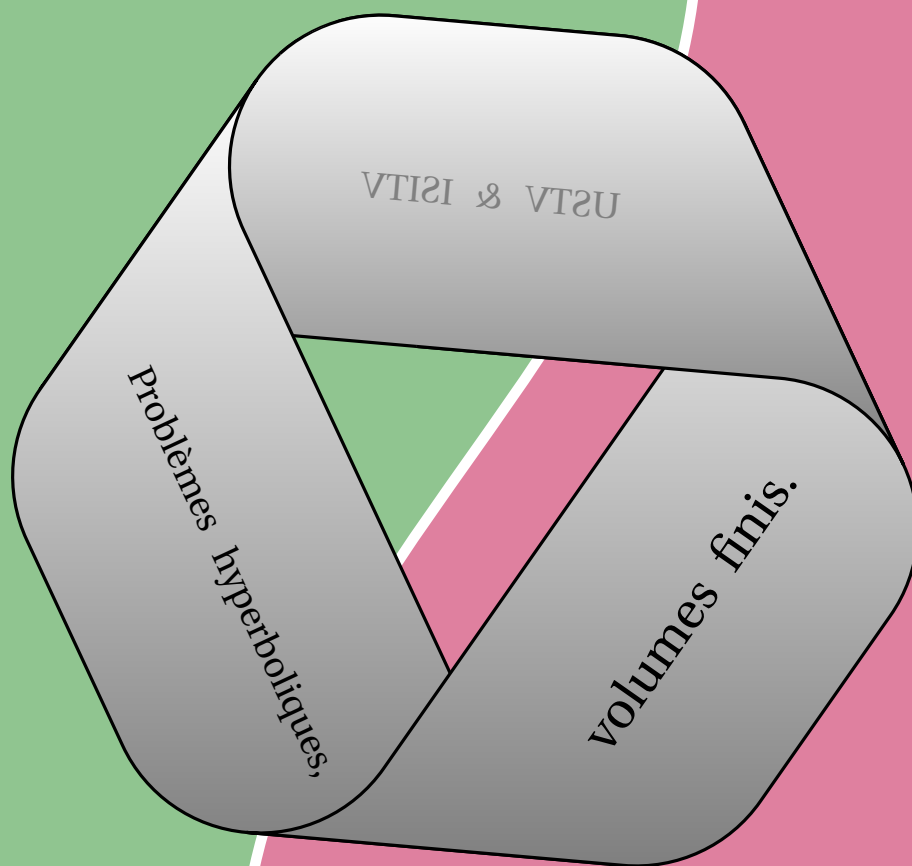


M2

2010/2011

Sujets des TP



Gloria FACCANONI

IMATH Bâtiment U-318
Université du Sud Toulon-Var
Avenue de l'université
83957 LA GARDE - FRANCE

☎ 0033 (0)4 94 14 23 81

✉ gloria.faccanoni@univ-tln.fr

🌐 <http://faccanoni.univ-tln.fr>

Table des matières

1 TP1 - résolution de l'équation de transport	5
1.1 Exercice	6
1.2 Code	6
2 TP2 - résolution de l'équation de Burgers	10
2.1 Rappels	10
2.2 Exercice	12
2.3 Code	13
3 TP3 - systèmes hyperboliques	14
3.1 Exemple	14
3.2 Exercice	24
3.2.1 Approximation numérique	24
3.2.2 Code	25
3.2.3 Calcul de la solution exacte du problème de Riemann	25

1 TP1 - résolution de l'équation de transport

Les TP seront évalués. Vous avez jusqu'au 16 février 2011 pour rendre un rapport avec le code associé pour rendre compte de votre travail. Vous pouvez écrire le rapport seul ou en binôme avec un autre membre de votre groupe.

On considère le problème (c est une constante réelle positive)

$$\begin{cases} \partial_t u(x, t) + c \partial_x u(x, t) = 0 & \text{pour } (x, t) \in]0; L[\times]0; T[, \\ u(x, 0) = g(x) & \text{pour } x \in]0; L[. \end{cases}$$

Afin de se débarrasser du problème des conditions au bord on prendra des conditions périodiques :

$$u(L, t) = u(0, t) \text{ pour tout } t \in]0; T[$$

Soit $\alpha := c \frac{\Delta t}{\Delta x}$ et $u_j^n \approx u(j\Delta x, n\Delta t)$ la solution approchée au point $(j\Delta x, n\Delta t)$. On considérera les schémas aux différences finies suivants :

❶ le schéma décentré à gauche

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} = 0 \quad \text{i.e.} \quad u_j^{n+1} = u_j^n - \alpha(u_j^n - u_{j-1}^n)$$

❷ le schéma décentré à droite

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} = 0 \quad \text{i.e.} \quad u_j^{n+1} = u_j^n - \alpha(u_{j+1}^n - u_j^n)$$

❸ le schéma centré

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0 \quad \text{i.e.} \quad u_j^{n+1} = u_j^n - \alpha \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2}$$

❹ le schéma upwind (décentré amont)

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \frac{c + |c|}{2\Delta x} (u_j^n - u_{j-1}^n) + \frac{c - |c|}{2\Delta x} (u_{j+1}^n - u_j^n)$$

i.e.

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \left(\frac{\alpha + |\alpha|}{2} (u_j^n - u_{j-1}^n) + \frac{\alpha - |\alpha|}{2} (u_{j+1}^n - u_j^n) \right) = \begin{cases} u_j^n - \alpha(u_j^n - u_{j-1}^n) & \text{si } \alpha > 0, \\ u_j^n - \alpha(u_{j+1}^n - u_j^n) & \text{si } \alpha < 0. \end{cases}$$

❺ le schéma de Lax-Friedrichs

$$\frac{u_j^{n+1} - \frac{u_{j+1}^n + u_{j-1}^n}{2}}{\Delta t} + c \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0 \quad \text{i.e.} \quad u_j^{n+1} = \frac{1 - \alpha}{2} u_{j+1}^n + \frac{1 + \alpha}{2} u_{j-1}^n$$

❻ le schéma de Lax-Wendroff

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} - \frac{c^2 \Delta t}{2} \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{(\Delta x)^2} = 0$$

i.e.

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \alpha \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2} + \alpha^2 \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{2}$$

❼ le schéma de Beam-Warming

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c \frac{g(u_{j-1}^n, u_j^n) - g(u_{j-2}^n, u_{j-1}^n)}{\Delta x} = 0 \quad \text{avec } g(A, B) = \frac{c(c \frac{\Delta t}{\Delta x} - 1)}{2} A + \frac{c(3 - c \frac{\Delta t}{\Delta x})}{2} B$$

i.e.

$$u_j^{n+1} = \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2} u_{j-2}^n + \alpha(2 - \alpha) u_{j-1}^n + \frac{(\alpha - 1)(\alpha - 2)}{2} u_j^n$$

⑧ le schéma de Fromm

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c \frac{g(u_{j-1}^n, u_j^n, u_{j+1}^n) - g(u_{j-2}^n, u_{j-1}^n, u_j^n)}{\Delta x} = 0 \quad \text{avec } g(A, B, C) = \frac{c(\frac{\Delta t}{\Delta x} - 1)}{4} A + cB + \frac{c(1 - c\frac{\Delta t}{\Delta x})}{4} C$$

i.e.

$$u_j^{n+1} = \frac{\alpha(\alpha - 1)}{4} u_{j-2}^n + \frac{\alpha(5 - \alpha)}{4} u_{j-1}^n + \frac{(1 - \alpha)(\alpha + 4)}{4} u_j^n + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{4} u_{j+1}^n$$

⑨ le schéma anti-diffusif de Després-Lagoutière

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c \frac{g(u_{j-1}^n, u_j^n, u_{j+1}^n) - g(u_{j-2}^n, u_{j-1}^n, u_j^n)}{\Delta x} = 0$$

i.e.

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \alpha(g(u_{j-1}^n, u_j^n, u_{j+1}^n) - g(u_{j-2}^n, u_{j-1}^n, u_j^n))$$

avec

$$g(L, C, R) = \begin{cases} A, & \text{si } R \leq A, \\ B, & \text{si } R \geq B, \\ R, & \text{sinon,} \end{cases}$$

où

$$A = \max(L, C) + \frac{C - \max(L, C)}{\alpha}, \quad B = \min(L, C) + \frac{C - \min(L, C)}{\alpha}.$$

1.1 Exercice

- ① Compléter le code fortran avec les schémas qui manquent.
- ② Pour $c = 1$, $L = 4$, $T = 12$, $g(x) = \sin(2\pi x/L)$ et une grille de 50 mailles comparer les schémas ①-⑨ avec $cf1 = 0.3$, puis avec $cf1 = 0.9$ et enfin avec $cf1 = 1.1$. Que remarque-t-on à propos de la stabilité? Que remarque-t-on à propos de la diffusion? Et de la dispersion? Répéter les calculs sur une grille de 500 mailles.
- ③ Même exercice pour $g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]0; L/3[\cup]2L/3; L[, \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$
- ④ Étudier (analytiquement) la stabilité L^2 et l'ordre de consistance des schémas ①-⑧; en déduire une condition CFL le cas échéant.

Le schéma ① est stable L^2 sous condition CFL $0 < \alpha < 1$ et consistants d'ordre 1 en temps et en espace, le schéma ② est stable L^2 sous condition CFL $-1 < \alpha < 0$ et consistants d'ordre 1 en temps et en espace, le schéma ③ est consistants d'ordre 1 en temps et 2 en espace mais inconditionnellement instable, les schémas ④-⑤ sont stables L^2 sous condition CFL $|\alpha| < 1$ et consistants d'ordre 1 en temps et en espace, le schéma ⑥ est stables L^2 sous condition CFL $|\alpha| < 1$ et consistant d'ordre 1 en temps et 2 en espace, le schéma ⑦ est stable L^2 sous condition CFL $0 < \alpha < 1$ et consistant d'ordre 1 en temps et 2 en espace, enfin le schéma ⑧ est stable L^2 sous condition CFL $0 < \alpha < 2$ et consistant d'ordre 1 en temps et 2 en espace. Pour l'étude de stabilité du schéma ⑨ voir <http://www.math.u-psud.fr/~lagoutie/publi.html>

1.2 Code

Pour compiler le programme `transport.f90` on utilisera la commande

```
gfortran transport.f90 -o transport.o
```

L'exécutable ainsi créé s'appelle `transport.o` qu'on lancera en tapant

```
./transport.o
```

Les résultats sont sauvegardés dans les fichiers `transportN.dat` où $N = 0 \dots S_{\max}$ est le numéro de la sauvegarde. Un fichier `transportN.dat` comporte NX lignes et 11 colonnes :

x	décentré gauche	décentré droite	centré	upwind	lax- friedrichs	lax- wendroff	beam- warming	fromm	antidiffusif
-----	--------------------	--------------------	--------	--------	--------------------	------------------	------------------	-------	--------------

Pour comparer la solution approchée du schéma XXX avec la solution exacte au cours du temps on tapera

```
gnuplot plot_XXX.gnu
```

Pour comparer les solutions approchées des schémas avec la solution exacte à l'instant finale on tapera

gnuplot plot_comaparaision_finale.gnu

Exemple : étude du schéma ① (décentré à gauche)

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} = 0 \quad \text{i.e.} \quad u_j^{n+1} = u_j^n - \alpha(u_j^n - u_{j-1}^n)$$

Stabilité L^2 . On utilise l'analyse de Fourier : pour $k \in \mathbb{Z}$, le coefficient de Fourier $\hat{u}^n(k)$ de la solution du schéma vérifie

$$\hat{u}^{n+1}(k) = \left[1 - \alpha + \alpha e^{-i2\pi k \Delta x} \right] \hat{u}^n(k).$$

En notant $\xi \equiv 2\pi k \Delta x$, on a

$$\begin{aligned} \hat{u}^{n+1}(k) &= \left[1 - \alpha + \alpha e^{-i\xi} \right] \hat{u}^n(k) = \\ &= \left[1 - \alpha + \alpha (\cos(-\xi) + i \sin(-\xi)) \right] \hat{u}^n(k) = \\ &= \left[1 - \alpha + \alpha \cos(\xi) - i \alpha \sin(\xi) \right] \hat{u}^n(k). \end{aligned}$$

Après simplification on obtient

$$|\hat{u}^{n+1}(k)|^2 = |A(k)|^2 |\hat{u}^n(k)|^2$$

avec

$$\begin{aligned} |A(k)|^2 &\equiv [1 - \alpha + \alpha \cos(\xi)]^2 + \alpha^2 \sin^2 \xi = \\ &= 1 + 2\alpha(\alpha - 1)(1 - \cos(\xi)). \end{aligned}$$

On a

$$|A(k)| \leq 1 \quad \forall k \in \mathbb{Z} \iff 2\alpha(\alpha - 1)(1 - \cos(\xi)) \geq 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{R} \iff \alpha(\alpha - 1) \geq 0.$$

Pour $0 \leq \alpha \leq 1$ on a $|A(k)| \leq 1$ pour toute fréquence $k \in \mathbb{Z}$, ce qui prouve que le schéma est stable en norme L^2 sous la condition CFL $0 \leq \alpha \leq 1$.

Ordre de consistance. On remplace u_i^m par $u(x_i, t^m)$ où u est une fonction régulière, $i = j - 1, j$ et $m = n, n + 1$. On définit l'erreur de troncature par

$$\tau_j^n \equiv \frac{u(x_j, t^{n+1}) - u(x_j, t^n)}{\Delta t} + c \frac{u(x_j, t^n) - u(x_{j-1}, t^n)}{\Delta x}.$$

On fait un développement de Taylor en x autour du point x_j et en t autour du point t^n et, comme u est solution de l'équation $\partial_t u = -c \partial_x u$, on a

$$\begin{aligned} u(x_{j-1}, t^n) &= u(x_j, t^n) - \Delta x \frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t^n) + \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t^n) + O((\Delta x)^3), \\ u(x_j, t^{n+1}) &= u(x_j, t^n) + \Delta t \frac{\partial u}{\partial t}(x_j, t^n) + \frac{(\Delta t)^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j, t^n) + O((\Delta t)^3) \\ &= u(x_j, t^n) + \Delta t \left(-c \frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t^n) \right) + \frac{(\Delta t)^2}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(-c \frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t^n) \right) + O((\Delta t)^3) \\ &= u(x_j, t^n) - c \Delta t \frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t^n) - c \frac{(\Delta t)^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial t}(x_j, t^n) \right) + O((\Delta t)^3) \\ &= u(x_j, t^n) - c \Delta t \frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t^n) + c^2 \frac{(\Delta t)^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t^n) + O((\Delta t)^3). \end{aligned}$$

Par conséquent l'erreur de troncature se réécrit

$$\begin{aligned} \tau_j^n &\equiv \frac{u(x_j, t^{n+1}) - u(x_j, t^n)}{\Delta t} + c \frac{u(x_j, t^n) - u(x_{j-1}, t^n)}{\Delta x} \\ &= \left(c^2 \frac{\Delta t}{2} - c \frac{\Delta x}{2} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t^n) + O((\Delta x)^2 + (\Delta t)^2) \\ &= O((\Delta x) + (\Delta t)). \end{aligned}$$

Le schéma est donc d'ordre 1 en temps et en espace.

On aurait pu s'arrêter un ordre avant dans les développements de Taylor, mais vous voyez bien que même si on va plus loin on obtient le bon résultat ! Cependant, dans la consigne de l'exercice je vous ai suggéré l'ordre pour éviter de faire des calculs inutiles. Dans les exemples qui suivent on va s'arrêter au minimum nécessaire.

