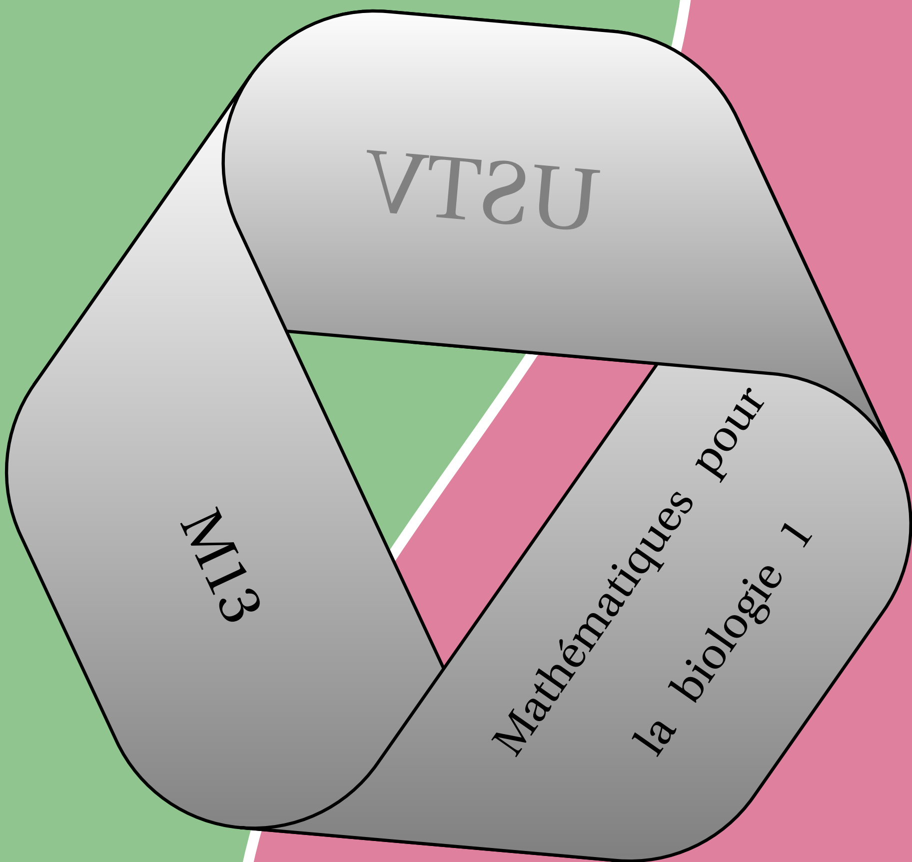
L1BIO

2010/2011

Fiches de TD.



G. Faccanoni
A. Mantile
A. Novotny

Gloria FACCANONI

IMATH Bâtiment U-318
Université du Sud Toulon-Var
Avenue de l'université
83957 LA GARDE - FRANCE

☎ 0033 (0)4 94 14 23 81

✉ gloria.faccanoni@univ-tln.fr
http://faccanoni.univ-tln.fr

Table des matières

Exercices

TD1 - semaine 39

Exercice 1. Pour chaque élément de $\mathbb{C}$ ci-dessous, indiquer s'il appartient à $\mathbb{N}$, à $\mathbb{Z}\setminus\mathbb{N}$, à $\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$, à $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ ou à $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$:

i) i

ii) -5

iii) $\sqrt{2}$

iv) $\sqrt{4}$

v) $-\frac{110}{11}$

vi) 2

vii) $\sqrt{-1}$

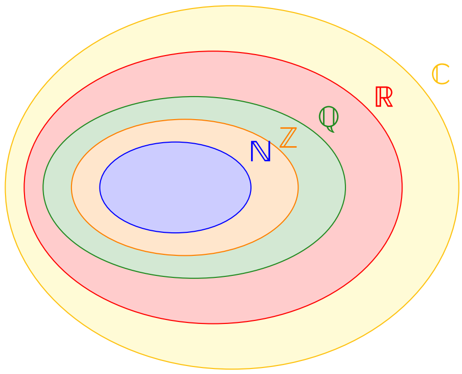
viii) 0

ix) $3+2i$

x) π

xi) $\frac{3}{2}$

xii) i^2



Exercice 2. Démontrer que

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}=1.$$

Exercice 3. Étudier, pour $m, n\in\mathbb{N}^*$, la limite

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^m}-\sqrt{1-x^m}}{x^n}.$$

Exercice 4. Démontrer que

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}=\frac{1}{2}.$$

Exercice 5. Étudier les limites quand x tend vers $+\infty$ des fonctions suivantes

$$f(x):=\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}\qquad\text{et}\qquad g(x):=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}.$$

Exercice 6. Calculer lorsqu'elle existent les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^2+2|x|}{x}$,
2. $\displaystyle\lim_{x\to -\infty}\frac{x^2+2|x|}{x}$,
3. $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-3x+2}$,
4. $\displaystyle\lim_{x\to \pi}\frac{\sin^2(x)}{1+\cos(x)}$,
5. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{x}$,
6. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\sqrt{5+x}-\sqrt{x-3}$,
7. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}$,
8. $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^n-1}$,
9. $\displaystyle\lim_{x\to 0}x\sin\left(\tfrac{1}{x}\right)$,
10. $\displaystyle\lim_{x\to 0}|x|\sin\left(\tfrac{1}{x}\right)$,
11. $\displaystyle\lim_{x\to 0}e^{-x}\cos(x)$,
12. $\displaystyle\lim_{x\to 0}(x-1)\cos\left(\tfrac{1}{x-1}\right)$,
13. $\displaystyle\lim_{x\to 0}e^{\sin(x)-x}$.

Exercice 7 (Limites fondamentaux)**.** En se rappelant que

1. $\lim_{x\to+\infty} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 1,$ (x en radiant)
2. $\lim_{x\to+\infty} x^2\left(1-\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \frac{1}{2},$ (x en radiant)
3. $\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^x = e^\alpha,$ ($\alpha \in \mathbb{R}$)
4. $\lim_{x\to+\infty} x\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right) = 1,$
5. $\lim_{x\to+\infty} x\left(a^{1/x}-1\right) = \ln a,$ ($a > 0$)
6. $\lim_{x\to+\infty} x\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^\alpha - 1\right) = \alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$)
7. $\lim_{x\to+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} 0 & \text{si } a < b, \\ \frac{p_a}{q_b} & \text{si } a = b, \\ \infty & \text{si } a > b, \end{cases}$

   avec $P(x) = p_0 + p_1 x + \cdots + p_a x^a,$
   $Q(x) = q_0 + q_1 x + \cdots + q_b x^b.$

calculer, si elles existent, les limites suivantes :

1. $\lim_{x\to+\infty} x^2\left(1-\cos\frac{2}{x}\right),$
2. $\lim_{x\to+\infty} x^2\left(1-\cos\frac{2}{\sqrt{x}}\right),$
3. $\lim_{x\to+\infty} x\left(1-\cos\frac{2}{x}\right),$
4. $\lim_{x\to+\infty} \left(x\sin\frac{2}{x}\right),$
5. $\lim_{x\to+\infty} \left(x\sin\frac{2}{\sqrt{x}}\right),$
6. $\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x}\sin\frac{2}{x}\right),$
7. $\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{2}{x}\right)^x,$
8. $\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^x,$
9. $\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{2}{x}\right)^{\sqrt{x}},$
10. $\lim_{x\to0^+} \left(\sqrt{x}\sin\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$
11. $\lim_{x\to0} \left(\frac{\sin(2x)}{\sin(3x)}\right),$
12. $\lim_{x\to0} \left(\frac{x\sin(x)}{1-\cos(x)}\right),$
13. $\lim_{x\to0} \left(\frac{\sin(x)-\sin(2x)}{x^2}\right),$
14. $\lim_{x\to0} \left(\frac{x\tan(x)}{\cos^2(x)-1}\right),$
15. $\lim_{x\to0} \left(\frac{\tan(x)-\sin(x)}{\sin^3(x)}\right).$

Exercice 8. Calculer les limites suivantes

1. $\lim_{x\to0^+} \frac{x+2}{x^2\ln(x)}$
2. $\lim_{x\to0^+} 2x\ln(x+\sqrt{x})$
3. $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3-2x^2+3}{x\ln(x)}$
4. $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\sqrt{x}+1}}{x+2}$
5. $\lim_{x\to0^+} \frac{\ln(3x+1)}{2x}$
6. $\lim_{x\to0^+} \frac{x^x-1}{\ln(x+1)}$
7. $\lim_{x\to-\infty} \frac{2}{x+1}\ln\frac{x^3+4}{1-x^2}$
8. $\lim_{x\to(-1)^+} (x^2-1)\ln(7x^3+4x^2+3)$
9. $\lim_{x\to2^+} (x-2)^2\ln(x^3-8)$
10. $\lim_{x\to0^+} \frac{x(x^x-1)}{\ln(x+1)}$
11. $\lim_{x\to+\infty} (x\ln(x) - x\ln(x+2))$
12. $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x - e^{x^2}}{x^2-x}$
13. $\lim_{x\to0^+} (1+x)^{\ln(x)}$
14. $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x+1}{x-3}\right)^x$

TD2 - semaine 40

Exercice 9. Simplifier les expressions suivantes autant que possible :

$$a)\quad \left(\frac{1}{3}\right)^x 9^{\frac{x}{2}}, \qquad b)\quad \ln(1+\cos(x))+\ln(1-\cos(x))-2\ln(\sin(x)).$$

Exercice 10 (définition des sinus et cosinus hyperboliques)**.** Sinus et cosinus hyperbolique sont définis par

$$\sinh(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \cosh(x) := \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

1. Simplifier $\cosh(\ln(x))$ autant que possible.
2. Vérifier que $\cosh^2 - \sinh^2 = 1$ puis que la dérivée de sinh est cosh et la dérivée de cosh est sinh.
3. Montrer que sinh est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et que sa fonction réciproque (notée argsinh) satisfait
$$\forall y \in \mathbb{R} \qquad \operatorname{argsinh}(y) = \ln\left(y + \sqrt{1+y^2}\right) \quad \text{et} \quad \operatorname{argsinh}'(y) = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}.$$
4. Montrer que cosh est une bijection de $[0,\infty[$ dans $[1,\infty[$ et que sa fonction réciproque (notée argcosh) satisfait
$$\forall y \in [1,\infty[\quad \operatorname{argcosh}(y) = \ln\left(y + \sqrt{y^2-1}\right) \quad \text{et} \quad \forall y \in]1,\infty[\quad \operatorname{argcosh}'(y) = \frac{1}{\sqrt{y^2-1}}.$$

Exercice 11. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inégalités suivantes (pour chaque inégalité, la réponse est indiqué à droite) :

