M43 - 25 mai 2011

Exercice 1.

1. *Décrire l'algorithme de Lagrange (variante de la dichotomie) en justifiant l'expression du point de dichotomie (variante du point milieu) qui est le zéro d'une fonction affine à préciser.*
2. *Écrire l'algorithme pour une convergence à* 10^{-6} *près.*

SOLUTION.

1. Soit deux points a_0 et b_0 ($a_0 < b_0$) d'images par f de signe contraire. En partant de $I_0 = [a_0, b_0]$, les méthodes de dichotomie et de Lagrange produisent une suite de sous-intervalles $I_k = [a_k, b_k]$, $k \geq 0$, avec $I_k \subset I_{k-1}$ pour $k \geq 1$ et tels que $f(a_k)f(b_k) < 0$.
   - ▷ Dans la méthode de dichotomie, on découpe l'intervalle $[a_k; b_k]$ en deux en considérant, pour l'itération suivante, le demi-intervalle $[a_{k+1}; b_{k+1}] = [a_k; (a_k + b_k)/2]$ ou $[a_{k+1}; b_{k+1}] = [(a_k + b_k)/2; b_k]$ qui conserve la propriété $f(a_{k+1}) \cdot f(b_{k+1}) < 0$.
   - ▷ Dans la méthode de Lagrange, plutôt que de diviser en deux intervalles de même longueur l'intervalle $[a_k; b_k]$, on découpe $[a_k; b_k]$ en $[a_k; c_k]$ et $[c_k; b_k]$ où c_k est l'abscisse du point d'intersection de la droite passant par $(a_k, f(a_k))$ et $(b_k, f(b_k))$ et l'axe des abscisses, i.e. le zéro de la fonction

     $$g(c_k) = \frac{f(b_k) - f(a_k)}{b_k - a_k}(c_k - a_k) + f(a_k)$$

     qui est

     $$c_k = a_k - \frac{b_k - a_k}{f(b_k) - f(a_k)} f(a_k).$$

2. Algorithmes pour une convergence à $\varepsilon = 10^{-6}$:

DICHOTOMIE :

Require: a, b
  $\varepsilon \leftarrow 1.e-6$
  $k \leftarrow 0$
  $a_k \leftarrow a$
  $b_k \leftarrow b$
  $x_k \leftarrow \frac{a_k+b_k}{2}$
  while $|b_k - a_k| > \varepsilon$ **do**
    $k \leftarrow k+1$
    if $f(a_k)f(x_k) < 0$ **then**
      $a_{k+1} \leftarrow a_k$
      $b_{k+1} \leftarrow x_k$
    else
      $a_{k+1} \leftarrow x_k$
      $b_{k+1} \leftarrow b_k$
    end if
    $x_{k+1} \leftarrow \frac{a_{k+1}+b_{k+1}}{2}$
  end while

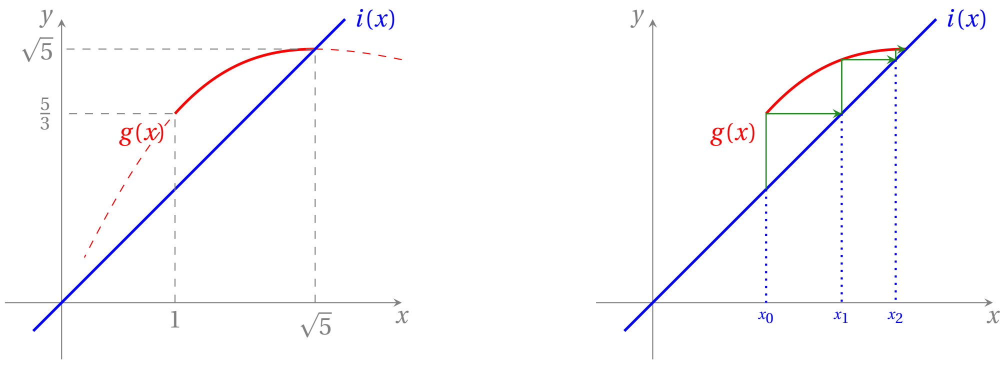
LAGRANGE :

