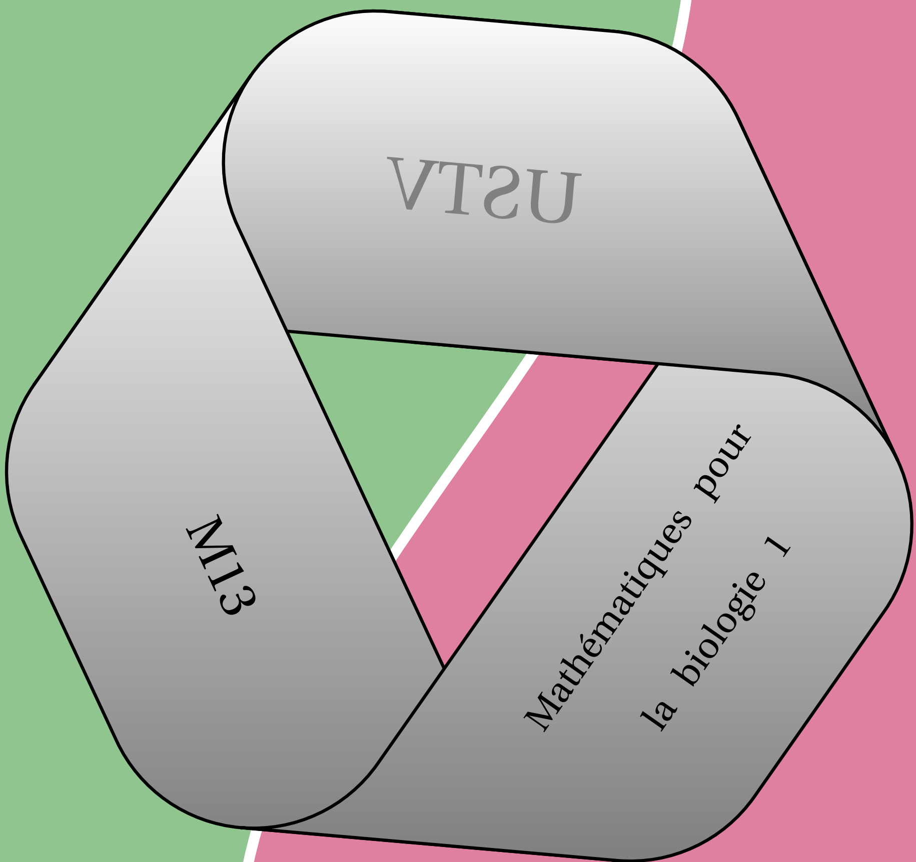
L1BIO

2010/2011

Contrôles continus
et examen.



G. Faccanoni

Gloria FACCANONI

IMATH Bâtiment U-318
Université du Sud Toulon-Var
Avenue de l'université
83957 LA GARDE - FRANCE

☎ 0033 (0)4 94 14 23 81

✉ gloria.faccanoni@univ-tln.fr
http://faccanoni.univ-tln.fr

Table des matières

Contrôle continu 1 - thème A

Exercice 1.1. Déterminer le domaine de définition de la fonction

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \ln\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

Solution. Étant donné que $\ln(\star)$ n'est défini que pour $\star>0$; $\frac{1}{\star}$ n'est défini que pour $\star\neq 0$ et $\sqrt{\star}$ n'est défini que pour $\star\geq 0$, il faut résoudre le système suivant

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{2}>0, \\ \sqrt{x}\neq 0, \\ x\geq 0, \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}}>\frac{1}{2}, \\ x>0, \end{cases} \iff \begin{cases} \sqrt{x}<2, \\ x>0, \end{cases} \iff \begin{cases} x<4, \\ x>0. \end{cases}$$

Donc $\mathscr{D}_f=]0;4[$.

Exercice 1.2. En se rappelant que

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e,$$

calculer

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{4x}.$$

Solution. On pose $t=\frac{x}{3}$, alors

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{4x}=\lim_{t\to+\infty}\left(\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right)^{4\times 3}=e^{12}.$$

Exercice 1.3. Établir si la fonction

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & \text{si } x>0, \\ \frac{\sin(x)}{x}, & \text{si } x<0, \end{cases} \end{aligned}$$

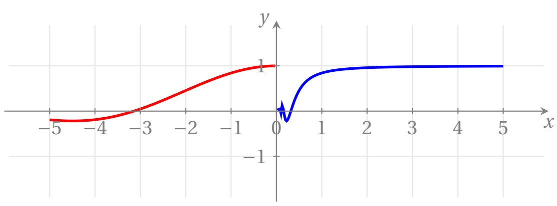
est prolongeable par continuité en 0.

Solution. Étant donné que $\lim_{x\to0^+}f(x)\neq\lim_{x\to0^-}f(x)$ car

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}x\sin\frac{1}{x}=0, \qquad \text{(on a utilisé le théorème d'encadrement)}$$

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{\sin(x)}{x}=1, \qquad \text{(on a utilisé une limite connue)}$$

la fonction n'est pas prolongeable par continuité en $x=0$.



Exercice 1.4. Calculer la limite suivante (on pourra par exemple utiliser la règle de L'Hôpital)

$$\lim_{x\to1}\frac{\sin(\pi x)}{\ln(x)}.$$

Solution. Soient $f(x)=\sin(\pi x)$ et $g(x)=\ln(x)$; alors $f'(x)=\pi\cos(\pi x)$, $g'(x)=1/x$ et

$$\lim_{x\to1}\frac{\sin(\pi x)}{\ln(x)}=\frac{0}{0}, \qquad \lim_{x\to1}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to1}\pi x\cos(\pi x)=-\pi$$

donc

$$\lim_{x\to1}\frac{\sin(\pi x)}{\ln(x)}=-\pi.$$

Contrôle continu 1 - thème B

Exercice 1.1. Déterminer le domaine de définition de la fonction

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \ln\left(1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x-x^2}\right) \end{aligned}$$

Solution. Étant donné que $\ln(\star)$ n'est défini que pour $\star > 0$ et que $\frac{1}{\star}$ n'est défini que pour $\star \neq 0$, il faut résoudre le système suivant

$$\begin{cases} 1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x-x^2} > 0, \\ x \neq 0, \\ x-x^2 \neq 0, \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{x^2}{x(1-x)} > 0, \\ x \neq 0, \\ x \neq 1, \end{cases}$$

donc $\mathcal{D}_f =]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$.

Exercice 1.2. En se rappelant que

$$\lim_{x\to+\infty} x\sin\frac{1}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to+\infty} x^2\left(1-\cos\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{2},$$

calculer

$$\lim_{x\to+\infty} x^3\left(\tan\frac{3}{x}-\sin\frac{3}{x}\right).$$

Solution. On pose $t = \frac{x}{3}$, alors

$$\lim_{x\to+\infty} x^3\left(\tan\frac{3}{x}-\sin\frac{3}{x}\right) = \lim_{t\to+\infty}(3t)^3\left(\frac{\sin\frac{1}{t}}{\cos\frac{1}{t}}-\sin\frac{1}{t}\right) = 27\lim_{t\to+\infty}\left(t\sin\frac{1}{t}\right)t^2\left(1-\cos\frac{1}{t}\right)\frac{1}{\cos\frac{1}{t}} = 27\cdot 1\cdot\frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{27}{2}.$$

Exercice 1.3. Établir si la fonction

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x}, & \text{si } x > 0, \\ x\sin\frac{1}{x}, & \text{si } x < 0, \end{cases} \end{aligned}$$

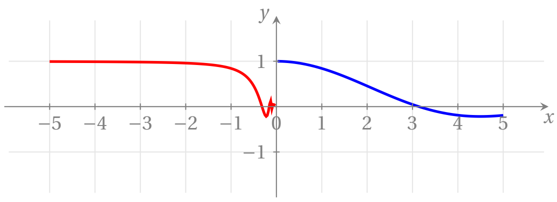
est prolongeable par continuité en 0.

Solution. Étant donné que $\lim_{x\to 0^+} f(x) \neq \lim_{x\to 0^-} f(x)$ car

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{\sin(x)}{x} = 1, \qquad \text{(on a utilisé une limite connue)}$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} x\sin\frac{1}{x} = 0, \qquad \text{(on a utilisé le théorème d'encadrement)}$$

la fonction n'est pas prolongeable par continuité en $x = 0$.



Exercice 1.4. Calculer la limite suivante (on pourra par exemple utiliser la règle de L'Hôpital)

$$\lim_{x\to 1}\frac{2\ln x}{x-1}.$$

Solution. Soient $f(x) = 2\ln x$ et $g(x) = x-1$; alors $f'(x) = \frac{2}{x}$, $g'(x) = 1$ et

$$\lim_{x\to 1}\frac{2\ln x}{x-1} = \frac{0}{0}, \qquad \lim_{x\to 1}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 1}\frac{2}{x} = 2$$

donc

$$\lim_{x\to 1}\frac{2\ln x}{x-1} = 2.$$

Contrôle continu 1 - thème C

Exercice 1.1. Déterminer le domaine de définition de la fonction

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{\big||x|-6\big|-|x|} \end{aligned}$$

Solution. Étant donné que $\frac{1}{\star}$ n'est défini que pour $\star \neq 0$ et que $|\star| = \begin{cases} \star, & \text{si } \star \geq 0, \\ -\star, & \text{si } \star < 0, \end{cases}$, il faut résoudre l'inégalité suivante

$$\big||x|-6\big|-|x| \neq 0 \iff \big||x|-6\big| \neq |x| \iff \begin{cases} \big|x-6\big| \neq x & \text{si } x \geq 0, \\ \big|-x-6\big| \neq -x & \text{si } x < 0, \end{cases} \iff \begin{cases} (x-6) \neq x & \text{si } x \geq 6, \\ -(x-6) \neq x & \text{si } 0 \leq x < 6, \\ -(-x-6) \neq -x & \text{si } -6 \leq x < 0, \\ (-x-6) \neq -x & \text{si } x < -6, \end{cases} \iff \begin{cases} \forall x & \text{si } x \geq 6, \\ x \neq 3 & \text{si } 0 \leq x < 6, \\ x \neq -3 & \text{si } -6 \leq x < 0, \\ \forall x & \text{si } x < -6, \end{cases}$$

donc $\mathscr{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{\pm 3\}$.

