh} < \dot{\sigma}_2 \\ \dot{\sigma}_2 > u_L - \sqrt{gh_L}, \\ \dot{\sigma}_2 < u_L + \sqrt{gh_L}, \end{cases} \implies \begin{cases} j_2 < -h\sqrt{gh} \\ j_2 < h_L\sqrt{gh_L}, \\ j_2 > -h_L\sqrt{gh_L}, \end{cases} \implies \begin{cases} h < h_L, \\ j_2 < 0, \end{cases} \quad \begin{matrix} j_2 = \frac{g(h_L^2 - h^2)}{2(u - u_L)} \\ \implies u < u_L \end{matrix}$$

et on conclut que

$$h < h_L \quad \text{et} \quad u < u_L.$$

En éliminant  $\dot{\sigma}_2$  dans les relations de Rankine-Hugoniot on trouve

$$h \mapsto u = u_L + d(h_L, h) \quad \text{pour } h < h_L$$

avec  $d(h_L, h) = (h - h_L) \sqrt{\frac{g}{2} \frac{h_L + h}{h_L h}}$  et la vitesse du 2-choc est

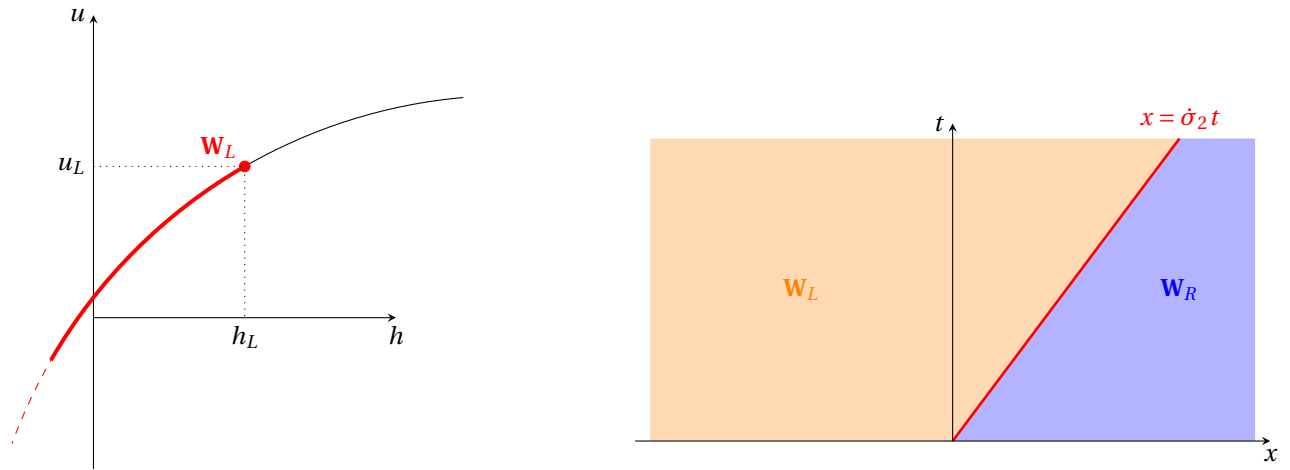
$$\dot{\sigma}_2 = u_L + h \sqrt{\frac{g}{2} \frac{h_L + h}{h_L h}}.$$

De plus,

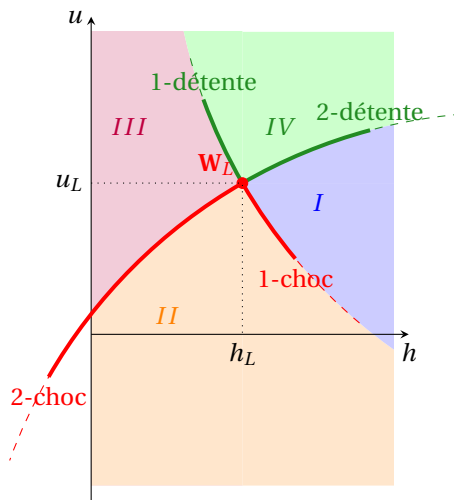
$$u'(h) = \sqrt{\frac{g}{8}} \frac{h_L h + 2h^2 + h_L^2}{\sqrt{h^3 h_L (h_L + h)}} > 0, \quad \text{pour } h < h_L,$$

$$u''(h) = -\sqrt{\frac{g}{32}} \frac{\sqrt{h_L^3 (5h + 3h_L)}}{\sqrt{h^5 (h_L + h)^3}} < 0. \quad \text{pour } h < h_L.$$

