Examen

Exercice .1 (Équation différentielle)**.** *On note $y(t)$ le nombre de ménages vivant en France équipés d'un ordinateur (t est exprimé en années et $y(t)$ en millions de ménages). Le modèle de* Varhulst *estime que sur la période* 1980 – 2020*, $y(t)$ est solution de l'équation différentielle*

$$y'(t) = 0,022y(t)(20 - y(t)).$$

1. *Calculer toutes les solutions de l'équation différentielle.*
2. *On pose $t = 0$ en 1980 et on sait que $y(0) = 0,01$. Combien de ménages vivant en France seront équipés d'un ordinateur en 2020 ?*

Solution.

1. On doit résoudre l'EDO à variables séparables

$$y'(t) = 0,022y(t)(20 - y(t)).$$

On cherche d'abord les solutions constantes, i.e. des fonctions $y(t) = A$ pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$0 = 0,022A(20 - A) \qquad \Longleftrightarrow \qquad A = 0 \text{ ou } A = 20.$$

On trouve ainsi deux solutions constantes :

$$y(t) \equiv 0 \qquad \text{et} \qquad y(t) \equiv 20.$$

Si on suppose que $y(t) \neq 0$ et $y(t) \neq A$, l'EDO se réécrit comme

$$\frac{y'(t)}{y(t)(20 - y(t))} = 0,022;$$

on doit alors calculer

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y(20-y)} = \int 0,022 \,\mathrm{d}t,$$

i.e.

$$\frac{1}{20}\left(\int \frac{\mathrm{d}y}{y} - \int \frac{1}{y-20}\,\mathrm{d}y\right) = \int 0,022 \,\mathrm{d}t.$$

On obtient

$$\ln\frac{|y|}{|y-20|} = 0,44t + C \qquad \text{pour tout } C \in \mathbb{R}$$

et on en déduit

$$y(t) = \frac{20}{1 + 20De^{-0,44t}} \qquad \text{pour tout } D \in \mathbb{R}_+.$$

2. Si $t = 0$ correspond à l'année 1980 et si $y(0) = 0,01$ alors

$$0,01 = \frac{20}{1 + 20De^{-0,44\times 0}} \qquad \Longrightarrow \qquad D = 1999$$

et la fonction qui estime le nombre de ménages en France équipés d'un ordinateur t années après 1980 est

$$y(t) = \frac{20}{1 + 1999e^{-0,44t}}.$$

Pour prévoir combien de ménages vivant en France seront équipés d'un ordinateur en 2020 il suffit de calculer $y(40)$

$$y(40) = \frac{20}{1 + 1999e^{-0,44\times 40}} \approx 19.99.$$

Exercice .2 (continuité, dérivabilité, différentiabilité). *Soit $m \in \mathbb{N}$ et $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie comme suit :*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^m y}{x^2+y^2} & \textit{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \textit{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1. Étude de la fonction sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$:

1.1. montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ pour tout $m \in \mathbb{N}$;

1.2. calculer le gradient de f pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ pour tout $m \in \mathbb{N}$;

1.3. montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ pour tout $m \in \mathbb{N}$;

1.4. que peut-on conclure sur la différentiabilité de f sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$?

2. Étude de la fonction en $(0,0)$:

2.1. pour quelles valeurs de $m \in \mathbb{N}$ la fonction f est-elle continue en $(0,0)$?

2.2. calculer le gradient de f en $(0,0)$ pour tout $m \in \mathbb{N}$;

2.3. pour quelles valeurs de $m \in \mathbb{N}$ la fonction f est-elle différentiable en $(0,0)$?

2.4. pour quelles valeurs de $m \in \mathbb{N}$ la fonction f est-elle de classe $\mathscr{C}^1$ en $(0,0)$?

SOLUTION.

1. *Étude de la fonction sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.*

1.1. f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ car quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas.

1.2. Le gradient de f pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ est le vecteur de composantes

$$f_x(x,y) = \frac{x^{m-1}y(mx^2+my^2-2x^2)}{(x^2+y^2)^2}, \qquad f_y(x,y) = \frac{x^m(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}.$$

1.3. f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$; ses dérivées partielles sont continues sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ car quotients de fonctions continues dont les dénominateurs ne s'annulent pas. Alors f est de classe $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$.

1.4. Comme f est de classe $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$ alors f est différentiable sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

2. *Étude de la fonction en* $(0,0)$.

2.1. Pour que f soit continue en $(0,0)$ il faut que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$.

▷ Si $m=0$, f s'écrit

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

qui n'est pas continue en $(0,0)$ car $f(x,0)=0$ mais $f(x,x) = 1/(2x) \xrightarrow[x\to 0]{} \infty$.