1. $\dfrac{1}{x+2} - \dfrac{1}{x-2} < 1 + \dfrac{1}{4-x^2}$ .... $]-\infty,-2[\cup]-1,1[\cup]+2,+\infty[$
2. $x|x| < 1$ .... $]-\infty,1[$
3. $x^2 - 4|x| - 5 > 0$ .... $]-\infty,-5[\cup]5,+\infty[$
4. $|4-x^2| - |3-x| > x$ $]-\infty,-\sqrt{7}[\cup]-1,1[\cup]+\sqrt{7},+\infty[$
5. $|x+2| < 1 + |x-1|$ .... $]-\infty,0[$
6. $\sqrt{2x+1} > x$ .... $[-{}^1/_2, 1+\sqrt{2}[$
7. $\sqrt{x+2} < x$ .... $]2,+\infty[$
8. $\sqrt{x^2-5x+4} < x-1$ .... $[4,+\infty[$
9. $\sqrt{\dfrac{x^2+8|x|-9}{x^2-1}} \geq x-3$ ..... $]-\infty,{}^{5+\sqrt{17}}/_2]\setminus\{-1,1\}$
10. $\sqrt{4x^2+3x-1} \geq 2x-3$ ..... $]-\infty,-1]\cup[{}^1/_4,+\infty[$
11. $\dfrac{\sqrt{1-9x^2}+2x}{3x-2} > 0$ .... $[-{}^1/_3, -{}^1/_{\sqrt{13}}[$
12. $\sqrt{x+1} + \sqrt{x-2} \geq 3$ .... $[3,+\infty[$
13. $\dfrac{\sqrt{2x-5}}{3} \leq \dfrac{3}{\sqrt{2x-5}}$ .... $]{}^5/_2, 7]$
14. $\sqrt{4+|1-x^2|} < x + \sqrt{5}$ .... $]0,+\infty[$
15. $\dfrac{\sqrt{x}+1}{3-x-\sqrt{x}} < 0$ .... $]{}^{7-\sqrt{13}}/_2, +\infty[$
16. $\sqrt{\dfrac{x^2-1}{x+2}} < \sqrt{x}$ .... $[1,+\infty[$
17. $\sin x > \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ .... $]{}^\pi/_3 + 2k\pi, {}^{2\pi}/_3 + 2k\pi[\ k\in\mathbb{Z}$
18. $\dfrac{1-2\sin x}{1-2\cos x} \leq 0$ .... $]-{}^\pi/_3+2k\pi, {}^\pi/_6+2k\pi]\cap]{}^\pi/_3+2k\pi, {}^{5\pi}/_6+2k\pi]\ k\in\mathbb{Z}$
19. $\dfrac{\sin x}{\sqrt{2\sin x - 1}} \geq 1$ .... $]{}^\pi/_6+2k\pi, {}^{5\pi}/_6+2k\pi[\ k\in\mathbb{Z}$

20. $\dfrac{\tan^2 x - \sqrt{3}\tan x}{\tan^2 x - 1} < 1$ .... $]-\pi/4+k\pi,\pi/6+k\pi[\cup]\pi/4+k\pi,\pi/2+k\pi[\ k\in\mathbb{Z}$
21. $\dfrac{e^{2x} - e^x}{2e^{2x} - 5e^x + 2} > -1$ .... $]-\infty,\ln(1-\sqrt{3}/3)[\cup]-\ln 2,\ln(1+\sqrt{3}/3)[\cup(\ln 2,+\infty)$
22. $\dfrac{\ln(x-2)}{\sqrt{1-\ln(x-2)}} < 2$ .... $\left]2,e^{2(\sqrt{2}-1)}+2\right[$
23. $\dfrac{(2/3)^{x-1} - 1}{\sqrt{2} - \sqrt[3]{2^{x-1}}} < 0$ .... $]1,5/2[$
24. $\dfrac{e^x + e^{\sqrt{x}} + 2}{e^{2x} - e} \geq 0$ .... $]1/2,+\infty[$
25. $(1/3[^{\sqrt{x^2-x-2}} <]1/3)^{x+1}$ .... $]-\infty,-1[$
26. $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x^2-1} > 9$ .... $\emptyset$
27. $3^{x+2} \leq 3^{\sqrt{x^2+x-2}}$ .... $]-\infty,-2]$
28. $x - 1 < \sqrt{x+4}$ .... $[-4,3+\sqrt{21}/2[$
29. $\log_5(x-7) > 2$ .... $]32;+\infty[)$
30. $\log_{2/3}(x^2-1) > 2$ .... $]-\sqrt{13}/3,-1[\cup]1,\sqrt{13}/3[$
31. $\log_{1/2}\sqrt{x} < \log_{1/2}|x-1|$ ..... $]3-\sqrt{5}/2,3+\sqrt{5}/2[\backslash\{1\}$
32. $3^{2-x} + 2\cdot 3^x < 19$ .... $]-\ln 2/\ln 3,2[$
33. $(2^{\sqrt{x}} - 2^x)(\ln^2 x - 4) \leq 0$ ...... $]0,e^{-2}] \cup [1,e^2]$
34. $\log_2 \dfrac{x+\sqrt{x^2+9}}{2x} > 1$ .... $]0,3/2\sqrt{2}[$
35. $\log_{1/4}\sqrt{6+x-x^2} < \log_{1/4}(x-1)$ .... $]1,5/2[$
36. $\ln x - \dfrac{2}{\ln x} + 1 \geq 0$ .... $[1/e^2,1[\cup[e,+\infty[$
37. $\log_{1/2}(7^{2x} - 7^x + 1) > 0$ .... $]-\infty,0[$
38. $\log_2 \dfrac{|x|-1}{2-|x+3|} \leq 2$ .... $]-21/5,-1[\cup]-1,1[$
39. $\dfrac{1}{2}\ln x + \dfrac{1}{2}\ln(1-x) < \ln 2 + \dfrac{1}{2}\ln 5$ ...... $]1,5[$

Exercice 12. Donner le domaine de définition des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto x^5 - 3x^2 + 2x - 7$
2. $x \mapsto \frac{1}{x^2-5x+6}$
3. $x \mapsto \sqrt{x^2-3x-4}$
4. $x \mapsto \frac{x}{1-\sqrt{1-x}}$
5. $x \mapsto \ln(1-x)$
6. $x \mapsto \ln(1-x^2)$
7. $x \mapsto |\ln(x)|$
8. $x \mapsto \frac{1}{e^x-1}$
9. $x \mapsto \tan(2x)$
10. $x \mapsto \frac{1}{\sin(2x)}$
11. $x \mapsto \frac{1}{x\cos(x)}$
12. $x \mapsto \ln \frac{e^x-1}{(x-1)(x+2)}$
13. $x \mapsto \left]\frac{x^2-2x}{x^2+4x+3}\right[^{\alpha}$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercice 13. Donner le domaine de définition de f et calculer l'inverse de f sur chaque intervalle où elle est monotone :

$$1)\ f(x) = \frac{x+1}{x-1}, \qquad 2)\ f(x) = \frac{2x+3}{3x+2}, \qquad 3)\ f(x) = \frac{x^2+1}{x+1}.$$

TD3 - semaine 41

Exercice 14 (discontinuité de première espèce)**.** Soient f et g deux applicationq de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ satisfaisant

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \qquad f(x) := \frac{x}{|x|} \quad \text{et} \quad g(x) := x f(x).$$

Montrer que f n'est pas prolongeable par continuité en 0 et que g est prolongeable par continuité en 0.

Exercice 15 (discontinuité de seconde espèce)**.** Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ satisfaisant

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \qquad f(x) := \sin \frac{1}{x}.$$

Montrer que f n'est pas prolongeable par continuité en 0.

Exercice 16 (fonction prolongeable par continuité)**.** Soit f l'application de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \qquad f(x) := x \sin \frac{1}{x}.$$

Montrer que f est prolongeable par continuité en 0.

Exercice 17. Étudier la continuité en 0 des fonctions f et g suivantes

$$f(x) := \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 1 & \text{si } x = 0, \end{cases} \qquad g(x) := \begin{cases} x \sin(x) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Exercice 18. Soit f l'application définie par

$$\begin{aligned} f \colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = \begin{cases} \frac{x \ln|x|}{x-1} & \text{si } x \notin \{0, 1\}, \\ 1 & \text{si } x = 1, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Est-elle continue ?

Exercice 19.

1. Soit f l'application définie par

$$\begin{aligned} f \colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

   Établir si f est continue.

2. Soit f l'application définie par

$$\begin{aligned} f \colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

   Établir si f est continue.

3. Soit f l'application définie par

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x) = \begin{cases} -x \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

   Établir si f est continue.

4. Soit f l'application définie par

$$f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x) = \frac{x}{1 + e^{1/x}}.$$

   4.1. Montrer que f est continue.

   4.2. f est-elle prolongeable par continuité en 0 ?

   4.3. Calculer $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

5. Soit f l'application définie par

$$f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x) = x - 1 - \ln|x|.$$

   5.1. Établir si f est continue.

   5.2. Calculer les limites de f en 0, en $-\infty$ et en $+\infty$.

Exercice 20 (application du théorème des valeurs intermédiaires)**.**

▷ Montrer qu'il existe $x \in]0,1[$ tel que $x^{17} + x - 1 = 0$.

▷ En utilisant le théorème des valeurs intermédiaires, déduire le nombre de solutions de l'équation $x^2 - 16 = 0$ sur l'intervalle $]-\infty, 0[$ sans résoudre l'équation.

▷ Combien de solutions a-t-elle l'équation $x^2 - e = 0$ dans $]-\infty, 0]$.

▷ Combien de solutions a-t-elle l'équation $x^3 - \sqrt{\pi} = 0$ dans $]0, +\infty, 0[$.

▷ Soit f une application de $[0,1]$ dans $[0,1]$. Montrer que si f est continue en tout point de $[0,1]$ alors il existe $x_0 \in [0,1]$ tel que $f(x_0) = x_0$, autrement dit f a un point fixe.

▷ Montrer qu'il existe $x \in]0,1[$ tel que $x^7 + x^3 - 1 = 0$, puis qu'il est unique. Déterminer x par dichotomie avec une précision de $1/8$.

▷ Montrer qu'il existe un unique réel α appartenant à $]-0{,}3, -0{,}2[$ tel que $g(\alpha) = 0$.

▷ En utilisant le théorème des valeurs intermédiaires, déduire le nombre de solutions de l'équation $x^2 - \sqrt{2} = 0$ sur l'intervalle $]-\infty, 0[$ sans résoudre l'équation.

▷ En utilisant le théorème des valeurs intermédiaires, déduire le nombre de solutions de l'équation $x^2 - 16 = 0$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$ sans résoudre l'équation.

Exercice 21. Montrer que toute fonction polynomiale de degré impair possède au moins un zéro réel.

TD4 - semaine 42

Exercice 22. Calculer les dérivées des fonctions suivantes, en précisant leur domaine de définition

1. $\sin(x^2)$
2. $\log(x^2+x+1)$
3. $\log(|\log x|)$
4. $\log(|\log(|x|)|)$
5. $\dfrac{1}{1+\tan x}$
6. $\sqrt{\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+1}}$
7. $\log\dfrac{|x-2|}{|x+1|}$
8. $\arcsin(\sin^3 x)$

Exercice 23. Utilisez la règle de l'Hôpital pour trouver les valeurs des limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin(x)}-\frac{1}{\tan(x)}\right)$
2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{1-\sqrt{1-x}}$
3. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin(x)}-\frac{1}{x}\right)$
4. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{\cos(ax)}{x^2}\right)$
5. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(x)-x+\frac{x^3}{6}}{x^5}$

Exercice 24. Soit $f(x) := \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\ln(x)}$. Quel est son domaine de définition ? Est-elle prolongeable par continuité en 0 ?

Exercice 25. Les fonctions suivantes admettent-elles des dérivées en 0 ?

1. $|x|$
2. $|x|^n$ avec $n\geq 2$
3. $|x|^{1/2}$
4. $x\log|x|$
5. $f(x)=x^2\cos\frac{1}{x}$ si $x\neq 0$ et $f(0)=0$
6. $f(x)=x^2\sin\frac{1}{x}$ si $x\neq 0$ et $f(0)=1$

Exercice 26. Étudier l'existence d'une dérivée à droite et à gauche au point considéré :

1. $|x^2-1|$ en 1
2. $\min(2-x, x^2)$ en 1
3. $\sqrt{(x-1)(\sin\frac{\pi x}{4}-\cos\frac{\pi x}{4})}$ en 1
4. $\exp[-1/x^2]$ en 0
5. $\exp[-\log^2(|x|)]$ en 0.