On a donc les graphes suivants :



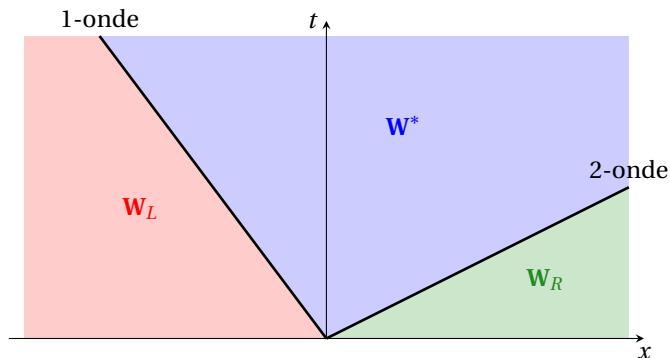
Récapitulatif : quel que soit  $W_L = (h_L, u_L)$ , le demi-plan  $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$  se décompose en quatre zones séparées par les quatre demi-courbes 1-choc, 2-choc, 1-détente et 2-détente.



7. Soit un problème de Riemann avec les deux états constants donnés suivants :

$$W_L = \begin{pmatrix} h_L \\ u_L \end{pmatrix}, \quad W_R = \begin{pmatrix} h_R \\ u_R \end{pmatrix}.$$

La solution est constituée de trois états constants séparés par deux ondes.



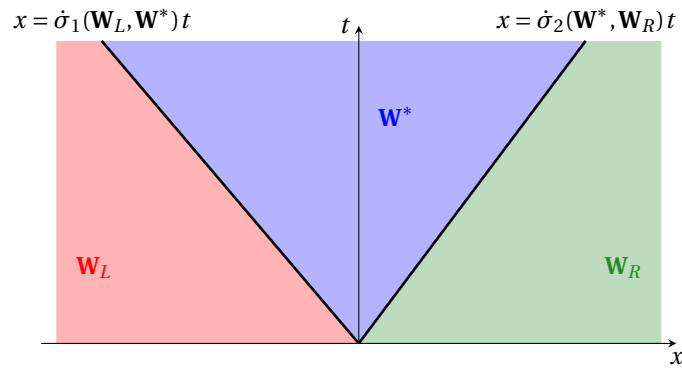
Pour expliciter cette solution on cherche à définir l'inconnue

$$W^* = \begin{pmatrix} h^* \\ u^* \end{pmatrix}$$

à l'aide de l'étude des ondes précédent.

On a cinq cas possibles :

**Cas 1)** 1-choc et 2-choc (il correspond au cas où  $W_R$  appartient à la zone II, c'est-à-dire si  $h^* > h_L$  et  $h^* > h_R$ )



L'unique solution faible entropique est

$$W(x, t) = \begin{cases} W_L, & \text{si } x < \dot{\sigma}_1(h_L, h^*, u_L)t, \\ W^*, & \text{si } \dot{\sigma}_1(h_L, h^*, u_L)t < x < \dot{\sigma}_2(h^*, h_R, u^*)t, \\ W_R, & \text{si } x > \dot{\sigma}_2(h^*, h_R, u^*)t, \end{cases}$$