Require: a, b
  $\varepsilon \leftarrow 1.e-6$
  $k \leftarrow 0$
  $a_k \leftarrow a$
  $b_k \leftarrow b$
  $x_k \leftarrow a_k - \frac{b_k - a_k}{f(b_k)-f(a_k)} f(a_k)$
  while $|b_k - a_k| > \varepsilon$ **do**
    $k \leftarrow k+1$
    if $f(a_k)f(x_k) < 0$ **then**
      $a_{k+1} \leftarrow a_k$
      $b_{k+1} \leftarrow x_k$
    else
      $a_{k+1} \leftarrow x_k$
      $b_{k+1} \leftarrow b_k$
    end if
    $x_{k+1} \leftarrow a_{k+1} - \frac{b_{k+1}-a_{k+1}}{f(b_{k+1})-f(a_{k+1})} f(a_{k+1})$
  end while

Exercice 2. *On cherche à évaluer* $\sqrt{5}$ *à l'aide d'un algorithme n'autorisant que les opérations élémentaires. Soit* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite définie par récurrence*

$$\begin{cases} x_0 = 1, \\ x_{n+1} = \frac{10x_n}{x_n^2+5} \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

1. *Montrer que si la suite converge, alors elle converge vers* 0 *ou* $\sqrt{5}$.



(a) Graphe de g comparé au graphe de $i(x) = x$.

(b) Étude graphique de la convergence de la méthode de point fixe $x_{k+1} = g(x_k)$.

FIGURE 1: Exercice 2

2. *Soit la fonction g définie sur $[1;\sqrt{5}]$ par $g(x) = \frac{10x}{x^2+5}$. Étudier g et la comparer à l'identité.*
3. *Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par $\sqrt{5}$. Conclure.*
4. *Déterminer l'ordre de convergence de cette suite.*

SOLUTION.

1. Supposons qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.
   - ▷ Par définition de convergence on a $\ell = \frac{10\ell}{\ell^2+5}$ et par conséquent $\ell \in \left\{-\sqrt{5}, 0, \sqrt{5}\right\}$.
   - ▷ On prouve par récurrence que
     - ▷ si $x_0 = 0$ alors $x_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc $\ell = 0$,
     - ▷ si $x_0 > 0$ alors $x_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc $\ell \geq 0$,
     - ▷ si $x_0 < 0$ alors $x_n < 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc $\ell \leq 0$.

     Comme $x_0 = 1 > 0$, alors $x_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\ell \in \left\{0, \sqrt{5}\right\}$.
2. Soit la fonction g définie sur $[1;\sqrt{5}]$ par $g(x) = \frac{10x}{x^2+5}$. On étudie la fonction g :
   - ⋆ $g(x) > 0$ pour tout $x \in [1;\sqrt{5}]$;
   - ⋆ $g(1) = \frac{5}{3}$, $g(\sqrt{5}) = \sqrt{5}$;
   - ⋆ $g'(x) = -10\frac{x^2-5}{(x^2+5)^2}$;
   - ⋆ g est croissante sur $[1;\sqrt{5}]$.

   Graphe de g comparé au graphe de $i(x) = x$: voir la figure 1a. On vérifie analytiquement qu'il existe une et une seule intersection entre la courbe d'équation $y = g(x)$ et la droite d'équation $y = x$ dans $[1;\sqrt{5}]$:
   $$g(x) = x \quad\iff\quad \frac{10x}{x^2+5} = x \quad\iff\quad x^2 = 5.$$
3. On a $g(x) \in [1;\sqrt{5}]$ pour tout $x \in [1;\sqrt{5}]$: en effet
   $$g(x) = \frac{10x}{x^2+5} \geq \frac{10\times 1}{(\sqrt{5})^2+5} = 1$$
   et on a vu au point précédent que g est croissante et $g(\sqrt{5}) = \sqrt{5}$.
   De plus, $g(x) \geq x$ car
   $$g(x) = \frac{10x}{x^2+5} \geq \frac{10x}{(\sqrt{5})^2+5} = x,$$
   par conséquent la suite $x_{k+1} = g(x_k) \geq x_k$ est croissante.
   Comme $g(x) \leq (\sqrt{5}) = \sqrt{5}$ alors la suite $x_{k+1} = g(x_k) \leq \sqrt{5}$ est bornée. On a ainsi une suite croissante et borné, ce qui implique qu'elle converge. Comme au premier point on a montré que si elle converge vers ℓ alors $\ell \in \left\{0, \sqrt{5}\right\}$, on conclut que $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sqrt{5}$. Pour l'étude graphique de la convergence de la méthode de point fixe voir la figure 1b.
4. Comme $g'(\sqrt{5}) = 0$ et $g''(\sqrt{5}) \neq 0$, la méthode de point fixe associée à la fonction d'itération g est d'ordre 2.

