Rattrapage

- ▷ Durée de l'épreuve : 2 heures.
- ▷ Ce sujet comporte 5 exercices indépendants.
- ▷ **Documents et calculatrices autorisés.**

⋆ Rendre l'énoncé avec la copie.

- ► *On attachera le plus grand soin à la rédaction et à la présentation claire et lisible des résultats dont il sera tenu compte lors de la correction. Aucun raisonnement vague ou insuffisant ne sera pris en compte.* ***Une grande valeur sera attribuée à la rigueur des raisonnements.***
- ► ***Le texte est long, mais il n'est pas nécessaire de tout faire pour obtenir la note maximale.***
- ► *Toute question où les notations de l'énoncé ne seraient pas respectées se verra attribuer la note zéro.*

🛈 La solution sera publiée ce soir sur ma page web : `http://faccanoni.univ-tln.fr`

Exercice 1 (Équations différentielles)**.** *Lorsqu'une nouvelle espèce s'introduit dans un écosystème, elle évolue d'abord lentement; son rythme de croissance s'accélère ensuite à mesure qu'elle s'adapte, puis ralentit quand la population devient trop importante compte tenu des ressources disponibles. Pour ce type d'évolution, on utilise le modèle de* GOMPERTZ *suivant :*

$$y'(t) = -y(t)\ln(y(t)).$$

Calculer toute les solutions de cette équation différentielle pour $t > 0$ (ne pas oublier les solutions constantes). La population va-t-elle survivre ?

SOLUTION.

1. On doit résoudre l'EDO à variables séparables

$$y'(t) = -y(t)\ln(y(t)).$$

On cherche d'abord les solutions constantes, i.e. des fonctions $y(t) = A$ pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$0 = A\ln(A) \qquad \Longleftrightarrow \qquad A = 1.$$

On trouve ainsi une solution constante :

$$y(t) \equiv 1.$$

Si on suppose que $y(t) \neq 1$, l'EDO se réécrit comme

$$\frac{y'(t)}{y(t)\ln(y(t))} = -1;$$

on doit alors calculer

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y\ln(y)} = \int -1\,\mathrm{d}t.$$

On obtient [1]

$$\ln|\ln(y(t))| = -t + C \qquad \text{pour tout } C \in \mathbb{R}$$

et on en déduit

$$y(t) = e^{De^{-t}} \qquad \text{pour tout } D \in \mathbb{R}.$$

2. Si $y(0) > 1$ alors $y'(t) < 0$ (la population décroît) ; si $0 < y(0) < 1$ alors $y'(t) > 0$ (la population croît) ; comme $y(t) = 1$ est solution et comme deux solutions ne peuvent pas se croiser, sans faire de calcul on voit que lorsque t tend vers l'infini, la population tend vers la valeur d'équilibre $y(t) = 1$ quelque soit le nombre d'individus à l'instant initial.

Exercice 2 (continuité, dérivabilité, différentiabilité)**.** *Soit $m \in \mathbb{N}$ et $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie comme suit :*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^m y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1. Étude de la fonction sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$:
   - *1.1. montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ pour tout $m \in \mathbb{N}$;*
   - *1.2. calculer le gradient de f pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ pour tout $m \in \mathbb{N}$;*
   - *1.3. montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ pour tout $m \in \mathbb{N}$;*
   - *1.4. que peut-on conclure sur la différentiabilité de f sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$?*

2. Étude de la fonction en $(0,0)$:
   - *2.1. pour quelles valeurs de $m \in \mathbb{N}$ la fonction f est-elle continue en $(0,0)$?*
   - *2.2. calculer le gradient de f en $(0,0)$ pour tout $m \in \mathbb{N}$;*
   - *2.3. pour quelles valeurs de $m \in \mathbb{N}$ la fonction f est-elle différentiable en $(0,0)$?*
   - *2.4. pour quelles valeurs de $m \in \mathbb{N}$ la fonction f est-elle de classe $\mathscr{C}^1$ en $(0,0)$?*

SOLUTION.

1. *Étude de la fonction sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.*
   - 1.1. f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ car quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas.