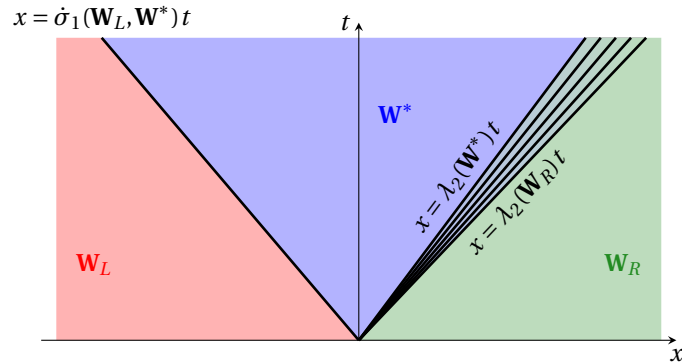
avec

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_1(h_L, h^*, u_L) &= u_L - h^* \sqrt{\frac{g}{2} \frac{h_L + h^*}{h_L h^*}} \\ \dot{\sigma}_2(h^*, h_R, u^*) &= u^* + h_R \sqrt{\frac{g}{2} \frac{h^* + h_R}{h^* h_R}} \end{aligned}$$

et  $h^*$  et  $u^*$  est l'unique solution du système

$$\begin{cases} u^* = u_L + (h_L - h^*) \sqrt{\frac{g}{2} \frac{h_L + h^*}{h_L h^*}}, \\ u_R = u^* + (h_R - h^*) \sqrt{\frac{g}{2} \frac{h^* + h_R}{h^* h_R}}. \end{cases}$$

**Cas 2)** 1-choc et 2-détente (il correspond au cas où  $W_R$  appartient à la zone I, c'est-à-dire si  $h^* > h_L$  et  $h^* < h_R$ )



L'unique solution faible entropique est

$$W(x, t) = \begin{cases} W_L, & \text{si } x < \dot{\sigma}_1(h_L, h^*, u_L)t, \\ W^*, & \text{si } \dot{\sigma}_1(h_L, h^*, u_L)t < x < (u^* + \sqrt{gh^*})t, \\ W_{2\text{-det}}, & \text{si } (u^* + \sqrt{gh^*})t < x < (u_R + \sqrt{gh_R})t, \\ W_R, & \text{si } x > (u_R + \sqrt{gh_R})t, \end{cases}$$

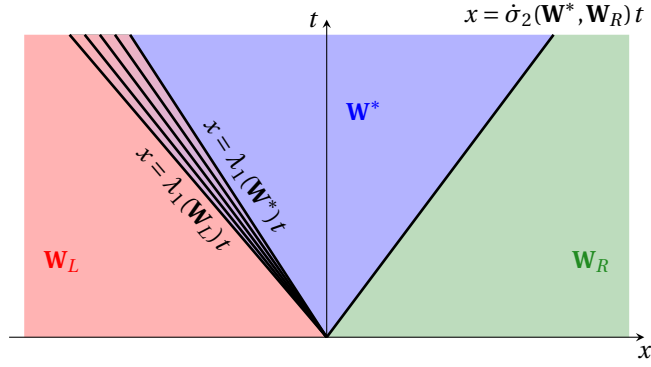
avec

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_1(h_L, h^*, u_L) &= u_L - h^* \sqrt{\frac{g}{2} \frac{h_L + h^*}{h_L h^*}}, \\ W_{2\text{-det}} &= \left( \frac{1}{9g} \left( -u_R + 2\sqrt{gh_R} + \frac{x}{t} \right)^2, \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{3} \left( u_R - 2\sqrt{gh_R} + 2\frac{x}{t} \right) \right), \end{aligned}$$

et  $h^*$  et  $u^*$  l'unique solution du système

$$\begin{cases} u^* = u_L + (h_L - h^*) \sqrt{\frac{g}{2} \frac{h_L + h^*}{h_L h^*}}, \\ u_R = u^* + 2\sqrt{g}(\sqrt{h_R} - \sqrt{h^*}). \end{cases}$$

**Cas 3** 1-détente et 2-choc (il correspond au cas où  $\mathbf{W}_R$  appartient à la zone III, c'est-à-dire si  $h^* < h_L$  et  $h^* > h_R$ )