Exercice 3.

1. *Construire le polynôme de Lagrange P qui interpole les points* $(-1,2)$, $(0,1)$, $(1,2)$ *et* $(2,3)$.
2. *Soit Q le polynôme de Lagrange qui interpole les points* $(-1,2)$, $(0,1)$, $(1,2)$. *Montrer qu'il existe un réel λ tel que :*

$$Q(x)-P(x)=\lambda(x+1)x(x-1).$$

Solution. Le polynôme d'interpolation de Lagrange de degré n sur l'ensemble des $n+1$ points $\{(x_i,y_i)\}_{i=0}^{n}$ s'écrit

$$p_n(x)=\sum_{i=0}^{n}\left(y_i\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}\frac{x-x_j}{x_i-x_j}\right).$$

1. Ici $n=3$ donc on a

$$\begin{aligned}
P(x)&=y_0\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}+y_1\frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}\\
&\quad+y_2\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)}+y_3\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}\\
&=\frac{x(x-1)(x-2)}{-3}+\frac{(x+1)(x-1)(x-2)}{2}-(x+1)x(x-2)+\frac{(x+1)x(x-1)}{2}=\\
&=-\frac{1}{3}x^3+x^2+\frac{1}{3}x+1.
\end{aligned}$$

2. Par construction

$$\begin{aligned}
Q(-1)&=P(-1),\\
Q(0)&=P(0),\\
Q(1)&=P(1),
\end{aligned}$$

donc le polynôme $Q(x)-P(x)$ s'annule en -1, en 0 et en 1, ceci signifie qu'il existe un polynôme $R(x)$ tel que

$$Q(x)-P(x)=R(x)(x+1)x(x-1).$$

Puisque $P(x)$ a degré 3 et $Q(x)$ a degré 2, le polynôme $Q(x)-P(x)$ a degré 3, donc le polynôme $R(x)$ qu'on a mis en facteur a degré 0 (*i.e.* $R(x)$ est une constante).

Si on n'a pas remarqué ça, on peut tout de même faire tous les calculs : dans ce cas $n=2$ donc on a

$$\begin{aligned}
Q(x)&=y_0\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}+y_1\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}+y_2\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}\\
&=x(x-1)-(x+1)(x-1)+(x+1)x\\
&=x^2+1.
\end{aligned}$$

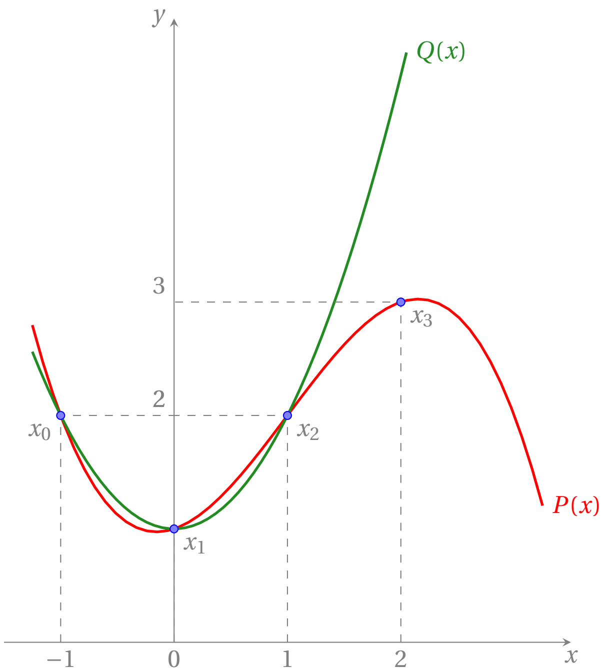
Ainsi

$$\begin{aligned}
Q(x)-P(x)&=y_0\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}\left[1-\frac{x-x_3}{x_0-x_3}\right]+y_1\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}\left[1-\frac{x-x_3}{x_1-x_3}\right]\\
&\quad+y_2\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}\left[1-\frac{x-x_3}{x_2-x_3}\right]-y_3\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}\\
&=-y_0\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}-y_1\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}\\
&\quad-y_2\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)}-y_3\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}\\
&=-\left[\frac{y_0}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}+\frac{y_1}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}\right.\\
&\quad\left.+\frac{y_2}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)}+\frac{y_3}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}\right](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\\
&=\frac{(x+1)x(x-1)}{3}
\end{aligned}$$