Exercice 1.2. Calculer, en fonction de $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha - 2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-3)(2-3\sqrt{x})}.$$

Solution.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha - 2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-3)(2-3\sqrt{x})} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha - 2\sqrt{x}}{-3x+11\sqrt{x}-6} = \begin{cases} -\infty & \text{si } \alpha > 1, \\ -\frac{1}{3} & \text{si } \alpha = 1, \\ 0 & \text{si } \alpha < 1. \end{cases}$$

Exercice 1.3. Établir si la fonction

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} \frac{1-\cos(x)}{x^2}, & \text{si } x > 0, \\ x \sin\frac{1}{x}, & \text{si } x < 0, \end{cases} \end{aligned}$$

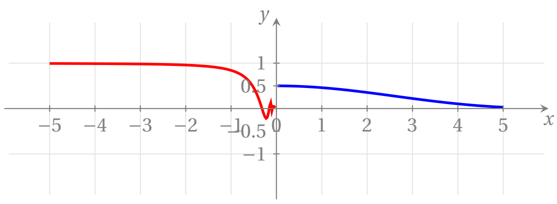
est prolongeable par continuité en 0.

Solution. Étant donné que $\lim_{x\to0^+} f(x) \neq \lim_{x\to0^-} f(x)$ car

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}, \qquad \text{(on a utilisé une limite connue)}$$

$$\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-} x\sin\frac{1}{x} = 0, \qquad \text{(on a utilisé le théorème d'encadrement)}$$

la fonction n'est pas prolongeable par continuité en $x = 0$.



Exercice 1.4. Calculer la limite suivante (on pourra par exemple utiliser la règle de L'Hôpital)

$$\lim_{x\to0} \frac{e^x-1}{x}.$$

Solution. Soient $f(x) = e^x - 1$ et $g(x) = x$; alors $f'(x) = e^x$, $g'(x) = 1$ et

$$\lim_{x\to0} \frac{e^x-1}{x} = \frac{0}{0}, \qquad \lim_{x\to0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to0} e^x = 1$$

donc

$$\lim_{x\to0} \frac{e^x-1}{x} = 1.$$

Contrôle continu 1 - thème D

Exercice 1.1. Déterminer le domaine de définition de la fonction

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \sqrt{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

Solution. Étant donné que $\sqrt{\star}$ n'est définie que pour $\star \geq 0$, $\ln(\star)$ n'est défini que pour $\star > 0$ et $\frac{1}{\star}$ n'est défini que pour $\star \neq 0$, il faut résoudre le système suivant

$$\begin{cases}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \geq 0,\\ 1+\frac{1}{x} > 0,\\ x \neq 0,\end{cases} \iff \begin{cases}1+\frac{1}{x} \geq 1,\\ 1+\frac{1}{x} > 0,\\ x \neq 0,\end{cases} \iff \begin{cases}\frac{1}{x} > 0,\\ x \neq 0,\end{cases}$$

donc $\mathscr{D}_f =]0;+\infty[$.

Exercice 1.2. En se rappelant que

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e,$$

calculer

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(3+\frac{1}{x}\right)^{2x}}{9^x}.$$

Solution.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(3+\frac{1}{x}\right)^{2x}}{9^x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{3^{2x}\left(\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{3x}\right)^{2x/3x}}{3^{2x}} = e^{2/3}.$$

Exercice 1.3. Établir si la fonction

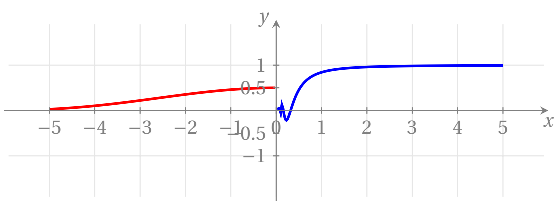
$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & \text{si } x > 0,\\ \frac{1-\cos(x)}{x^2}, & \text{si } x < 0,\end{cases}$$

est prolongeable par continuité en 0.

Solution. Étant donné que $\lim_{x\to0^+} f(x) \neq \lim_{x\to0^-} f(x)$ car

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} x\sin\frac{1}{x} = 0, \qquad \text{(on a utilisé le théorème d'encadrement)}$$
$$\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}, \qquad \text{(on a utilisé une limite connue)}$$

la fonction n'est pas prolongeable par continuité en $x = 0$.



Exercice 1.4. Calculer la limite suivante (on pourra par exemple utiliser la règle de L'Hôpital)

$$\lim_{x\to0} x\ln(x).$$

Solution. Soient $f(x) = \ln(x)$ et $g(x) = 1/x$; alors $f'(x) = 1/x$, $g'(x) = -1/x^2$ et

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(x)}{1/x} = \frac{\infty}{\infty}, \qquad \lim_{x\to0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to0} -x = 0$$

donc

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(x)}{1/x} = 0.$$

Contrôle continu 1 - thème E

Exercice 1.1. Déterminer le domaine de définition de la fonction

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \sqrt{\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)}$$

Solution. Étant donné que $\sqrt{\star}$ n'est définie que pour $\star \geq 0$, $\ln(\star)$ n'est défini que pour $\star > 0$ et $\frac{1}{\star}$ n'est défini que pour $\star \neq 0$, il faut résoudre le système suivant

$$\begin{cases} \ln\left(1-\frac{1}{x}\right) \geq 0, \\ 1-\frac{1}{x} > 0, \\ x \neq 0, \end{cases} \iff \begin{cases} 1-\frac{1}{x} \geq 1, \\ 1-\frac{1}{x} > 0, \\ x \neq 0, \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{1}{x} < 0, \\ x \neq 0, \end{cases}$$

donc $\mathscr{D}_f =]-\infty;0[$.

Exercice 1.2. En se rappelant que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2},$$

calculer

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3}{\tan(x)-\sin(x)}.$$

Solution.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3}{\tan(x)-\sin(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{\frac{\sin(x)}{\cos(x)}-\sin(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{\sin(x)\frac{1-\cos(x)}{\cos(x)}} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin(x)} \frac{x^2}{1-\cos(x)} \cos(x) = 2.$$

Exercice 1.3. Établir si la fonction

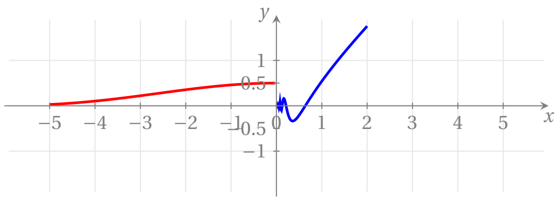
$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \begin{cases} x\cos\frac{1}{x}, & \text{si } x > 0, \\ \frac{1-\cos(x)}{x^2}, & \text{si } x < 0, \end{cases}$$

est prolongeable par continuité en 0.

Solution. Étant donné que $\lim_{x\to 0^+} f(x) \neq \lim_{x\to 0^-} f(x)$ car

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x\cos\frac{1}{x} = 0, \qquad \text{(on a utilisé le théorème d'encadrement)}$$
$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}, \qquad \text{(on a utilisé une limite connue)}$$

la fonction n'est pas prolongeable par continuité en $x = 0$.



Exercice 1.4. Calculer la limite suivante (on pourra par exemple utiliser la règle de L'Hôpital)

$$\lim_{x\to 2} \frac{\sin(\pi x)}{x-2}.$$

Solution. Soient $f(x) = \sin(\pi x)$ et $g(x) = x-2$; alors $f'(x) = \pi\cos(\pi x)$, $g'(x) = 1$ et

$$\lim_{x\to 2} \frac{\sin(\pi x)}{x-2} = \frac{0}{0}, \qquad \lim_{x\to 2} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 2} \pi\cos(\pi x) = \pi$$

donc

$$\lim_{x\to 2} \frac{\sin(\pi x)}{x-2} = \pi.$$

Contrôle continu 2 - thème A

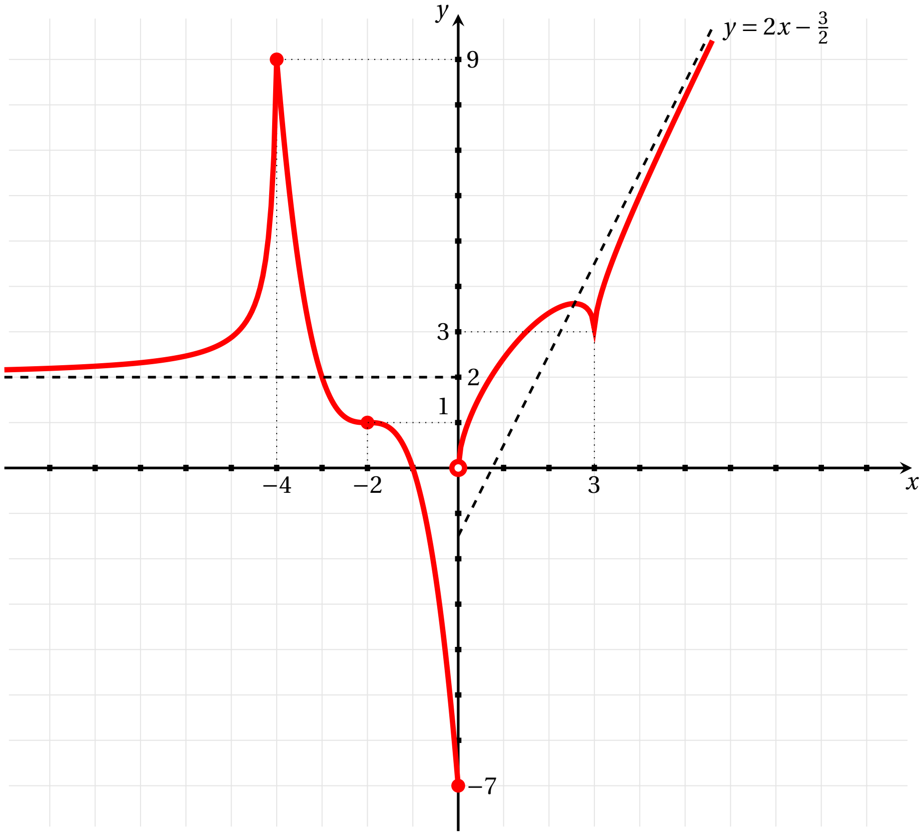
Exercice 2.1.

1. Calculer le développement limité en $x=0$ à l'ordre 3 de $f(x)=\ln(1+\sin^2 x)$. En déduire la limite $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin^2 x)}{2x^2}$.
2. Calculer le développement limité en $x=1$ à l'ordre 4 de $f(x)=x^3$.
3. Calculer le développement limité asymptotique en $+\infty$ à l'ordre 3 de $f(x)=e^{2/x}$.

SOLUTION.