L'unique solution faible entropique est

$$\mathbf{W}(x, t) = \begin{cases} \mathbf{W}_L, & \text{si } x < (u_L - \sqrt{gh_L})t, \\ \mathbf{W}_{1\text{-det}}, & \text{si } (u_L - \sqrt{gh_L})t < x < (u^* - \sqrt{gh^*})t, \\ \mathbf{W}^*, & \text{si } (u^* - \sqrt{gh^*})t < x < \dot{\sigma}_2(h^*, h_R, u^*)t, \\ \mathbf{W}_R, & \text{si } x > \dot{\sigma}_2(h^*, h_R, u^*)t, \end{cases}$$

avec

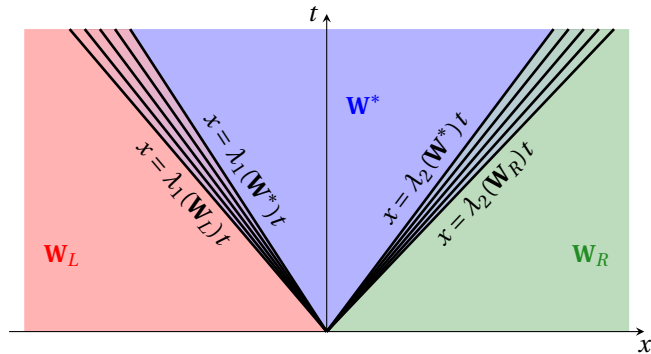
$$\dot{\sigma}_2(h^*, h_R) = u^* + h_R \sqrt{\frac{g}{2} \frac{h^* + h_R}{h^* h_R}},$$

$$\mathbf{W}_{1\text{-det}} = \left( \frac{1}{9g} \left( u_L + 2\sqrt{gh_L} - \frac{x}{t} \right)^2, \frac{1}{3} \left( u_L + 2\sqrt{gh_L} + 2\frac{x}{t} \right) \right),$$

et  $h^*$  et  $u^*$  l'unique solution du système

$$\begin{cases} u^* = u_L + 2\sqrt{g}(\sqrt{h_L} - \sqrt{h^*}), \\ u_R = u^* + (h_R - h^*)\sqrt{\frac{g}{2} \frac{h^* + h_R}{h^* h_R}}. \end{cases}$$

**Cas 4** 1-détente et 2-détente (il correspond au cas où  $\mathbf{W}_R$  appartient à la zone IV, c'est-à-dire si  $h^* < h_L$  et  $h^* < h_R$ )



L'unique solution faible entropique est

$$\mathbf{W}(x, t) = \begin{cases} \mathbf{W}_L, & \text{si } x < (u_L - \sqrt{gh_L})t, \\ \mathbf{W}_{1\text{-det}}, & \text{si } (u_L - \sqrt{gh_L})t < x < (u^* - \sqrt{gh^*})t, \\ \mathbf{W}^*, & \text{si } (u^* - \sqrt{gh^*})t < x < (u^* + \sqrt{gh^*})t, \\ \mathbf{W}_{2\text{-det}}, & \text{si } (u^* + \sqrt{gh^*})t < x < (u_R + \sqrt{gh_R})t, \\ \mathbf{W}_R, & \text{si } x > (u_R + \sqrt{gh_R})t \end{cases}$$

avec

$$\mathbf{W}_{1\text{-det}} = \left( \frac{1}{9g} \left( u_L + 2\sqrt{gh_L} - \frac{x}{t} \right)^2, \frac{1}{3} \left( u_L + 2\sqrt{gh_L} + 2\frac{x}{t} \right) \right), \quad \mathbf{W}_{2\text{-det}} = \left( \frac{1}{9g} \left( -u_R + 2\sqrt{gh_R} + \frac{x}{t} \right)^2, \frac{1}{3} \left( u_R - 2\sqrt{gh_R} + 2\frac{x}{t} \right) \right),$$

et  $h^*$  et  $u^*$  l'unique solution du système

$$\begin{cases} u^* = u_L + 2\sqrt{g}(\sqrt{h_L} - \sqrt{h^*}), \\ u_R = u^* + 2\sqrt{g}(\sqrt{h_R} - \sqrt{h^*}). \end{cases}$$