Exemple : étude du schéma ④ (centré)

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0 \quad \text{i.e.} \quad u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\alpha}{2}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n)$$

Stabilité L^2 . On utilise l'analyse de Fourier : pour $k \in \mathbb{Z}$, le coefficient de Fourier $\hat{u}^n(k)$ de la solution du schéma vérifie

$$\hat{u}^{n+1}(k) = \left[1 - \frac{\alpha}{2} \left(e^{i2\pi k \Delta x} - e^{-i2\pi k \Delta x} \right) \right] \hat{u}^n(k).$$

En notant $\xi \equiv 2\pi k \Delta x$, on a

$$\begin{aligned} \hat{u}^{n+1}(k) &= \left[1 - \frac{\alpha}{2} \left(e^{i\xi} - e^{-i\xi} \right) \right] \hat{u}^n(k) = \\ &= \left[1 - \frac{\alpha}{2} \left(\cos(\xi) + i \sin(\xi) - \cos(-\xi) - i \sin(-\xi) \right) \right] \hat{u}^n(k) = \\ &= [1 - i\alpha \sin(\xi)] \hat{u}^n(k). \end{aligned}$$

Après simplification on obtient

$$|\hat{u}^{n+1}(k)|^2 = |A(k)|^2 |\hat{u}^n(k)|^2$$

avec

$$|A(k)|^2 \equiv 1 + \alpha^2 \sin^2(\xi).$$

On a

$$|A(k)| \leq 1 \quad \forall k \in \mathbb{Z} \iff \alpha^2 \sin^2(\xi) \leq 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{R} \iff \alpha \in \mathbb{R}.$$

Ce qui prouve que le schéma est inconditionnellement instable en norme L^2 .

Ordre de consistance. On remplace u_i^m par $u(x_i, t^m)$ où u est une fonction régulière, $i = j-1, j, j+1$ et $m = n, n+1$. On définit l'erreur de troncature par

$$\tau_j^n \equiv \frac{u(x_j, t^{n+1}) - u(x_j, t^n)}{\Delta t} + c \frac{u(x_{j+1}, t^n) - u(x_{j-1}, t^n)}{2\Delta x}.$$

On fait un développement de Taylor en x autour du point x_j et en t autour du point t^n et, comme u est solution de l'équation $\partial_t u = -c \partial_x u$, on a

$$\begin{aligned} u(x_{j-1}, t^n) &= u(x_j, t^n) - \Delta x \frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t^n) + \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t^n) + O((\Delta x)^3), \\ u(x_{j+1}, t^n) &= u(x_j, t^n) + \Delta x \frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t^n) + \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t^n) + O((\Delta x)^3), \\ u(x_j, t^{n+1}) &= u(x_j, t^n) + \Delta t \frac{\partial u}{\partial t}(x_j, t^n) + O((\Delta t)^2) \\ &= u(x_j, t^n) + \Delta t \left(-c \frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t^n) \right) + O((\Delta t)^2) \\ &= u(x_j, t^n) - c \Delta t \frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t^n) + O((\Delta t)^2). \end{aligned}$$

Par conséquent l'erreur de troncature se réécrit

$$\tau_j^n \equiv \frac{u(x_j, t^{n+1}) - u(x_j, t^n)}{\Delta t} + c \frac{u(x_{j+1}, t^n) - u(x_{j-1}, t^n)}{2\Delta x} = O((\Delta x)^2 + (\Delta t)).$$

Le schéma est donc d'ordre 1 en temps et 2 en espace.

Exemple : étude du schéma ⑤ (Lax-Friedrichs)

$$\frac{u_j^{n+1} - \frac{u_{j+1}^n + u_{j-1}^n}{2}}{\Delta t} + c \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0 \quad \text{i.e.} \quad u_j^{n+1} = \frac{1-\alpha}{2} u_{j+1}^n + \frac{1+\alpha}{2} u_{j-1}^n$$

Stabilité L^2 . On utilise l'analyse de Fourier : pour $k \in \mathbb{Z}$, le coefficient de Fourier $\hat{u}^n(k)$ de la solution du schéma vérifie

$$\hat{u}^{n+1}(k) = \left[\frac{1-\alpha}{2} e^{i2\pi k \Delta x} - \frac{1+\alpha}{2} e^{-i2\pi k \Delta x} \right] \hat{u}^n(k).$$

En notant $\xi \equiv 2\pi k \Delta x$, on a

$$\hat{u}^{n+1}(k) = \left[\frac{1-\alpha}{2} e^{i\xi} + \frac{1+\alpha}{2} e^{-i\xi} \right] \hat{u}^n(k) = [\cos(\xi) - i\alpha \sin(\xi)] \hat{u}^n(k).$$

Après simplification on obtient

$$|\hat{u}^{n+1}(k)|^2 = |A(k)|^2 |\hat{u}^n(k)|^2$$

avec

$$|A(k)|^2 \equiv \cos^2(\xi) + \alpha^2 \sin^2(\xi).$$

On a

$$|A(k)| \leq 1 \quad \forall k \in \mathbb{Z} \iff \cos^2(\xi) + \alpha^2 \sin^2(\xi) \geq 1 \quad \forall \xi \in \mathbb{R} \iff \alpha^2 \leq 1.$$

Ce qui prouve que le schéma est stable en norme L^2 sous la condition CFL $|\alpha| \leq 1$.

Ordre de consistance. On remplace u_i^m par $u(x_i, t^m)$ où u est une fonction régulière, $i = j-1, j, j+1$ et $m = n, n+1$. On définit l'erreur de troncature par

$$\tau_j^n \equiv \frac{u(x_j, t^{n+1}) - \frac{u(x_{j+1}, t^n) + u(x_{j-1}, t^n)}{2}}{\Delta t} + c \frac{u(x_{j+1}, t^n) - u(x_{j-1}, t^n)}{2\Delta x}.$$

On fait un développement de Taylor en x autour du point x_j et en t autour du point t^n et, comme u est solution de l'équation $\partial_t u = -c \partial_x u$, on a

$$\begin{aligned} u(x_{j-1}, t^n) &= u(x_j, t^n) - \Delta x \frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t^n) + O((\Delta x)^2), \\ u(x_{j+1}, t^n) &= u(x_j, t^n) + \Delta x \frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t^n) + O((\Delta x)^2), \\ u(x_j, t^{n+1}) &= u(x_j, t^n) + \Delta t \frac{\partial u}{\partial t}(x_j, t^n) + O((\Delta t)^2) \\ &= u(x_j, t^n) + \Delta t \left(-c \frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t^n) \right) + O((\Delta t)^2) \\ &= u(x_j, t^n) - c \Delta t \frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t^n) + O((\Delta t)^2). \end{aligned}$$

Par conséquent l'erreur de troncature se réécrit

$$\tau_j^n \equiv \frac{u(x_j, t^{n+1}) - u(x_j, t^n)}{\Delta t} + c \frac{u(x_{j+1}, t^n) - u(x_{j-1}, t^n)}{2\Delta x} = O\left((\Delta x) + (\Delta t) + \frac{(\Delta x)^2}{\Delta t}\right).$$

Étant donné que, sous la condition CFL calculée précédemment, $O\left(\frac{(\Delta x)^2}{\Delta t}\right) = O(\Delta x)$, le schéma est donc d'ordre 1 en temps et en espace.

2 TP2 - résolution de l'équation de Burgers

Les TP seront évalués. Vous avez jusqu'au 16 février 2011 pour rendre un rapport avec le code associé pour rendre compte de votre travail. Vous pouvez écrire le rapport seul ou en binôme avec un autre membre de votre groupe.

2.1 Rappels

On cherche

$$u: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, t) \mapsto u(x, t)$$

solution faible entropique du problème

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x q(u) = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, 0) = g(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

avec le flux

$$q: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ u \mapsto q(u)$$

Courbes caractéristiques : on appelle courbe caractéristique de l'EDP une courbe $x = x(t)$ dans le demi-espace $t > 0$ le long de laquelle la solution u est constante.

Si pour un point (x, t) passe une et une seule caractéristique et cette caractéristique a pied en $(\xi, 0)$, alors $u(x, t) = g(\xi)$.

La caractéristique de pied $(\xi, 0)$ a équation

$$x(t) = \xi + q'(g(\xi))t.$$

Pour t suffisamment petit, la solution u est définie implicitement par l'équation

$$u = g(x - q'(g(\xi))t).$$

Condition de Rankine-Hugoniot : si deux caractéristiques s'intersectent elles génèrent une discontinuité dans la solution.

La courbe de discontinuité est appelée onde de choc et si elle est régulière et a équation $x = s(t)$ alors u doit vérifier les relations de Rankine-Hugoniot : si on appelle u_R et u_L respectivement les traces de u à droite et à gauche de la courbe de choc, on a

$$s'(t) = \frac{q(u_R(s(t), t)) - q(u_L(s(t), t))}{u_R(s(t), t) - u_L(s(t), t)}.$$

Si $(x_0; t_0)$ est le premier point où les caractéristiques s'intersectent, alors on obtient l'équation de la courbe de choc en résolvant l'EDO avec la condition initiale $s(t_0) = x_0$.

Condition d'entropie : une condition qui permet de sélectionner parmi les solutions faibles qui vérifient les relations de saut de Rankine-Hugoniot la solution «physique» est la condition d'entropie de Lax le long de la courbe de choc $x = s(t)$:

$$q(u_R(s(t), t)) < s'(t) < q(u_L(s(t), t)).$$

Onde de raréfaction ou de détente : dans les régions du demi-espace $t > 0$ qui ne sont pas rejointes par les caractéristiques on construit la solution (qui se connecte avec continuité avec les autres régions du demi-espace) par des ondes de raréfaction.

Une onde de raréfaction centrée en (x_0, t_0) a équation

$$u(x, t) = R\left(\frac{x - x_0}{t - t_0}\right)$$

où R est la fonction inverse de q' .

Exemple

Considérons l'équation de Burgers $\partial_t u + \partial_x \frac{u^2}{2} = 0$ avec donnée initiale

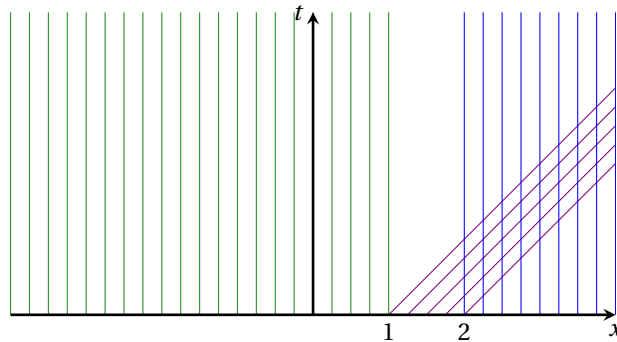
$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1, \\ 1 & \text{si } 1 < x < 2, \\ 0 & \text{si } x > 2. \end{cases}$$

Il s'agit d'une équation de type $\partial_t u + \partial_x q(u) = 0$ avec

$$q(u) = \frac{u^2}{2}, \quad q'(u) = u, \quad (q')^{-1}(r) = r.$$

L'équation de la caractéristique de pied $(\xi, 0)$ est

$$x(t) = \xi + q'(g(\xi))t = \xi + (g(\xi))t = \begin{cases} \xi, & \xi < 1, \\ \xi + t, & 1 < \xi < 2, \\ \xi, & \xi > 2. \end{cases}$$



On s'attend donc à ce que la solution faible entropique présente une onde de raréfaction centrée en $(1, 0)$ et une onde de choc qui part de $(2, 0)$ et que, après un certain temps, les deux ondes interagissent.

▷ La raréfaction est comprise entre la droite d'équation

$$x(t) = 1$$

et la droite d'équation

$$x(t) = 1 + t$$

et a équation

$$u(x, t) = (q')^{-1}\left(\frac{x-1}{t-0}\right) = \frac{x-1}{t}.$$

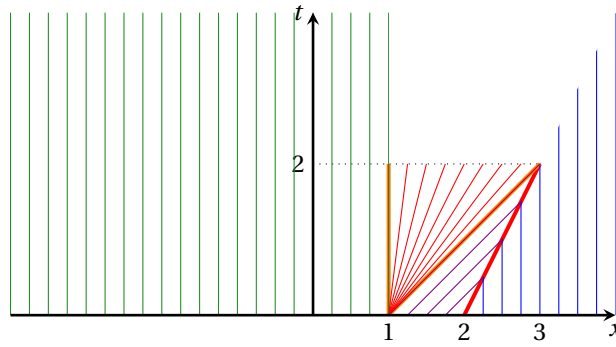
▷ Pour déterminer l'équation de l'onde de choc qui a pied en $(2, 0)$ on utilise les relations de Rankine-Hugoniot :

$$\begin{cases} s'(t) = \frac{q(u_R) - q(u_L)}{u_R - u_L} = \frac{(u_R)^2 - (u_L)^2}{2(u_R - u_L)} = \frac{1-0}{2(1-0)} = \frac{1}{2} \\ s(0) = 2 \end{cases}$$

d'où $x = s(t) = \frac{1}{2}t + 2$.

Ces considérations sont valables jusqu'à ce que l'onde de choc et l'onde de raréfaction se touchent, c'est-à-dire jusqu'à $t = 2$.
Donc la solution pour $0 < t < 2$ est

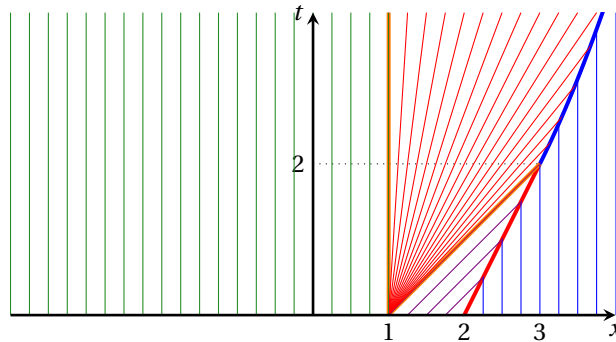
$$u(x, t) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 1, \\ \frac{x-1}{t}, & \text{si } 1 < x < t+1, \\ 1, & \text{si } t+1 < x < \frac{1}{2}t+2, \\ 0, & \text{si } x > \frac{1}{2}t+2. \end{cases}$$



▷ Pour $t > 2$ on continue à avoir une onde de choc mais l'état gauche n'est plus constante car il est donné par la raréfaction i.e. $u_L = \frac{s(t)-1}{t}$ donc le nouveau choc a pied en $(3, 2)$ et vérifie

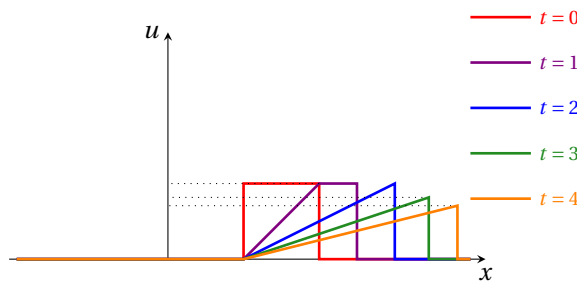
$$\begin{cases} s'(t) = \frac{q(u_R) - q(u_L)}{u_R - u_L} = \frac{(u_R)^2 - (u_L)^2}{2(u_R - u_L)} = \frac{0 - \left(\frac{s(t)-1}{t}\right)^2}{2\left(0 - \frac{s(t)-1}{t}\right)} = \frac{s(t)-1}{2t} \\ s(2) = 3 \end{cases}$$

d'où l'équation $x = 1 + \sqrt{2t}$.



L'unique solution faible entropique pour $t > 0$ est donc

$$u(x, t) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 1, \\ \frac{x-1}{t}, & \text{si } 1 < x < \min\{1+t, 1+\sqrt{2t}\}, \\ 1, & \text{si } 1+t < x < \frac{1}{2}t+2, \\ 0, & \text{si } x > \frac{1}{2}t+2 \text{ et } t < 2, \\ 0, & \text{si } x > 1+\sqrt{2t} \text{ et } t \geq 2. \end{cases}$$



Remarquons que l'amplitude du choc vaut $\sqrt{\frac{2}{t}}$ et le choc se déplace à vitesse $\sqrt{\frac{1}{2t}}$. Par conséquent, pour $t \rightarrow \infty$, l'amplitude et la vitesse du choc tendent vers zéro.