Exercice 27. Étudier la continuité et la dérivabilité des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ci-dessous puis la continuité des fonctions dérivées.

1. $f(x) := |x|$,
2. $g(x) := |x^2-1|$,
3. $h(x) := \frac{x}{1+|x|}$,
4. $j(x) := x\sin(x)\sin(\frac{1}{x})$ si $x\neq 0$ et $j(0) := 0$,
5. $k(x) := e^{-1/x^2}$ si $x\neq 0$ et $k(0) := 0$,
6. $\ell_n(x) := x^n\sin\frac{1}{x}$ si $x\neq 0$ et $\ell_n(0) := 0$, (pour $n = 1,2,3$).

Exercice 28. Soit f l'application de $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x) := \begin{cases} x^3\sin\frac{1}{x} & \text{si } x<0,\\ x^2|x-1| & \text{si } x>0.\end{cases}$$

1. Montrer que f peut-être prolongée par continuité en 0.

Dans la suite ce prolongement sera encore noté f.

2. Calculer $f'(x)$ pour $x < 0$, puis $\lim_{x\to 0^-} f'(x)$.
3. Calculer $f'(x)$ pour $x \in]0,1[$, puis $\lim_{x\to 0^+} f'(x)$.
4. Étudier la dérivabilité de f dans $\mathbb{R}$.

Exercice 29. Un automobiliste entre sur une autoroute où la vitesse est limitée à 130 Km/h. Quand il ressort, deux heures plus tard et à 305 Km de son point d'entrée, des gendarmes lui dressent un PV pour excès de vitesse, bien que sa vitesse n'ait été jamais matériellement contrôlée. Ont-ils raison ?

Exercice 30. Soit $f_\alpha \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application définie par

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} x^\alpha \cos \frac{1}{x}, & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Pour $\alpha = 0, 1, 2, 3$, répondre aux questions suivantes :
▷ f_α est-elle continue en $x = 0$?
▷ f_α est-elle dérivable en $x = 0$?
▷ f_α est-elle de classe $\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$?

Exercice 31. Soit $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \cos \frac{1}{x}, & \text{si } x > 0, \\ 0, & \text{si } x = 0, \\ x^3 \sin \frac{1}{x}, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

1. Établir si f est continue en $x = 0$.
2. Calculer $f'(x)$ pour $x \neq 0$. En déduire l'équation de la droite tangente à f en $x = \frac{1}{\pi}$.
3. Établir si f est dérivable en $x = 0$.
4. Établir si f est f est de classe $\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$.

Exercice 32. Appliquer le Théorème des accroissements finis pour donner une majoration de l'erreur quand on remplace $\sqrt{10001}$ par 100.

Exercice 33. Montrer que la dérivée n-ième de $f(x) = \sin x$ est donnée par $f^{(n)}(x) = \sin(x + n\pi/2)$. En déduire le développement de Taylor de f aux points $x = 0$ et $x = \pi/2$. Donner une majoration de l'erreur $|f(x) - P_3(x)|$ au voisinage de 0 (P_n désigne la partie polynomiale d'ordre n.)

Exercice 34. À l'aide de la formule de Leibnitz, calculer la dérivée d'ordre k de la fonction $f(x) = x^3(1-x)^3$. Montrer qu'elle atteint son maximum sur l'intervalle $[0,1]$ au point $x = 1/2$.

TD6 - semaine 45

Exercice 35 (développements limités usuels)**.** Montrer que

$$\ln(1+x)=\sum_{k=1}^{k=n}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k}+o\left(x^n\right)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+o\left(x^n\right)$$

$$\ln(1-x)=-\sum_{k=1}^{k=n}\frac{x^k}{k}+o\left(x^n\right)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots-\frac{x^n}{n}+o\left(x^n\right)$$

$$e^x=\sum_{k=0}^{k=n}\frac{x^k}{k!}+o\left(x^n\right)=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+o\left(x^n\right)$$

$$\sin(x)=\sum_{k=0}^{k=n}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}+o\left(x^{2n+2}\right)=x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o\left(x^{2n+2}\right)$$

$$\cos(x)=\sum_{k=0}^{k=n}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}+o\left(x^{2n+1}\right)=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o\left(x^{2n+1}\right)$$

$$\tan(x)=x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\frac{17x^7}{315}+o\left(x^8\right)$$

$$\arcsin(x)=x+\frac{x^3}{6}+\frac{3x^5}{40}+\cdots+\left|\binom{-\frac{1}{2}}{n}\right|\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+o\left(x^{2n+2}\right)$$

$$\arccos(x)=\frac{\pi}{2}-\arcsin(x)$$

$$\arctan(x)=\sum_{k=0}^{k=n}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{2k+1}+o\left(x^{2n+1}\right)=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+o\left(x^{2n+2}\right)$$

$$\sinh(x)=\sum_{k=0}^{k=n}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}+o\left(x^{2n+2}\right)=x+\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+\cdots+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o\left(x^{2n+2}\right)$$

$$\cosh(x)=\sum_{k=0}^{k=n}\frac{x^{2k}}{(2k)!}+o\left(x^{2n+1}\right)=1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+\cdots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o\left(x^{2n+1}\right)$$

$$\tanh(x)=x-\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}-\frac{17x^7}{315}+o\left(x^8\right)$$

$$(1+x)^\alpha=\sum_{k=0}^{k=n}\binom{\alpha}{k}x^k+o\left(x^n\right)=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6}x^3+\cdots+\binom{\alpha}{n}x^n+o\left(x^n\right)$$

avec les cas particuliers

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}-\frac{5x^4}{128}+o\left(x^4\right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} == 1-\frac{x}{2}+\frac{3x^2}{8}-\frac{5x^3}{16}+\frac{5x^4}{128}+o\left(x^4\right)$$
$$\sqrt{1-x} = 1-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}-\frac{x^3}{16}-\frac{5x^4}{128}+o\left(x^4\right)$$
$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{k=n}(-1)^k x^k+o\left(x^n\right) = 1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^n x^n+o\left(x^n\right)$$
$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{k=n} x^k+o\left(x^n\right) = 1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+o\left(x^n\right)$$

Exercice 36. Calculer les développements limités à l'ordre 2 au point 0 puis au point 1 des fonctions suivantes

1. $f_1(x) := x$,
2. $f_2(x) := x^4+5x^3+2x^2-1$,
3. $f_3(x) := \frac{1}{1+x}$,
4. $f_4(x) := \frac{1+x^2+x^4}{(1+x)^4}$.

Exercice 37. Soit f l'application de $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) := x^3 \sin\frac{1}{x}$. Calculer le développement limité à l'ordre 2 en 0 de f puis montrer que f n'admet pas de développement limité à l'ordre 3 en 0.

Exercice 38. Calculer les développements limités à l'ordre 3 en 0 des fonctions $\ln(\cos x)$, $\sqrt{1+x}$ et $\sqrt{1+\sin x}$.

Exercice 39. Calculer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $f(x) := \arctan\frac{x}{x+2}$ de trois façons :

1. par la formule de Taylor,
2. par composition de développements limités,
3. en commençant par calculer le développement limité de f'.

Exercice 40. Soit f l'application de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall x\in\mathbb{R}^* \qquad f(x) = \left(1+x^2\right)^{1/x}.$$

1. Calculer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $g(x) := \ln f(x)$.
2. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. *Dans la suite on notera ce prolongement f.*
3. Montrer que f est dérivable en tout point de $\mathbb{R}$.
4. Montrer que f' est continue en tout point de $\mathbb{R}$.

Exercice 41. Calculer les limites suivantes

(a) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos x}{\sin x}\right)$

(b) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\arctan x-\sin x}{\tan x-\arcsin x}\right)$

(c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\cosh\frac{1}{x^2}\right)^{x^2}$

(d) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\cos x-e^x}{\arcsin x-x^2}\right)$

(e) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x-\sin x}+\frac{1}{x-\sinh x}\right)$

(f) $\lim\limits_{x\to 0}\left(x+\sqrt{x}\right)\ln x$

(g) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}\ln\frac{\sin x}{x}\right)$

(h) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{7}{x}\right)^x$

(i) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}$

(j) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^3+x+1}-\sqrt{x^2+x}$

(k) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{e^x-1-x-\frac{x^2}{2}}$

(l) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2(\tan x-\sin x)-x^3}{x^5}$

(m) $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}$

(n) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-x\cos x}{x-\sin x}$

(o) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (\cos x)^{\frac{\pi}{2}-x}$

(p) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$

(q) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)}\right)$

(r) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x(\tanh x - x)}{\ln(1+x)}$ *(Rappel :* $\tanh(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$*.)*

Exercice 42. Calculer la partie polynomiale des développements de Taylor au point x_0 à l'ordre 2 des fonctions

(a) $f(x) = e^{\sqrt{\cos x}}$ en $x_0 = 0$

(b) $f(x) = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^3$ en $x_0 = 0$

(c) $f(x) = (1+\sqrt{1+x^2})^{-1/2}$ en $x_0 = 1$

(d) $f(x) = \log\left(\frac{\sin x}{x}\right)$ en $x_0 = 0$

Exercice 43. Déduire de la formule de Taylor-Lagrange l'estimation $x - \frac{x^3}{6} \le \sin x \le x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$, $0 \le x \le \pi/2$.

Exercice 44. Déduire de la formule de Taylor-Lagrange les estimations $x - \frac{x^2}{2} \le \log(1+x) \le x$, et $x - \frac{x^2}{2} \le \log(1+x) \le x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$, $x \ge 0$.

Exercice 45.

1. Déterminer le développement limité de la fonction $f(x) = \sin x$ en $\frac{\pi}{3}$ à l'ordre 3.
2. Déterminer le développement limité de la fonction $f(x) = e^x - 1 + \sin x - 2x - \frac{x^2}{2}$ en 0 à l'ordre 4.
3. Déterminer le développement limité de la fonction $g(x) = (1+\sin x)^{\frac{1}{x}}$ en 0 à l'ordre 2.
4. Déterminer le développement limité asymptotique en $-\infty$ et en $+\infty$ de la fonction $\ell(x) = \dfrac{x}{x-1}\sqrt{x^2+1}$ à l'ordre 1.
5. Déterminer le développement limité de la fonction $h(x) = \frac{\ln x}{(1+x)^2}$ en 1 à l'ordre 2.

Exercice 46.

a) Écrire
  - ▷ le développement limité de $\sin x$ en 0 à l'ordre 3 ;
  - ▷ le développement limité de e^{2x} en 0 à l'ordre 3.

  Puis calculer
  - ▷ le développement limité de $f(x) = \sin x \times e^{2x}$ en 0 à l'ordre 3.
  - ▷ le développement limité de $g(x) = \frac{\sin x}{e^{2x}}$ en 0 à l'ordre 3.

b) Trouver le développement limité de $\cos x$ en $\frac{\pi}{6}$ à l'ordre 3.

c) Calculer

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(2x)}{e^x - 1 - x}.$$

TD7 - semaine 46

Exercice 47 (développement limité au voisinage de l'infini)**.** Déterminer les asymptotes de la courbe d'équation

$$y = 5x + 3\sqrt{x^2 - 1}.$$

Préciser la position de la courbe par rapport à ces asymptotes.

Exercice 48 (développement limité au voisinage de l'infini)**.**

1. Calculer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $\ln\big(1 + y + y^2\big)$.
2. Calculer le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de l'infini de la fonction

$$f(x) := (2x - 1)\ln\frac{x^2}{1 + x + x^2}.$$

3. Calculer la limite de $x^2\big(f(x) + 2\big)$ quand x tend vers $+\infty$.

Exercice 49. On considère la fonction $f(x) = x + \sqrt{x^2 + x}$.