et $\lambda = \frac{1}{3}$. Sinon directement

$$Q(x) - P(x) = x^2 + 1 + \frac{1}{3}x^3 - x^2 + \frac{1}{3}x - 1 = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}x = \frac{(x+1)x(x-1)}{3} = \lambda x(x+1)(x-1)$$

avec $\lambda = \frac{1}{3}$.



Exercice 4. *Soit f une fonction $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On se donne les points $\{x_i\}_{i=0}^{i=n}$ de subdivision de l'intervalle $[a;b]$: $x_i = a + ih$ avec $h = \frac{b-a}{n}$. Le but de l'exercice est de trouver une formule de quadrature à $2n$ points pour approcher l'intégrale*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{1}$$

On propose dans un premier temps (question 1 à 4) de construire la formule de quadrature à deux points suivantes :

$$\int_{-1}^1 g(x)\,\mathrm{d}x \approx g(-\alpha) + g(\alpha), \tag{2}$$

où $0 < \alpha < 1$ est à déterminer.

1. *La formule de quadrature (2) est-elle exacte pour une fonction g constante ?*
2. *La formule de quadrature (2) est-elle exacte pour une fonction g affine ?*
3. *Choisir α pour rendre la formule de quadrature exacte pour des polynômes de degré plus élevé. Quel est alors le degré d'exactitude de cette formule de quadrature ?*
4. *À l'aide d'un changement de variable affine, étendre cette formule de quadrature pour l'intégrale suivante :*

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

5. *En déduire une formule de quadrature à $2n$ points, notée F, pour le calcul approché de (1). Cette formule de quadrature est-elle stable ?*
6. *Écrire l'algorithme du calcul de F.*

Solution.

1. Soit $g(x) = c$ alors on a

$$
\begin{array}{ccc}
\displaystyle\int_{-1}^{1} g(x)\,\mathrm{d}x & = & g(-\alpha)+g(\alpha) \\
\| & & \| \\
[cx]_{-1}^{1} & & 2c \\
\| & & \| \\
2c & & 2c
\end{array}
$$

donc la méthode est exacte pour toute fonction constante.

2. Soit $g(x)=c+dx$ alors on a

$$
\begin{array}{ccc}
\displaystyle\int_{-1}^{1} g(x)\,\mathrm{d}x & = & g(-\alpha)+g(\alpha) \\
\| & & \| \\
\left[cx+d\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{1} & & 2c \\
\| & & \| \\
2c & & 2c
\end{array}
$$

donc la méthode est exacte pour toute fonction affine.

3. Soit $g(x)=c+dx+ex^2+fx^3$ alors on a

$$
\begin{array}{ccc}
\displaystyle\int_{-1}^{1} g(x)\,\mathrm{d}x & = & g(-\alpha)+g(\alpha) \\
\| & & \| \\
\left[cx+d\frac{x^2}{2}+e\frac{x^3}{3}+f\frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{1} & & 2c+2e\alpha^2 \\
\| & & \| \\
2c+\frac{2}{3}e & & 2c+2e\alpha^2
\end{array}
$$

Pour que la méthode soit exacte pour tout polynôme de degré au moins 3 il faut choisir α tel que

$$\frac{1}{3}=\alpha^2.$$

On obtient les deux solutions

$$\alpha=-\sqrt{\frac{1}{3}},\qquad \alpha=\sqrt{\frac{1}{3}}.$$

L'hypothèse $0<\alpha<1$ impose alors le choix

$$\alpha=\sqrt{\frac{1}{3}}.$$

Soit maintenant $g(x)=c+dx+ex^2+fx^3+hx^4$. On a

$$\int_{-1}^{1} g(x)\,\mathrm{d}x=\left[cx+d\frac{x^2}{2}+e\frac{x^3}{3}+f\frac{x^4}{4}+h\frac{x^5}{5}\right]_{-1}^{1}=2c+\frac{2}{3}e+\frac{2}{5}h$$

et, si $\alpha^2=\frac{1}{3}$, alors

$$g(-\alpha)+g(\alpha)=2c+\frac{2}{3}e+\frac{2}{9}f$$

donc la formule de quadrature a degré d'exactitude 3.