2.2 Exercice

On considère l'équation de Burgers sur l'intervalle $[0; 6]$ avec des conditions au bord de Neumann homogènes. Soit $\alpha := \frac{\Delta t}{\Delta x}$, cfl une constante réelle positive et $u_j^n \approx u(j\Delta x, n\Delta t)$ la solution approchée dans la mailles de centre $(j\Delta x, \sum_k^n (\Delta t)^k)$. On considère des schémas de Volumes Finis :

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \alpha^n (g(u_{j-1}^n, u_j^n) - g(u_j^n, u_{j+1}^n)) \quad \text{avec} \quad \Delta t \leq \text{cfl} \frac{\Delta x}{\sup_j |u_j^n|}.$$

Les différents schémas se caractérisent par la définition du flux numérique g :

- ❶ le schéma de Lax-Friedrichs :

$$g(L, R) = \frac{q(L) + q(R) + \frac{L-R}{\alpha}}{2}$$

- ❷ le schéma de Lax-Wendroff :

$$g(L, R) = \frac{q(L) + q(R) - \alpha(q(R) - q(L))q'(\frac{L+R}{2})}{2}$$

- ❸ le schéma de Godunov : si on dénote $w(\frac{x}{t}, L, R)$ la solution exacte du problème de Riemann à deux états donnés par L (gauche) et R (droite), le flux numérique s'écrit

$$g(L, R) = q(w(0, L, R))$$

- ❹ le schéma de Murman-Roe :

$$g(L, R) = \begin{cases} q(L) & \text{si } a(L, R) \in \{0, 1\}, \\ q(R) & \text{si } a(L, R) = -1 \end{cases} \quad \text{où } a(L, R) = \begin{cases} \text{signe}(q(L) - q(R)) \cdot \text{signe}(L - R) & \text{si } L \neq R, \\ \text{signe}(q'(L)) & \text{sinon.} \end{cases}$$

- ① Compléter le code fortran en implémentant le schéma de Murman-Roe.

- ② Soit $g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in]0; 1.5[\cup]1.5; 3[, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Pour $T = 4.0$ et une grille de 50 mailles comparer les schémas ❶-❹ avec $cf1 = 0.5$, puis avec $cf1 = 1$, $cf1 = 2$ et enfin avec $cf1 = 3$. Que peut-on conclure à propos de la stabilité ? Est-ce que la vitesse de l'onde de choc numérique est correcte pour tous les schémas ? La solution numérique converge-t-elle vers une solution faible ? Et vers une solution faible entropique ? Les schémas ❶-❹ sont-ils monotones ?

- ③ Même exercice pour $g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]0; 1.5[\cup]1.5; 3[, \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$

- ④ Calculer la solution exacte, l'implémenter dans le code et la comparer avec les solutions numériques obtenues avec les schémas ❶-❹ pour les données initiales suivantes :

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]0; 1[, \\ 1 & \text{si } x \in]1; 2[, \\ 0 & \text{si } x \in]2; 3[, \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x \in]0; 1[, \\ 1 & \text{si } x \in]1; 2[, \\ 0 & \text{si } x \in]2; 3[, \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]0; 1[, \\ 1 & \text{si } x \in]1; 2[, \\ 2 & \text{si } x \in]2; 3[, \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in]0; 1[, \\ 0 & \text{si } x \in]1; 2[, \\ 1 & \text{si } x \in]2; 3[. \end{cases}$$

Facultatif : décrire et implémenter le schéma de Glimm (voir par exemple le livre de E. F. TORO *Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics. A practical introduction*. Second edition. Springer-Verlag, Berlin, 1999.)

2.3 Code

Pour compiler le programme `burgers.f90` on utilisera la commande `gfortran burgers.f90 -o burgers.o`

L'exécutable ainsi créé s'appelle `burgers.o` qu'on lancera en tapant `./burgers.o`

Les résultats sont sauvegardés dans le dossier `data` dans les fichiers `burgersN.dat` où $N = 0 \dots S_{\max}$ est le numéro de la sauvegarde. Un fichier `burgersN.dat` comporte $N \times 6$ lignes et 6 colonnes : `x u_lf u_lw u_go u_mr u_gl`

Pour comparer la solution approchée du schéma `XX` avec la solution exacte au cours du temps on tapera, dans le répertoire `data`, la commande `gnuplot plot_XX.gnu` où `XX` est `LF` ou `LW` ou `Go` ou `MR` ou `GL`.

Pour comparer les solutions approchées des schémas avec la solution exacte à l'instant finale on tapera, dans le répertoire `data`, la commande `gnuplot data/plot_comparaison_finale.gnu`

3 TP3 - systèmes hyperboliques

3.1 Exemple

On veut étudier un modèle qui décrit la dynamique d'un gaz isentropique en coordonnées lagrangiennes. On note $\tau \equiv \tau(x, t) > 0$ le volume spécifique du fluide, $u \equiv u(x, t) \in \mathbb{R}$ sa vitesse et $p \equiv p(\tau) > 0$ sa pression. Dans tout l'exercice la pression sera une fonction de classe \mathcal{C}^2 strictement décroissante et convexe :¹

$$\begin{cases} p'(\tau) < 0, \\ p''(\tau) > 0. \end{cases}$$

En dimension un d'espace, on modélise ce type d'écoulements par le système

$$\begin{cases} \partial_t \tau - \partial_x u = 0, \\ \partial_t u + \partial_x p(\tau) = 0, \end{cases} \quad \text{avec } x \in \mathbb{R}, t > 0. \quad (3.1)$$

1. Trouver les vecteurs $\mathbf{W}: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ et $\mathbf{F}(\mathbf{W}): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tels que le système (3.1) s'écrit

$$\partial_t \mathbf{W} + \partial_x \mathbf{F}(\mathbf{W}) = \mathbf{0}.$$

2. Le système (3.1) se réécrit, pour des solutions régulières, sous la forme quasi-linéaire

$$\partial_t \mathbf{W} + \mathbb{A}(\mathbf{W}) \partial_x \mathbf{W} = \mathbf{0}. \quad (3.2)$$

Montrer que la matrice $\mathbb{A}(\mathbf{W})$ s'écrit

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ p'(\tau) & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Calculer les deux valeurs propres $\lambda_1(\mathbf{W})$ et $\lambda_2(\mathbf{W})$ de la matrice $\mathbb{A}(\mathbf{W})$. Afin de fixer les notations on ordonne les deux valeurs propres selon $\lambda_1(\mathbf{W}) < \lambda_2(\mathbf{W})$. Proposer une base associée de vecteurs propres à droite $\{\mathbf{r}_1(\mathbf{W}), \mathbf{r}_2(\mathbf{W})\}$. En déduire que le système (3.4) est strictement hyperbolique.
4. Vérifier que les champs 1 et 2 sont vraiment non linéaires.
5. On note I_k l'invariant de Riemann du k -ème champ caractéristique. Montrer qu'un choix possible pour I_1 et I_2 est

$$\begin{aligned} I_1 &= u - \int_{\tau_0}^{\tau} \sqrt{-p'(r)} dr, \\ I_2 &= u + \int_{\tau_0}^{\tau} \sqrt{-p'(r)} dr. \end{aligned}$$

6. Pour un état gauche $\mathbf{W}_L = (\tau_L, u_L)$ donné on cherche les états $\mathbf{W} = (\tau, u)$ qui peuvent être relié à \mathbf{W}_L par une onde de choc entropique.

- 6.1. Considérons le 1-champ.

6.1.1. Montrer que $u < u_L, \tau < \tau_L$.

6.1.2. Calculer u en fonction de τ_L, u_L et τ . Plus précisément, montrer que u peut se mettre su la forme

$$u = u_L + d(\tau_L, \tau)$$

en explicitant la fonction d . Étudier la fonction $\tau \mapsto u = u_L + d(\tau_L, \tau)$ et tracer son graphe dans le plan (τ, u) .

- 6.2. Reprendre la question pour le 2-champ.

7. Pour un état gauche $\mathbf{W}_L = (\tau_L, u_L)$ donné on cherche les états $\mathbf{W} = (\tau, u)$ qui peuvent être relié à \mathbf{W}_L par une onde de détente.

- 7.1. Considérons le 1-champ.

7.1.1. Montrer que $u > u_L, \tau > \tau_L$.

1. Un exemple de loi de pression qui vérifie ces hypothèses est $p(\tau) = \tau^{-\gamma}$ avec $\gamma > 1$ qui décrit le comportement d'un gaz parfait polytropique isentropique.

7.1.2. Calculer u en fonction de τ_L , u_L et τ . Plus précisément, montrer que u peut se mettre su la forme

$$u = u_L + r(\tau_L, \tau)$$

en explicitant la fonction r . Étudier la fonction $\tau \mapsto u = u_L + r(\tau_L, \tau)$ et tracer son graphe dans le plan (τ, u) .

7.2. Reprendre la question pour le 2-champ.

8. À l'aide du dessin d'onde dans le plan (τ, u) résoudre le problème de Riemann : pour un état gauche \mathbf{W}_L et un état droit \mathbf{W}_R on construira une solution composée d'une 1-onde et d'une 2-onde séparant un état intermédiaire \mathbf{W}^* . On précisera les valeurs de cet état intermédiaire ainsi que les vitesses des ondes.

(Aide : il faut considérer cinq configurations différentes.)

9. Cherchons maintenant une entropie pour le système (3.1). Montrer que la fonction

$$\eta(\mathbf{W}) = \frac{u^2}{2} - \int_{\tau_0}^{\tau} p(r) dr$$

est une entropie du système avec flux d'entropie

$$\Phi(\mathbf{W}) = up(\tau).$$

Solution

1. On a $\partial_t \mathbf{V} + \partial_x \mathbf{F}(\mathbf{V}) = \mathbf{0}$ avec

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} \tau \\ u \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}(\mathbf{V}) = \begin{pmatrix} -u \\ p(\tau) \end{pmatrix}.$$

2. On développe les dérivées du système (3.1) pour des solutions régulières :

$$\begin{cases} \partial_t \tau - \partial_x u = 0, \\ \partial_t u + p'(\tau) \partial_x \tau = 0, \end{cases}$$

et on trouve le système quasi-linéaire suivant :

$$\partial_t \begin{pmatrix} \tau \\ u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ p'(\tau) & 0 \end{pmatrix} \partial_x \begin{pmatrix} \tau \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

3. On cherche les deux solutions $\lambda_k(\mathbf{W})$ de l'équation $\det(\mathbb{A}(\mathbf{W}) - \lambda(\mathbf{W})\mathbf{Id}) = 0$, i.e. de l'équation

$$(-\lambda)^2 + p'(\tau) = 0.$$

On obtient

$$\lambda_1(\mathbf{W}) = -\sqrt{-p'(\tau)} < 0 < \lambda_2(\mathbf{W}) = +\sqrt{-p'(\tau)}.$$

Puisque $p'(\tau) \neq 0$, les valeurs propres sont réelles et distinctes donc le système (3.1) est strictement hyperbolique. On peut alors prendre

$$\mathbf{r}_1(\mathbf{W}) = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{-p'(\tau)} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_2(\mathbf{W}) = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{-p'(\tau)} \end{pmatrix}.$$

4. Pour déterminer la nature des deux champs caractéristiques on calcule $(\nabla \lambda_k)^T \cdot \mathbf{r}_k$ pour $k = 1, 2$:

$$(\nabla \lambda_1(\mathbf{W}))^T \cdot \mathbf{r}_1(\mathbf{W}) = \frac{\partial(-\sqrt{-p'(\tau)})}{\partial \tau} + \sqrt{-p'(\tau)} \frac{\partial(-\sqrt{-p'(\tau)})}{\partial u} = \frac{p''}{2\sqrt{-p'}} > 0, \quad \text{1-champ VNL,}$$

$$(\nabla \lambda_2(\mathbf{W}))^T \cdot \mathbf{r}_2(\mathbf{W}) = \frac{\partial(\sqrt{-p'(\tau)})}{\partial \tau} - \sqrt{-p'(\tau)} \frac{\partial(\sqrt{-p'(\tau)})}{\partial u} = \frac{-p''}{2\sqrt{-p'}} < 0, \quad \text{2-champ VNL.}$$

Étant donné qu'aucun champ n'est LD, il n'y aura aucune discontinuité de contact.

5. On vérifie que $(\nabla I_k(\mathbf{W}))^T \cdot \mathbf{r}_k(\mathbf{W}) = 0$ pour $k = 1, 2$:

$$(\nabla I_1(\mathbf{W}))^T \cdot \mathbf{r}_1(\mathbf{W}) = \frac{\partial\left(u - \int_{\tau_0}^{\tau} \sqrt{-p'(r)} dr\right)}{\partial \tau} + \sqrt{-p'(\tau)} \frac{\partial\left(u - \int_{\tau_0}^{\tau} \sqrt{-p'(r)} dr\right)}{\partial u} = 0,$$

$$(\nabla I_2(\mathbf{W}))^T \cdot \mathbf{r}_2(\mathbf{W}) = \frac{\partial\left(u + \int_{\tau_0}^{\tau} \sqrt{-p'(r)} dr\right)}{\partial \tau} - \sqrt{-p'(\tau)} \frac{\partial\left(u + \int_{\tau_0}^{\tau} \sqrt{-p'(r)} dr\right)}{\partial u} = 0.$$

(Rappel : si $I(x) = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(y) dy$ alors $I'(x) = f(g_2(x))g_2'(x) - g_1(x)g_1'(x)$)

6. Étude des chocs : on cherche à déterminer les états droits $\mathbf{W} = (\tau, u)$ qui peuvent être reliés à un état gauche $\mathbf{W}_L = (\tau_L, u_L)$ par une discontinuité de vitesse $\dot{\sigma}$.

6.1. 1-champ :

6.1.1. la condition d'entropie (Lax) pour $k = 1$ demande à ce que la vitesse $\dot{\sigma}_1$ du 1-choc vérifie

$$\begin{cases} \lambda_1(\mathbf{W}) < \dot{\sigma}_1 < \lambda_2(\mathbf{W}), \\ \dot{\sigma}_1 < \lambda_1(\mathbf{W}_L), \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} -\sqrt{-p'(\tau)} < \dot{\sigma}_1 < \sqrt{-p'(\tau)}, \\ \dot{\sigma}_1 < -\sqrt{-p'(\tau_L)}, \end{cases}$$

donc $-\sqrt{-p'(\tau)} < \dot{\sigma}_1 < -\sqrt{-p'(\tau_L)} < 0$. Puisque p est convexe alors p' est croissante donc

$$\tau < \tau_L.$$

En utilisant les relations de Rankine-Hugoniot on trouve

$$\begin{cases} \dot{\sigma}_1 = \frac{u_L - u}{\tau - \tau_L}, \\ \dot{\sigma}_1 = \frac{p(\tau) - p(\tau_L)}{u - u_L}, \end{cases}$$

donc, puisque $\dot{\sigma}_1 < 0$ et $\tau < \tau_L$, on a

$$u < u_L.$$

On conclut donc que les états $\mathbf{W} = (\tau, u)$ qui peuvent être reliés à un état gauche $\mathbf{W}_L = (\tau_L, u_L)$ par un 1-choc doivent satisfaire les deux inégalités

$$\begin{cases} u < u_L, \\ \tau < \tau_L. \end{cases}$$

6.1.2. En éliminant $\dot{\sigma}_1$ dans les relations de Rankine-Hugoniot on trouve

$$\tau \mapsto u = u_L + d(\tau_L, \tau) \quad \text{pour } \tau < \tau_L$$

avec $d(\tau_L, \tau) = -\sqrt{(p(\tau_L) - p(\tau))(\tau_L - \tau)}$ et la vitesse du 1-choc est