▷ Si $m=1$, f s'écrit

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

qui n'est pas continue en $(0,0)$ car $f(x,0)=0$ mais $f(x,x)=1/2$.

▷ Si $m>1$, passons en coordonnées polaires : $x = 0 + r\cos\vartheta$, $y = 0 + r\sin\vartheta$,

$$\tilde{f}(r,\vartheta) = f(x(r,\vartheta), y(r,\vartheta)) = r^{m-1}\cos^m(\vartheta)\sin(\vartheta).$$

Comme $|\tilde{f}(r,\vartheta)| \le r^{m-1} \xrightarrow[r\to 0]{} 0$ alors $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ donc f est continue en $(0,0)$.

2.2. Le gradient de f en $(0,0)$ est le vecteur de composantes

$$f_x(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = 0, \qquad f_y(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = 0.$$

2.3. f est différentiable en $(0,0)$ si et seulement si

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)-f_x(0,0)(x-0)-f_y(0,0)(y-0)}{\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}} \neq 0.$$

De plus, toute fonction différentiable est continue.

▷ Si $m=0$ ou $m=1$, f n'est pas continue en $(0,0)$ donc elle n'est pas différentiable en $(0,0)$.

▷ Soit $m>1$ et notons $h(x,y) = \frac{f(x,y)-f(0,0)-f_x(0,0)(x-0)-f_y(0,0)(y-0)}{\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}} = \frac{x^m y}{(x^2+y^2)^{3/2}}$.

▷ Si $m=2$, comme $h(y,y) = \frac{1}{2^{3/2}} \neq 0$, alors f n'est pas différentiable en $(0,0)$.

▷ Si $m>2$, passons en coordonnées polaires : $x=0+r\cos\vartheta,\ y=0+r\sin\vartheta$,

$$\tilde h(r,\vartheta)=h(x(r,\vartheta),y(r,\vartheta))=r^{m-2}\cos^m(\vartheta)\sin(\vartheta).$$

Comme $|\tilde h(r,\vartheta)|\le r^{m-2}\xrightarrow[r\to0]{}0$ alors $\lim_{(x,y)\to(0,0)}h(x,y)=0$ donc f est différentiable en $(0,0)$.

2.4. Une fonction est de classe $\mathscr{C}^1$ si ses dérivées partielles sont continues, autrement dit si

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f_x(x,y)=f_x(0,0)\qquad\text{et}\qquad\lim_{(x,y)\to(0,0)}f_y(x,y)=f_y(0,0).$$

De plus, toute fonction de classe $\mathscr{C}^1$ est différentiable.

▷ Si $m=0$ ou $m=1$ ou $m=2$, f n'est pas différentiable en $(0,0)$ donc elle n'est pas de classe $\mathscr{C}^1$ en $(0,0)$.

▷ Si $m>2$, passons en coordonnées polaires : $x=0+r\cos\vartheta,\ y=0+r\sin\vartheta$,

$$\begin{cases}\tilde f_x(r,\vartheta)=f_x(x(r,\vartheta),y(r,\vartheta))=r^{m-2}(m-\cos^2(\vartheta))\cos^{m-1}(\vartheta)\sin(\vartheta),\\ \tilde f_y(r,\vartheta)=f_y(x(r,\vartheta),y(r,\vartheta))=r^{m-2}(\cos^2(\vartheta)-\sin^2(\vartheta))\cos^m(\vartheta).\end{cases}$$

Comme $|\tilde f_x(r,\vartheta)|\le mr^{m-2}\xrightarrow[r\to0]{}0$ et $|\tilde f_y(r,\vartheta)|\le 2r^{m-2}\xrightarrow[r\to0]{}0$ alors $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f_x(x,y)=0$ et $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f_y(x,y)=0$ donc f est différentiable en $(0,0)$.

Exercice .3 (Extrema libres, extrema sous contraintes). *Trouver trois nombres réels positifs dont le produit vaut 1728 et dont la somme est minimale :*

1. *avec la méthode des multiplicateurs de Lagrange (i.e. minimisation d'une fonction $f(x,y,z)$ sous une contrainte $g(x,y,z)=0$), [on se contentera de trouver le point critique sans en étudier sa nature] ;*
2. *avec la méthode des extrema libres en «éliminant» une variable de la contrainte (en minimisant une fonction $h(x,y)=f(x,y,z(x,y))$) ; après avoir trouvé le point critique, établir sa nature.*

Solution. Il s'agit de minimiser la fonction $f(x,y,z)=x+y+z$ sous la contrainte $g(x,y,z)=xyz-1728=0$.