1. Étant donné que
$$\sin(x)=x-\frac{x^3}{6}+o\left(x^4\right)$$
alors
$$\sin^2(x)=x^2+o\left(x^4\right).$$
Comme $x^2+o\left(x^4\right)\xrightarrow[x\to 0]{}0$ et comme le développement limité de $\ln(1+u)$ en $u=0$ est
$$\ln(1+u)=u-\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{3}-\frac{u^4}{4}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{u^n}{n}+o\left(u^n\right)$$
on conclut que
$$\ln(1+\sin^2 x)=x^2+o\left(x^4\right).$$
Donc
$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin^2 x)}{2x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2x^2}=\frac{1}{2}.$$
2. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $x_0\in\mathbb{R}$. Si f et toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre n sont définies et continues en tout point d'un intervalle ouvert contenant x_0 alors f admet un développement limité à l'ordre n en x_0 donné par la formule
$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+(x-x_0)^n\varepsilon(x-x_0).$$
Dans notre cas $n=4$, $f(x)=x^3$ et $x_0=1$ donc
$$f(x)=f(1)\frac{(x-1)^0}{0!}+f'(1)\frac{(x-1)^1}{1!}+f''(1)\frac{(x-1)^2}{2!}+f^{(3)}(1)\frac{(x-1)^3}{3!}+f^{(4)}(1)\frac{(x-1)^4}{4!}=1+3(x-1)+3(x-1)^2+(x-1)^3.$$
3. Soit f définie sur un intervalle $]A,+\infty[$ (ou $]-\infty,A[$). On dit que f admet un développement limité généralisé à l'ordre n en $a=+\infty$ (ou en $a=-\infty$) s'il existe un polynôme P tel que $f(x)=P(1/x)+o(1/x^n)$ au voisinage de ce point. L'expression $P(1/x)$ n'est pas un polynôme, mais a des propriétés similaires. Dans la pratique, on peut obtenir un développement limité de $f(x)$ en $a=+\infty$ (ou en $a=-\infty$) en posant $x=1/t$ (de sorte que t tend vers 0, avec un signe fixe) et en tentant de développer $f(1/t)$ au voisinage de 0.
Dans notre cas $f(x)=e^{2/x}$, $n=3$ et $a=+\infty$ donc
$$e^{2/x}=e^{2t}=e^y=1+y+\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{6}+o\left(y^3\right)=1+2t+\frac{4t^2}{2}+\frac{8t^3}{6}+o\left(t^3\right)=1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{4}{3x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

Exercice 2.2. Soit $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la fonction définie par
$$f(x)=\begin{cases}2-\frac{7}{7x-27} & \text{si } x\le -4,\\ 1-(x+2)^3 & \text{si } -4<x\le 0,\\ x+\sqrt{|x^2-3x|} & \text{si } x>0,\end{cases}$$
dont le graphe est représenté dans la figure ci-dessous.



Répondre aux questions suivantes (pour la plupart des questions il n'est pas nécessaire de faire des calculs mais il faut justifier la réponse) :

1. Quel est le domaine de définition de f ?
2. Étudier la continuité et la dérivabilité de f en $x=-4$, en $x=-2$, en $x=0$ et en $x=3$. Donner, lorsqu'il est possible, la valeur de f' en chacun de ces point.
3. Quel est l'équation de la droite tangente au graphe de f en $x=-2$? Et en $x=4$?
4. Quel est le signe de $f'(x)$ pour $x \in \mathscr{D}_{f'}$?
5. Quel est le signe de $f''(x)$ pour $x \in \mathscr{D}_{f''}$?
6. Calculer $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.
7. Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.
8. Qui est le développement limité asymptotique en $+\infty$ de $f(x)$ au premier ordre ? Et en $-\infty$?

Solution.

1. $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$.
2. Considérons chaque point séparément :
   - f est continue en -4 et $f(-4)=9$; elle n'est pas dérivable en $x=-4$ car $\lim\limits_{h\to0^-} \frac{f(-4+h)-f(-4)}{h} = \lim\limits_{h\to0^-} \frac{2-\frac{7}{7(h-4)-27}-9}{h} = \frac{49}{(55)^2}$ tandis que $\lim\limits_{h\to0^+} \frac{f(-4+h)-f(-4)}{h} = \lim\limits_{h\to0^+} \frac{1-(-4+h+2)^3-9}{h} = -12$;
   - f est continue en -2 et $f(-2)=1$; f est dérivable en -2 et $f'(-2)=0$;
   - f n'est pas continue en $x=0$ car $f(0)=1-(-4+2)^3=-7$ mais $\lim\limits_{h\to0^+} f(x) = \lim\limits_{h\to0^+} x+\sqrt{|x^2-3x|}=0$;
   - f est continue en $x=3$ et $f(3)=3$; elle n'est pas dérivable en $x=3$ car $\lim\limits_{h\to0^-} \frac{f(3+h)-f(3)}{h} = \lim\limits_{h\to0^-} \frac{h+3+\sqrt{3(h+3)-(h+3)^2}}{h} = \lim\limits_{h\to0^-} \frac{h+3+\sqrt{-h(h+3)}}{h} = \infty$ et de même $\lim\limits_{h\to0^+} \frac{f(3+h)-f(3)}{h} = \lim\limits_{h\to0^+} \frac{h+3+\sqrt{(h+3)^2-3(h+3)}}{h} = \lim\limits_{h\to0^+} \frac{h+3+\sqrt{h(h+3)}}{h} = \infty$.
3. L'équation de la droite tangente en x_0 au graphe d'une fonction f dérivable en x_0 est $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$. Par conséquente l'équation de la droite tangente au graphe de f en $x=-2$ est $y=1$ et en $x=4$ est $y=f'(4)(x-4)+f(4)=\frac{9}{4}x-3$.
4. $f'(x)=0$ pour $x=-2$ et $x=\frac{3}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $f'(x)$ n'existe pas pour $x\in\{-4,0,3\}$, $f'(x)>0$ pour $x\in\left]-\infty;-4\right[\cup\left]0;\frac{3}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right[\cup\left]3;+\infty\right[$ et $f'(x)<0$ pour $x\in\left]-4;-2\right[\cup\left]-2;0\right[\cup\left]\frac{3}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right);3\right[$.
5. $f''(x)=0$ pour $x=-2$, $f''(x)$ n'existe pas pour $x\in\{-4,0,3\}$, $f''(x)>0$ pour $x\in]-\infty;-4[\cup]-4;-2[$ et $f''(x)<0$ pour $x\in]-2;0[\cup]0;3[\cup]3;+\infty[$.
6. $\lim_{x\to-\infty} f(x)=1$ donc $y=1$ est asymptote en $-\infty$.
7. $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.
8. Le développement limité asymptotique en $+\infty$ de $f(x)$ au premier ordre coïncide avec l'équation de l'asymptote oblique, donc c'est $2x-\frac{3}{2}+o(x^{-1})$.
9. Le développement limité asymptotique en $-\infty$ de $f(x)$ au premier ordre coïncide avec l'équation de l'asymptote, donc c'est $1+o(x^{-1})$.

Contrôle continu 2 - thème B

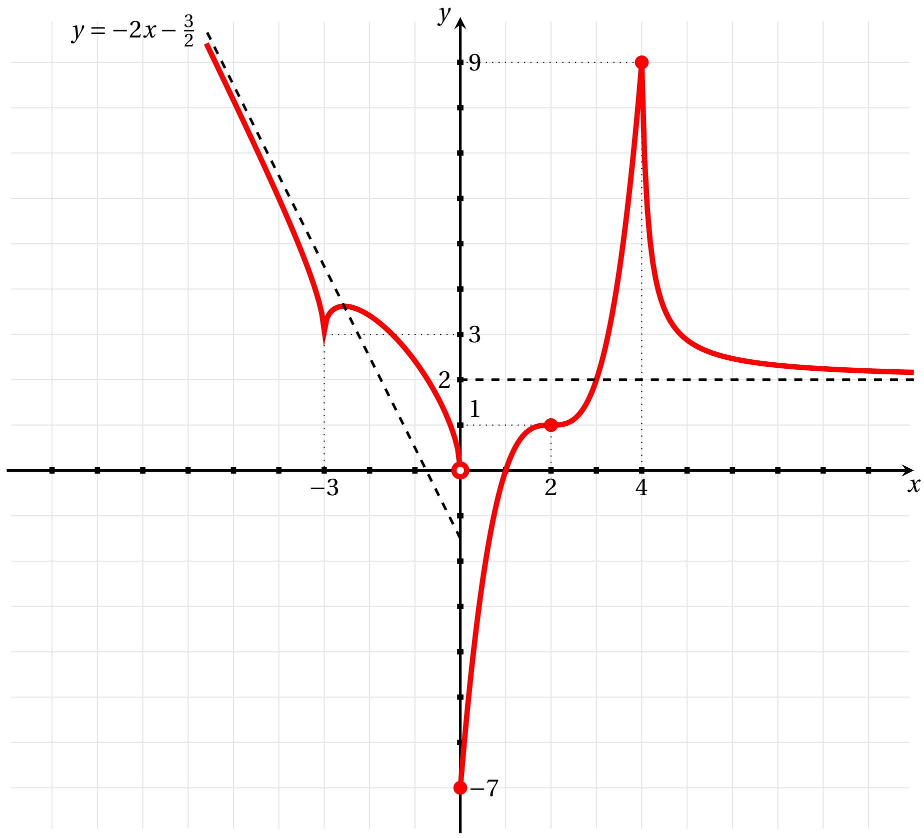
Exercice 2.1.

1. Calculer le développement limité en $x=0$ à l'ordre 3 de $f(x)=\ln(1+x\cos^2 x)$. En déduire la limite $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x\cos^2 x)}{4x}$.
2. Calculer le développement limité en $x=-1$ à l'ordre 4 de $f(x)=x^3$.
3. Calculer le développement limité asymptotique en $+\infty$ à l'ordre 3 de $f(x)=e^{3/x}$.

Solution.