▷ Écrire le développement limité de $\sqrt{\left(1 + \frac{1}{x}\right)}$ en $\pm\infty$ à l'ordre 3.
▷ En déduire le développement asymptotique de f à l'ordre 2 en $-\infty$ et en $+\infty$.
▷ Écrire les équations des asymptotes pour f en $-\infty$ et en $+\infty$.

Exercice 50 (définition des arcsinus et arccosinus)**.**

1. Montrer que l'application f de $[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$ dans $[-1, +1]$ définie par

$$\forall x \in [-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}] \qquad f(x) := \sin x,$$

est bijective. La fonction réciproque f^{-1} est notée "arcsin". Montrer que

$$\forall y \in]-1, +1[\qquad \arcsin'(y) = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}.$$

2. Montrer que l'application g de $[0, \pi]$ dans $[-1, +1]$ définie par

$$\forall x \in [0, +\pi] \qquad g(x) := \cos x,$$

est bijective. La fonction réciproque g^{-1} est notée "arccos". Montrer que

$$\forall y \in]-1, +1[\qquad \arccos'(y) = -\frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}.$$

Exercice 51.

1. Étudier les fonctions

$$f(x) = \arcsin(2x), \qquad g(x) = \arccos(x/2), \qquad h(x) = \arccos(x+2).$$

   Puis calculer leur inverse sur des intervalles convenables.
2. Calculer l'inverse de $f(x) = \sin(x^2)$ sur chacun des intervalles $\left[-\sqrt{\frac{\pi}{2}}, 0\right]$ et $\left[0, \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right]$.

Exercice 52 (définition de l'arctangente)**.** Montrer que la fonction f de $]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[\qquad f(x) := \frac{\sin x}{\cos x}$$

est bijective. La fonction réciproque f^{-1} est notée “arctan”. Montrer que

$$\forall y \in \mathbb{R} \qquad \arctan'(y) := \frac{1}{1+y^2}.$$

Exercice 53. Étudier la fonction $f(x) = x \log x$ sur $\mathbb{R}^+$. Déterminer ses limites aux bornes du domaine de définition. Montrer (sans chercher à le calculer) que f admet une inverse f^{-1} sur les intervalles $I_1 = [0, 1/e]$ et $I_2 = [1/e, +\infty[$. Calculer les limites de f^{-1} aux bornes de son domaine de définition.

Exercice 54 (application du théorème des accroissements finis)**.** Soit I un intervalle ouvert non vide et f une application de I dans $\mathbb{R}$. On suppose que f est dérivable en tout point de I.

1. Montrer que
$$\forall x \in I \quad f'(x) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists c \in \mathbb{R} \quad \forall x \in I \quad f(x) = c.$$
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ on a
$$\arctan(x) + \arctan\frac{1}{x} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0, \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0. \end{cases}$$
3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ on a
$$\arctan\frac{1+x}{1-x} - \arctan(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{4} & \text{si } x > 1, \\ -\frac{3\pi}{4} & \text{si } x < 1. \end{cases}$$
4. Montrer que pour tout $x \in [-1, +1]$ on a
$$\arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}.$$

TD8 - semaine 47

Exercice 55. Donner le développement limité en 0 des fonctions :

1. $x \mapsto \log(\cos(x))$ à l'ordre 4,
2. $x \mapsto \tan(x)$ à l'ordre 3,
3. $x \mapsto \sin(\tan(x))$ à l'ordre 3,
4. $x \mapsto (\log(1+x))^2$ à l'ordre 2,
5. $x \mapsto \exp(\sin(x))$ à l'ordre 3,
6. $x \mapsto \sin^6(x)$ à l'ordre 9.

Exercice 56. Calculer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arctan x - \sin x}{\tan x - \arcsin x}$. *On pourra tout développer à l'ordre* 3.

Exercice 57. Faire un développement limité ou asymptotique en a à l'ordre n de :

1. $\log(\cos(x))$, $n = 6$, $a = 0$.
2. $\dfrac{\arctan(x) - x}{\sin(x) - x}$, $n = 2$, $a = 0$.
3. $\log\left(\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right)$, $n = 3$, $a = 0$.
4. $\log(\sin x)$, $n = 3$, $a = \frac{\pi}{4}$.
5. $\sqrt[3]{x^3 + x} - \sqrt[3]{x^3 - x}$, $n = 4$, $a = +\infty$.
6. $(1+x)^{\frac{1}{x}}$, $n = 3$, $a = 0$.
7. $x(\sqrt{x^2 + \sqrt{x^4 + 1}} - x\sqrt{2})$, $n = 2$, $a = +\infty$.

Exercice 58.

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = 0$ si $x \leq 0$ et $f(x) = e^{\frac{-1}{x}}$ sinon. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le développement limité de f en 0. Quelles conclusions en tirer ?
2. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(0) = 0$ et, si $x \neq 0$, $g(x) = x^3 \sin \frac{1}{x}$. Montrer que g a un développement limité d'ordre 2 en 0 mais n'a pas de dérivée seconde (en 0).

Exercice 59. Étudier les variations et donner une représentation graphique de la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = x + \ln(x^2 - 1) \end{aligned}$$

en répondant aux questions suivantes :

1. domaine de définition
2. comportement aux extrémités du domaine de définition
3. extrema locaux, sens de variation et tableaux des variations
4. convexité, concavité
5. comportement en $\pm\infty$ (recherche d'asymptotes)
6. graphe

Exercice 60. Étudier les variations et donner une représentation graphique de la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = 2x + \sqrt{x^2 - 1} \end{aligned}$$

en répondant aux questions suivantes :

1. domaine de définition et régularité
2. comportement aux extrémités du domaine de définition
3. extrema locaux, sens de variation et tableaux des variations
4. convexité, concavité
5. comportement en $\pm\infty$ (recherche d'asymptotes)
6. graphe

Exercice 61. Étudier les variations et donner une représentation graphique de la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = \frac{\ln^2 x}{x^2} \end{aligned}$$

en répondant aux questions suivantes :

1. domaine de définition et régularité
2. comportement aux extrémités du domaine de définition
3. extrema locaux, sens de variation et tableaux des variations
4. convexité, concavité
5. comportement en $+\infty$ (recherche d'asymptotes)
6. graphe

Exercice 62. Soit $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = xe^{-x}$ si $x > 0$ et $f(x) = xe^{x}$ si $x < 0$.

1. Montrer que f admet un prolongement par continuité en 0. On continuera de noter f ce prolongement.
2. Montrer que f est dérivable en 0.
3. Montrer que f est continument dérivable sur $\mathbb{R}$, ce que l'on note par $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$.
4. Montrer que f admet une dérivée seconde en 0 et que $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R})$.
5. Tracer le graphe de f.

Exercice 63. Soit $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$

1. Déterminer $\mathscr{D}_f$. f est elle dérivable sur $\mathscr{D}_f$? Admet-elle une demi-tangente en -1 ?
2. Montrer que f admet un prolongement par continuité en 0 et étudier l'existence d'une dérivée de ce prolongement en ce point, noté $\widetilde{f}$.
3. Dresser le tableau de variation de $\widetilde{f}$, montrer que $\widetilde{f}$ est bijective sur $\mathscr{D}_{\widetilde{f}}$ et déterminer explicitement $\widetilde{f}^{-1}$

TD9 - semaine 48

Exercice 64. Étudier les variations et donner une représentation graphique de la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = \ln(x - x^5) \end{aligned}$$

en répondant aux questions suivantes :

1. domaine de définition
2. comportement aux extrémités du domaine de définition
3. extrema locaux, sens de variation et tableaux des variations
4. comportement en $-\infty$ (recherche d'asymptotes)
5. graphe

Exercice 65. Étudier les variations et donner une représentation graphique de la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = \frac{x^2}{\ln(x^2) - 1} \end{aligned}$$

en répondant aux questions suivantes :

1. domaine de définition
2. comportement aux extrémités du domaine de définition
3. extrema locaux, sens de variation et tableaux des variations
4. comportement en $\pm\infty$ (recherche d'asymptotes)
5. graphe

Exercice 66. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \ln|x|, & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue en 0.
2. Calculer $f'(x)$ pour $x \neq 0$, puis $f'(0)$.
3. Étudier la continuité de f' en 0.
4. Établir si $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$.
5. Calculer les limites de f aux extrémités du domaine de définition.
6. Trouver les extrema locaux, sens de variation et tableau des variations.
7. Étudier le comportement de f en $\pm\infty$ (recherche d'asymptotes).
8. Dresser le graphe de f.

Exercice 67. Soit g la fonction définie par $g(x) = \frac{x+1}{1+x^2} + \arctan x$.

1. Quel est le domaine de définition de g ?
2. Étudier ses variations.
3. Montrer que g s'annule une et une seule fois sur $\mathbb{R}$ en un point α compris entre -1 et 0 (on ne demande pas de préciser la valeur de α).
4. Dessiner le graphe de g.

Exercice 68. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+1)\arctan x$.

1. Calculer la dérivée de f et établir son tableau de variation.
2. Le graphe de f a-t-il des points d'inflexion ? Si oui, donner les coordonnées de ce (ou ces) point(s).
3. Donner l'équation de la tangente au point d'abscisse $x = 0$ au graphe de f et la position de ce graphe par rapport à cette tangente (au voisinage de ce point).

Résumé de cours

Équations et inégalités dans $\mathbb{R}$

Équations et inégalités rationnelles

Propriétés des puissances

① $a^b \cdot a^c = a^{b+c}$

② $a^b : a^c = a^{b-c}$

③ $\left(a^b\right)^c = a^{b\cdot c}$

④ $(a\cdot b)^c = a^c \cdot b^c$

⑤ $(a:b)^c = a^c : b^c$

⑥ $(a)^c = \left(\dfrac{1}{a}\right)^{-c}$

⑦ $\sqrt[c]{a} = a^{1/c}$

Produits à apprendre par cœur

① $(A\pm B)^2 = A^2 \pm 2AB + B^2$

② $(A\pm B)^3 = A^3 \pm 3A^2B + 3AB^2 \pm B^3$

③ $(A\pm B+C)^2 = A^2+B^2+C^2 \pm 2AB + 2AC \pm 2BC$

④ $(A-B-C)^2 = A^2+B^2+C^2 - 2AB - 2AC + 2BC$

⑤ $(A^2-B^2) = (A-B)\cdot(A+B)$

⑥ $(A^3-B^3) = (A-B)\cdot(A^2+AB+B^2)$

⑦ $(A^3+B^3) = (A+B)\cdot(A^2-AB+B^2)$

En générale on a que

▷ le binôme $x^n + a^n$

- ▹ avec n impaire n'est divisible que par $x+a$ et on a

$$x^n + a^n \;=\; (x+a)\;\cdot\;(x^{n-1}\;-\;ax^{n-2}\;+\;\cdots\;-\;a^{n-2}x\;+\;a^{n-1}),$$

- ▹ avec n paire il n'est pas factorisable dans $\mathbb{R}$;

▷ $x^n - a^n$

- ▹ avec n impaire n'est divisible que par $x-a$ et on a

$$x^n - a^n \;=\; (x-a)\;\cdot\;(x^{n-1}\;+\;ax^{n-2}\;+\;\cdots\;+\;a^{n-2}x\;+\;a^{n-1}),$$

- ▷ avec n paire il est divisible par $x-a$ et par $x+a$. Pour le factoriser, il convient de considérer le binôme comme la différence de deux carrées :

$$x^n - a^n = \left(x^{n/2} + a^{n/2}\right) \cdot \left(x^{n/2} - a^{n/2}\right).$$

On vérifie ensuite si les deux binômes ainsi obtenus sont encore factorisables sur ℝ.