---

1. $\int \frac{1}{x\ln(x)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z = \ln|z| + c = \ln|\ln(x)| + C$

1.2. Le gradient de f pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ est le vecteur de composantes

$$
\begin{aligned}
f_x(x,y) &= \frac{(m-1)x^{m-1}y^2(x^2+y^2)-x^m y^2(2x)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^{m-1}y^2(mx^2+my^2-2x^2)}{(x^2+y^2)^2},\\
f_y(x,y) &= x^m\frac{2y(x^2+y^2)-2y^3}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2x^{m+2}y}{(x^2+y^2)^2}.
\end{aligned}
$$

1.3. f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$; ses dérivées partielles sont continues sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ car quotients de fonctions continues dont les dénominateurs ne s'annulent pas. Alors f est de classe $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\})$.

1.4. Comme f est de classe $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\})$ alors f est différentiable sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.

2. *Étude de la fonction en* $(0,0)$.

2.1. Pour que f soit continue en $(0,0)$ il faut que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=f(0,0)$.

▷ Si $m=0$, f s'écrit

$$
f(x,y)=\begin{cases}\frac{y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}
$$

qui n'est pas continue en $(0,0)$ car $f(x,0)=0$ mais $f(x,x)=1/2$.

▷ Si $m>0$, passons en coordonnées polaires : $x=0+r\cos\vartheta$, $y=0+r\sin\vartheta$,

$$
\tilde f(r,\vartheta)=f(x(r,\vartheta),y(r,\vartheta))=r^m\cos^m(\vartheta)\sin^2(\vartheta).
$$

Comme $|\tilde f(r,\vartheta)|\le r^m \xrightarrow[r\to0]{} 0$ alors $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$ donc f est continue en $(0,0)$.

2.2. Le gradient de f en $(0,0)$ est le vecteur de composantes

$$
f_x(0,0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=0,\qquad f_y(0,0)=\lim_{y\to0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0}=0.
$$

2.3. f est différentiable en $(0,0)$ si et seulement si

$$
\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)-f_x(0,0)(x-0)-f_y(0,0)(y-0)}{\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}}\neq 0.
$$

De plus, toute fonction différentiable est continue.

▷ Si $m=0$, f n'est pas continue en $(0,0)$ donc elle n'est pas différentiable en $(0,0)$.

▷ Soit $m>0$ et notons $h(x,y)=\frac{f(x,y)-f(0,0)-f_x(0,0)(x-0)-f_y(0,0)(y-0)}{\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}}=\frac{x^m y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$.

▷ Si $m=1$, comme $h(y,y)=\frac{1}{2^{3/2}}\neq0$, alors f n'est pas différentiable en $(0,0)$.

▷ Si $m>1$, passons en coordonnées polaires : $x=0+r\cos\vartheta$, $y=0+r\sin\vartheta$,

$$
\tilde h(r,\vartheta)=h(x(r,\vartheta),y(r,\vartheta))=r^{m-1}\cos^m(\vartheta)\sin^2(\vartheta).
$$

Comme $|\tilde h(r,\vartheta)|\le r^{m-1}\xrightarrow[r\to0]{}0$ alors $\lim_{(x,y)\to(0,0)} h(x,y)=0$ donc f est différentiable en $(0,0)$.

2.4. Une fonction est de classe $\mathscr{C}^1$ si ses dérivées partielles sont continues, autrement dit si

$$
\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_x(x,y)=f_x(0,0)\qquad\text{et}\qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} f_y(x,y)=f_y(0,0).
$$

De plus, toute fonction de classe $\mathscr{C}^1$ est différentiable.

▷ Si $m=0$ ou $m=1$, f n'est pas différentiable en $(0,0)$ donc elle n'est pas de classe $\mathscr{C}^1$ en $(0,0)$.