1. Étant donné que
$$\cos(x)=1-\frac{x^2}{2}+o\left(x^4\right)$$
alors
$$\cos^2(x)=1-x^2+o\left(x^4\right).$$
Comme $x\cos^2(x)=x-x^3+o\left(x^4\right)\xrightarrow[x\to 0]{}0$ et comme le développement limité de $\ln(1+u)$ en $u=0$ est
$$\ln(1+u)=u-\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{3}-\frac{u^4}{4}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{u^n}{n}+o\left(u^n\right)$$
on conclut que
$$\ln(1+x\cos^2 x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{2}{3}x^3+o\left(x^4\right).$$
Donc
$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x\cos^2 x)}{4x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{4x}=\frac{1}{4}.$$
2. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $x_0\in\mathbb{R}$. Si f et toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre n sont définies et continues en tout point d'un intervalle ouvert contenant x_0 alors f admet un développement limité à l'ordre n en x_0 donné par la formule
$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+(x-x_0)^n\varepsilon(x-x_0).$$
Dans notre cas $n=4$, $f(x)=x^3$ et $x_0=-1$ donc
$$f(x)=f(-1)\frac{(x+1)^0}{0!}+f'(-1)\frac{(x+1)^1}{1!}+f''(-1)\frac{(x+1)^2}{2!}+f^{(3)}(-1)\frac{(x+1)^3}{3!}+f^{(4)}(-1)\frac{(x+1)^4}{4!}=-1+3(x+1)-3(x+1)^2+(x+1)^3.$$
3. Soit f définie sur un intervalle $]A,+\infty[$ (ou $]-\infty,A[$). On dit que f admet un développement limité généralisé à l'ordre n en $a=+\infty$ (ou en $a=-\infty$) s'il existe un polynôme P tel que $f(x)=P(1/x)+o(1/x^n)$ au voisinage de ce point. L'expression $P(1/x)$ n'est pas un polynôme, mais a des propriétés similaires. Dans la pratique, on peut obtenir un développement limité de $f(x)$ en $a=+\infty$ (ou en $a=-\infty$) en posant $x=1/t$ (de sorte que t tend vers 0, avec un signe fixe) et en tentant de développer $f(1/t)$ au voisinage de 0.
Dans notre cas $f(x)=e^{3/x}$, $n=3$ et $a=+\infty$ donc
$$e^{3/x}=e^{3t}=e^y=1+y+\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{6}+o\left(y^3\right)=1+3t+\frac{9t^2}{2}+\frac{27t^3}{6}+o\left(t^3\right)=1+\frac{3}{x}+\frac{9}{2x^2}+\frac{9}{2x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

Exercice 2.2. Soit $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la fonction définie par
$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{|3x+x^2|}-x & \text{si } x<0,\\ 1-(2-x)^3 & \text{si } 0\le x<4,\\ 2+\frac{7}{7x-27} & \text{si } x\ge 4,\end{cases}$$
dont le graphe est représenté dans la figure ci-dessous.



Répondre aux questions suivantes (pour la plupart des questions il n'est pas nécessaire de faire des calculs mais il faut justifier la réponse) :

1. Quel est le domaine de définition de f ?
2. Étudier la continuité et la dérivabilité de f en $x=-3$, en $x=0$, en $x=2$ et en $x=4$. Donner, lorsqu'il est possible, la valeur de f' en chacun de ces point.
3. Quel est l'équation de la droite tangente au graphe de f en $x=-4$? Et en $x=2$?
4. Quel est le signe de $f'(x)$ pour $x \in \mathscr{D}_{f'}$?
5. Quel est le signe de $f''(x)$ pour $x \in \mathscr{D}_{f''}$?
6. Calculer $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.
7. Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.
8. Qui est le développement limité asymptotique en $+\infty$ de $f(x)$ au premier ordre ? Et en $-\infty$?

Solution.

1. $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$.
2. Considérons chaque point séparément :
   - f est continue en $x=-3$ et $f(-3)=3$; elle n'est pas dérivable en $x=-3$ car $\lim\limits_{h\to0^-} \frac{f(-3+h)-f(-3)}{h} = \lim\limits_{h\to0^-} \frac{h-3+\sqrt{(h-3)^2-3(h-3)}}{h} = \lim\limits_{h\to0^-} \frac{h-3+\sqrt{h(h-3)}}{h} = \infty$ et de même $\lim\limits_{h\to0^+} \frac{f(-3+h)-f(-3)}{h} = \lim\limits_{h\to0^+} \frac{h-3+\sqrt{3(h-3)-(h-3)^2}}{h} = \lim\limits_{h\to0^+} \frac{h-3+\sqrt{-h(h-3)}}{h} = \infty$;
   - f n'est pas continue en $x=0$ car $f(0)=1-(-4+2)^3=-7$ mais $\lim\limits_{h\to0^-} f(x) = \lim\limits_{h\to0^-} x+\sqrt{|x^2-3x|}=0$;
   - f est continue en 2 et $f(2)=1$; f est dérivable en 2 et $f'(2)=0$;
   - f est continue en 4 et $f(4)=9$; elle n'est pas dérivable en $x=4$ car $\lim\limits_{h\to0^-} \frac{f(4+h)-f(4)}{h} = \lim\limits_{h\to0^-} \frac{1-(2-(4+h))^3-9}{h} = 12$ tandis que $\lim\limits_{h\to0^+} \frac{f(4+h)-f(4)}{h} = \lim\limits_{h\to0^+} \frac{2+\frac{7}{7(h+4)-27}-9}{h} = -49$.
3. L'équation de la droite tangente en x_0 au graphe d'une fonction f dérivable en x_0 est $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$. Par conséquente l'équation de la droite tangente au graphe de f en $x=2$ est $y=1$ et en $x=-4$ est $y=f'(-4)(x+4)+f(-4)=-\frac{9}{4}x-3$.
4. $f'(x)=0$ pour $x=2$ et $x=-\frac{3}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $f'(x)$ n'existe pas pour $x\in\{-3,0,4\}$, $f'(x)<0$ pour $x\in\left]-\infty;-3\right[\cup\left]-\frac{3}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right);0\right[\cup\left]4,+\infty\right[$ et $f'(x)>0$ pour $x\in\left]-3;-\frac{3}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right[\cup\left]0;2\right[\cup\left]2;4\right[$.
5. $f''(x)=0$ pour $x=2$, $f''(x)$ n'existe pas pour $x\in\{-3,0,4\}$, $f''(x)<0$ pour $x\in]-\infty;-3[\cup]-3;0[\cup]0;2[$ et $f''(x)>0$ pour $x\in]2;4[\cup]4;+\infty[$.
6. $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$.
7. $\lim_{x\to+\infty} f(x)=1$ donc $y=1$ est asymptote en $+\infty$.
8. Le développement limité asymptotique en $-\infty$ de $f(x)$ au premier ordre coïncide avec l'équation de l'asymptote, donc c'est $2x-\frac{3}{2}+o(x^{-1})$.
9. Le développement limité asymptotique en $+\infty$ de $f(x)$ au premier ordre coïncide avec l'équation de l'asymptote oblique, donc c'est $1+o(x^{-1})$.

Contrôle continu 2 - thème C

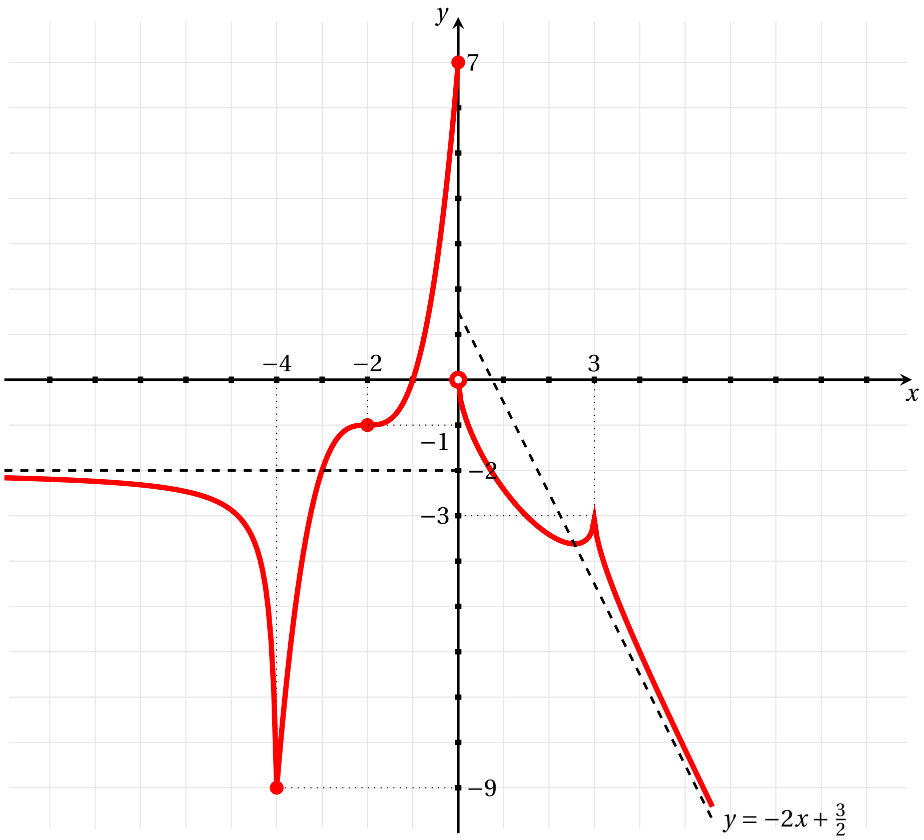
Exercice 2.1.

1. Calculer le développement limité en $x=0$ à l'ordre 3 de $f(x)=\ln(1-x\cos^2 x)$. En déduire la limite $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-x\cos^2 x)}{3x}$.
2. Calculer le développement limité en $x=2$ à l'ordre 4 de $f(x)=x^3$.
3. Calculer le développement limité asymptotique en $-\infty$ à l'ordre 3 de $f(x)=e^{-1/x}$.

SOLUTION.