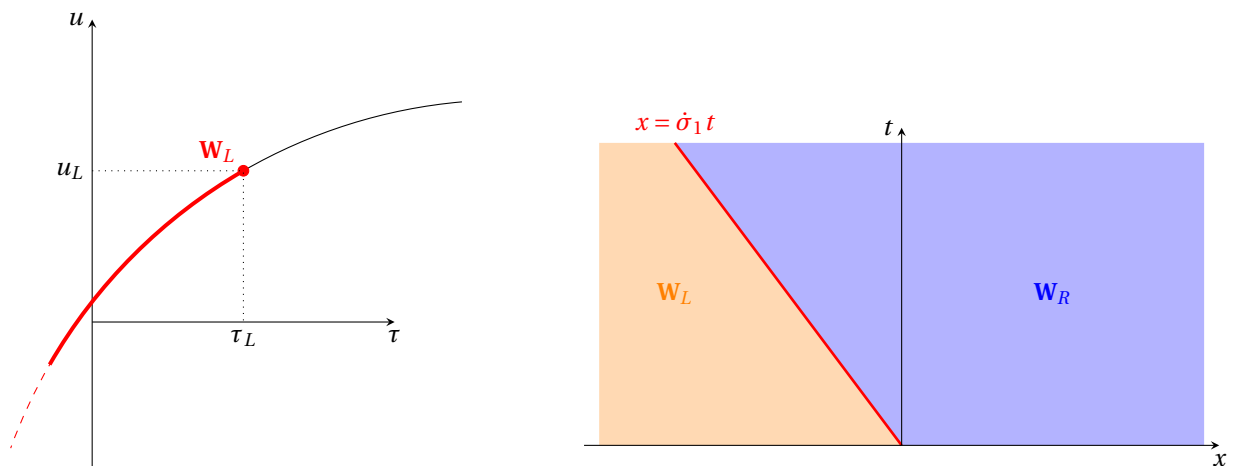
$$\tau \mapsto \dot{\sigma}_1 = -\sqrt{\frac{p(\tau) - p(\tau_L)}{\tau_L - \tau}}.$$

De plus,

$$u'(\tau) = \frac{p'(\tau)(\tau - \tau_L) + p(\tau) - p(\tau_L)}{2\sqrt{(p(\tau) - p(\tau_L))(\tau_L - \tau)}} > 0, \quad \text{pour } \tau < \tau_L,$$

$$u''(\tau) = \dots < 0, \quad \text{pour } \tau < \tau_L.$$

On a donc les graphes suivants :



6.2. 2-champ :

6.2.1. la condition d'entropie (Lax) pour $k = 2$ demande à ce que la vitesse $\dot{\sigma}_2$ du 2-choc vérifie

$$\begin{cases} \lambda_2(\mathbf{W}) < \dot{\sigma}_2, \\ \lambda_1(\mathbf{W}_L) < \dot{\sigma}_2 < \lambda_2(\mathbf{W}_L), \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} \sqrt{-p'(\tau)} < \dot{\sigma}_2, \\ -\sqrt{-p'(\tau_L)} < \dot{\sigma}_2 < \sqrt{-p'(\tau_L)}, \end{cases}$$

donc $0 < \sqrt{-p'(\tau)} < \dot{\sigma}_2 < \sqrt{-p'(\tau_L)}$. Puisque p est convexe alors

$$\tau > \tau_L.$$

En utilisant les relations de Rankine-Hugoniot on trouve

$$\begin{cases} \dot{\sigma}_2 = \frac{u_L - u}{\tau - \tau_L}, \\ \dot{\sigma}_2 = \frac{p(\tau) - p(\tau_L)}{u - u_L}, \end{cases}$$

d'où

$$u < u_L.$$

On conclut donc que

$$\begin{cases} u < u_L, \\ \tau > \tau_L. \end{cases}$$

6.2.2. Les relations de Rankine-Hugoniot donnent aussi

$$\tau \mapsto u = u_L + d(\tau_L, \tau) \quad \text{pour } \tau > \tau_L$$

avec $d(\tau_L, \tau) = -\sqrt{(p(\tau) - p(\tau_L))(\tau_L - \tau)}$ et la vitesse du 2-choc est

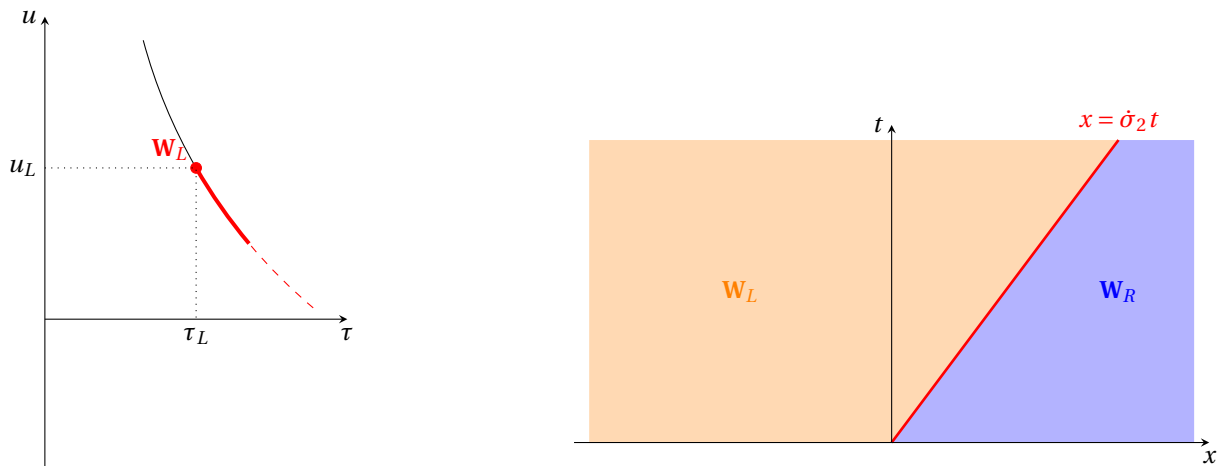
$$\tau \mapsto \dot{\sigma}_2 = \sqrt{\frac{p(\tau) - p(\tau_L)}{\tau_L - \tau}}.$$

De plus,

$$u'(\tau) = \frac{p'(\tau)(\tau - \tau_L) + p(\tau) - p(\tau_L)}{2\sqrt{(p(\tau) - p(\tau_L))(\tau_L - \tau)}} < 0, \quad \text{pour } \tau > \tau_L,$$

$$u''(\tau) = \dots > 0, \quad \text{pour } \tau > \tau_L.$$

On a donc les graphes suivants :



7. Étude des détentes : on cherche à déterminer les états droits $\mathbf{W} = (\tau, u)$ qui peuvent être reliés à un état gauche $\mathbf{W}_L = (\tau_L, u_L)$ par une onde de détente.

7.1. 1-champ :

7.1.1. Dans une détente les invariants de Riemann sont conservés. Ici $k = 1$ d'où

$$I_1(\mathbf{W}_L) = I_1(\mathbf{W})$$

donc

$$u = u_L + \int_{\tau_L}^{\tau} \sqrt{-p'(y)} dy.$$

Puisque p est convexe, la condition $\lambda_1(\mathbf{W}_L) < \lambda_1(\mathbf{W})$ implique $\tau > \tau_L$ et $u > u_L$.

7.1.2. On obtient ainsi

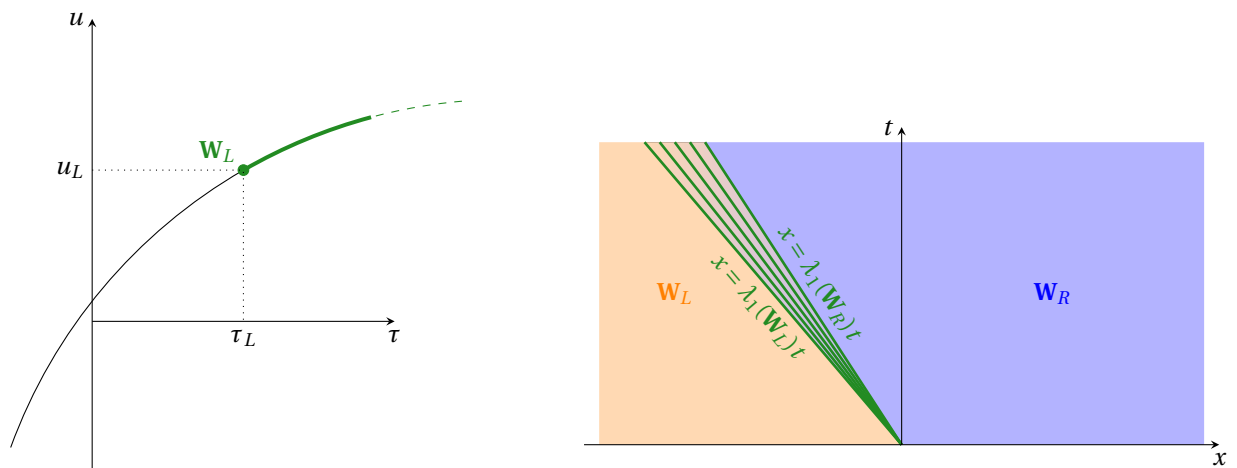
$$u = u_L + r(\tau_L, \tau) \quad \text{pour } \tau > \tau_L$$

avec $r(\tau_L, \tau) = \int_{\tau_L}^{\tau} \sqrt{-p'(y)} dy$. De plus,

$$u'(\tau) = \sqrt{-p'(\tau)} > 0, \quad \text{pour } \tau > \tau_L,$$

$$u''(\tau) = \frac{-p''(\tau)\sqrt{-p'(\tau)}}{2} < 0, \quad \text{pour } \tau > \tau_L.$$

On a donc les graphes suivants :



Pour calculer la solution en un point (x, t) à l'intérieur de l'onde on considère la caractéristique qui relie ce point à l'origine de l'onde, ici $(0, 0)$. La vitesse caractéristique est $\frac{dx}{dt} = \lambda_1(\tau, u)$, c'est-à-dire $\frac{x}{t} = \sqrt{-p'(\tau)}$. De plus, l'invariant de Riemann est conservé dans l'onde, donc $u - \int_{\tau_0}^{\tau} \sqrt{-p'(y)} dy = u_L - \int_{\tau_0}^{\tau_L} \sqrt{-p'(y)} dy$. Donc, si $p(\tau) = \tau^{-\gamma}$ alors $p'(\tau) = -\gamma\tau^{-\gamma-1}$ et on conclut que dans l'onde $\tau(\frac{x}{t}) = (-\sqrt{\gamma}\frac{t}{x})^{\frac{2}{\gamma+1}}$.

7.2. 2-champ :

7.2.1. Dans une détente les invariants de Riemann sont conservés. Ici $k = 2$ d'où

$$I_2(\mathbf{W}_L) = I_2(\mathbf{W})$$

donc

$$u = u_L - \int_{\tau_L}^{\tau} \sqrt{-p'(y)} dy.$$

Puisque p est convexe, la condition $\lambda_2(\mathbf{W}_L) < \lambda_2(\mathbf{W})$ implique $\tau < \tau_L$ et $u > u_L$.

7.2.2. On obtient ainsi

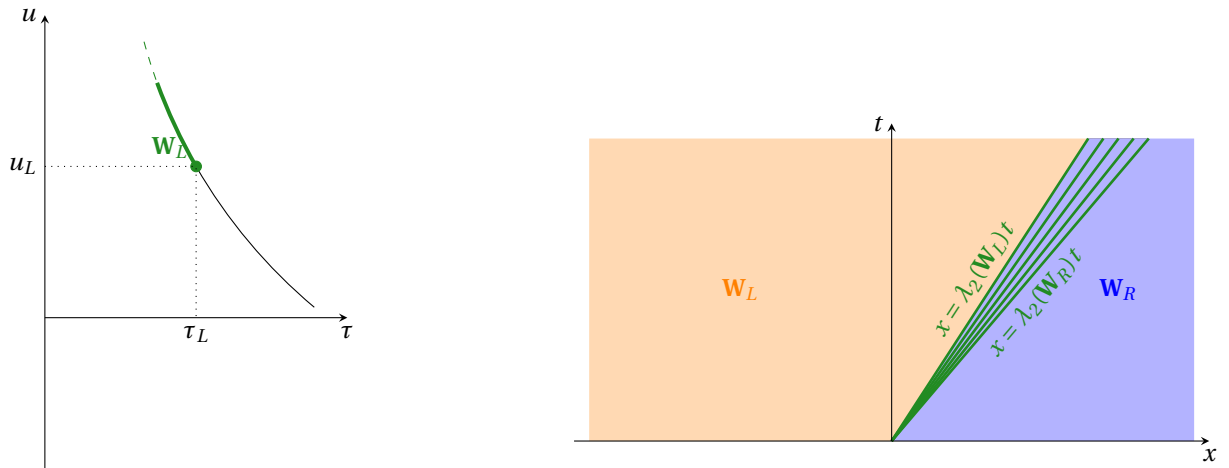
$$u = u_L + r(\tau_L, \tau) \quad \text{pour } \tau < \tau_L$$

avec $r(\tau_L, \tau) = -\int_{\tau_L}^{\tau} \sqrt{-p'(y)} dy$. De plus,

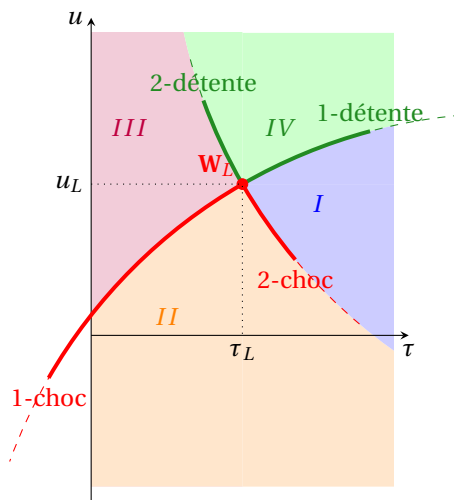
$$u'(\tau) = -\sqrt{-p'(\tau)} < 0, \quad \text{pour } \tau < \tau_L,$$

$$u''(\tau) = \frac{p''(\tau)\sqrt{-p'(\tau)}}{2} > 0, \quad \text{pour } \tau < \tau_L.$$

On a donc les graphes suivants :



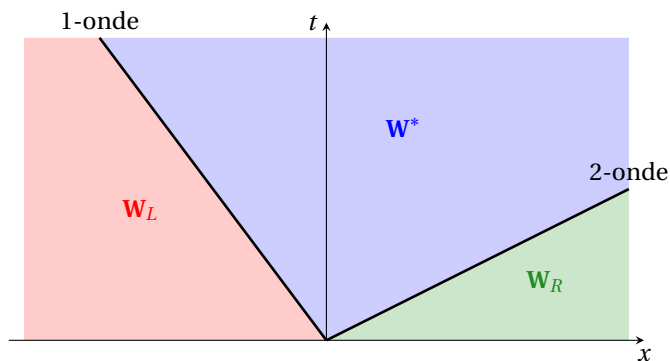
Récapitulatif : quel que soit $\mathbf{W}_L = (\tau_L, u_L)$, le demi-plan $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ se décompose en quatre zones séparées par les quatre demi-courbes 1-choc, 2-choc, 1-détente et 2-détente.



8. Soit un problème de Riemann avec les deux états constants donnés suivants :

$$\mathbf{W}_L = \begin{pmatrix} \tau_L \\ u_L \end{pmatrix}, \quad \mathbf{W}_R = \begin{pmatrix} \tau_R \\ u_R \end{pmatrix}.$$

La solution est constituée de trois états constants séparés par deux ondes.