Équations et inégalités de degré 1

	Solutions de l'équation $ax = b$	Solutions de l'inégalité $ax > b$	Solutions de l'inégalité $ax < b$
Si $a > 0$	$x = {}^b/_a$	$x > {}^b/_a$	$x < {}^b/_a$
Si $a < 0$	$x = {}^b/_a$	$x < {}^b/_a$	$x > {}^b/_a$

Équations et inégalités de degré 2

On ne considère ici que le cas $a > 0$ auquel on peut toujours se reconduire.

Soit $\Delta := b^2 - 4ac$ $(a > 0)$	Solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$	Solutions de l'inégalité $ax^2 + bx + c > 0$	Solutions de l'inégalité $ax^2 + bx + c < 0$
Si $\Delta > 0$	$x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ $(x_1 < x_2)$	$x < x_1 \ \vee \ x > x_2$	$x_1 < x < x_2$
Si $\Delta = 0$	$x_1 = x_2 = -\dfrac{b}{2a}$	$x \neq -\dfrac{b}{2a}$	$\nexists$ solution
Si $\Delta < 0$	$\nexists$ solution réelle	$\forall x \in \mathbb{R}$	$\nexists$ solution

Rappelons que

▷ $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

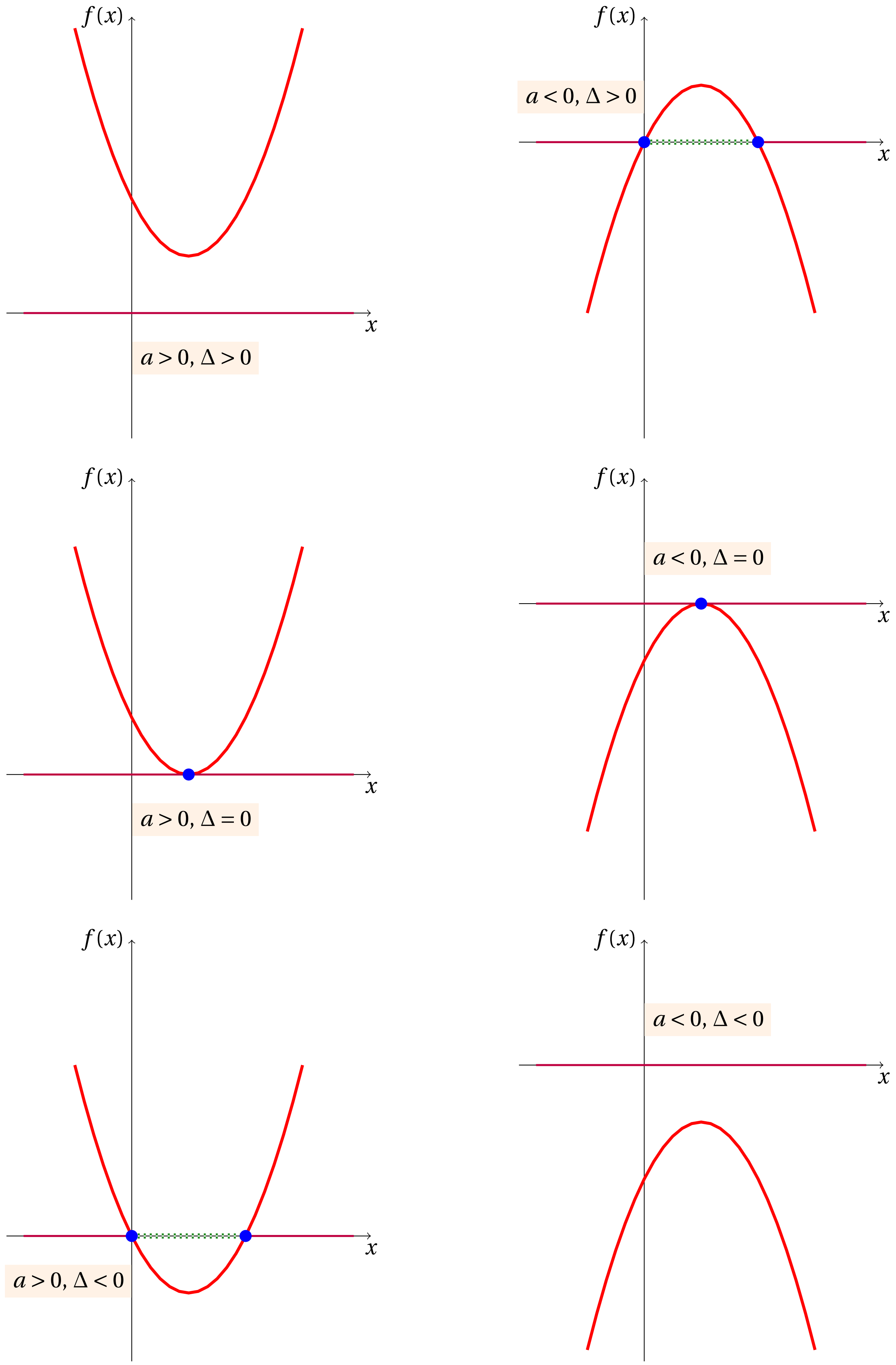
▷ $\begin{cases} x_1 + x_2 = -{}^b/_a \\ x_1 \cdot x_2 = {}^c/_a \end{cases}$

Le tableau ci-dessus a une interprétation géométrique : si on associe au trinôme $ax^2 + bx + c$ la parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$, on peut interpréter les solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ comme les intersections de la courbe représentative de la parabole avec l'axe des x. Ci-dessous, les figures de gauche représentent les trois possibles positions de la parabole lorsque $a > 0$: du haut vers le bas on a aucune intersection, une intersection et deux intersections (respectivement, $\Delta > 0$, $\Delta = 0$, $\Delta < 0$). À droite les trois cas lorsque $a < 0$: du haut vers le bas on a deux intersections, une intersection et aucune intersection (respectivement, $\Delta < 0$, $\Delta = 0$, $\Delta > 0$). Pour résoudre les inégalités $ax^2 + bx + c > 0$ ou $ax^2 + bx + c < 0$ il suffit d'étudier la position de la parabole $y = ax^2 + bx + c$ par rapport à l'axe des x :

▷ les cercles représentent les solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$;

▷ en bleu on a les solutions de l'inégalité $ax^2 + bx + c > 0$;

▷ en vert pointillé les solutions de l'inégalité $ax^2 + bx + c < 0$.



$f(x)$
x
$a > 0, \Delta > 0$
$f(x)$
x
$a < 0, \Delta > 0$
$f(x)$
x
$a > 0, \Delta = 0$
$f(x)$
x
$a < 0, \Delta = 0$
$f(x)$
x
$a > 0, \Delta < 0$
$f(x)$
x
$a < 0, \Delta < 0$

Équations et inégalités de degré supérieur à 2

Équations et inégalités binomiales. On ne considère ici que le cas $a > 0$ auquel on peut toujours se reconduire.

$(a > 0)$		Solutions de l'équation $ax^n + b = 0$	Solutions de l'inégalité $ax^n + b > 0$	Solutions de l'inégalité $ax^n + b < 0$
n impaire,		$x = \sqrt[n]{-\frac{b}{a}}$	$x > \sqrt[n]{-\frac{b}{a}}$	$x < \sqrt[n]{-\frac{b}{a}}$
	$b > 0$	$\nexists\, x \in \mathbb{R}$	$\forall\, x \in \mathbb{R}$	$\nexists\, x \in \mathbb{R}$
n paire,	$b = 0$	$x = 0$	$x \neq 0$	$\nexists\, x \in \mathbb{R}$
	$b < 0$	$x_{1,2} = \pm\sqrt[n]{-\frac{b}{a}}$	$x < -\sqrt[n]{-\frac{b}{a}} \ \vee\ x > \sqrt[n]{-\frac{b}{a}}$	$-\sqrt[n]{-\frac{b}{a}} < x < \sqrt[n]{-\frac{b}{a}}$

Équations et inégalités trinômes. Les équations (inégalités) trinômes ont forme normale

$$ax^{2n} + bx^n + c \gtreqless 0.$$

La stratégie résolutive consiste à poser $x^n = t$. On est ainsi reconduit à une équation (inégalité) de degré 2 en t : $at^2 + bt + c \gtreqless 0$. On obtient ainsi deux solutions t_1 et t_2 et on obtient deux équations (inégalités) binomiales $x^n \lesseqgtr t_1$ et $x^n \gtreqless t_2$.

Équations et inégalités fractionnelles

- ▷ $\frac{f(x)}{g(x)} = 0$ est satisfaite pour les x tels que $g(x) \neq 0$ et $f(x) = 0$;
- ▷ $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$ est satisfaite pour les x tels que $g(x) \neq 0$ et $f(x)$ et $g(x)$ ont le même signe ;
- ▷ $\frac{f(x)}{g(x)} < 0$ est satisfaite pour les x tels que $g(x) \neq 0$ et $f(x)$ et $g(x)$ ont signe différent.

Remarque :

- ▷ $f(x) \cdot g(x) = 0$ est satisfaite pour les x tels que $g(x) = 0$ ou $f(x) = 0$;
- ▷ $f(x) \cdot g(x) > 0$ est satisfaite pour les x tels que $f(x)$ et $g(x)$ ont le même signe ;
- ▷ $f(x) \cdot g(x) < 0$ est satisfaite pour les x tels que $f(x)$ et $g(x)$ ont signe différent.

Systèmes d'inégalités

Deux (ou plus) inégalités constituent un système d'inégalités si elles doivent être satisfaites simultanément. Résoudre un système signifie donc calculer les solutions COMMUNES à toutes les inégalités qui le composent. Bien évidemment, les solutions des inégalités étant des intervalles, il faudra "superposer" ces intervalles pour trouver un intervalle dans lequel toutes les inégalités sont satisfaites.

Valeurs absolus

Propriétés :

① $|a| = 0 \iff a = 0$

② $|a| = |-a| \quad \forall\ a \in \mathbb{R}$

③ $|a \cdot b| = |a| \cdot |b| \quad \forall\ a, b \in \mathbb{R}$

④ $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|} \quad \forall\ a, b \in \mathbb{R},\ b \neq 0$

⑤ $|a| = |b| \iff a = b \text{ o } a = -b \quad \forall\ a, b \in \mathbb{R}$

⑥ $|a| \leq b \iff -b \leq a \leq b \quad \forall\ a, b \in \mathbb{R},\ b \geq 0$

⑦ $|a| \geq b \iff a \leq -b \text{ o } a \geq b \quad \forall\ a, b \in \mathbb{R},\ b \geq 0$

⑧ $|a| \leq |b| \iff a^2 \leq b^2 \quad \forall\ a, b \in \mathbb{R}$

⑨ $\sqrt{a^2} = |a| \quad \forall\ a \in \mathbb{R}$

⑩ $\big|\,|a| - |b|\,\big| \leq |a + b| \leq |a| + |b| \quad \forall\ a, b \in \mathbb{R}$ (inégalités triangulaires)

Équations et inégalités qui contiennent des valeurs absolus

$$\big|f(x)\big| := \begin{cases} f(x) & \text{si} f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{si } f(x) < 0. \end{cases}$$

Donc

$$|f(x)| = g(x) \iff \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases} \vee \begin{cases} f(x) < 0 \\ -f(x) = g(x) \end{cases}$$

$$|f(x)| > g(x) \iff \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) > g(x) \end{cases} \vee \begin{cases} f(x) < 0 \\ -f(x) > g(x) \end{cases}$$

$$|f(x)| < g(x) \iff \begin{cases} f(x) < g(x) \\ f(x) > -g(x) \end{cases}$$

Notamment pour $k \in \mathbb{R}$:

	$k < 0$	$k = 0$	$k > 0$
$\|f(x)\| = k$	$\nexists\ x \in \mathscr{D}_f$	$f(x) = 0$	$f(x) = \pm k$
$\|f(x)\| > k$	$\forall\ x \in \mathscr{D}_f$	$f(x) \neq 0$	$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) > k \end{cases} \vee \begin{cases} f(x) < 0 \\ -f(x) > k \end{cases}$
$\|f(x)\| < k$	$\nexists\ x\ \in \mathscr{D}_f$	$\nexists\ x\ \in \mathbb{R}$	$\begin{cases} f(x) < k \\ f(x) > -k \end{cases}$

Équations et inégalités irrationnelles

	Solutions de l'équation $A(x) = \sqrt[n]{B(x)}$	Solutions de l'inégalité $A(x) > \sqrt[n]{B(x)}$	Solutions de l'inégalité $A(x) < \sqrt[n]{B(x)}$
Si n est impaire	$(A(x))^n = B(x)$	$(A(x))^n > B(x)$	$(A(x))^n < B(x)$
Si n est paire	$\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ (A(x))^n = B(x) \end{cases}$	$\begin{cases} B(x) \geq 0 \\ A(x) > 0 \\ (A(x))^n > B(x) \end{cases}$	$\begin{cases} A(x) < 0 \\ B(x) \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} A(x) \geq 0 \\ (A(x))^n < B(x) \end{cases}$

Équations et inégalités exponentielles

Équations exponentielles

Une équation est exponentielle si l'inconnue apparait en exposante.