1. Étant donné que
$$\cos(x)=1-\frac{x^2}{2}+o\left(x^4\right)$$
alors
$$\cos^2(x)=1-x^2+o\left(x^4\right).$$
Comme $x\cos^2(x)=x-x^3+o\left(x^4\right)\xrightarrow[x\to 0]{}0$ et comme le développement limité de $\ln(1-u)$ en $u=0$ est
$$\ln(1-u)=-u-\frac{u^2}{2}-\frac{u^3}{3}-\frac{u^4}{4}+\cdots-\frac{u^n}{n}+o\left(u^n\right)$$
on conclut que
$$\ln(1-x\cos^2 x)=-x-\frac{x^2}{2}+\frac{2}{3}x^3+o\left(x^4\right).$$
Donc
$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-x\cos^2 x)}{4x}=\lim_{x\to 0}\frac{-x}{4x}=-\frac{1}{4}.$$
2. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $x_0\in\mathbb{R}$. Si f et toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre n sont définies et continues en tout point d'un intervalle ouvert contenant x_0 alors f admet un développement limité à l'ordre n en x_0 donné par la formule
$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+(x-x_0)^n\varepsilon(x-x_0).$$
Dans notre cas $n=4$, $f(x)=x^3$ et $x_0=2$ donc
$$f(x)=f(2)\frac{(x-2)^0}{0!}+f'(2)\frac{(x-2)^1}{1!}+f''(2)\frac{(x-2)^2}{2!}+f^{(3)}(2)\frac{(x-2)^3}{3!}+f^{(4)}(2)\frac{(x-2)^4}{4!}=8+12(x-2)+6(x-2)^2+(x-2)^3.$$
3. Soit f définie sur un intervalle $]A,+\infty[$ (ou $]-\infty,A[$). On dit que f admet un développement limité généralisé à l'ordre n en $a=+\infty$ (ou en $a=-\infty$) s'il existe un polynôme P tel que $f(x)=P(1/x)+o(1/x^n)$ au voisinage de ce point. L'expression $P(1/x)$ n'est pas un polynôme, mais a des propriétés similaires. Dans la pratique, on peut obtenir un développement limité de $f(x)$ en $a=+\infty$ (ou en $a=-\infty$) en posant $x=1/t$ (de sorte que t tend vers 0, avec un signe fixe) et en tentant de développer $f(1/t)$ au voisinage de 0.
Dans notre cas $f(x)=e^{-1/x}$, $n=3$ et $a=-\infty$ donc
$$e^{-1/x}=e^{-t}=e^y=1+y+\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{6}+o\left(y^3\right)=1-t+\frac{t^2}{2}-\frac{t^3}{6}+o\left(t^3\right)=1-\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{6x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

Exercice 2.2. Soit $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la fonction définie par
$$f(x)=\begin{cases}\frac{7}{7x-27}-2 & \text{si } x\le -4,\\ (x+2)^3-1 & \text{si } -4<x\le 0,\\ -x-\sqrt{|x^2-3x|} & \text{si } x>0,\end{cases}$$
dont le graphe est représenté dans la figure ci-dessous.



Répondre aux questions suivantes (pour la plupart des questions il n'est pas nécessaire de faire des calculs mais il faut justifier la réponse) :

1. Quel est le domaine de définition de f ?
2. Étudier la continuité et la dérivabilité de f en $x = -4$, en $x = -2$, en $x = 0$ et en $x = 3$. Donner, lorsqu'il est possible, la valeur de f' en chacun de ces point.
3. Quel est l'équation de la droite tangente au graphe de f en $x = -2$? Et en $x = 4$?
4. Quel est le signe de $f'(x)$ pour $x \in \mathscr{D}_{f'}$?
5. Quel est le signe de $f''(x)$ pour $x \in \mathscr{D}_{f''}$?
6. Calculer $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.
7. Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.
8. Qui est le développement limité asymptotique en $+\infty$ de $f(x)$ au premier ordre ? Et en $-\infty$?

SOLUTION.

1. $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$.
2. Considérons chaque point séparément :
   - $\triangleright$ f est continue en -4 et $f(-4) = -9$; elle n'est pas dérivable en $x = -4$ car $\lim\limits_{h\to0^-} \frac{f(-4+h)-f(-4)}{h} = \lim\limits_{h\to0^-} \frac{2-\frac{7}{7(h-4)-27}+9}{h} = -\frac{49}{(55)^2}$ tandis que $\lim\limits_{h\to0^+} \frac{f(-4+h)-f(-4)}{h} = \lim\limits_{h\to0^+} \frac{1-(-4+h+2)^3+9}{h} = 12$;
   - $\triangleright$ f est continue en -2 et $f(-2) = -1$; f est dérivable en -2 et $f'(-2) = 0$;
   - $\triangleright$ f n'est pas continue en $x = 0$ car $f(0) = (2)^3 - 1 = 7$ mais $\lim\limits_{h\to0^+} f(x) = \lim\limits_{h\to0^+} x + \sqrt{|x^2-3x|} = 0$;
   - $\triangleright$ f est continue en $x = 3$ et $f(3) = -3$; elle n'est pas dérivable en $x = 3$ car $\lim\limits_{h\to0^-} \frac{f(3+h)-f(3)}{h} = \lim\limits_{h\to0^-} \frac{h+3+\sqrt{3(h+3)-(h+3)^2}+3}{h} = \lim\limits_{h\to0^-} \frac{h+3+\sqrt{-h(h+3)}+3}{h} = \infty$ et de même $\lim\limits_{h\to0^+} \frac{f(3+h)-f(3)}{h} = \lim\limits_{h\to0^+} \frac{h+3+\sqrt{(h+3)^2-3(h+3)}+3}{h} = \lim\limits_{h\to0^+} \frac{h+3+\sqrt{h(h+3)}+3}{h} = \infty$.
3. L'équation de la droite tangente en x_0 au graphe d'une fonction f dérivable en x_0 est $y = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$. Par conséquente l'équation de la droite tangente au graphe de f en $x = -2$ est $y = -1$ et en $x = 4$ est $y = f'(4)(x-4) + f(4) = -\frac{9}{4}x + 3$.
4. $f'(x) = 0$ pour $x = -2$ et $x = \frac{3}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $f'(x)$ n'existe pas pour $x \in \{-4, 0, 3\}$, $f'(x) < 0$ pour $x \in \left]-\infty; -4\right[\cup \left]0; \frac{3}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right[\cup \left]3; +\infty\right[$ et $f'(x) > 0$ pour $x \in \left]-4; -2\right[\cup \left]-2; 0\right[\cup \left]\frac{3}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right); 3\right[$.
5. $f''(x) = 0$ pour $x = -2$, $f''(x)$ n'existe pas pour $x \in \{-4, 0, 3\}$, $f''(x) < 0$ pour $x \in]-\infty; -4[\cup]-4; -2[$ et $f''(x) > 0$ pour $x \in]-2; 0[\cup]0; 3[\cup]3; +\infty[$.
6. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1$ donc $y = -1$ est asymptote en $-\infty$.
7. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
8. Le développement limité asymptotique en $+\infty$ de $f(x)$ au premier ordre coïncide avec l'équation de l'asymptote oblique, donc c'est $-2x + \frac{3}{2} + o(x^{-1})$.
9. Le développement limité asymptotique en $-\infty$ de $f(x)$ au premier ordre coïncide avec l'équation de l'asymptote, donc c'est $-1 + o(x^{-1})$.

Contrôle continu 2 - thème D

Exercice 2.1.

1. Calculer le développement limité en $x = 0$ à l'ordre 3 de $f(x) = \ln(1-\sin^2 x)$. En déduire la limite $\lim_{x\to0} \frac{\ln(1-\sin^2 x)}{2x^2}$.
2. Calculer le développement limité en $x = -2$ à l'ordre 4 de $f(x) = x^3$.
3. Calculer le développement limité asymptotique en $-\infty$ à l'ordre 3 de $f(x) = e^{-2/x}$.

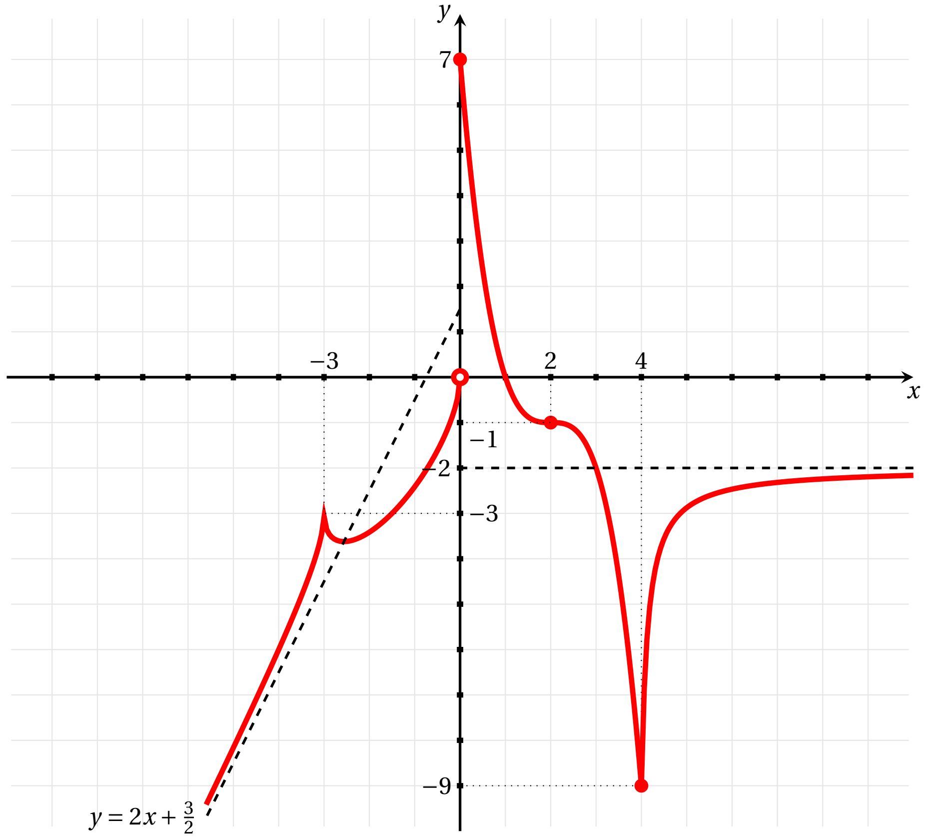
Solution.

1. Étant donné que
$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o\left(x^4\right)$$
alors
$$\sin^2(x) = x^2 + o\left(x^4\right).$$
Comme $\sin^2(x) = x^2 + o\left(x^4\right) \xrightarrow[x\to0]{} 0$ et comme le développement limité de $\ln(1-u)$ en $u = 0$ est
$$\ln(1-u) = -u - \frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + \dots - \frac{u^n}{n} + o\left(u^n\right)$$
on conclut que
$$\ln(1-\sin^2 x) = -x^2 + o\left(x^4\right).$$
Donc
$$\lim_{x\to0} \frac{\ln(1-\sin^2 x)}{2x^2} = \lim_{x\to0} \frac{-x^2}{2x^2} = -\frac{1}{2}.$$
2. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. Si f et toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre n sont définies et continues en tout point d'un intervalle ouvert contenant x_0 alors f admet un développement limité à l'ordre n en x_0 donné par la formule
$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + (x-x_0)^n \varepsilon(x-x_0).$$
Dans notre cas $n = 4$, $f(x) = x^3$ et $x_0 = -2$ donc
$$f(x) = f(-2)\frac{(x+2)^0}{0!} + f'(-2)\frac{(x+2)^1}{1!} + f''(-2)\frac{(x+2)^2}{2!} + f^{(3)}(-2)\frac{(x+2)^3}{3!} + f^{(4)}(-2)\frac{(x+2)^4}{4!} = -8 + 12(x+2) - 6(x+2)^2 + (x+2)^3.$$
3. Soit f définie sur un intervalle $]A, +\infty[$ (ou $]-\infty, A[$). On dit que f admet un développement limité généralisé à l'ordre n en $a = +\infty$ (ou en $a = -\infty$) s'il existe un polynôme P tel que $f(x) = P(1/x) + o(1/x^n)$ au voisinage de ce point. L'expression $P(1/x)$ n'est pas un polynôme, mais a des propriétés similaires. Dans la pratique, on peut obtenir un développement limité de $f(x)$ en $a = +\infty$ (ou en $a = -\infty$) en posant $x = 1/t$ (de sorte que t tend vers 0, avec un signe fixe) et en tentant de développer $f(1/t)$ au voisinage de 0.
Dans notre cas $f(x) = e^{-2/x}$, $n = 3$ et $a = -\infty$ donc
$$e^{-2/x} = e^{-t} = e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{6} + o\left(y^3\right) = 1 - t + \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{6} + o\left(t^3\right) = 1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{2x^2} - \frac{4}{3x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

Exercice 2.2. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} x - \sqrt{|3x + x^2|} & \text{si } x < 0, \\ (2-x)^3 - 1 & \text{si } 0 \le x < 4, \\ \frac{7}{27-7x} - 2 & \text{si } x \ge 4, \end{cases}$$

dont le graphe est représenté dans la figure ci-dessous.