**Remarque :** il peut se générer une zone de hauteur  $h$  nulle lorsque  $\mathbf{W}_R$  appartient à la zone  $IV$  : un état intermédiaire  $h^* > 0$  n'est possible que si

$$u_R - u_L < 2\sqrt{g}(\sqrt{h_R} - \sqrt{h_L}).$$

La méthode de résolution du problème de Riemann consiste donc à calculer cet état intermédiaire ( $h^*, u^*$ ). On a vu que cet état peut être relié à l'état de gauche ( $h_L, u_L$ ) par une 1-onde :

$$u^* = \begin{cases} u_L - (h^* - h_L) \frac{2\sqrt{g}}{\sqrt{h_L + \sqrt{h^*}}} & \text{si } h^* < h_L \text{ (1-détente)} \\ u_L - (h^* - h_L) \sqrt{\frac{g}{2} \frac{h^* + h_L}{h^* h_L}} & \text{si } h^* > h_L \text{ (1-choc)} \end{cases}$$

et à l'état de droite ( $h_R, u_R$ ) par une 2-onde :

$$u^* = \begin{cases} u_R + (h^* - h_R) \frac{2\sqrt{g}}{\sqrt{h_R + \sqrt{h^*}}} & \text{si } h^* < h_R \text{ (2-détente)} \\ u_R + (h^* - h_R) \sqrt{\frac{g}{2} \frac{h^* + h_R}{h^* h_R}} & \text{si } h^* > h_R \text{ (2-choc)} \end{cases}$$

Pour calculer  $h^*$  on doit donc résoudre

$$u_R + (h^* - h_R)z(h^*, h_R) = u_L - (h^* - h_L)z(h^*, h_L)$$

avec

$$z(h, \psi) = \begin{cases} \frac{2\sqrt{g}}{\sqrt{h + \sqrt{\psi}}} & \text{si } h \leq \psi, \\ \sqrt{\frac{g}{2} \frac{h + \psi}{h\psi}} & \text{sinon.} \end{cases}$$

ce qui revient à chercher le zéro de la fonction

$$f(h) = u_R - u_L + (h - h_L)z(h, h_L) + (h - h_R)z(h, h_R)$$

et  $u^*$  est déduit tout simplement par

$$u^* = u_R + (h^* - h_R)z(h^*, h_R).$$

**Remarque :** Notons que pour  $h_L = 0$  (resp.  $h_R = 0$ ), la 1-onde (resp. la 2-onde) de choc n'est pas définie, dans ce cas la seule solution possible est une onde de détente.

8. Pour vérifier que  $\eta$  est une entropie du système (3.1) avec le flux d'entropie  $\Phi$ , on montre que

$$\nabla_{\mathbf{W}}\Phi(\mathbf{W}) = \nabla_{\mathbf{W}}\eta(\mathbf{W}) \cdot \mathbf{A}(\mathbf{W}).$$

Or,

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} h \\ u \end{pmatrix}, \quad \Phi(\mathbf{W}) = \frac{hu^3}{2} + gh^2u,$$

donc

$$\nabla_{\mathbf{W}}\Phi(\mathbf{W}) = \begin{pmatrix} \frac{u^3}{2} + 2ghu \\ \frac{3hu^2}{2} + gh^2 \end{pmatrix}$$

et

$$\eta(\mathbf{W}) = \frac{hu^2}{2} + \frac{gh^2}{2}$$

d'où

$$\nabla_{\mathbf{W}}\eta(\mathbf{W}) = \begin{pmatrix} \frac{u^2}{2} + gh \\ hu \end{pmatrix}.$$

Donc

$$\nabla_{\mathbf{W}}\eta(\mathbf{W}) \cdot \mathbf{A}(\mathbf{W}) = \begin{pmatrix} \frac{u^2}{2} + gh \\ hu \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} u & h \\ g & u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{u^3}{2} + 2ghu \\ \frac{3hu^2}{2} + gh^2 \end{pmatrix} = \nabla_{\mathbf{W}}\Phi(\mathbf{W}).$$

Il ne reste à prouver que la convexité de l'entropie en calculant la matrice hessienne :

$$d^2\eta(\mathbf{W}) = \begin{pmatrix} g & u \\ u & h \end{pmatrix}.$$

Si  $gh - u^2 > 0$  l'entropie est convexe.