1. On écrit la fonction de Lagrange

$$F(x,y,z,\lambda)=f(x,y,z)-\lambda g(x,y,z)=x+y+z-\lambda(xyz-1728)$$

et on cherche le(s) point(s) critique(s) de F :

$$\vec\nabla F(x,y,z,\lambda)=\begin{pmatrix}1-\lambda yz\\1-\lambda xz\\1-\lambda xy\\1728-xyz\end{pmatrix}.$$

On a $\vec\nabla F(x,y,z,\lambda)=\vec 0$ ssi $(x,y,z,\lambda)=(12,12,12,1/144)$.

2. On réécrit la contrainte sous la forme $z=\frac{1728}{xy}$ et on l'injecte dans la fonction à minimiser :

$$h(x,y)=f(x,y,z(x,y))=x+y+z(x,y)=x+y-\frac{1728}{xy}.$$

On cherche d'abord le(s) point(s) critique(s) :

$$\vec\nabla h(x,y)=\begin{pmatrix}1-\frac{1728}{x^2y}\\1-\frac{1728}{xy^2}\end{pmatrix}$$

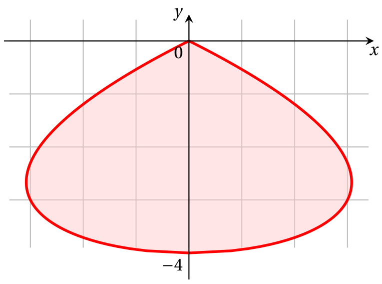
et $\vec\nabla h(x,y)=\vec 0$ ssi $(x,y)=(12,12)$. On établie la nature du point critique en étudiant le déterminant de la matrice hessienne :

$$f_{xx}(x,y)=\frac{3456}{x^3y},\qquad f_{yy}(x,y)=\frac{3456}{xy^3},\qquad f_{xy}(x,y)=\frac{1728}{x^2y^2},$$
$$f_{xx}(12,12)=\frac16>0,\qquad f_{yy}(12,12)=\frac16,\qquad f_{xy}(12,12)=\frac1{12}$$

et $f_{xx}(12,12)f_{yy}(12,12)-(f_{xy}(12,12))^2=\frac1{48}>0$ donc $(12,12)$ est un minimum.

Exercice .4 (Intégrales multiples)**.** *Calculer l'aire de*

$$\mathscr{D} = \left\{ \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \middle| \quad y < 0, \quad x^2 < y^4(y+4) \quad \right\}.$$



SOLUTION.

$$\begin{aligned}\text{Aire} &= \iint_{\mathscr{D}} 1 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \int_{-4}^{0} \int_{-y^2\sqrt{y+4}}^{y^2\sqrt{y+4}} 1 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \int_{-4}^{0} [x]_{-y^2\sqrt{y+4}}^{y^2\sqrt{y+4}} \,\mathrm{d}y = \int_{-4}^{0} 2y^2\sqrt{y+4} \,\mathrm{d}y \\ &= 4\int_0^2 t^2(t^2-4)^2 \,\mathrm{d}t = 4\int_0^2 t^6 - 8t^4 + 16t^2 \,\mathrm{d}t = 4\left[\frac{t^7}{7} - 8\frac{t^5}{5} + 16\frac{t^3}{3}\right]_0^2 = \frac{2^{12}}{105}.\end{aligned}$$

Exercice .5 (Formes différentielles)**.** *Trouver toutes les fonctions* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *de classe* $\mathscr{C}^1$ *qui satisfont* $f(0) = 2$ *et telles que la forme différentielle*

$$\omega(x, y) = (y^2 + 1)\sin(x) \,\mathrm{d}x - f(x) y \,\mathrm{d}y$$

soit exacte. Pour la forme différentielle ainsi trouvée, calculer toutes ses primitives.

SOLUTION. Le domaine de définition de ω est $\mathbb{R}^2$ qui est simplement connexe : pour que la forme différentielle proposée soit exacte il faut et il suffit que pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\partial_y((y^2+1)\sin(x)) = \partial_x(-f(x)y),$$

ce qui implique $f'(x) = -2\sin(x)$; toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ qui rendent la forme différentielle ω exacte sont de la forme $f(x) = 2\cos(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$. On obtient $f(0) = 2$ pour $c = 0$ et la forme différentielle devient

$$\omega(x, y) = (y^2 + 1)\sin(x) \,\mathrm{d}x - 2\cos(x) y \,\mathrm{d}y.$$

Pour trouver une primitive, c'est à dire une fonction $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que $\mathrm{d}\varphi = \omega$, on intègre ω_1 par rapport à x et on obtient $\varphi(x, y) = -(y^2+1)\cos(x) + h(y)$. Pour déterminer h on dérive l'expression ainsi obtenue : $\varphi_y = -2y\cos(x) + h'(y)$; cette fonction doit être égale à ω_2 donc $h'(y) = 0$ et finalement

$$\varphi(x, y) = -(y^2+1)\cos(x) + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$