Répondre aux questions suivantes (pour la plupart des questions il n'est pas nécessaire de faire des calculs mais il faut justifier la réponse) :

1. Quel est le domaine de définition de f ?
2. Étudier la continuité et la dérivabilité de f en $x=-3$, en $x=0$, en $x=2$ et en $x=4$. Donner, lorsqu'il est possible, la valeur de f' en chacun de ces point.
3. Quel est l'équation de la droite tangente au graphe de f en $x=-4$? Et en $x=2$?
4. Quel est le signe de $f'(x)$ pour $x \in \mathscr{D}_{f'}$?
5. Quel est le signe de $f''(x)$ pour $x \in \mathscr{D}_{f''}$?
6. Calculer $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.
7. Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.
8. Qui est le développement limité asymptotique en $+\infty$ de $f(x)$ au premier ordre ? Et en $-\infty$?

Solution.

1. $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$.
2. Considérons chaque point séparément :
   - ▷ f est continue en $x=-3$ et $f(-3)=-3$; elle n'est pas dérivable en $x=-3$ car $\lim\limits_{h\to0^-} \frac{f(-3+h)-f(-3)}{h} = \lim\limits_{h\to0^-} \frac{h-3+\sqrt{(h-3)^2-3(h-3)}+3}{h} = \lim\limits_{h\to0^-} \frac{h-3+\sqrt{h(h-3)}+3}{h} = \infty$ et de même $\lim\limits_{h\to0^+} \frac{f(-3+h)-f(-3)}{h} = \lim\limits_{h\to0^+} \frac{h-3+\sqrt{3(h-3)-(h-3)^2}+3}{h} = \lim\limits_{h\to0^+} \frac{h-3+\sqrt{-h(h-3)}+3}{h} = \infty$;
   - ▷ f n'est pas continue en $x=0$ car $f(0)=(2)^3-1=7$ mais $\lim\limits_{h\to0^-} f(x) = \lim\limits_{h\to0^-} x+\sqrt{|x^2-3x|}=0$;
   - ▷ f est continue en 2 et $f(2)=-1$; f est dérivable en 2 et $f'(2)=0$;
   - ▷ f est continue en 4 et $f(4)=-9$; elle n'est pas dérivable en $x=4$ car $\lim\limits_{h\to0^-} \frac{f(4+h)-f(4)}{h} = \lim\limits_{h\to0^-} \frac{1-(2-(4+h))^3+9}{h} = -12$ tandis que $\lim\limits_{h\to0^+} \frac{f(4+h)-f(4)}{h} = \lim\limits_{h\to0^+} \frac{2+\frac{7}{7(h+4)-27}+9}{h} = 49$.
3. L'équation de la droite tangente en x_0 au graphe d'une fonction f dérivable en x_0 est $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$. Par conséquente l'équation de la droite tangente au graphe de f en $x=2$ est $y=-1$ et en $x=-4$ est $y=f'(-4)(x+4)+f(-4)=\frac{9}{4}x+3$.
4. $f'(x)=0$ pour $x=-\frac{3}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ et $x=2$, $f'(x)$ n'existe pas pour $x\in\{-3,0,4\}$, $f'(x)>0$ pour $x \in \left]-\infty;-3\right[\cup \left]-\frac{3}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right);0\right[\cup \left]4,+\infty\right[$ et $f'(x)<0$ pour $x \in \left]-3;-\frac{3}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right[\cup \left]0;2\right[\cup \left]2;4\right[$.
5. $f''(x)=0$ pour $x=2$, $f''(x)$ n'existe pas pour $x\in\{-3,0,4\}$, $f''(x)>0$ pour $x\in]-\infty;-3[\cup]-3;0[\cup]0;2[$ et $f''(x)<0$ pour $x\in]2;4[\cup]4;+\infty[$.
6. $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.
7. $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-1$ donc $y=-1$ est asymptote en $+\infty$.
8. Le développement limité asymptotique en $-\infty$ de $f(x)$ au premier ordre coïncide avec l'équation de l'asymptote, donc c'est $-2x+\frac{3}{2}+o(x^{-1})$.
9. Le développement limité asymptotique en $+\infty$ de $f(x)$ au premier ordre coïncide avec l'équation de l'asymptote oblique, donc c'est $-1+o(x^{-1})$.

Contrôle continu 2 - thème E

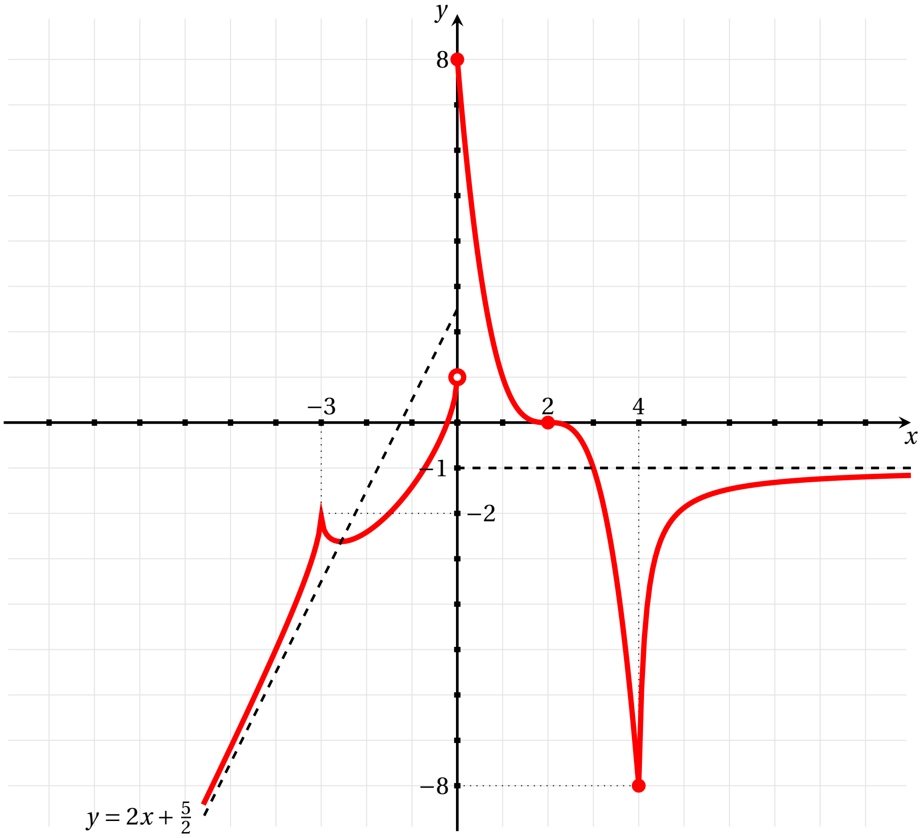
Exercice 2.1.

1. Calculer le développement limité en $x = 0$ à l'ordre 3 de $f(x) = \ln(1-\sin^2 x)$. En déduire la limite $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1-\sin^2 x)}{7x^2}$.
2. Calculer le développement limité en $x = -3$ à l'ordre 4 de $f(x) = x^3$.
3. Calculer le développement limité asymptotique en $+\infty$ à l'ordre 3 de $f(x) = e^{4/x}$.

SOLUTION.

1. Étant donné que
$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o\left(x^4\right)$$
alors
$$\sin^2(x) = x^2 + o\left(x^4\right).$$
Comme $\sin^2(x) = x^2 + o\left(x^4\right) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ et comme le développement limité de $\ln(1-u)$ en $u = 0$ est
$$\ln(1-u) = -u - \frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + \cdots - \frac{u^n}{n} + o\left(u^n\right)$$
on conclut que
$$\ln(1-\sin^2 x) = -x^2 + o\left(x^4\right).$$
Donc
$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1-\sin^2 x)}{7x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-x^2}{7x^2} = -\frac{1}{7}.$$
2. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. Si f et toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre n sont définies et continues en tout point d'un intervalle ouvert contenant x_0 alors f admet un développement limité à l'ordre n en x_0 donné par la formule
$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + (x-x_0)^n \varepsilon(x-x_0).$$
Dans notre cas $n = 4$, $f(x) = x^3$ et $x_0 = -3$ donc
$$f(x) = f(-3)\frac{(x+3)^0}{0!} + f'(-3)\frac{(x+3)^1}{1!} + f''(-3)\frac{(x+3)^2}{2!} + f^{(3)}(-3)\frac{(x+3)^3}{3!} + f^{(4)}(-3)\frac{(x+3)^4}{4!} = -27 + 27(x+3) - 9(x+3)^2 + (x+3)^3.$$
3. Soit f définie sur un intervalle $]A, +\infty[$ (ou $]-\infty, A[$). On dit que f admet un développement limité généralisé à l'ordre n en $a = +\infty$ (ou en $a = -\infty$) s'il existe un polynôme P tel que $f(x) = P(1/x) + o(1/x^n)$ au voisinage de ce point. L'expression $P(1/x)$ n'est pas un polynôme, mais a des propriétés similaires. Dans la pratique, on peut obtenir un développement limité de $f(x)$ en $a = +\infty$ (ou en $a = -\infty$) en posant $x = 1/t$ (de sorte que t tend vers 0, avec un signe fixe) et en tentant de développer $f(1/t)$ au voisinage de 0.
Dans notre cas $f(x) = e^{4/x}$, $n = 3$ et $a = \infty$ donc
$$e^{4/x} = e^t = e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{6} + o\left(y^3\right) = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + o\left(t^3\right) = 1 + \frac{4}{x} + \frac{8}{x^2} + \frac{32}{3x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

Exercice 2.2. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par
$$f(x) = \begin{cases} 1 + x - \sqrt{|3x + x^2|} & \text{si } x < 0, \\ (2-x)^3 & \text{si } 0 \le x < 4, \\ \frac{7}{27-7x} - 1 & \text{si } x \ge 4, \end{cases}$$
dont le graphe est représenté dans la figure ci-dessous.