Équation	Solution
$a^x = c$ (avec $a > 0$, $a \neq 1$)	$x = \log_a c$
$ma^{f(x)} = nb^{g(x)}$ (avec $a, b > 0$, $a \neq 1$, $b \neq 1$)	$\ln m + f(x) \ln a = \ln n + g(x) \ln b$
$f(a^x) = c$ (avec $a > 0$, $a \neq 1$)	On pose $t := a^x$

Inégalités exponentielles

Inégalité	Paramètres		Solution
$a^x > c$ (avec $a > 0$, $a \neq 1$)	$c \leq 0$		$\forall\ x \in \mathbb{R}$
	$c > 0$	$0 < a < 1$	$x < \log_a c$
		$a > 1$	$x > \log_a c$
$a^x < c$ (avec $a > 0$, $a \neq 1$)	$c \leq 0$		$\nexists\ x \in \mathbb{R}$
	$c > 0$	$0 < a < 1$	$x > \log_a c$
		$a > 1$	$x < \log_a c$

Puisque, pour $a > 0$ on peut écrire $a^x = \left(\frac{1}{a}\right)^{-x}$, on peut toujours se reconduire à des inégalités de base plus grande que 1.

	$0 < a < 1$	$a > 1$
$a^{f(x)} > a^{g(x)}$ avec $a > 0$ et $a \neq 1$	$f(x) < g(x)$	$f(x) > g(x)$
$m\,a^{f(x)} > n\,b^{g(x)}$ avec $a, b > 0$ et $a \neq 1$, $b \neq 1$	$\ln m + f(x) \ln a > \ln n + g(x) \ln b$	

Équations et inégalités logaritmiche

Propriétés des logarithmes

Soit $a > 0$, $a \neq 1$.

① Si $b_1 > 0$ et $b_2 > 0$ alors $\log_a(b_1 \cdot b_2) = \log_a b_1 + \log_a b_2$.

② Si $b_1 > 0$ et $b_2 > 0$ alors $\log_a\left(\frac{b_1}{b_2}\right) = \log_a b_1 - \log_a b_2$.

③ Si $b > 0$ alors $\log_a b^k = k \log_a b$.

④ $\log_a 1 = 0$.

⑤ $\log_a a = 1$.

⑥ $\log_a (a^c) = c$.

⑦ Si $c > 0$ alors $a^{\log_a c} = c$.

⑧ Si $b > 0$ alors $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$ avec $c > 0$ et $c \neq 1$ (Règle du changement de la base).

Notamment, on rappelle la chaîne d'égalités suivante :

$$\log_a x = -\log_a \frac{1}{x} = -\log_{\frac{1}{a}} x = \log_{\frac{1}{a}} \frac{1}{x} = \frac{1}{\log_x a}$$

Équations logarithmiques

Une équation est logarithmique si l'inconnue apparait sous le symbole de logarithme. Puisqu'on a $\log_x a = \log_x e \cdot \ln a = \frac{\ln a}{\ln x}$, on peut toujours se reconduire au cas où l'inconnue n'apparait qu'en argument du logarithme.

Équation	Solution
$\log_a f(x) = c$ (avec $a > 0$, $a \neq 1$)	$\begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) = a^c \end{cases}$
$\log_a f(x) = \log_a g(x)$ (avec $a > 0$, $a \neq 1$)	$\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases}$
$f\left(\log_a g(x)\right) = c$ (avec $a > 0$, $a \neq 1$)	Il faut $g(x) > 0$ On pose $t := \log_a g(x)$

Inégalités logarithmiques

	$0 < a < 1$	$a > 1$
$\log_a f(x) > c$	$0 < f(x) < a^c$	$f(x) > a^c$
$\log_a f(x) < c$	$f(x) > a^c$	$0 < f(x) < a^c$
$\log_a f(x) > \log_a g(x)$	$0 < f(x) < g(x)$	$f(x) > g(x) > 0$

Puisque, pour $a > 0$ et $a \neq 1$ on peut écrire $\log_a x = -\log_{1/a} x$, on peut toujours se reconduire à des inégalités de base plus grande que 1.

Logique, ensemble

Assertion. Une assertion est un énoncé dont on peut affirmer sans ambiguïté s'il est vrai ou s'il est faux.

Par exemple, "$1 < 2$" est une assertion vraie et "$4 < 3$" est une assertion fausse.

Proposition. Une proposition est un énoncé contenant des variables, qui est vrai pour certaines valeurs attribuées à ces variables, faux pour toutes les autres.

Par exemple, "$x < 2$" est une proposition, elle est vraie pour les nombres strictement inférieurs à 2, fausse pour tous les autres.

Négation. La négation d'une proposition "P", notée "non P", est vraie lorsque P est fausse, fausse lorsque P est vraie.

Par exemple, la proposition "$x < 2$" est la négation de la proposition "$x \geq 2$" .

Conjonction. La conjonction de deux propositions P, Q, notée "P et Q", est vraie, si les deux propositions sont vraies, fausse dans tous les autres cas.

Par exemple, la conjonction des propositions "$x \leq 2$" et "$x \geq 2$" est "$x = 2$".

Incompatibilité. Deux propositions P, Q sont incompatibles si la conjonction "P et Q" est toujours fausse.

Par exemple, les propositions "$x \leq 2$" et "$x \geq 5$" sont incompatibles.

Disjonction. La disjonction de deux propositions P, Q, notée "P ou Q", est vraie, si au moins une des deux propositions est vraie, fausse dans tous les autres cas (le "ou" est inclusif).

Par exemple, la disjonction "$x > 2$ ou $x < 2$" est "$x \neq 2$" .

Implication. L'implication de deux propositions P, Q, notée "$P \implies Q$", est la proposition "(non P) ou Q".

L'implication "$P \implies Q$" se lit "P implique Q" ou "P entraine Q" ou "P est une condition suffisante de Q" ou "Q est une condition nécessaire de P". Le fait que "$P \implies Q$" soit vraie signifie que pour que Q soit vraie il suffit que P soit vraie, ou encore, que pour que P soit fausse il suffit que Q soit fausse. "$P \implies Q$" équivaut à "non$Q \implies$ non$P$".

Théorème. P et Q étant deux assertions, si "$P \implies Q$" est vrai on dit que c'est un théorème (c'est-à-dire une assertion démontrée dont P est l'hypothèse et Q la conclusion).

Équivalence. L'équivalence de deux propositions P, Q, notée "$P \iff Q$", est la proposition "($P \implies Q$) et ($Q \implies P$)".

Des êtres, aussi bien physique (élève, chat, chaise…), qu'objets de notre pensée (nombre, fonction…), seront représentés par des lettres a, b, E, μ …et considérés comme bien définis si nous disposons d'un critère permettant d'affirmer que deux de ces objets (représentés par a et b) sont, ou bien identiques, ou bien distincts :

$$a = b \qquad \text{ou bien} \qquad a \neq b.$$

Ensemble, élément. Un ensemble E est constitué d'éléments. Il est bien défini si l'on possède un critère permettant d'affirmer pour tout objet a, s'il appartient à l'ensemble E ou non :

$$a \in E \qquad \text{ou bien} \qquad a \notin E.$$

On dit aussi "a est élément de E" ou bien "a n'est pas élément de E" ou encore "E contient a" ou bien "E ne contient pas a". Si un ensemble E est constitué des éléments a, b, c, on écrira : $E = \{a, b, c\}$. L'ordre dans lequel les éléments sont écrits n'importe pas, ainsi $\{a, b, c\} = \{c, a, b\}$. Un même être mathématique ne peut pas être à la fois un ensemble et un élément de cet ensemble, c'est-à-dire qu'il est interdit d'écrire $a \in a$.

Inclusion. Un ensemble F est inclus dans un ensemble E si tout élément de F appartient à E, ce que l'on note : $F \subset E$.

On dit aussi "F est une partie de E" ou encore "F est un sous-ensemble de E".

Complémentaire. Soit E un ensemble. Pour toute partie A de E, on note $C_E A := E \setminus A$ le complémentaire de A dans E.

Égalité. Un ensemble F est égal à un ensemble E si $F \subset E$ et $E \subset F$, ce que l'on note : $F = E$.

Utilisation des quantificateurs. Les quantificateurs $\exists$ et $\forall$ concernent les éléments d'un ensemble déterminé E.

Notation "Il existe x élément de E" s'écrit "$\exists x \in E$".
"Pour tout" x de E ou "Quel que soit un élément x de E" s'écrit "$\forall x \in E$".

Ordre Si l'on utilise deux fois le même quantificateur, l'ordre n'a pas d'importance ; on peut donc permuter les quantificateurs dans des écritures du type

$$\forall x \in E \quad \forall y \in F \quad p(x, y),$$
$$\exists x \in E \quad \exists y \in F \quad p(x, y).$$

Mais si les quantificateurs sont différents, leur ordre est important : dans l'écriture

$$\forall x \in E \quad \exists y \in F \quad p(x, y)$$

y dépend de x et dans l'écriture

$$\exists y \in F \quad \forall x \in E \quad p(x, y)$$

y est indépendant de x.

Négation La négation de "$\forall x \in E$, x vérifie p" est "$\exists x \in E$ tel que x ne vérifie pas p". La négation de "$\exists x \in E$, x vérifie p" est "$\forall x \in E$ tel que x ne vérifie pas p".

Soit A une partie de E.

▷ *L'énoncé "A est la partie* vide*" (on note $A = \emptyset$) et sa négation "A est* non vide*" (on note $A \neq \emptyset$) correspondent respectivement à "quel que soit x élément de E, x n'est pas un élément de A" et "il existe au moins un élément de E qui est élément de A" et s'écrivent respectivement :*
  ▷ $\forall x \in E \quad x \notin A$,

- $\exists x \in E \quad x \in A$.