▷ Si $m>1$, passons en coordonnées polaires : $x=0+r\cos\vartheta$, $y=0+r\sin\vartheta$,

$$
\begin{cases}\tilde f_x(r,\vartheta)=f_x(x(r,\vartheta),y(r,\vartheta))=r^{m-1}(m-\cos^2(\vartheta))\cos^{m-1}(\vartheta)\sin^2(\vartheta),\\ \tilde f_y(r,\vartheta)=f_y(x(r,\vartheta),y(r,\vartheta))=2r^{m-1}\cos^{m-2}(\vartheta)\sin(\vartheta).\end{cases}
$$

Comme $|\tilde f_x(r,\vartheta)|\le mr^{m-1}\xrightarrow[r\to0]{}0$ et $|\tilde f_y(r,\vartheta)|\le 2r^{m-1}\xrightarrow[r\to0]{}0$ alors $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_x(x,y)=0$ et $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_y(x,y)=0$ donc f est différentiable en $(0,0)$.

Exercice 3 (Extrema libres)**.** *Une montagne a la forme de la surface $z(x,y)=2xy-2x^2-y^2-8x+6y+4$ (l'unité de mesure est de 100 mètres). Si le niveau de la mer correspond à $z=0$, quelle est la hauteur de la montagne ?*

SOLUTION. Il s'agit d'évaluer $z(x,y)$ dans le point de maximum. Cherchons d'abord les points critiques :

$$\vec{\nabla} z(x,y) = \begin{pmatrix} 2y-4x-8 \\ 2x-2y+6 \end{pmatrix}$$

et $\vec{\nabla} z(x,y) = \vec{0}$ ssi $(x,y) = (-1,2)$. On établie la nature du point critique en étudiant le déterminant de la matrice hessienne :

$$f_{xx}(x,y) = -4 < 0, \qquad f_{yy}(x,y) = -2, \qquad f_{xy}(x,y) = 2,$$

et $f_{xx}(-1,2)f_{yy}(-1,2) - (f_{xy}(-1,2))^2 = 4 > 0$ donc $(-1,2)$ est un maximum. Comme $z(-1,2) = 14$, la montagne est haute 1400 mètre.

Exercice 4 (Intégrales multiples)**.** *Soit* $\mathscr{D} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 4x + y^2 + 2y + 3 \le 0 \right\}$. *Calculer*

$$\iint_{\mathscr{D}} \frac{1}{1+(x-2)^2+(y+1)^2} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

SOLUTION. Remarquons que l'équation $x^2 - 4x + y^2 + 2y + 3 = 0$ définit un cercle de centre $(2,-1)$ et rayon $\sqrt{2}$. On passe alors aux coordonnées polaires :

$$\begin{cases} x = 2 + r\cos\vartheta, \\ y = -1 + r\sin\vartheta, \\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\vartheta, \end{cases}$$

et on obtient

$$\iint_{\mathscr{D}} \frac{1}{1+(x-2)^2+(y+1)^2} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}} \frac{r}{1+r^2}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\vartheta = \pi \int_0^{\sqrt{2}} \frac{2r}{1+r^2}\,\mathrm{d}r = \pi\left[\ln(1+r^2)\right]_0^{\sqrt{2}} = \pi\ln(3).$$

Exercice 5 (Champs de vecteurs)**.** *Montrer que le champ de vecteurs*

$$\vec{V} = -\frac{y}{x^2+y^2}\vec{i} + \frac{x}{x^2+y^2}\vec{j}$$

est non conservatif bien qu'il soit à rotationnel nul.

SOLUTION. Le champ de vecteurs est à rotationnel nul car :

$$\frac{\partial V_2}{\partial x} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial V_1}{\partial y}.$$

Comme il est définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ qui n'est pas simplement connexe, il peut être non conservatif. Pour le prouver on va exhiber une courbe fermée γ pour laquelle $\oint_\gamma \vec{V} \neq 0$. Comme le champ est à rotationnel nul, si on prend une courbe fermée γ contenue dans un ensemble simplement connexe, on aura $\oint_\gamma \vec{V} = 0$. On doit alors prendre γ qui encercle le point $(0,0)$, par exemple la courbe $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$ pour $t \in [0, 2\pi]$. Dans ce cas on a

$$\oint_\gamma \vec{V} = \int_0^{2\pi} \left(-\frac{\sin(t)}{\cos^2(t)+\sin^2(t)}(\cos(t))' + \frac{\cos(t)}{\cos^2(t)+\sin^2(t)}(\sin(t))' \right) \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} 1\,\mathrm{d}t = 2\pi \neq 0.$$