### 3.3 Code associé à l'exemple

**Langage** : Fortran 90

**Éditeur** : Programmer's Notepad (sous Windows, coloration syntaxique de Fortran 90)

**Système d'exploitation** : Linux (via Cygwin)

**Visualisation** : Gnuplot

Le code `saintvenant.f90` résout numériquement et exactement les problèmes de Riemann associés au système de Saint Venant.

Pour utiliser cet exemple, copier dans un sous-dossier du dossier `C:/cygwin` le fichier `saintvenant.f90` et le dossier `data` où seront sauvegardés les sorties.

Lancer Cygwin depuis le menu : `Start` → `Cygwin-X` → `XWin-Serveur`

Pour compiler le programme `saintvenant.f90` on utilisera la commande

```
gfortran saintvenant.f90 -o saintvenant.o
```

L'exécutable ainsi créé s'appelle `saintvenant.o` qu'on lancera en tapant

```
./saintvenant.o
```

Les deux instructions peuvent être exécutées l'une à la suite de l'autre en utilisant `&&` :

```
gfortran saintvenant.f90 -o saintvenant.o && ./saintvenant.o
```

Les résultats sont sauvegardés dans les fichiers `saintvenantN.dat` où  $N = 0 \dots S_{\max}$  est le numéro de la sauvegarde. Ces fichiers se trouvent dans le dossier `data`. Un fichier `saintvenantN.dat` comporte  $NX$  lignes et 7 colonnes contenant respectivement l'abscisse du centre des mailles (première colonne), la valeur exacte de la hauteur de l'eau  $h$  (deuxième colonne), la valeur exacte de la vitesse horizontale de l'eau  $u$  (troisième colonne), la valeur approchée par le schéma de Lax-Friedrichs de la hauteur de l'eau  $h$  (quatrième colonne), la valeur approchée par le schéma de Lax-Friedrichs de la vitesse horizontale de l'eau  $u$  (cinquième colonne), la valeur approchée par le schéma de Rusanov de la hauteur de l'eau  $h$  (sixième colonne), la valeur approchée par le schéma de Rusanov de la vitesse horizontale de l'eau  $u$  (septième colonne).

Pour visualiser les solutions approchées comparées à la solution exacte au cours du temps on tapera

```
cd data
gnuplot plot_h.gnu
```

ou

```
cd data
gnuplot plot_u.gnu
```

Pour revenir au dossier précédent, taper

```
cd ..
```

### 3.4 Exercice

On considère le système de la dynamique des gaz isentropique en une dimension d'espace

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2 + p) = 0, \end{cases} \quad (3.3)$$

avec une loi d'état  $p \equiv p(\rho)$ . On note  $\rho \equiv \rho(x, t) > 0$  la densité et  $u \equiv u(x, t) \in \mathbb{R}$  la vitesse du fluide.

#### Partie théorique

1. Dans un premier temps on suppose que la loi d'état est celle d'un gaz parfait :

$$p(\rho) = \rho^\gamma, \quad \gamma > 1.$$

- 1.1. Trouver les vecteurs  $\mathbf{V}: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  et  $\mathbf{F}(\mathbf{V}): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tels que le système (3.3) s'écrit

$$\partial_t \mathbf{V} + \partial_x \mathbf{F}(\mathbf{V}) = \mathbf{0}.$$

- 1.2. En se plaçant dans les variables  $\mathbf{W} \equiv (\rho, u)$ , le système (3.3) se réécrit, pour des solutions régulières, sous la forma quasi-linéaire

$$\partial_t \mathbf{W} + \mathbb{A}(\mathbf{W}) \partial_x \mathbf{W} = \mathbf{0}. \quad (3.4)$$