Pour expliciter cette solution on cherche à définir l'inconnue

$$\mathbf{W}^* = \begin{pmatrix} \tau^* \\ u^* \end{pmatrix}$$

à l'aide de l'étude des ondes précédent :

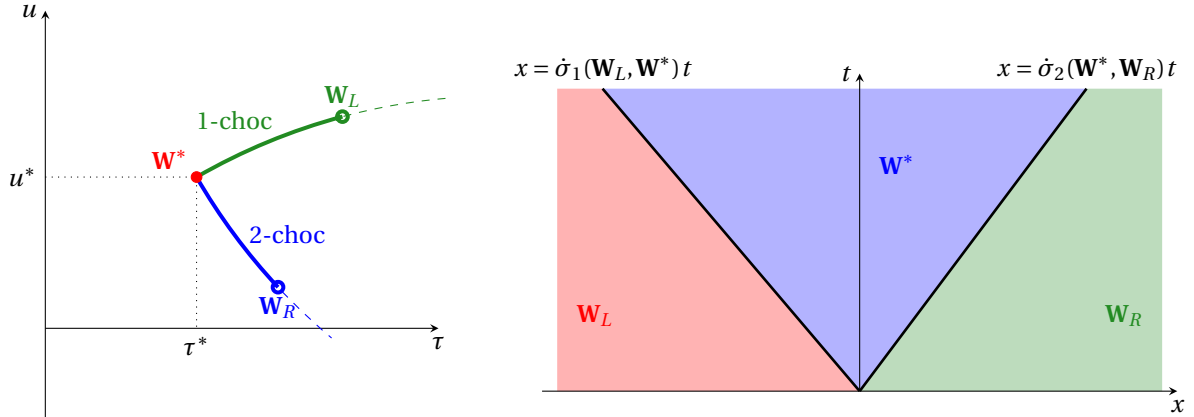
Cas 1) si \mathbf{W}_R appartient à la zone I alors la solution est constituée de trois états constants : $\mathbf{W}_L, \mathbf{W}^*$ et \mathbf{W}_R séparés par une 1-détente suivie d'un 2-choc ;

Cas 2) si \mathbf{W}_R appartient à la zone II alors la solution est constituée de trois états constants : $\mathbf{W}_L, \mathbf{W}^*$ et \mathbf{W}_R séparés par un 1-choc suivi d'un 2-choc ;

- Cas 3)** si W_R appartient à la zone III alors la solution est constituée de trois états constants : W_L , W^* et W_R séparés par un 1-choc suivi d'une 2-détente ;
- Cas 4)** si W_R appartient à la zone IV alors la solution est constituée de trois états constants : W_L , W^* et W_R séparés par une 1-détente suivie d'une 2-détente.

Analysons plus en détails ces cas possibles :

Cas 1) 1-choc et 2-choc (il correspond au cas où W_R appartient à la zone II)



L'unique solution faible entropique est

$$W(x, t) = \begin{cases} W_L, & \text{si } x < \dot{\sigma}_1(\tau_L, \tau^*)t, \\ W^*, & \text{si } \dot{\sigma}_1(\tau_L, \tau^*)t < x < \dot{\sigma}_2(\tau^*, \tau_R)t, \\ W_R, & \text{si } x > \dot{\sigma}_2(\tau^*, \tau_R)t, \end{cases}$$

avec

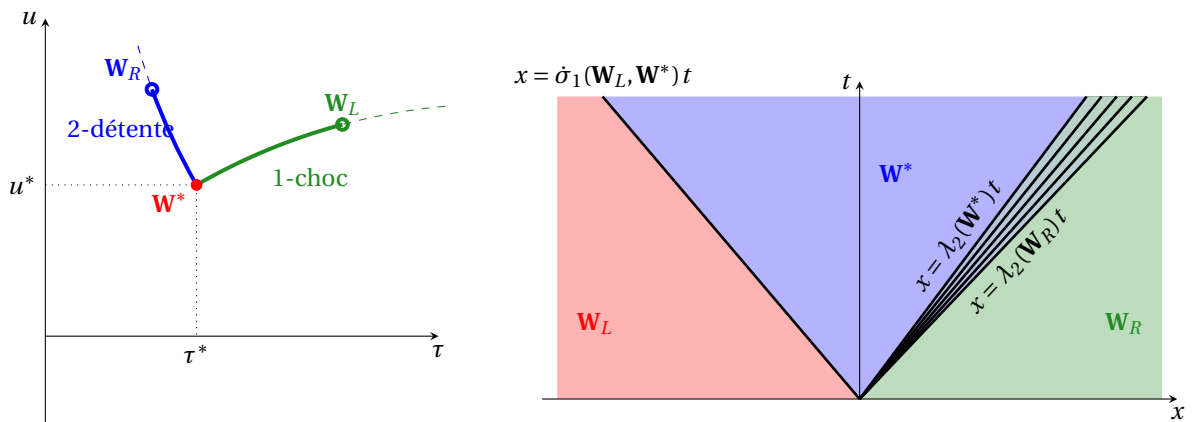
$$\dot{\sigma}_1(\tau_L, \tau^*) = \sqrt{\frac{p(\tau^*) - p(\tau_L)}{\tau_L - \tau^*}},$$

$$\dot{\sigma}_2(\tau^*, \tau_R) = \sqrt{\frac{p(\tau_R) - p(\tau^*)}{\tau^* - \tau_R}}$$

et τ^* et u^* est l'unique solution du système

$$\begin{cases} u^* = u_L - \sqrt{(p(\tau^*) - p(\tau_L))(\tau_L - \tau^*)}, \\ u_R = u^* - \sqrt{(p(\tau_R) - p(\tau^*))(\tau^* - \tau_R)}. \end{cases}$$

Cas 2) 1-choc et 2-détente (il correspond au cas où W_R appartient à la zone III)



L'unique solution faible entropique est

$$W(x, t) = \begin{cases} W_L, & \text{si } x < \dot{\sigma}_1(\tau_L, \tau^*)t, \\ W^*, & \text{si } \dot{\sigma}_1(\tau_L, \tau^*)t < x < \sqrt{-p'(\tau^*)}t, \\ W_{2\text{-det}}, & \text{si } \sqrt{-p'(\tau^*)}t < x < \sqrt{-p'(\tau_R)}t, \\ W_R, & \text{si } x > \sqrt{-p'(\tau_R)}t, \end{cases}$$

avec

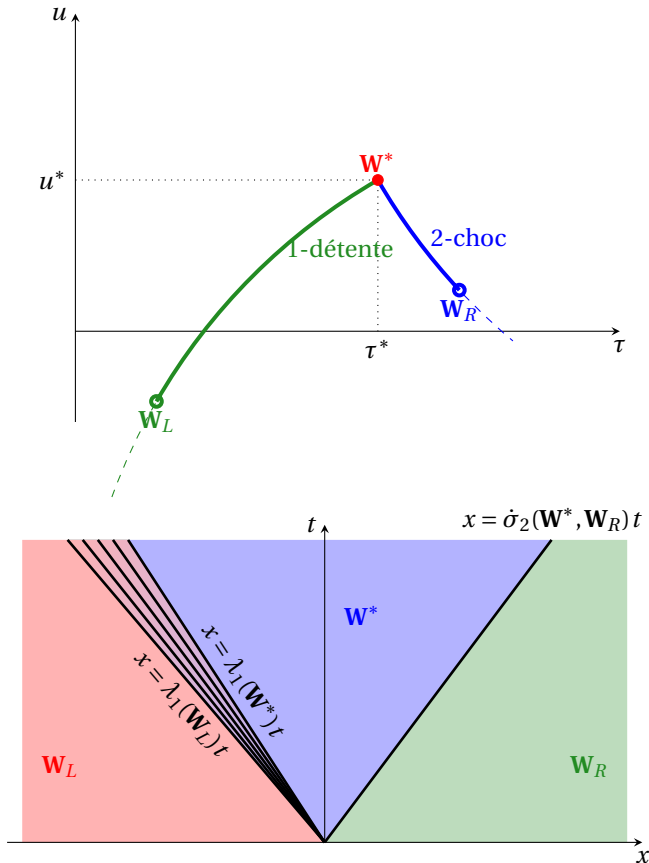
$$\dot{\sigma}_1(\tau_L, \tau^*) = \sqrt{\frac{p(\tau^*) - p(\tau_L)}{\tau_L - \tau^*}},$$

$$\mathbf{W}_{2\text{-det}} = \left(\int_{f(-\frac{x}{t})}^{f(-\frac{x}{t^*})} \frac{f(-\frac{x}{t})}{\sqrt{-p'(s)}} ds \right), \quad f(\xi) \equiv \left(\frac{\sqrt{\gamma}}{\xi} \right)^{\frac{2}{\gamma+1}}$$

et τ^* et u^* l'unique solution du système

$$\begin{cases} u^* = u_L - \sqrt{(p(\tau^*) - p(\tau_L))(\tau_L - \tau^*)}, \\ u_R = u^* - \int_{\tau^*}^{\tau_R} \sqrt{-p'(y)} dy. \end{cases}$$

Cas 3) 1-détente et 2-choc (il correspond au cas où \mathbf{W}_R appartient à la zone I)



L'unique solution faible entropique est

$$\mathbf{W}(x, t) = \begin{cases} \mathbf{W}_L, & \text{si } x < -\sqrt{-p'(\tau_L)}t, \\ \mathbf{W}_{1\text{-det}}, & \text{si } -\sqrt{-p'(\tau_L)}t < x < -\sqrt{-p'(\tau^*)}t, \\ \mathbf{W}^*, & \text{si } -\sqrt{-p'(\tau^*)}t < x < \dot{\sigma}_2(\tau^*, \tau_R)t, \\ \mathbf{W}_R, & \text{si } x > \dot{\sigma}_2(\tau^*, \tau_R)t, \end{cases}$$

avec

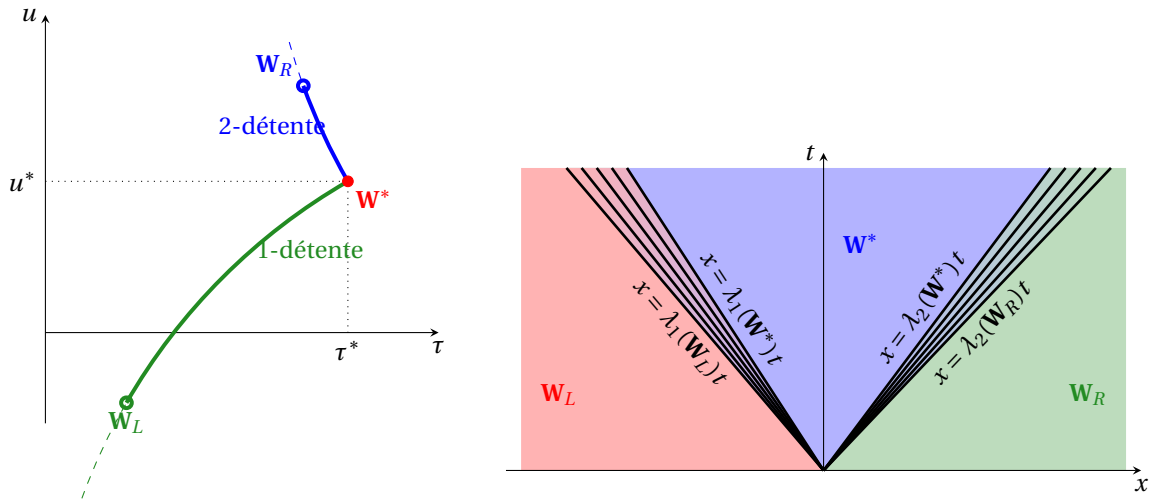
$$\dot{\sigma}_2(\tau^*, \tau_R) = \sqrt{\frac{p(\tau_R) - p(\tau^*)}{\tau^* - \tau_R}},$$

$$\mathbf{W}_{1\text{-det}} = \left(- \int_{f(-\frac{x}{t})}^{f(-\frac{x}{t^*})} \frac{f(-\frac{x}{t})}{\sqrt{-p'(s)}} ds \right), \quad f(\xi) \equiv \left(\frac{\sqrt{\gamma}}{\xi} \right)^{\frac{2}{\gamma+1}}$$

et τ^* et u^* l'unique solution du système

$$\begin{cases} u^* = u_L + \int_{\tau_L}^{\tau^*} \sqrt{-p'(y)} dy, \\ u_R = u^* - \sqrt{(p(\tau_R) - p(\tau^*))(\tau^* - \tau_R)}. \end{cases}$$

Cas 4) 1-détente et 2-détente (il correspond au cas où W_R appartient à la zone IV)



L'unique solution faible entropique est

$$W(x, t) = \begin{cases} W_L, & \text{si } x < -\sqrt{-p'(\tau_L)}t, \\ W_{1\text{-det}}, & \text{si } -\sqrt{-p'(\tau_L)}t < x < -\sqrt{-p'(\tau^*)}t, \\ W^*, & \text{si } -\sqrt{-p'(\tau^*)}t < x < \sqrt{-p'(\tau^*)}t, \\ W_{2\text{-det}}, & \text{si } \sqrt{-p'(\tau^*)}t < x < \sqrt{-p'(\tau_R)}t, \\ W_R, & \text{si } x > \sqrt{-p'(\tau_R)}t \end{cases}$$

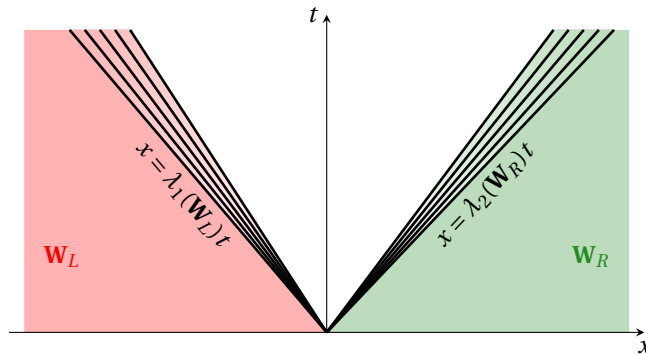
avec

$$W_{1\text{-det}} = \left(\begin{array}{c} f(-\frac{x}{t}), \\ -\int^{f(-\frac{x}{t})} \frac{f(-\frac{s}{t})}{\sqrt{-p'(s)}} ds \end{array} \right), \quad W_{2\text{-det}} = \left(\begin{array}{c} f(-\frac{x}{t}), \\ \int^{f(-\frac{x}{t})} \frac{f(-\frac{s}{t})}{\sqrt{-p'(s)}} ds \end{array} \right), \quad f(\xi) \equiv \left(\frac{\sqrt{Y}}{\xi} \right)^{\frac{2}{\gamma+1}}$$

et τ^* et u^* l'unique solution du système

$$\begin{cases} u^* = u_L + \int_{\tau_L}^{\tau^*} \sqrt{-p'(y)} dy, \\ u_R = u^* - \int_{\tau^*}^{\tau_R} \sqrt{-p'(y)} dy. \end{cases}$$

Remarque : il peut se générer du vide (qui correspond à $\tau = +\infty$)



9. Pour vérifier que η est une entropie du système (3.1) avec le flux d'entropie Φ , on montre que

$$\nabla_{\mathbf{W}} \Phi(\mathbf{W}) = \nabla_{\mathbf{W}} \eta(\mathbf{W}) \cdot \mathbf{A}(\mathbf{W}).$$

Or,

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} \tau \\ u \end{pmatrix}, \quad \Phi(\mathbf{W}) = up(\tau),$$

donc

$$\nabla_{\mathbf{W}} \Phi(\mathbf{W}) = \begin{pmatrix} up'(\tau) \\ p(\tau) \end{pmatrix}$$

et

$$\eta(\mathbf{W}) = \frac{u^2}{2} - \int_{\tau_0}^{\tau} p(r) dr$$

d'où

$$\nabla_{\mathbf{W}}\eta(\mathbf{W}) = \begin{pmatrix} -p'(\tau) \\ u \end{pmatrix}.$$

Donc

$$\nabla_{\mathbf{W}}\eta(\mathbf{W}) \cdot \mathbb{A}(\mathbf{W}) = \begin{pmatrix} -p'(\tau) \\ u \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ p'(\tau) & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} up'(\tau) \\ p(\tau) \end{pmatrix} = \nabla_{\mathbf{W}}\Phi(\mathbf{W}).$$

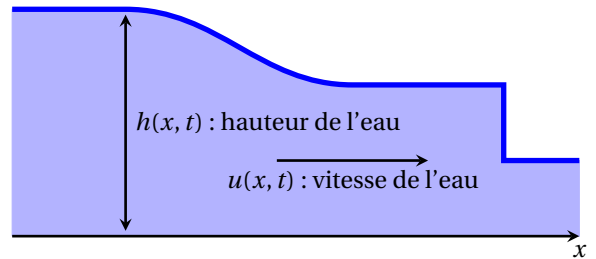
Il ne reste à prouver que la convexité de l'entropie en calculant la matrice hessienne :

$$d^2\eta(\mathbf{W}) = \begin{pmatrix} -p''(\tau) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Puisque $p'(\tau) < 0$ l'entropie est bien convexe.