4. Par le changement de variable $y=x_i+(x+1)\frac{x_{i+1}-x_i}{2}$ on déduit la formule de quadrature

$$
\begin{aligned}
\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(y)\,\mathrm{d}y &= \frac{x_{i+1}-x_i}{2}\int_{-1}^{1} f\left(x_i+(x+1)\frac{x_{i+1}-x_i}{2}\right)\mathrm{d}x \\
&\approx \frac{x_{i+1}-x_i}{2}\left[f\left(x_i+\left(1-\sqrt{\tfrac{1}{3}}\right)\frac{x_{i+1}-x_i}{2}\right)+f\left(x_i+\left(1+\sqrt{\tfrac{1}{3}}\right)\frac{x_{i+1}-x_i}{2}\right)\right].
\end{aligned}
$$

5. Si $h = x_{i+1} - x_i = \frac{b-a}{n}$ (*i.e.* si on considère une subdivision de l'intervalle $[a;b]$ équirépartie) alors on trouve la formule de quadrature composite (*i.e.* sur n sous-intervalles et à $2n$ points)

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x &\approx \frac{h}{2}\sum_{i=0}^{n-1}\left[f\left(x_i + h\left(1-\sqrt{\tfrac{1}{3}}\right)\right) + f\left(x_i + h\left(1+\sqrt{\tfrac{1}{3}}\right)\right)\right]\\ &= \frac{h}{2}\sum_{i=0}^{n-1}\left[f\left(a + h\left(i+1-\sqrt{\tfrac{1}{3}}\right)\right) + f\left(a + h\left(i+1+\sqrt{\tfrac{1}{3}}\right)\right)\right].\end{aligned}$$

   Cette formule de quadrature est stable puisque tous les coefficients sont positifs.

6. Algorithme du calcul de F :

Algorithm 1 Calcul de $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

Require: f
Require: a
Require: $b > a$
Require: $n > 0$
  $h \leftarrow \frac{b-a}{n}$
  $\alpha_1 \leftarrow a + \left(1-\sqrt{\frac{1}{3}}\right)H$
  $\alpha_2 \leftarrow a + \left(1+\sqrt{\frac{1}{3}}\right)H$
  for $i = 0$ to $n-1$ **do**
    $s \leftarrow s + f(\alpha_1 + ih) + 2f(\alpha_2 + ih)$
  end for
  return $I \leftarrow \frac{h}{2}s$

Exercice 5. *Soit $\mathbb{A}$ une matrice, $\mathbb{A} \in \mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{R})$.*

1. *Rappeler les conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence d'une factorisation $\mathbb{LU}$ de la matrice $\mathbb{A}$ et préciser les définitions de $\mathbb{L}$ et $\mathbb{U}$.*
2. *On suppose $\mathbb{L}$ et $\mathbb{U}$ construites (i.e. on dispose de tous les coefficients $\ell_{i,j}$ et $u_{i,j}$ de $\mathbb{L}$ et $\mathbb{U}$), écrire l'algorithme de résolution de $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, avec $\mathbf{b} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ donné.*
3. *Soit la matrice A suivante :*

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1\\ -1 & 3 & -1\\ -1 & -1 & 3\end{pmatrix}.$$

   Construire à la main les matrices $\mathbb{L}$ et $\mathbb{U}$ de la factorisation $\mathbb{LU}$.

SOLUTION.

1. Pour une matrice quelconque $\mathbb{A} \in \mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{R})$, la factorisation $\mathbb{LU}$ (sans pivot) existe et est unique ssi les sous-matrices principales $\mathbb{A}_i$ de $\mathbb{A}$ d'ordre $i = 1, \dots, n-1$ (celles que l'on obtient en restreignant $\mathbb{A}$ à ses i premières lignes et colonnes) ne sont pas singulières (autrement dit si les mineurs principaux, *i.e.* les déterminants des sous-matrices principales, sont non nuls).

   On peut identifier des classes de matrices particulières pour lesquelles les hypothèses de cette proposition sont satisfaites. Mentionnons par exemple :
   - ▷ les matrices à diagonale strictement dominante,
   - ▷ les matrices réelles symétriques définies positives.