Montrer que la matrice  $\mathbb{A}(\mathbf{W})$  s'écrit

$$\mathbb{A}(\mathbf{W}) = \begin{pmatrix} u & \rho \\ \frac{p'}{\rho} & u \end{pmatrix}.$$

- 1.3. Calculer les valeurs propres  $\lambda_1(\mathbf{W})$  et  $\lambda_2(\mathbf{W})$  de la matrice  $\mathbb{A}(\mathbf{W})$ . Afin de fixer les notations on ordonne les valeurs propres selon  $\lambda_1(\mathbf{W}) < \lambda_2(\mathbf{W})$ . Proposer une base associée de vecteurs propres à droite  $\{\mathbf{r}_1(\mathbf{W}), \mathbf{r}_2(\mathbf{W})\}$ . En déduire que le système (3.4) est strictement hyperbolique.

- 1.4. Vérifier que les deux champs caractéristiques sont vraiment non linéaires.

2. Lorsque le fluide n'est pas un gaz parfait, le caractère vraiment non linéaire des champs caractéristiques de (3.3) rend la résolution du problème de Riemann assez compliquée. C'est pourquoi il a été proposé de remplacer (3.3) par un système approché, dit *système de relaxation*, qui s'écrit

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2 + \pi) = 0, \\ \partial_t(\rho V) + \partial_x(\rho u V) = \mu \rho \left( \frac{1}{\rho} - V \right), \end{cases} \quad (3.5)$$

avec  $\mu > 0$  un paramètre constant,  $V \equiv V(x, t)$  une nouvelle variable dite volume de relaxation et  $\pi \equiv \pi(\rho, V)$  une nouvelle loi d'état

$$\pi(\rho, V) = p(1/V) - a^2 \left( \frac{1}{\rho} - V \right)$$

où  $a > 0$  est une constante et  $p(1/V)$  est la «vraie» loi d'état du fluide (sur laquelle on ne fait aucune hypothèse).

- 2.1. Montrer formellement que, lorsque le paramètre  $\mu$  tend vers  $+\infty$ , alors on retrouve le système (3.3) à partir du système (3.5) (et on aura  $V = 1/\rho$ ).

- 2.2. Désormais et pour tout ce qui suit on ne s'intéresse qu'à la structure différentielle de (3.5), c'est-à-dire qu'on ne tient pas compte du terme source. Autrement dit, on pose  $\mu = 0$ . On suppose aussi que  $\rho$  et  $V$  sont strictement positifs.

- 2.2.1. Trouver les vecteurs  $\mathbf{U}: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  et  $\mathbf{H}(\mathbf{U}): \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tels que le système (3.5) s'écrive

$$\partial_t \mathbf{U} + \partial_x \mathbf{H}(\mathbf{U}) = \mathbf{0}.$$

- 2.2.2. En se plaçant dans les variables  $\mathbf{Y} \equiv (\rho, u, V)$ , le système (3.5) se réécrit, pour des solutions régulières, sous la forme quasi-linéaire

$$\partial_t \mathbf{Y} + \mathbb{B}(\mathbf{Y}) \partial_x \mathbf{Y} = \mathbf{0}. \quad (3.6)$$

Montrer que la matrice  $\mathbb{B}(\mathbf{Y})$  s'écrit

$$\mathbb{B}(\mathbf{Y}) = \begin{pmatrix} u & \rho & 0 \\ \frac{a^2}{\rho^3} & u & \frac{1}{\rho} \frac{\partial \pi}{\partial V} \\ 0 & 0 & u \end{pmatrix}.$$