- *L'énoncé "A est la partie* pleine*" (on note $A = E$) et sa négation "A n'est pas la partie* pleine*" (on note $A \neq E$) s'écrivent respectivement :*
  - $\forall x \in E \quad x \in A$,
  - $\exists x \in E \quad x \notin A$.
- *Les propositions "$x \in A$" et "$x \notin A$" sont souvent remplacées respectivement par "x vérifie la propriété p" et "x ne vérifie pas la propriété p" où p est une propriété caractéristique des éléments de A, c'est à dire un critère permettant de décider pour tout élément x de E entre les deux propositions $x \in A$, $x \notin A$.*

Opérations booléennes. Soit E un ensemble. On note $\mathscr{P}(E)$ l'ensemble des parties de E. Soient A et B deux éléments de $\mathscr{P}(E)$. Les quatre éléments $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $A \triangle B$ de $\mathscr{P}(E)$ sont définies de la façon suivante : pour tout $x \in E$,

- $x \in A \cup B \iff x \in A$ ou $x \in B$, [réunion des ensembles A et B]
- $x \in A \cap B \iff x \in A$ et $x \in B$, [intersection des ensembles A et B]
- $x \in A \setminus B \iff x \in A$ et $x \notin B$,
- $x \in A \triangle B \iff x \in A \setminus B$ ou $x \in B \setminus A$.

Réunion et intersection d'une famille de parties de E. Soit E, I deux ensembles et $\{A_i\}_{i \in I}$ une partie de $\mathscr{P}(E)$. Les deux éléments $\bigcup_{i \in I} A_i$ et $\bigcap_{i \in I} A_i$ de $\mathscr{P}(E)$ sont définies de la façon suivante : pour tout $x \in E$,

$$x \in \bigcup_{i \in I} A_i \iff \exists i \in I \quad x \in A_i, \qquad\qquad x \in \bigcap_{i \in I} A_i \iff \forall i \in I \quad x \in A_i.$$

Relation, fonction, application

Soient E et F deux ensembles.

Produit cartésien. $E \times F$ est l'ensemble des couples (x, y) où x est un élément de E et y un élément de F. L'égalité dans $E \times F$ est définie par : $(x, y) = (x', y') \iff x = x'$ et $y = y'$.

Relation binaire. Une relation binaire (ou correspondance) de E dans (ou vers) F est un triplet $\mathscr{R} = (E, F; G)$ où G une partie de $E \times F$. L'ensemble E est appelé *ensemble de départ de* $\mathscr{R}$, l'ensemble F est appelé *ensemble d'arrivée de* $\mathscr{R}$. L'ensemble G est appelé *graphe* de $\mathscr{R}$.

NOTATION. Pour tout $(x, y) \in E \times F$, on écrit "$x \mathscr{R} y$" et on dit "x est en relation avec y" ssi "$(x, y) \in G$".

Fonction. Une fonction f de E dans F est une relation de E dans F vérifiant : pour tout $x \in E$, il existe au plus un élément $y \in F$ satisfaisant $x f y$.

Domaine de définition. Le domaine de définition D_f d'une fonction f de E dans F est l'ensemble des $x \in E$ satisfaisant : il existe un et un seul $y \in F$ tel que $x f y$.

NOTATION. Pour tout $x \in D_f$, on note $f(x)$ le seul point $y \in F$ satisfaisant $x f y$. Donc pour tout $(x, y) \in D_f \times F$, $x f y \iff y = f(x)$. Si $x \in D_f$ alors $f(x)$ est appelé "l'image de x par f". Si $y \in F$ alors tout point $x \in D_f$ satisfaisant $y = f(x)$ est appelé "un antécédent de x par f".

Image directe. Soit f une fonction de E dans F et A une partie de E. L'image directe de A par f est la partie de F définie par $f(A) := \{y \in F \ : \ \exists x \in A \cap D_f \quad y = f(x)\}$.

Image réciproque. Soit f une fonction de E dans F et B une partie de F. L'image réciproque de B par f est la partie de E définie par $f^{-1}(B) := \{x \in D_f \ : \ f(x) \in B\}$.

Attention à ne pas confondre l'image réciproque de B, qui existe toujours, avec l'image de B par f^{-1}, qui n'existe que si f est une bijection. Ici on ne suppose rien sur f.

Application. Une application f de E dans F est une fonction de E dans F dont le domaine de définition est égal à E.

Injection. Une injection f de E dans F est une application de E dans F vérifiant

$$\forall (x, x') \in E \times E \quad f(x) = f(x') \implies x = x'.$$

Attention à ne pas confondre :

▷ *la définition d'une application qui s'écrit*

$$\begin{aligned} &\forall x \in E \quad \forall x' \in E \qquad x = x' \implies f(x) = f(x'), \\ &\forall x \in E \quad \forall x' \in E \qquad f(x) \neq f(x') \implies x \neq x', \end{aligned}$$

▷ *la définition d'application injective qui s'écrit*

$$\forall x \in E \quad \forall x' \in E \qquad x \neq x' \implies f(x) \neq f(x'),$$
$$\forall x \in E \quad \forall x' \in E \qquad f(x) = f(x') \implies x = x'.$$

Surjection. Une surjection f de E dans F est une application de E dans F vérifiant

$$\forall y \in F \quad \exists x \in E \quad y = f(x).$$

Bijection. Une bijection f de E dans F est une application de E dans F qui est injective et surjective.

Soient

▷ *R l'ensemble des relations*

▷ *F l'ensemble des fonctions*

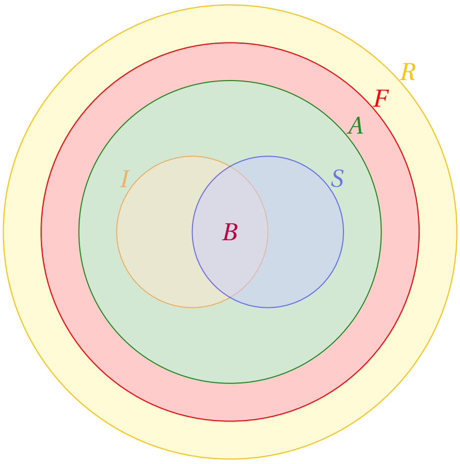
▷ *A l'ensemble des applications*

▷ *I l'ensemble des applications injectives*

▷ *S l'ensemble des applications surjectives*

▷ *B l'ensemble des applications bijectives*

Le dessin ci-contre se lit comme suit : "toute fonction est une relation mais il existe des relations qui ne sont pas des fonctions, de même toute application est une fonction mais il existe des fonctions qui ne sont pas des applications. Il existe des applications qui ne sont ni injectives ni surjectives, il existe des applications qui sont injectives mais qui ne sont pas surjectives, il existe des applications qui ne sont pas injectives mais qui sont surjectives et il existe des applications qui sont injectives et surjectives et sont appelées bijections."



Composition, réciprocité

Soit E, F, G et H quatre ensembles.

Composition. Si f est une application de E dans F et g une application de F dans G alors $g \circ f$ est l'application de E dans G définie par : $\forall x \in E \quad (g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$.

Théorème (associativité). Si f est une application de E dans F, g une application de F dans G et h une application de G dans H alors $h \circ \big(g \circ f\big) = \big(h \circ g\big) \circ f$.

Application réciproque. Soit f une application de E dans F. On dit que f admet une réciproque (ou inverse) ssi il existe une application g de F dans E telle que

$$\forall (x, y) \in E \times F \qquad y = f(x) \iff g(y) = x.$$

Si une telle application g existe, elle est unique et notée f^{-1}.

Théorème (réciprocité). Soit f une application de E dans F. Alors f admet une réciproque ssi f est bijective.

Maximum, minimum

Soit X un ensemble ordonné (par exemple $\mathbb{R}$) et soit Y une partie de X.

Majorant. Un élément $a \in X$ est appelé majorant de Y si $a \geq y$ pour tout $y \in Y$.

Minorant. Un élément $a \in X$ est appelé minorant de Y si $a \leq y$ pour tout $y \in Y$.

Ensemble majoré, minoré, borné.
▷ Si Y admet des majorants, on dit que Y est majoré.
▷ Si Y admet des minorants, on dit que Y est minoré.
▷ Si Y est majoré et minoré, on dit que Y est borné.

Supremum. $a \in X$ est appelé borne supérieure de Y si c'est le plus petit des majorants de Y. Si elle existe, elle est unique et est notée $\sup Y$.

Infimum. $a \in X$ est appelé borne inférieure de Y si c'est le plus grand des minorants de Y. Si elle existe, elle est unique et est notée $\inf Y$.

Maximum. $a \in X$ est appelé plus grand élément de Y ou élément maximale de Y ou max de Y si $a \in Y$ et a est majorant de Y.

Minimum. $a \in X$ est appelé plus petit élément de Y ou élément minimale de Y ou min de Y si $a \in Y$ et a est minorant de Y.

Nota bene : on a les implications suivantes

1. "a est le max de Y" $\implies$ "a est le sup de Y" $\implies$ "a est majorant de Y" ;
2. "a est le min de Y" $\implies$ "a est le inf de Y" $\implies$ "a est minorant de Y".

Les réciproques sont fausses.

Supremum, infimum, maximum et minimum d'une fonction. Soient E un ensemble et $f : E \mapsto \mathbb{R}$ une fonction. On appelle borne supérieure de f dans E la borne supérieure de l'image directe de E par f, c'est-à-dire $\sup f(E)$. De la même manière on définit la borne inférieure de f dans E, ainsi que le maximum et le minimum et on les note

$$\sup_E f(x) \qquad \inf_E f(x) \qquad \max_E f(x) \qquad \min_E f(x).$$

Nombres complexes

Forme algébrique

Définitions Tout nombre $z \in \mathbb{C}$ s'écrit, de manière unique, sous la forme algébrique $z = x + iy$ où $x, y \in \mathbb{R}$ et i est tel que $i^2 = -1$. Le réel x s'appelle "partie réelle de z" et se note $\Re(z)$. Le réel y s'appelle "partie imaginaire de z" et se note $\Im(Z)$. Si $y = 0$ alors $z \in \mathbb{R}$, si $x = 0$ alors z est un imaginaire pur.

Égalité Deux nombres complexes $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ sont égaux ssi $(x, y) = (x', y')$. Attention : il n'y a pas d'inégalité en $\mathbb{C}$.

Opérations Soient deux nombres complexes $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$.

$$z + z' = (x + x') + i(y + y'), \qquad zz' = (xx' - yy') + i(xy' + x'y).$$

Conjugué Le conjugué d'un nombre complexe $z = x + iy$ est le numéro complexe $\bar{z} = x + i(-y)$ et on a

$$\bar{\bar{z}} = z, \qquad \overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}', \qquad \overline{zz'} = \bar{z}\bar{z}', \qquad \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'}, \qquad z + \bar{z} = 2\Re(z), \qquad z - \bar{z} = 2\Im(z).$$

Forme trigonométrique Tout nombre complexe non nul z s'écrit sous forme trigonométrique $z = \varrho(\cos\vartheta + \sin\vartheta)$ avec $\varrho > 0$ le module de z et ϑ un argument de z.

Module Le module d'un nombre complexe $z = x + iy$ est le nombre réel positif $\sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$. On le note $|z|$ ou ϱ ou r. On a

$$|z| = 0 \iff z = 0; \qquad |\Re(z)| \le |z|; \qquad |\Im(z)| \le |z|;$$

$$|zz'| = |z|\,|z'|; \qquad |z^n| = |z|^n, \text{ pour } n \in \mathbb{N}; \qquad \left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|};$$

$$\Big||z| - |z'|\Big| \le |z - z'| \le |z| + |z'|.$$

Argument On le note $\arg(z)$ et il est défini, modulo 2π, par $\cos\vartheta = \frac{x}{\varrho}$ et $\sin\vartheta = \frac{y}{\varrho}$. On a (à $2k\pi$ près, $k \in \mathbb{Z}$)

$$\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z'); \qquad \arg(1/z) = -\arg(z);$$
$$\arg(z/z') = \arg(z) - \arg(z'); \qquad \arg(z^n) = n\arg(z), \text{ pour } n \in \mathbb{Z}.$$

Forme exponentielle Tout nombre complexe non nul z s'écrit sous forme exponentielle $z = \varrho e^{i\vartheta}$.