   Une technique qui permet d'effectuer la factorisation $\mathbb{LU}$ pour toute matrice $\mathbb{A}$ inversible, même quand les hypothèses de cette proposition ne sont pas vérifiées, est la méthode du pivot par ligne : il suffit d'effectuer une permutation convenable des lignes de la matrice originale $\mathbb{A}$ à chaque étape k où un terme diagonal a_{kk} s'annule.

2. Une fois calculées les matrices $\mathbb{L}$ et $\mathbb{U}$, résoudre le système linéaire $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, avec $\mathbf{b} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ donné consiste simplement à résoudre successivement

   2.1. le système triangulaire inférieur $\mathbb{L}\mathbf{y} = \mathbf{b}$ par l'algorithme

$$y_1 = \frac{b_1}{\ell_{11}}, \qquad y_i = \frac{1}{\ell_{11}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1}\ell_{ij}y_j\right), \qquad i = 2, \dots, n$$

2.2. le système triangulaire supérieure $\mathbb{U}\mathbf{x} = \mathbf{y}$ par l'algorithme

$$x_n = \frac{y_n}{u_{nn}}, \qquad\qquad x_i = \frac{1}{u_{nn}}\left(y_i - \sum_{j=i+1}^{n} u_{ij}x_j\right), \qquad j = n-1,\dots,1$$

3. Factorisation :

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3\leftarrow L_3-\frac{-1}{3}L_1]{L_2\leftarrow L_2-\frac{-1}{3}L_1} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 8/3 & -4/3 \\ 0 & -4/3 & 8/3 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3\leftarrow L_3-\frac{-4/3}{8/3}L_2} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 8/3 & -4/3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent

$$\mathbb{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/3 & 1 & 0 \\ -1/3 & -1/2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{U} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 8/3 & -4/3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 6. *Soit le problème de Cauchy :*

$$\begin{cases} u'(t) + u^5(t) = 0, & \forall t \in \mathbb{R}^+, \\ u(0) = u_0 > 0. \end{cases} \tag{3}$$

1. *Montrer qu'il existe une unique solution globale $u \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$.*
2. *Soit le schéma numérique défini par la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suivante*

$$\frac{u_{n+1} - u_n}{\Delta t} + u_{n+1}u_n^4 = 0, \qquad \forall n \in \mathbb{N},$$

pour $\Delta t > 0$ fixé. Expliciter l'expression de u_{n+1} en fonction de u_n.

3. *Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante et convergente vers 0. Ce schéma est-il inconditionnellement A-stable ?*

SOLUTION.

C'est un problème de Cauchy du type

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)), & \forall t \in \mathbb{R}, \\ u(0) = u_0 > 0, \end{cases} \tag{4}$$

avec $f(t, u(t)) = g(u(t)) = -u^5(t)$.

1. Comme $g \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$, d'après Cauchy-Lipschitz, il existe $T > 0$ et une unique solution $u \in \mathscr{C}^1([0, T], \mathbb{R}^+)$. Par récurrence, en exploitant l'EDO et la régularité de g, on grimpe en régularité sur u et $u \in \mathscr{C}^\infty([0, T], \mathbb{R}^+)$.
   La fonctionne nulle est solution de l'équation différentielle $g(0) = 0$. Comme $u_0 > 0$, par l'unicité de la solution du problème de Cauchy on a $u(t) > 0$ pour tout $t \in [0, T]$ (car deux trajectoires ne peuvent pas se croiser). De plus, u est décroissante, ainsi la solution est bornée ($u(t) \in]0, u_0[$). On en déduit par le théorème des extrémités que la solution u admet un prolongement sur $\mathbb{R}^+$ solution de l'EDO.
2. Pour $\Delta t > 0$ fixé on obtient

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + u_n^4 \Delta t}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

3. On étudie la suite

$$\begin{cases} u_0 > 0, \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n^4\Delta t}, & \forall n \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

pour $\Delta t > 0$ fixé.
Par récurrence on montre que si $u_0 > 0$ alors $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. De plus, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{1+u_n^4\Delta t} < 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$: la suite est monotone décroissante. On a alors une suite décroissante et bornée par zéro, donc elle converge. Soit ℓ la limite de cette suite, alors $\ell \geq 0$ et $\ell = \frac{\ell}{1+\ell^4\Delta t}$ donc $\ell = 0$. Ce schéma est donc inconditionnellement A-stable.