- 2.2.3. Calculer les valeurs propres  $\lambda_1(\mathbf{Y})$ ,  $\lambda_2(\mathbf{Y})$  et  $\lambda_3(\mathbf{Y})$  de la matrice  $\mathbb{B}(\mathbf{Y})$ . Afin de fixer les notations on ordonne les valeurs propres selon  $\lambda_1(\mathbf{Y}) < \lambda_2(\mathbf{Y}) < \lambda_3(\mathbf{Y})$ . Proposer une base associée de vecteurs propres à droite  $\{\mathbf{r}_1(\mathbf{Y}), \mathbf{r}_2(\mathbf{Y}), \mathbf{r}_3(\mathbf{Y})\}$ . En déduire que le système (3.6) est strictement hyperbolique.
- 2.2.4. Vérifier que les trois champs caractéristiques sont linéairement dégénérés. (Par conséquent, les ondes associées à chaque champ sont des discontinuités de contact). Les ondes associées sont-elles entropiques ?
- 2.2.5. Pour chaque  $k = 1, 2, 3$ , on note  $I_k$  et  $J_k$  deux invariants de Riemann du  $k$ -ème champ caractéristique. Montrer qu'un choix possible pour  $I_k$  et  $J_k$  est

$$\begin{aligned} I_1 &= V, & J_1 &= u - \frac{a}{\rho}, \\ I_2 &= u, & J_2 &= \pi, \\ I_3 &= V, & J_3 &= u + \frac{a}{\rho}. \end{aligned}$$

- 2.2.6. En utilisant les invariants de Riemann et les relations de Rankine-Hugoniot, montrer que  $u$  et  $\pi$  sont constants dans une 2-onde, tandis que les courbes de 1-onde et de 3-onde sont des droites dans le plan  $(u, \pi)$ . Vérifier en particulier que les courbes de détente et de choc coïncident (*i.e.* les détentes vérifient les conditions de Rankine-Hugoniot).
- 2.2.7. À l'aide du dessin d'ondes dans le plan  $(u, \pi)$  résoudre le problème de Riemann : pour un état gauche  $\mathbf{Y}_L$  et un état droit  $\mathbf{Y}_R$  on construira une solution composée d'une 1-onde, d'une 2-onde et d'une 3-onde séparant deux états intermédiaires  $\mathbf{Y}_1$  et  $\mathbf{Y}_2$ . On précisera les valeurs de ces états intermédiaires ainsi que les vitesses des ondes.

- 2.2.8. Montrer que la fonction

$$\eta(\mathbf{Y}) = \frac{1}{2} \rho u^2 + \rho \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{\pi(r, V)}{r^2} dr$$

est une entropie du système (3.5). Pour cela on vérifiera que

$$\partial_t \eta + \partial_x(\Phi) = 0 \quad \text{avec} \quad \Phi(\mathbf{Y}) = u \left[ \frac{1}{2} \rho u^2 + G(\rho, V) \right]$$

c'est-à-dire que

$$\nabla_{\mathbf{Y}}(\Phi(\mathbf{Y}))^T = \nabla_{\mathbf{Y}}(\eta(\mathbf{Y}))^T \cdot \mathbb{B}(\mathbf{Y})$$

(on ne vérifiera pas que  $\eta$  est convexe).

- 2.2.9. Expliciter la fonction  $G$  dans le flux d'entropie.

- 2.2.10. Montrer qu'une discontinuité de contact de la deuxième famille reliant un état gauche  $\mathbf{Y}_L = (\rho_L, u_L, V_L)$  à un état droit  $\mathbf{Y} = (\rho, u, V)$  avec vitesse  $\sigma = \lambda_2(\mathbf{Y}_L) = \lambda_2(\mathbf{Y})$  vérifie

$$\Phi(\mathbf{Y}) - \Phi(\mathbf{Y}_L) = \sigma(\eta(\mathbf{Y}) - \eta(\mathbf{Y}_L)),$$

autrement dit on a conservation de l'entropie.

**Partie numérique** Écrire un programme (en s'inspirant éventuellement du programme `saintvenant.f90`) pour résoudre des problèmes de Riemann associés au système de relaxation (3.6) avec  $\mu = 0$  et  $\gamma = 1.4$  : on utilisera l'étude théorique pour implémenter la solution exacte et on la comparera aux solutions numériques obtenues par les schémas de Lax-Friedrichs et de Rusanov.