Répondre aux questions suivantes (pour la plupart des questions il n'est pas nécessaire de faire des calculs mais il faut justifier la réponse) :

1. Quel est le domaine de définition de f ?
2. Étudier la continuité et la dérivabilité de f en $x=-3$, en $x=0$, en $x=2$ et en $x=4$. Donner, lorsqu'il est possible, la valeur de f' en chacun de ces point.
3. Quel est l'équation de la droite tangente au graphe de f en $x=-4$? Et en $x=2$?
4. Quel est le signe de $f'(x)$ pour $x \in \mathscr{D}_{f'}$?
5. Quel est le signe de $f''(x)$ pour $x \in \mathscr{D}_{f''}$?
6. Calculer $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.
7. Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.
8. Qui est le développement limité asymptotique en $+\infty$ de $f(x)$ au premier ordre ? Et en $-\infty$?

SOLUTION.

1. $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$.
2. Considérons chaque point séparément :
   - ▷ f est continue en $x=-3$ et $f(-3)=-2$; elle n'est pas dérivable en $x=-3$ car $\lim\limits_{h\to0^-} \frac{f(-3+h)-f(-3)}{h} = \lim\limits_{h\to0^-} \frac{h-3+\sqrt{(h-3)^2-3(h-3)}+2}{h} = \lim\limits_{h\to0^-} \frac{h-3+\sqrt{h(h-3)}+3}{h} = \infty$ et de même $\lim\limits_{h\to0^+} \frac{f(-3+h)-f(-3)}{h} = \lim\limits_{h\to0^+} \frac{h-3+\sqrt{3(h-3)-(h-3)^2}+2}{h} = \lim\limits_{h\to0^+} \frac{h-3+\sqrt{-h(h-3)}+3}{h} = \infty$;
   - ▷ f n'est pas continue en $x=0$ car $f(0)=(2)^3=8$ mais $\lim\limits_{h\to0^-} f(x) = \lim\limits_{h\to0^-} 1+x+\sqrt{|x^2-3x|} = 1$;
   - ▷ f est continue en 2 et $f(2)=0$; f est dérivable en 2 et $f'(2)=0$;
   - ▷ f est continue en 4 et $f(4)=-8$; elle n'est pas dérivable en $x=4$ car $\lim\limits_{h\to0^-} \frac{f(4+h)-f(4)}{h} = \lim\limits_{h\to0^-} \frac{(2-(4+h))^3+8}{h} = -12$ tandis que $\lim\limits_{h\to0^+} \frac{f(4+h)-f(4)}{h} = \lim\limits_{h\to0^+} \frac{\frac{7}{27-7(h+4)}-1+8}{h} = 49$.
3. L'équation de la droite tangente en x_0 au graphe d'une fonction dérivable en x_0 est $y = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$. Par conséquente l'équation de la droite tangente au graphe de f en $x=2$ est $y=0$ et en $x=-4$ est $y = f'(-4)(x+4)+f(-4) = \frac{9}{4}x+5$.
4. $f'(x)=0$ pour $x = -\frac{3}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ et $x=2$, $f'(x)$ n'existe pas pour $x \in \{-3,0,4\}$, $f'(x)>0$ pour $x \in \left]-\infty;-3\right[\cup \left]-\frac{3}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right);0\right[\cup \left]4,+\infty\right[$ et $f'(x)<0$ pour $x \in \left]-3;-\frac{3}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right[\cup \left]0;2\right[\cup \left]2;4\right[$.
5. $f''(x)=0$ pour $x=2$, $f''(x)$ n'existe pas pour $x \in \{-3,0,4\}$, $f''(x)>0$ pour $x \in]-\infty;-3[\cup]-3;0[\cup]0;2[$ et $f''(x)<0$ pour $x \in]2;4[\cup]4;+\infty[$.
6. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.
7. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ donc $y=0$ est asymptote en $+\infty$.
8. Le développement limité asymptotique en $-\infty$ de $f(x)$ au premier ordre coïncide avec l'équation de l'asymptote, donc c'est $2x+\frac{3}{2}+o(x^{-1})$.
9. Le développement limité asymptotique en $+\infty$ de $f(x)$ au premier ordre coïncide avec l'équation de l'asymptote oblique, donc c'est $0+o(x^{-1})$.

Examen

Exercice 1. Considérons la fonction $f\colon A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{e^{3x+1}}{x^2 - 2x}.$$

1. Trouver l'ensemble de définition A.
2. Trouver le signe de f.
3. Trouver les limites où f n'est pas définie et pour $x \to \pm\infty$.
4. Trouver la dérivée de f et où f est croissante ou décroissante.
5. Dessiner le graphe de f.

SOLUTION.

1. Pour que $\frac{1}{\star}$ soit définie il faut que $\star \neq 0$ donc

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 2x \neq 0\} = \left]-\infty;0\right[\cup \left]0;2\right[\cup \left]2;+\infty\right[= \mathbb{R} \setminus \{0;2\}.$$

2. Comme $e^\star > 0$ pour tout $\star \in \mathbb{R}$, le signe de f coïncide avec le signe du dénominateur et on a

$$\begin{aligned}
f(x) = 0 &\iff x^2 - 2x = 0 &&\iff x(x-2) = 0 &&\iff \nexists\, x \in A,\\
f(x) > 0 &\iff x^2 - 2x > 0 &&\iff x(x-2) > 0 &&\iff x \in]-\infty;0[\cup]2;+\infty[,\\
f(x) < 0 &\iff x^2 - 2x < 0 &&\iff x(x-2) > 0 &&\iff x \in]0;2[.
\end{aligned}$$

3. Trouver les limites où f n'est pas définie et pour $x \to \pm\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0^+ \qquad \lim_{x\to 0^\mp} f(x) = \pm\infty$$
$$\lim_{x\to 2^\mp} f(x) = \mp\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

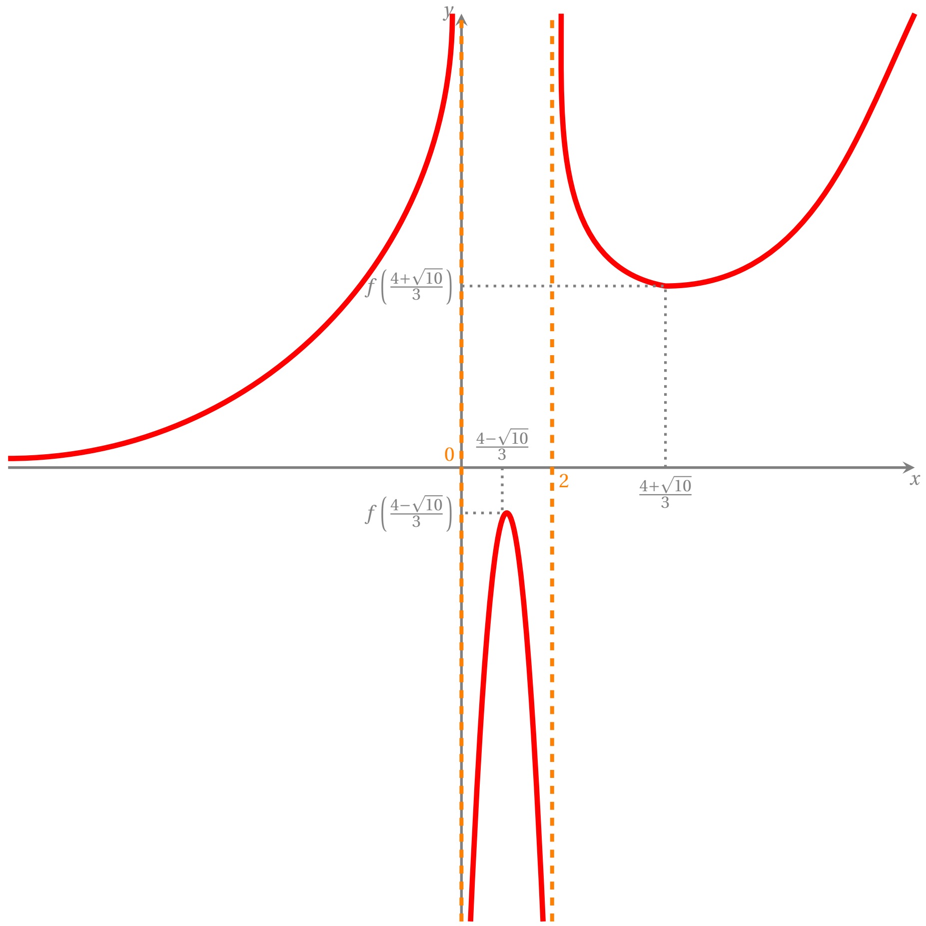
donc $y = 0$ est asymptote horizontale à $-\infty$, $y = 0$ et $y = 2$ sont asymptotes verticales et comme $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ il n'y a pas d'asymptotes à $+\infty$.

4. $f'(x) = \dfrac{(e^{3x+1})'(x^2-2x) - (e^{3x+1})(x^2-2x)'}{(x^2-2x)^2} = \dfrac{3(e^{3x+1})(x^2-2x) - (e^{3x+1})(2x-2)}{(x^2-2x)^2} = \dfrac{e^{3x+1}}{(x^2-2x)^2}(3x^2 - 8x + 2).$

Comme $\frac{e^{3x+1}}{(x^2-2x)^2} > 0$ pour tout $x \in A$, le signe de f' coïncide avec le signe de $3x^2 - 8x + 2$ et on a

$$\begin{aligned}
3x^2 - 8x + 2 = 0 &\iff x_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{40}}{6} = \frac{4 \pm \sqrt{10}}{3},\\
3x^2 - 8x + 2 > 0 &\iff x \in \left]-\infty; \frac{4-\sqrt{10}}{3}\right[\cup \left]\frac{4+\sqrt{10}}{3}; +\infty\right[,\\
3x^2 - 8x + 2 < 0 &\iff x \in \left]\frac{4-\sqrt{10}}{3}; \frac{4+\sqrt{10}}{3}\right[.
\end{aligned}$$

5. Le graphe de f (non à l'échelle) est le suivant :



Exercice 2. Calculer les limites suivantes avec la méthode que l'on préfère :

1. $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$
2. $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}+\sin x}{\ln x}$
3. $\lim_{x\to0^+}\dfrac{2^x-\cos x}{x}$

Solution.