3.2 Exercice

On cherche à simuler un écoulement d'eau sous l'hypothèse de faible profondeur dans le cas 1D et à fond plat. De plus, l'eau sera considérée comme un fluide incompressible non visqueux et les frottements air/eau et eau/sol seront négligés. Les inconnues, fonction du temps $t \in [0; +\infty[$ et de l'espace $x \in \mathbb{R}$, sont $h \equiv h(x, t) > 0$ la hauteur de l'eau et $u \equiv u(x, t) \in \mathbb{R}$ sa vitesse horizontale (on suppose qu'elle est la même sur toute la hauteur de l'eau). On note $g > 0$ la constante de gravité. En dimension un d'espace et pour une topographie plate, on modélise ce type d'écoulements par le système de Saint Venant (ou des eaux peu profondes)



$$\begin{cases} \partial_t h + \partial_x(hu) = 0, \\ \partial_t(hu) + \partial_x(hu^2 + gh^2/2) = 0, \end{cases} \text{ avec } x \in \mathbb{R}, t > 0. \tag{3.3}$$

Sous forme vectorielle il s'écrit

$$\partial_t \mathbf{U} + \partial_x \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \mathbf{0}$$

ayant défini

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} h \\ hu \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} hu \\ hu^2 + \frac{g}{2}h^2 \end{pmatrix}.$$

Pour des solutions régulières on peut le réécrire sous la forme quasi-linéaire

$$\partial_t \mathbf{U} + \mathbb{B}(\mathbf{U})\partial_x \mathbf{U} = \mathbf{0}$$

avec

$$\mathbb{B}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ gh - u^2 & 2u \end{pmatrix}$$

dont les valeurs propres sont $\lambda_1(\mathbf{U}) = u - \sqrt{gh}$ et $\lambda_2(\mathbf{U}) = u + \sqrt{gh}$.

On s'intéresse au problème de Riemann

$$\mathbf{U}(x, 0) = \begin{cases} \mathbf{U}_L & \text{si } x < 0, \\ \mathbf{U}_R & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

3.2.1 Approximation numérique

Pour $j \in \mathbb{Z}$ on pose

$$\mathbf{U}_j^n \approx \mathbf{U}(x_j, t^n) = \begin{pmatrix} h \\ hu \end{pmatrix}(x_j, t^n) \quad \mathbf{G}(\mathbf{U}_j^n, \mathbf{U}_{j+1}^n) \approx \mathbf{F}(\mathbf{U}(x_{j+1/2}, t^n)) = \begin{pmatrix} hu \\ hu^2 + \frac{g}{2}h^2 \end{pmatrix}(x_{j+1/2}, t^n).$$

Un schéma de Volumes Finis s'écrit alors

$$\mathbf{U}_j^{n+1} = \mathbf{U}_j^n - \frac{\Delta t^n}{\Delta x} \left[\mathbf{G}(\mathbf{U}_j^n, \mathbf{U}_{j+1}^n) - \mathbf{G}(\mathbf{U}_{j-1}^n, \mathbf{U}_j^n) \right].$$

On considère les schémas suivants :

Lax-Friedrichs	$\mathbf{G}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{\mathbf{F}(\mathbf{a}) + \mathbf{F}(\mathbf{b}) - \frac{\Delta x}{\Delta t^n}(\mathbf{b} - \mathbf{a})}{2}$
Rusanov	$\mathbf{G}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{\mathbf{F}(\mathbf{a}) + \mathbf{F}(\mathbf{b})}{2} - \max_{k=1,2} \{ \lambda_k(\mathbf{a}) , \lambda_k(\mathbf{b}) \} \frac{\mathbf{b} - \mathbf{a}}{2}$
Roe	voir par exemple le livre de E. F. TORO déjà cité

On associe à ces schémas la condition de de stabilité de Courant-Friedrichs-Lewy

$$2 \max_{j \in \mathbb{Z}} \{ |\lambda_1(\mathbf{U}_j^n)|, |\lambda_2(\mathbf{U}_j^n)| \} \Delta t^n \leq \Delta x.$$

Programmer ces solveurs et calculer numériquement la solution du problème de Riemann suivant : on considère un bassin $[-10; 10]$ fermé. Le bassin est séparé en deux partie égales grâce à une paroi située en $x = 0$. À l'instant $t = 0$ la partie gauche

(resp. droite) est remplie avec de l'eau immobile à une hauteur $h_L = 2$ (resp. $h_R = 1$). À l'instant $t = 0$ on retire la paroi. Calculer l'évolution de la surface d'eau au cours du temps. On représentera h et u à divers instants pour diverses finesses de maillage. Comparer avec la solution exacte du problème de Riemann. Considérer d'autres problèmes de Riemann (le cas précédent présente une 1-détente suivie d'un 2-choc, on veut tester les autres 3 cas possibles ainsi que le cas limite de la rupture du barrage sur fond sèche).

3.2.2 Code

Pour compiler le programme `saintvenant.f90` on utilisera la commande

```
gfortran saintvenant.f90 -o saintvenant.o
```

L'exécutable ainsi créé s'appelle `saintvenant.o` qu'on lancera en tapant

```
./saintvenant.o
```

Les résultats sont sauvegardés dans les fichiers `saintvenantN.dat` où $N = 0 \dots S_{\max}$ est le numéro de la sauvegarde. Un fichier `saintvenantN.dat` comporte NX lignes et 3 colonnes contenant l'abscisse du centre des mailles (première colonne), la valeur de la hauteur de l'eau h (deuxième colonne) et la vitesse horizontale de l'eau u (troisième colonne).

Pour visualiser la solution exacte au cours du temps on tapera

```
gnuplot plot_h.gnu
```

ou

```
gnuplot plot_u.gnu
```

Pour visualiser la solution numérique comparée à la exacte au cours du temps on tapera

```
gnuplot plot_hnum.gnu
```

ou

```
gnuplot plot_unum.gnu
```

3.2.3 Calcul de la solution exacte du problème de Riemann

1. Soit $\mathbf{W} = (h, u)$, alors le système (3.3) se réécrit, pour des solutions régulières, sous la forme quasi-linéaire

$$\partial_t \mathbf{W} + \mathbb{A}(\mathbf{W}) \partial_x \mathbf{W} = \mathbf{0}. \quad (3.4)$$

Montrer que la matrice $\mathbb{A}(\mathbf{W})$ s'écrit

$$\begin{pmatrix} u & h \\ g & u \end{pmatrix}.$$

2. Calculer les deux valeurs propres $\lambda_1(\mathbf{W})$ et $\lambda_2(\mathbf{W})$ de la matrice $\mathbb{A}(\mathbf{W})$. Afin de fixer les notations on ordonne les deux valeurs propres selon $\lambda_1(\mathbf{W}) < \lambda_2(\mathbf{W})$. Proposer une base associée de vecteurs propres à droite $\{\mathbf{r}_1(\mathbf{W}), \mathbf{r}_2(\mathbf{W})\}$. En déduire que le système (3.3) est strictement hyperbolique.
3. Vérifier que les champs 1 et 2 sont vraiment non linéaires.
4. On note I_k l'invariant de Riemann du k -ème champ caractéristique. Montrer qu'un choix possible pour I_1 et I_2 est

$$I_1 = u + 2\sqrt{gh},$$

$$I_2 = u - 2\sqrt{gh}.$$

5. Pour un état gauche $\mathbf{W}_L = (h_L, u_L)$ donné on cherche les états $\mathbf{W} = (h, u)$ qui peuvent être relié à \mathbf{W}_L par une onde de détente.

- 5.1. Considérons le 1-champ. Montrer que $u > u_L$, $h < h_L$. Calculer u en fonction de h_L , u_L et h . Plus précisément, montrer que u peut se mettre su la forme

$$u = u_L + r(h_L, h)$$

en explicitant la fonction r . Étudier la fonction $h \mapsto u = u_L + r(h_L, h)$ et tracer son graphe dans le plan (h, u) .

- 5.2. Reprendre la question pour le 2-champ.

6. Pour un état gauche $\mathbf{W}_L = (h_L, u_L)$ donné on cherche les états $\mathbf{W} = (h, u)$ qui peuvent être relié à \mathbf{W}_L par une onde de choc entropique de vitesse $\dot{\sigma}_k$.

6.1. Montrer que les relations de Rankine-Hugoniot peuvent s'écrire sous la forme

$$\begin{cases} j = h(u - \dot{\sigma}_k) = h_L(u_L - \dot{\sigma}_k), \\ uh(u - \dot{\sigma}_k) + \frac{g}{2}h^2 = u_L h_L(u_L - \dot{\sigma}_k) + \frac{g}{2}h_L^2. \end{cases}$$

En déduire que

$$j = \frac{g}{2} \frac{h_L^2 - h^2}{u - u_L}.$$

6.2. Considérons le 1-champ. Calculer u en fonction de h_L , u_L et h . Plus précisément, montrer que u peut se mettre sous la forme

$$u = u_L + d(h_L, h)$$

en explicitant la fonction d . Étudier la fonction $h \mapsto u = u_L + d(h_L, h)$ et tracer son graphe dans le plan (h, u) . Montrer que $u < u_L$, $h > h_L$.

6.3. Reprendre la question pour le 2-champ.

7. À l'aide du dessin d'onde dans le plan (h, u) résoudre le problème de Riemann : pour un état gauche \mathbf{W}_L et un état droit \mathbf{W}_R on construira une solution composée d'une 1-onde et d'une 2-onde séparant un état intermédiaire \mathbf{W}^* . On précisera les valeurs de cet état intermédiaire ainsi que les vitesses des ondes.

8. Cherchons maintenant une entropie pour le système (3.3). Montrer que la fonction

$$\eta(\mathbf{W}) = \frac{hu^2}{2} + \frac{gh^2}{2}$$

est une entropie du système avec flux d'entropie

$$\Phi(\mathbf{W}) = \frac{hu^3}{2} + gh^2u.$$

Solution

1. On développe les dérivées du système (3.3) pour des solutions régulières :

$$\begin{cases} \partial_t h + u \partial_x h + h \partial_x u = 0, \\ u \partial_t h + h \partial_t u + 2hu \partial_x u + u^2 \partial_x h + gh \partial_x h = 0. \end{cases}$$

Il se réécrit alors

$$\begin{cases} \partial_t h + u \partial_x h + h \partial_x u = 0, \\ u(-u \partial_x h - h \partial_x u) + h \partial_t u + 2hu \partial_x u + u^2 \partial_x h + gh \partial_x h = 0 \end{cases}$$

et on trouve le système quasi-linéaire suivant :

$$\partial_t \begin{pmatrix} h \\ u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u & h \\ g & u \end{pmatrix} \partial_x \begin{pmatrix} h \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2. On cherche les deux solutions $\lambda_k(\mathbf{W})$ de l'équation $\det(\mathbb{A}(\mathbf{W}) - \lambda(\mathbf{W})\mathbf{Id}) = 0$, i.e. de l'équation

$$(u - \lambda)^2 - hg = 0.$$

On obtient

$$\lambda_1(\mathbf{W}) = u - \sqrt{gh} < \lambda_2(\mathbf{W}) = u + \sqrt{gh}.$$

Puisque $h \neq 0$, les valeurs propres sont réelles et distinctes donc le système (3.3) est strictement hyperbolique. On peut alors prendre

$$\mathbf{r}_1(\mathbf{W}) = \begin{pmatrix} -\sqrt{h} \\ \sqrt{g} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_2(\mathbf{W}) = \begin{pmatrix} \sqrt{h} \\ \sqrt{g} \end{pmatrix}.$$

3. Pour déterminer la nature des deux champs caractéristiques on calcule $(\nabla \lambda_k)^T \cdot \mathbf{r}_k$ pour $k = 1, 2$:

$$(\nabla \lambda_1(\mathbf{W}))^T \cdot \mathbf{r}_1(\mathbf{W}) = \frac{\partial(u - \sqrt{gh})}{\partial h} (-\sqrt{h}) + \frac{\partial(u - \sqrt{gh})}{\partial u} \sqrt{g} = \frac{3}{2} \sqrt{g} > 0, \quad \text{1-champ VNL,}$$

$$(\nabla \lambda_2(\mathbf{W}))^T \cdot \mathbf{r}_2(\mathbf{W}) = \frac{\partial(u + \sqrt{gh})}{\partial h} \sqrt{h} + \frac{\partial(u + \sqrt{gh})}{\partial u} \sqrt{g} = \frac{3}{2} \sqrt{g} > 0, \quad \text{2-champ VNL.}$$

Étant donné qu'aucun champ n'est LD, il n'y aura aucune discontinuité de contact.

4. On vérifie que $(\nabla I_k(\mathbf{W}))^T \cdot \mathbf{r}_k(\mathbf{W}) = 0$ pour $k = 1, 2$:

$$(\nabla I_1(\mathbf{W}))^T \cdot \mathbf{r}_1(\mathbf{W}) = \frac{\partial(u + 2\sqrt{gh})}{\partial h} (-\sqrt{h}) + \frac{\partial(u + 2\sqrt{gh})}{\partial u} \sqrt{g} = 0,$$

$$(\nabla I_2(\mathbf{W}))^T \cdot \mathbf{r}_2(\mathbf{W}) = \frac{\partial(u - 2\sqrt{gh})}{\partial h} \sqrt{h} + \frac{\partial(u - 2\sqrt{gh})}{\partial u} \sqrt{g} = 0.$$

5. Étude des détente : on cherche à déterminer les états droits $\mathbf{W} = (h, u)$ qui peuvent être reliés à un état gauche $\mathbf{W}_L = (h_L, u_L)$ par une onde de détente.

5.1. 1-champ :

▷ Dans une détente les invariants de Riemann sont conservés. Ici $k = 1$ d'où

$$I_1(\mathbf{W}_L) = I_1(\mathbf{W})$$

donc

$$u_L + 2\sqrt{gh_L} = u + 2\sqrt{gh}$$

d'où $h \mapsto u = u_L + 2\sqrt{g}(\sqrt{h_L} - \sqrt{h})$.