1. $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}) = \lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = 0^+$;
2. $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}+\sin x}{\ln x} = \lim_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\sqrt{x}}{\ln x}+\dfrac{\sin x}{\ln x}\right) = +\infty$ car $\frac{-1}{\ln x}\le\frac{\sin x}{\ln x}\le\frac{1}{\ln x}$ et $\lim_{x\to+\infty}\frac{\pm1}{\ln x}=0$;
3. $\lim_{x\to0^+}\dfrac{2^x-\cos x}{x} = \lim_{x\to0^+}\dfrac{2^x-1+1-\cos x}{x} = \lim_{x\to0^+}\left(\dfrac{2^x-1}{x}+x\dfrac{1-\cos x}{x^2}\right) = \ln(2)+0\cdot\frac{1}{2} = \ln(2)$.

Exercice 3. Calculer les dérivées des fonctions suivantes

1. $f(x) = \arctan(x^2)$
2. $f(x) = \ln^3(x^2)$
3. $f(x) = e^{3\cos x}$

Solution.

1. On a $f(x) = u(v(x))$ avec $u(y) = \arctan(y)$ et $v(x) = x^2$. Comme $f'(x) = u'(v(x))v'(x)$, $u'(y) = \frac{1}{1+y^2}$ et $v'(x) = 2x$, on obtient
$$f'(x) = u'(v(x))\,v'(x) = \frac{1}{1+(v(x))^2}\,v'(x) = \frac{2x}{1+x^4};$$
2. On a $f(x) = w(u(v(x)))$ avec $w(z) = z^3$, $u(y) = \ln(y)$ et $v(x) = x^2$. Comme $f'(x) = w'(u(v(x)))u'(v(x))v'(x)$, $w'(z) = 3z^2$, $u'(y) = \frac{1}{\ln y}$ et $v(x) = 2x$, on obtient
$$f'(x) = 3\,[u(v(x))]^2\,u'(v(x))\,v'(x) = 3\,[\ln(v(x))]^2\,\frac{1}{v(x)}\,v'(x) = 3\left[\ln(x^2)\right]^2\frac{1}{x^2}2x = \frac{6x\ln^2(x^2)}{x^2}.$$
3. On a $f(x) = u(v(x))$ avec $u(y) = e^y$ et $v(x) = 3\cos x$. Comme $f'(x) = u'(v(x))v'(x)$, $u'(y) = e^y$ et $v'(x) = -3\sin x$, on obtient
$$f'(x) = u'(v(x))\,v'(x) = e^{v(x)}\,v'(x) = (-3\sin x)e^{3\cos x}.$$

Exercice 4. Développer à l'ordre plus bas et dans le voisinage de zéro les fonctions suivantes

1. $f(x) = (1-\cos x)\ln(1+x^2)$
2. $f(x) = (\sin(x^2))(e^{-x}-1)$

Solution. Comme

$$\begin{aligned}
\cos x &= 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^5),\\
\sin x &= x-\frac{x^3}{6}+o(x^4),\\
\ln(1+x) &= x-\frac{x^2}{2}+o(x^2),\\
e^x &= 1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2),
\end{aligned}$$

alors

1. $f(x) = (1-\cos x)\ln(1+x^2) = \left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}+o(x^5)\right)\left(x^2-\frac{x^4}{2}+o(x^4)\right) = \frac{x^4}{2}+o(x^4)$;
2. $f(x) = (\sin(x^2))(e^{-x}-1) = \left(x^2-\frac{x^6}{6}+o(x^8)\right)\left(-x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right) = -x^3+o(x^3)$.

Rattrapage

Exercice 1. Tracer le graphe de la fonction

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 5x + 4}$$

en détaillant

1. son domaine et son signe,
2. les limites pour $x \to \pm\infty$,
3. étudier la dérivée de f.

Solution.

1. Pour que $\frac{1}{\star}$ soit défini il faut que $\star \neq 0$ donc le domaine de définition A de f est l'ensemble

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 5x + 4 \neq 0\} = \left]-\infty; 1\right[\cup \left]1; 4\right[\cup \left]4; +\infty\right[= \mathbb{R} \setminus \{1; 4\}.$$

Étude du signe de f :

$\mathbb{R}$

	$-\infty$		0		1		4		$+\infty$
signe du numérateur		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
signe du dénominateur		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
signe de $f(x)$		$-$	0	$+$	$\|$	$-$	$\|$	$+$	

2. Limites de f pour $x \to \pm\infty$ (et où f n'est pas définie) :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0^- \qquad \lim_{x\to 1^\mp} f(x) = \pm\infty$$

$$\lim_{x\to 4^\mp} f(x) = \mp\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0^+$$

donc

- ▷ $y = 0$ est asymptote horizontale à $-\infty$ et à $+\infty$,
- ▷ $y = 1$ et $y = 4$ sont asymptotes verticales.

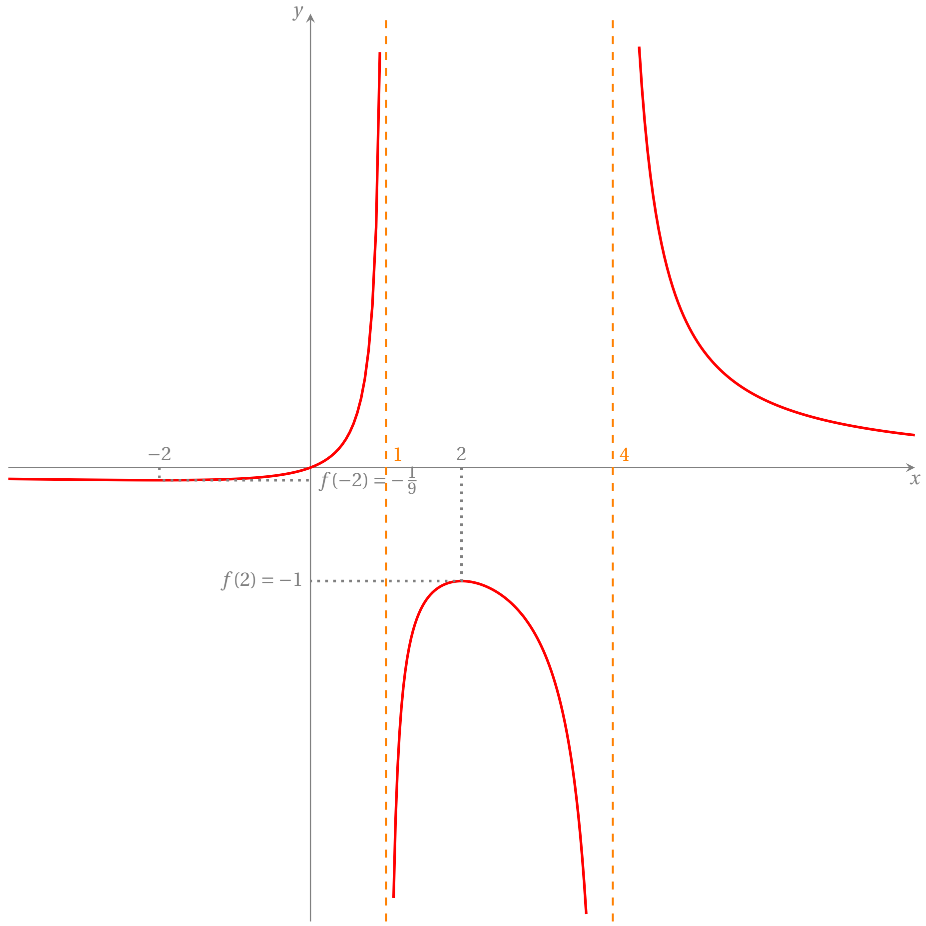
3. Dérivée première :

$$f'(x) = \frac{(x)'(x^2-5x+4) - x(x^2-5x+4)'}{(x^2-5x+4)^2} = \frac{(x^2-5x+4) - x(2x-5)}{(x^2-5x+4)^2} = \frac{-x^2+4}{(x^2-5x+4)^2}.$$

Comme $(x^2-5x+4)^2 > 0$ pour tout $x \in A$, le signe de f' coïncide avec le signe de $-x^2+4$ et on a

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\iff x = \pm 2, \\ f'(x) < 0 &\iff x \in \left]-\infty; -2\right[\cup \left]2; 4\right[\cup \left]4; +\infty\right[, \\ f'(x) > 0 &\iff x \in \left]-2; 1\right[\cup \left]1; 2\right[. \end{aligned}$$

Ainsi, le graphe de f est le suivant :



Exercice 2. Calculer les limites suivantes en utilisant la méthode que l'on préfère :

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 \ln(1+2x)}{2\sin(x)(\cos(3x)-1)}$,
2. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-4x+3}{4x-12}$.

Solution.

1. En se rappelant que $\frac{\ln(1+x)}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$, $\frac{\sin(x)}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$ et $\frac{1-\cos(x)}{x^2} \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{1}{2}$ on conclut que
$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \ln(1+2x)}{2\sin(x)(\cos(3x)-1)} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln(1+2x)}{2x} \times \frac{x}{\sin(x)} \times \frac{(3x)^2}{\cos(3x)-1} \times \frac{1}{9}\right) = 1\times 1\times(-2)\times\frac{1}{9} = -\frac{2}{9};$$
2. Comme $\dfrac{x^2-4x+3}{4x-12} = \dfrac{(x-1)(x-3)}{4(x-3)} = \dfrac{x-1}{4}$ alors $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-4x+3}{4x-12} = \dfrac{3-1}{4} = \dfrac{1}{2}$.

Exercice 3. Développer dans le voisinage de zéro les fonctions suivantes

1. $h(x) = \sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}$ à l'ordre 3
2. $\ell(x) = \ln(1+3x)$ à l'ordre 3

Solution. Comme
$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + o(x^3),$$
$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3),$$
alors
$$\sqrt{1-x} = 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16} + o(x^3),$$
donc

1. $h(x) = \sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} = \left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + o(x^3)\right) - \left(1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16} + o(x^3)\right) = x + \frac{x^3}{8} + o(x^3)$;
2. $\ell(x) = \ln(1+3x) = (3x) - \frac{(3x)^2}{2}\,\frac{(3x)^3}{3} + o(x^3) = 3x - \frac{9x^2}{2} + 9x^3 + o(x^3)$.