▷ La condition d'entropie $\lambda_1(\mathbf{W}_L) < \lambda_1(\mathbf{W})$ se réécrit $u_L - \sqrt{gh_L} < u - \sqrt{gh}$ donc $u > u_L + \sqrt{g}(\sqrt{h} - \sqrt{h_L})$. Comme $u = u_L + 2\sqrt{g}(\sqrt{h_L} - \sqrt{h})$, on obtient

$$h < h_L \quad \text{et} \quad u > u_L.$$

On obtient ainsi

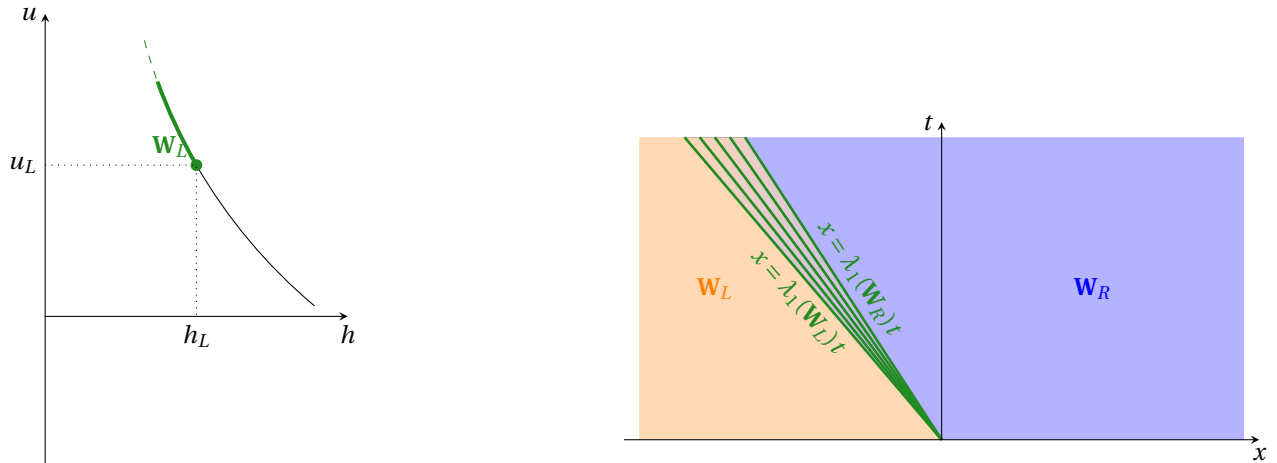
$$u = u_L + r(h_L, h) \quad \text{pour } h < h_L$$

avec $r(h_L, h) = 2\sqrt{g}(\sqrt{h_L} - \sqrt{h})$. De plus,

$$u'(h) = -\sqrt{\frac{g}{h}} < 0, \quad \text{pour } h < h_L,$$

$$u''(h) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{h^3}} > 0, \quad \text{pour } h < h_L.$$

On a donc les graphes suivants :



Pour calculer la solution en un point (\hat{x}, \hat{t}) à l'intérieur de l'onde on considère la caractéristique qui relie ce point à l'origine de l'onde $(0, 0)$. La vitesse caractéristique de l'onde est $\frac{dx}{dt} = \lambda_1$, c'est-à-dire $\frac{\hat{x}}{\hat{t}} = u - \sqrt{gh}$. De plus, l'invariant de Riemann est conservé dans l'onde, c'est-à-dire $u + 2\sqrt{gh} = u_L + 2\sqrt{gh_L}$. On obtient $u(\hat{x}, \hat{t}) = \frac{1}{3} \left(u_L + 2\sqrt{gh_L} + 2\frac{\hat{x}}{\hat{t}} \right)$ et $h(\hat{x}, \hat{t}) = \frac{1}{9g} \left(u_L + 2\sqrt{gh_L} - \frac{\hat{x}}{\hat{t}} \right)^2$.

5.2. 2-champ :

▷ Dans une détente les invariants de Riemann sont conservés. Ici $k = 2$ d'où

$$I_2(\mathbf{W}_L) = I_2(\mathbf{W})$$

donc

$$u_L - 2\sqrt{gh_L} = u - 2\sqrt{gh}$$

d'où $h \rightarrow u = u_L + 2\sqrt{g}(\sqrt{h} - \sqrt{h_L})$.

▷ La condition d'entropie $\lambda_2(\mathbf{W}_L) < \lambda_2(\mathbf{W})$ se réécrit $u_L + \sqrt{gh_L} < u + \sqrt{gh}$ donc $u > u_L + \sqrt{g}(\sqrt{h_L} - \sqrt{h})$. Comme $u = u_L + 2\sqrt{g}(\sqrt{h} - \sqrt{h_L})$, on obtient

$$h > h_L \quad \text{et} \quad u > u_L.$$

On obtient ainsi

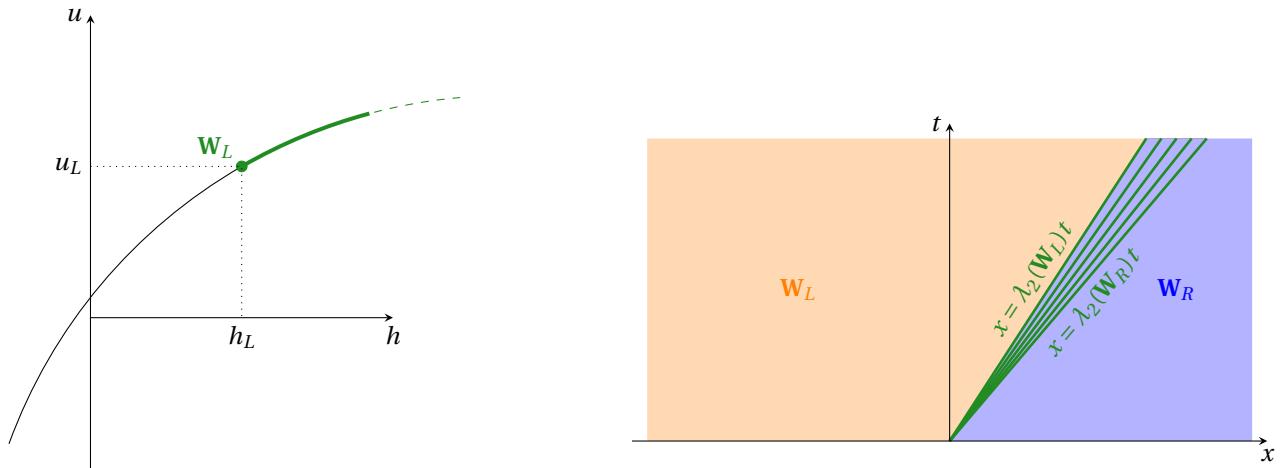
$$u = u_L + r(h_L, h) \quad \text{pour } h < h_L$$

avec $r(h_L, h) = 2\sqrt{g}(\sqrt{h} - \sqrt{h_L})$. De plus,

$$u'(h) = \sqrt{\frac{g}{h}} > 0, \quad \text{pour } h > h_L,$$

$$u''(h) = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{h^3}} < 0, \quad \text{pour } h > h_L.$$

On a donc les graphes suivants :



Pour calculer la solution en un point (\hat{x}, \hat{t}) à l'intérieur de l'onde on considère la caractéristique qui relie ce point à l'origine de l'onde $(0, 0)$. La vitesse caractéristique de l'onde est $\frac{dx}{dt} = \lambda_2$, c'est-à-dire $\frac{\hat{x}}{\hat{t}} = u + \sqrt{gh}$. De plus, l'invariant de Riemann est conservé dans l'onde, c'est-à-dire $u - 2\sqrt{gh} = u_R - 2\sqrt{gh_R}$. On obtient $u(\hat{x}, \hat{t}) = \frac{1}{3} \left(-u_R + 2\sqrt{gh_R} + 2\frac{\hat{x}}{\hat{t}} \right)$ et $h(\hat{x}, \hat{t}) = \frac{1}{9g} \left(u_R - 2\sqrt{gh_R} + \frac{\hat{x}}{\hat{t}} \right)^2$.

6. Étude des chocs : on cherche à déterminer les états droits $\mathbf{W} = (h, u)$ qui peuvent être reliés à un état gauche $\mathbf{W}_L = (h_L, u_L)$ par une discontinuité de vitesse $\dot{\sigma}_k$. Les relations de Rankine-Hugoniot pour un choc de vitesse $\dot{\sigma}_k$ s'écrivent

$$\begin{cases} \dot{\sigma}_k = \frac{h_L u_L - hu}{h_L - h}, \\ \dot{\sigma}_k = \frac{h_L u_L^2 + (g/2)h_L^2 - hu^2 - (g/2)h^2}{h_L u_L - hu}, \end{cases}$$

qu'on peut réécrire comme

$$\begin{cases} hu - \dot{\sigma}_k h = h_L u_L - \dot{\sigma}_k h_L, \\ (u - \dot{\sigma}_k)hu - (u_L - \dot{\sigma}_k)h_L u_L = (g/2)(h_L^2 - h^2), \end{cases}$$

ou encore

$$\begin{cases} j_k \equiv h(u - \dot{\sigma}_k) = h_L(u_L - \dot{\sigma}_k), \\ j_k(u - u_L) = (g/2)(h_L^2 - h^2). \end{cases}$$

6.1. 1-champ : la condition d'entropie (Lax) pour $k = 1$ demande à ce que la vitesse $\dot{\sigma}_1$ du 1-choc vérifie

$$\begin{cases} \lambda_1(\mathbf{W}) < \dot{\sigma}_1 < \lambda_2(\mathbf{W}), \\ \dot{\sigma}_1 < \lambda_1(\mathbf{W}_L), \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} u - \sqrt{gh} < \dot{\sigma}_1 < u + \sqrt{gh}, \\ \dot{\sigma}_1 < u_L - \sqrt{gh_L}, \end{cases}$$

donc

$$\begin{cases} u - \sqrt{gh} < \dot{\sigma}_1 \\ \dot{\sigma}_1 < u + \sqrt{gh}, \\ \dot{\sigma}_1 < u_L - \sqrt{gh_L}, \end{cases} \implies \begin{cases} j_1 < h\sqrt{gh} \\ j_1 > -h\sqrt{gh}, \\ j_1 > h_L\sqrt{gh_L}, \end{cases} \implies \begin{cases} h > h_L, \\ j_1 > 0, \end{cases} \xrightarrow{j_1 = \frac{g(h_L^2 - h^2)}{2(u - u_L)}} u < u_L$$

et on conclut que

$$h > h_L \quad \text{et} \quad u < u_L.$$

En éliminant $\dot{\sigma}_1$ dans les relations de Rankine-Hugoniot on trouve

$$h \mapsto u = u_L + d(h_L, h) \quad \text{pour } h > h_L$$

avec $d(h_L, h) = (h_L - h)\sqrt{\frac{g}{2} \frac{h_L + h}{h_L h}}$ et la vitesse du 1-choc est

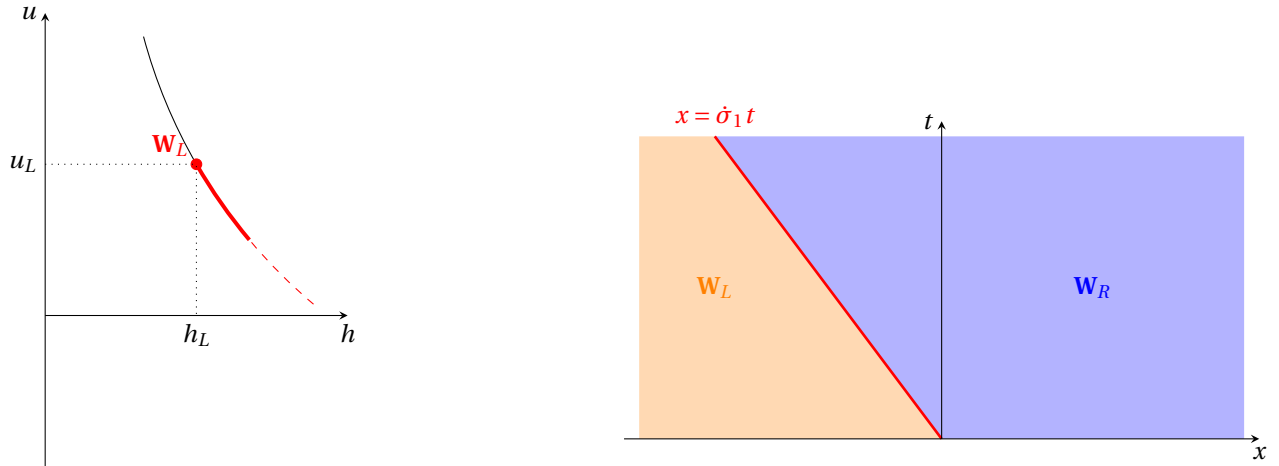
$$\dot{\sigma}_1 = u_L - h\sqrt{\frac{g}{2} \frac{h_L + h}{h_L h}}.$$

De plus,

$$u'(h) = -\sqrt{\frac{g}{8} \frac{h_L h + 2h^2 + h_L^2}{h^3 h_L (h_L + h)}} < 0, \quad \text{pour } h > h_L,$$

$$u''(h) = \sqrt{\frac{g}{32}} \frac{\sqrt{h_L^3(5h+3h_L)}}{\sqrt{h^5(h_L+h)^3}} > 0. \quad \text{pour } h > h_L.$$

On a donc les graphes suivants :



6.2. 2-champ : la condition d'entropie (Lax) pour $k = 2$ demande à ce que la vitesse $\dot{\sigma}_2$ du 2-choc vérifie

$$\begin{cases} \lambda_2(\mathbf{W}) < \dot{\sigma}_2, \\ \lambda_1(\mathbf{W}_L) < \dot{\sigma}_2 < \lambda_2(\mathbf{W}_L), \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} u + \sqrt{gh} < \dot{\sigma}_2, \\ u_L - \sqrt{gh_L} < \dot{\sigma}_2 < u_L + \sqrt{gh_L}, \end{cases}$$

donc

$$\begin{cases} u + \sqrt{gh} < \dot{\sigma}_2 \\ \dot{\sigma}_2 > u_L - \sqrt{gh_L}, \\ \dot{\sigma}_2 < u_L + \sqrt{gh_L}, \end{cases} \implies \begin{cases} j_2 < -h\sqrt{gh} \\ j_2 < h_L\sqrt{gh_L}, \\ j_2 > -h_L\sqrt{gh_L}, \end{cases} \implies \begin{cases} h < h_L, \\ j_2 < 0, \end{cases} \quad \begin{matrix} j_2 = \frac{g(h_L^2 - h^2)}{2(u - u_L)} \\ \implies u < u_L \end{matrix}$$

et on conclut que

$$h < h_L \quad \text{et} \quad u < u_L.$$

En éliminant $\dot{\sigma}_2$ dans les relations de Rankine-Hugoniot on trouve

$$h \mapsto u = u_L + d(h_L, h) \quad \text{pour } h < h_L$$

avec $d(h_L, h) = (h - h_L) \sqrt{\frac{g}{2} \frac{h_L + h}{h_L h}}$ et la vitesse du 2-choc est

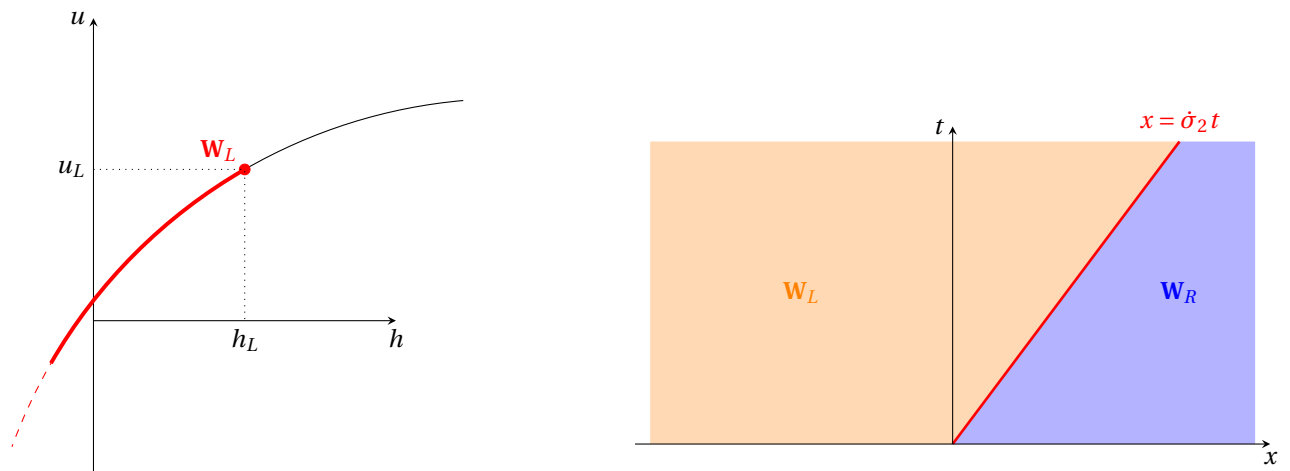
$$\dot{\sigma}_2 = u_L + h \sqrt{\frac{g}{2} \frac{h_L + h}{h_L h}}.$$

De plus,

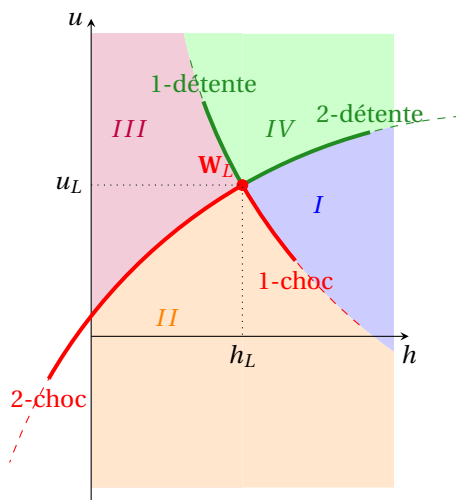
$$u'(h) = \sqrt{\frac{g}{8}} \frac{h_L h + 2h^2 + h_L^2}{\sqrt{h^3 h_L (h_L + h)}} > 0, \quad \text{pour } h < h_L,$$

$$u''(h) = -\sqrt{\frac{g}{32}} \frac{\sqrt{h_L^3(5h+3h_L)}}{\sqrt{h^5(h_L+h)^3}} < 0. \quad \text{pour } h < h_L.$$

On a donc les graphes suivants :



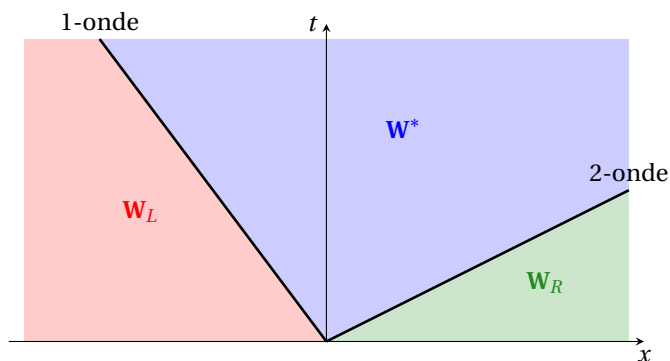
Récapitulatif : quel que soit $\mathbf{W}_L = (h_L, u_L)$, le demi-plan $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ se décompose en quatre zones séparées par les quatre demi-courbes 1-choc, 2-choc, 1-détente et 2-détente.



7. Soit un problème de Riemann avec les deux états constants donnés suivants :

$$\mathbf{W}_L = \begin{pmatrix} h_L \\ u_L \end{pmatrix}, \quad \mathbf{W}_R = \begin{pmatrix} h_R \\ u_R \end{pmatrix}.$$

La solution est constituée de trois états constants séparés par deux ondes.



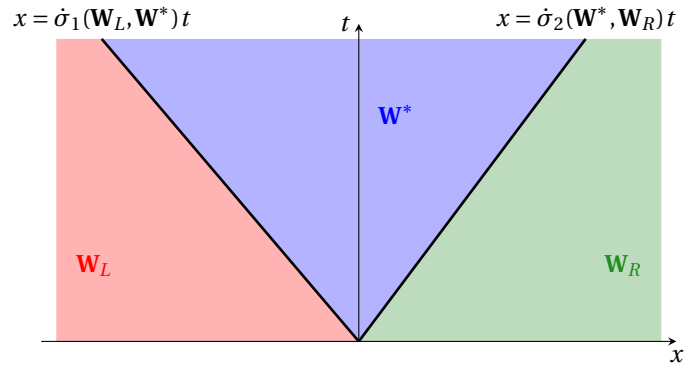
Pour expliciter cette solution on cherche à définir l'inconnue

$$\mathbf{W}^* = \begin{pmatrix} h^* \\ u^* \end{pmatrix}$$

à l'aide de l'étude des ondes précédent.

On a cinq cas possibles :

Cas 1) 1-choc et 2-choc (il correspond au cas où \mathbf{W}_R appartient à la zone II, c'est-à-dire si $h^* > h_L$ et $h^* > h_R$)



L'unique solution faible entropique est

$$\mathbf{W}(x, t) = \begin{cases} \mathbf{W}_L, & \text{si } x < \dot{\sigma}_1(h_L, h^*, u_L)t, \\ \mathbf{W}^*, & \text{si } \dot{\sigma}_1(h_L, h^*, u_L)t < x < \dot{\sigma}_2(h^*, h_R, u^*)t, \\ \mathbf{W}_R, & \text{si } x > \dot{\sigma}_2(h^*, h_R, u^*)t, \end{cases}$$

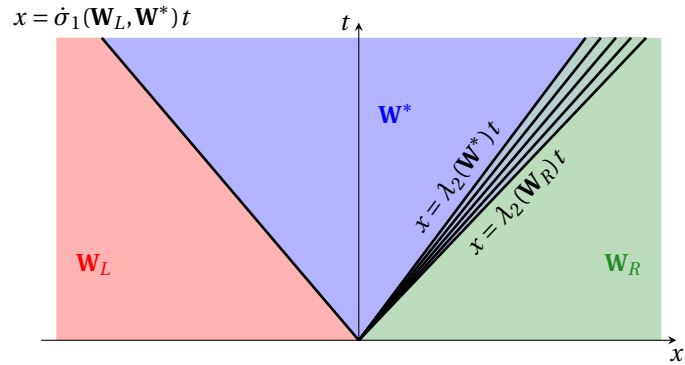
avec

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_1(h_L, h^*, u_L) &= u_L - h^* \sqrt{\frac{g}{2} \frac{h_L + h^*}{h_L h^*}} \\ \dot{\sigma}_2(h^*, h_R, u^*) &= u^* + h_R \sqrt{\frac{g}{2} \frac{h^* + h_R}{h^* h_R}} \end{aligned}$$

et h^* et u^* est l'unique solution du système

$$\begin{cases} u^* = u_L + (h_L - h^*) \sqrt{\frac{g}{2} \frac{h_L + h^*}{h_L h^*}}, \\ u_R = u^* + (h_R - h^*) \sqrt{\frac{g}{2} \frac{h^* + h_R}{h^* h_R}}. \end{cases}$$

Cas 2) 1-choc et 2-détente (il correspond au cas où \mathbf{W}_R appartient à la zone I, c'est-à-dire si $h^* > h_L$ et $h^* < h_R$)



L'unique solution faible entropique est

$$\mathbf{W}(x, t) = \begin{cases} \mathbf{W}_L, & \text{si } x < \dot{\sigma}_1(h_L, h^*, u_L)t, \\ \mathbf{W}^*, & \text{si } \dot{\sigma}_1(h_L, h^*, u_L)t < x < (u^* + \sqrt{gh^*})t, \\ \mathbf{W}_{2\text{-det}}, & \text{si } (u^* + \sqrt{gh^*})t < x < (u_R + \sqrt{gh_R})t, \\ \mathbf{W}_R, & \text{si } x > (u_R + \sqrt{gh_R})t, \end{cases}$$

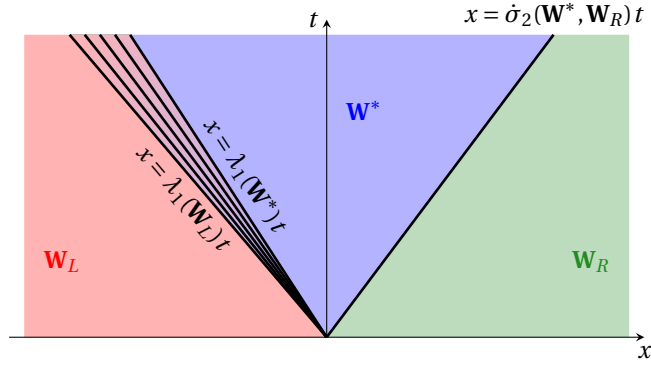
avec

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_1(h_L, h^*, u_L) &= u_L - h^* \sqrt{\frac{g}{2} \frac{h_L + h^*}{h_L h^*}}, \\ \mathbf{W}_{2\text{-det}} &= \left(\frac{1}{9g} \left(-u_R + 2\sqrt{gh_R} + \frac{x}{t} \right)^2, \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{3} \left(u_R - 2\sqrt{gh_R} + 2\frac{x}{t} \right) \right), \end{aligned}$$

et h^* et u^* l'unique solution du système

$$\begin{cases} u^* = u_L + (h_L - h^*) \sqrt{\frac{g}{2} \frac{h_L + h^*}{h_L h^*}}, \\ u_R = u^* + 2\sqrt{g}(\sqrt{h_R} - \sqrt{h^*}). \end{cases}$$

Cas 3 1-détente et 2-choc (il correspond au cas où \mathbf{W}_R appartient à la zone III, c'est-à-dire si $h^* < h_L$ et $h^* > h_R$)



L'unique solution faible entropique est

$$\mathbf{W}(x, t) = \begin{cases} \mathbf{W}_L, & \text{si } x < (u_L - \sqrt{gh_L})t, \\ \mathbf{W}_{1\text{-det}}, & \text{si } (u_L - \sqrt{gh_L})t < x < (u^* - \sqrt{gh^*})t, \\ \mathbf{W}^*, & \text{si } (u^* - \sqrt{gh^*})t < x < \dot{\sigma}_2(h^*, h_R, u^*)t, \\ \mathbf{W}_R, & \text{si } x > \dot{\sigma}_2(h^*, h_R, u^*)t, \end{cases}$$

avec

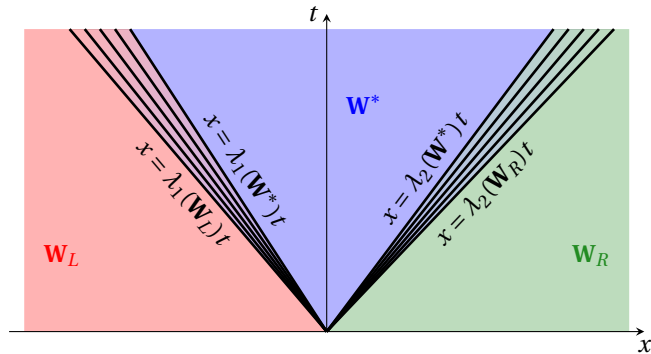
$$\dot{\sigma}_2(h^*, h_R) = u^* + h_R \sqrt{\frac{g}{2} \frac{h^* + h_R}{h^* h_R}},$$

$$\mathbf{W}_{1\text{-det}} = \left(\frac{\frac{1}{9g} (u_L + 2\sqrt{gh_L} - \frac{x}{t})^2}{\frac{1}{3} (u_L + 2\sqrt{gh_L} + 2\frac{x}{t})} \right),$$

et h^* et u^* l'unique solution du système

$$\begin{cases} u^* = u_L + 2\sqrt{g}(\sqrt{h_L} - \sqrt{h^*}), \\ u_R = u^* + (h_R - h^*)\sqrt{\frac{g}{2} \frac{h^* + h_R}{h^* h_R}}. \end{cases}$$

Cas 4 1-détente et 2-détente (il correspond au cas où \mathbf{W}_R appartient à la zone IV, c'est-à-dire si $h^* < h_L$ et $h^* < h_R$)



L'unique solution faible entropique est

$$\mathbf{W}(x, t) = \begin{cases} \mathbf{W}_L, & \text{si } x < (u_L - \sqrt{gh_L})t, \\ \mathbf{W}_{1\text{-det}}, & \text{si } (u_L - \sqrt{gh_L})t < x < (u^* - \sqrt{gh^*})t, \\ \mathbf{W}^*, & \text{si } (u^* - \sqrt{gh^*})t < x < (u^* + \sqrt{gh^*})t, \\ \mathbf{W}_{2\text{-det}}, & \text{si } (u^* + \sqrt{gh^*})t < x < (u_R + \sqrt{gh_R})t, \\ \mathbf{W}_R, & \text{si } x > (u_R + \sqrt{gh_R})t \end{cases}$$

avec

$$\mathbf{W}_{1\text{-det}} = \left(\frac{\frac{1}{9g} (u_L + 2\sqrt{gh_L} - \frac{x}{t})^2}{\frac{1}{3} (u_L + 2\sqrt{gh_L} + 2\frac{x}{t})} \right), \quad \mathbf{W}_{2\text{-det}} = \left(\frac{\frac{1}{9g} (-u_R + 2\sqrt{gh_R} + \frac{x}{t})^2}{\frac{1}{3} (u_R - 2\sqrt{gh_R} + 2\frac{x}{t})} \right),$$

et h^* et u^* l'unique solution du système

$$\begin{cases} u^* = u_L + 2\sqrt{g}(\sqrt{h_L} - \sqrt{h^*}), \\ u_R = u^* + 2\sqrt{g}(\sqrt{h_R} - \sqrt{h^*}). \end{cases}$$

Remarque : il peut se générer une zone de hauteur h nulle lorsque \mathbf{W}_R appartient à la zone IV : un état intermédiaire $h^* > 0$ n'est possible que si

$$u_R - u_L < 2\sqrt{g}(\sqrt{h_R} - \sqrt{h_L}).$$

La méthode de résolution du problème de Riemann consiste donc à calculer cet état intermédiaire (h^*, u^*). On a vu que cet état peut être relié à l'état de gauche (h_L, u_L) par une 1-onde :

$$u^* = \begin{cases} u_L - (h^* - h_L) \frac{2\sqrt{g}}{\sqrt{h_L + \sqrt{h^*}}} & \text{si } h^* < h_L \text{ (1-détente)} \\ u_L - (h^* - h_L) \sqrt{\frac{g}{2} \frac{h^* + h_L}{h^* h_L}} & \text{si } h^* > h_L \text{ (1-choc)} \end{cases}$$

et à l'état de droite (h_R, u_R) par une 2-onde :

$$u^* = \begin{cases} u_R + (h^* - h_R) \frac{2\sqrt{g}}{\sqrt{h_R + \sqrt{h^*}}} & \text{si } h^* < h_R \text{ (2-détente)} \\ u_R + (h^* - h_R) \sqrt{\frac{g}{2} \frac{h^* + h_R}{h^* h_R}} & \text{si } h^* > h_R \text{ (2-choc)} \end{cases}$$

Pour calculer h^* on doit donc résoudre

$$u_R + (h^* - h_R)z(h^*, h_R) = u_L - (h^* - h_L)z(h^*, h_L)$$

avec

$$z(h, \psi) = \begin{cases} \frac{2\sqrt{g}}{\sqrt{h + \sqrt{\psi}}} & \text{si } h \leq \psi, \\ \sqrt{\frac{g}{2} \frac{h + \psi}{h\psi}} & \text{sinon.} \end{cases}$$

ce qui revient à chercher le zéro de la fonction

$$f(h) = u_R - u_L + (h - h_L)z(h, h_L) + (h - h_R)z(h, h_R)$$

et u^* est déduit tout simplement par

$$u^* = u_R + (h^* - h_R)z(h^*, h_R).$$

Remarque : Notons que pour $h_L = 0$ (resp. $h_R = 0$), la 1-onde (resp. la 2-onde) de choc n'est pas définie, dans ce cas la seule solution possible est une onde de détente.

8. Pour vérifier que η est une entropie du système (3.3) avec le flux d'entropie Φ , on montre que

$$\nabla_{\mathbf{W}}\Phi(\mathbf{W}) = \nabla_{\mathbf{W}}\eta(\mathbf{W}) \cdot \mathbf{A}(\mathbf{W}).$$

Or,

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} h \\ u \end{pmatrix}, \quad \Phi(\mathbf{W}) = \frac{hu^3}{2} + gh^2u,$$

donc

$$\nabla_{\mathbf{W}}\Phi(\mathbf{W}) = \begin{pmatrix} \frac{u^3}{2} + 2ghu \\ \frac{3hu^2}{2} + gh^2 \end{pmatrix}$$

et

$$\eta(\mathbf{W}) = \frac{hu^2}{2} + \frac{gh^2}{2}$$

d'où

$$\nabla_{\mathbf{W}}\eta(\mathbf{W}) = \begin{pmatrix} \frac{u^2}{2} + gh \\ hu \end{pmatrix}.$$

Donc

$$\nabla_{\mathbf{W}}\eta(\mathbf{W}) \cdot \mathbf{A}(\mathbf{W}) = \begin{pmatrix} \frac{u^2}{2} + gh \\ hu \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} u & h \\ g & u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{u^3}{2} + 2ghu \\ \frac{3hu^2}{2} + gh^2 \end{pmatrix} = \nabla_{\mathbf{W}}\Phi(\mathbf{W}).$$

Il ne reste à prouver que la convexité de l'entropie en calculant la matrice hessienne :

$$d^2\eta(\mathbf{W}) = \begin{pmatrix} g & u \\ u & h \end{pmatrix}.$$

Si $gh - u^2 > 0$ l'entropie est convexe. ????????????????????