▷ Formule de Moivre : pour tout $\vartheta \in \mathbb{R}$ et pour tout $k \in \mathbb{Z}$

$$z^n = (\varrho(\cos\vartheta + \sin\vartheta))^n = \varrho^n(\cos(n\vartheta) + \sin(n\vartheta)) = \varrho^n e^{in\vartheta}.$$

▷ Formules d'Euler : pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $k \in \mathbb{Z}$ on a

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \qquad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i},$$
$$\cos(nx) = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2}, \qquad \sin(nx) = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}.$$

Racines n-ièmes Tout nombre complexe non nul $z = \varrho e^{i\vartheta}$ possède n racines n-ièmes

$$z_k = \sqrt[n]{\varrho} e^{i\frac{\vartheta+2k\pi}{n}} \text{ avec } k \in \{0, 1, \dots, n-1\}.$$

Pour déterminer les racines carrées de $z = x + iy$ il est plus simple de procéder par identification, c'est-à-dire de chercher les réels α et β tels que $(x + iy) = (\alpha + i\beta)^2$; on obtient

$$\alpha^2 + \beta^2 = \sqrt{x^2 + y^2},$$
$$2\alpha\beta = y.$$

L'équation $az^2 + bz + c = 0$, où $a \neq 0$, b et c appartiennent à $\mathbb{C}$, admet deux solutions dans $\mathbb{C}$ (pas nécessairement distinctes) :

$$z_1 = \frac{-b+\delta}{2a}, \qquad z_2 = \frac{-b-\delta}{2a},$$

où δ est une racine carrée de $\Delta = b^2 - 4ac$.

Fonctions polynomiales

Fonctions polynomiales. Une application P de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ est polynomiale s'il existe une famille finie $\{a_n, \dots, a_1, a_0\}$ de nombres complexes telle que pour tout $x \in \mathbb{C}$,

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n.$$

Pour faire bref, nous ferons un abus de langage en utilisant le terme "polynôme" pour "application polynomiale".

Théorème et définition (degré). Pour tout polynôme non nul P, il existe un unique entier $n \in \mathbb{N}$ et une unique famille $\{a_n, \dots, a_1, a_0\}$ de nombres complexes telle que

$$a_n \neq 0 \quad \text{et} \quad \big(\forall x \in \mathbb{C} \quad P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n\big).$$

L'entier n est, par définition, le degré de P (on le note $\mathrm{d}^o P$).

Le polynôme nul n'a pas de degré, mais par convention $\mathrm{d}^o 0 < \mathrm{d}^o g$ *pour tout polynôme non nul* g.

Théorème (division euclidienne). Soient f et g deux polynômes avec g non nul. Alors il existe un unique couple (Q, R) de polynômes vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{C} \quad f(x) = g(x)Q(x) + R(x) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{d}^o R < \mathrm{d}^o g.$$

Q s'appelle le quotient et R le reste. On dit que f est divisible par g si $R = 0$.

Racine, multiplicité. Un nombre complexe a est racine d'un polynôme P si $P(a) = 0$. L'ordre de multiplicité d'une racine a de P est le plus grand entier n tel que "$(x-a)^n$" divise P.

On montre facilement (voir exercice **??**) *que a est racine de P si et seulement si P est divisible par* $(x-a)$.

Théorème (décomposition de D'Alembert-Gauss). Soit P un polynôme de degré supérieur ou égal à 1. Alors l'ensemble des racines de P est fini et non vide. Notons $x_1, \dots, x_k$ les k racines deux à deux distinctes de P et n_i l'ordre de multiplicité de x_i. Alors il existe un unique $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{C}$,

$$P(x) = a\big(x - x_1\big)^{n_1} \dots \big(x - x_k\big)^{n_k}.$$

On a donc $n_1 + \cdots + n_k = \mathrm{d}^o P$.

Théorème (Taylor). Soit P un polynôme de degré $n \geq 1$. Pour tout $x_0 \in \mathbb{C}$ et tout $x \in \mathbb{C}$,

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(x_0) \frac{(x - x_0)^k}{k!}$$

où $P^{(k)}(x_0)$ est la dérivée d'ordre k en x_0.

Théorème. Soient P un polynôme et x_0 une racine de P. Elle est de multiplicité n si et seulement si

$$P^{(n)}(x_0) \neq 0 \qquad \text{et} \qquad P^{(k)}(x_0) = 0 \text{ pour tout } k \leq n-1.$$

Suites numériques et limites

Suites. Une suite numérique est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$. La notation traditionnelle est $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

N.B. Dans ce qui suit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désigne toujours une suite numérique.

Limite d'une suite.

On dit qu'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $x \in \mathbb{R}$ (on écrit $\lim_n x_n = x$) si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n > N \implies |x_n - x| < \varepsilon.$$

On dit qu'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers plus l'infini (on écrit $\lim_n x_n = +\infty$) si

$$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n > N \implies x_n > M.$$

On dit qu'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers moins l'infini (on écrit $\lim_n x_n = -\infty$)

$$\forall m \in \mathbb{R} \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n > N \implies x_n < m.$$

La suppression d'un nombre fini de termes ne modifie pas la nature de la suite, ni sa limite éventuelle.

Suite convergente. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. On dit que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente s'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $\lim_n x_n = x$.

Suite de Cauchy. On dit que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie le critère de Cauchy si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall (p,q) \in \mathbb{N}^2 \quad p,q > N \implies |x_q - x_p| < \varepsilon.$$

Théorème de complétude. Une suite est convergente si et seulement si elle vérifie le critère de Cauchy.

Suite bornée, suite monotone.

- ▷ Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante lorsque pour tout n, $x_n \leq x_{n+1}$.
- ▷ Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante lorsque pour tout n, $x_n \geq x_{n+1}$.
- ▷ Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée s'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout n, $x_n \leq a$. On dit que a est un majorant de la suite.
- ▷ Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée s'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout n, $x_n \geq a$. On dit que a est un minorant de la suite.
- ▷ Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite bornée si elle est à la fois majorée et minorée, c'est-à-dire s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $|x_n| \leq M$ pour tout n.

Théorème (condition suffisante). Tout suite convergente est bornée.

Une suite non bornée ne peut donc pas être convergente.

Théorème de la convergence monotone (conditions suffisantes).
▷ Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui est croissante et majorée est convergente et $\lim_n x_n = \sup_n x_n$.
▷ Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui est croissante et non majorée diverge vers $+\infty$.
▷ Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui est décroissante et minorée est convergente et $\lim_n x_n = \inf_n x_n$.
▷ Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui est décroissante et non minorée diverge vers $-\infty$.

Théorème d'encadrement (condition suffisante). Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. S'il existe deux suites convergentes $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ayant une même limite $x\in\mathbb{R}$ et satisfaisant

$$\exists N\in\mathbb{N}\quad \forall n\in\mathbb{N}\quad n>N \implies u_n\le x_n\le v_n,$$

alors $\lim_n x_n = x$.

Valeur d'adhérence. On dit que $\ell\in\mathbb{R}$ est une valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ssi il existe une sous-suite extraite qui converge vers ℓ.

Théorème Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. Si (x_n) converge vers ℓ, toute sous-suite converge aussi vers ℓ.

Si une suite extraite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge, ou si deux suites extraites de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ont des limites différentes, alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

Si deux suites extraites de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite ℓ et si x_n est un terme d'une de ces suites extraites, alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers ℓ. Par exemple, si (x_{2n}) et (x_{2n+1}) convergent vers ℓ, alors (x_n) converge vers ℓ.

Suites adjacentes Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes si
▷ (u_n) est croissante,
▷ (v_n) est décroissante,
▷ $\lim_n(u_n-v_n)=0$.

Théorème Si deux suites sont adjacentes, elles convergent et ont la même limite.

Limites fondamentaux

$$\begin{aligned}
&\lim_n n\sin\left(\tfrac{1}{n}\right)=1 && (n \text{ en radiant}) && \lim_n n^2\left(1-\cos\left(\tfrac{1}{n}\right)\right)=\tfrac{1}{2} && (n \text{ en radiant})\\
&\lim_n \left(1+\tfrac{\alpha}{n}\right)^n=e^\alpha && (\alpha\in\mathbb{R}) && \lim_n n\left(\ln\left(1+\tfrac{1}{n}\right)\right)=1 &&\\
&\lim_n n\left(a^{1/n}-1\right)=\ln a && (a>0) && \lim_n n\left(\left(1+\tfrac{1}{n}\right)^\alpha-1\right)=\alpha && (\alpha\in\mathbb{R})
\end{aligned}$$

$$\lim_n \frac{P(n)}{Q(n)}=\begin{cases}0 & \text{si } a<b,\\ \frac{p_a}{q_b} & \text{si } a=b,\\ \infty & \text{si } a>b,\end{cases}\qquad \text{avec}\qquad \begin{aligned}P(n)&=p_0+p_1n+\cdots+p_an^a,\\ Q(n)&=q_0+q_1n+\cdots+q_bn^b.\end{aligned}$$

Fonctions continues et limites

Soient f, g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$.

Limite en plus l'infini. Si $D_f \cap]\delta, +\infty[\neq \emptyset$ pour tout $\delta \in \mathbb{R}$ alors on dit que la limite de f quand x tend vers $+\infty$ est égale à $\ell \in \mathbb{R}$ (et on écrit $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$) si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta \in \mathbb{R} \quad \forall x \in D_f \quad x > \delta \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

On dit que la limite de f quand x tend vers $+\infty$ est égale à $+\infty$ (et on écrit $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$) si

$$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists \delta \in \mathbb{R} \quad \forall x \in D_f \quad x > \delta \implies f(x) > M.$$

On dit que la limite de f quand x tend vers $+\infty$ est égale à $-\infty$ (et on écrit $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$) si

$$\forall m \in \mathbb{R} \quad \exists \delta \in \mathbb{R} \quad \forall x \in D_f \quad x > \delta \implies f(x) < m.$$

Limite en moins l'infini. Les définitions sont du même type que ci-dessus. Il faut simplement remplacer $D_f \cap]\delta, +\infty[\neq \emptyset$ par $D_f \cap]-\infty, \delta[\neq \emptyset$ puis $x > \delta$ par $x < \delta$.

Limite en un point. Si $D_f \cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\neq \emptyset$ pour tout $\delta > 0$ alors on dit que la limite de f quand x tend vers x_0 est égale à $\ell \in \mathbb{R}$ (et on écrit $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$) si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D_f \quad |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

Cette limite peut exister même si f n'est pas définie en x_0. Mais si f est définie en x_0 et si $\lim_{x \to x_0} f(x)$ existe, alors $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

On dit que la limite de f quand x tend vers x_0 est égale à $+\infty$ (et on écrit $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$) si

$$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D_f \quad |x - x_0| < \delta \implies f(x) > M.$$

On dit que la limite de f quand x tend vers x_0 est égale à $-\infty$ (et on écrit $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$) si

$$\forall m \in \mathbb{R} \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D_f \quad |x - x_0| < \delta \implies f(x) < m.$$

Théorème (unicité). Si une fonction admet une limite ℓ en x_0, cette limite est unique.

Continuité en un point. On dit que f est continue en x_0 si $x_0 \in D_f$ et $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Continuité. On dit que f est continue si elle est continue dans tout point de son domaine de définition.

Prolongement par continuité. Soit f une fonction définie sur I et $x_0 \notin I$. Si $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$, la fonction $\widetilde{f}$ définie sur $I \cup \{x_0\}$ par $\widetilde{f}(x_0) = \ell$ et $\widetilde{f}(x) = f(x)$ pour $x \in I$ est la seule fonction continue en x_0 dont la restriction à I soit f. On l'appelle le prolongement par continuité de f à x_0.

NB : La fonction $f(x) = \frac{1}{x}$ est continue car $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}^*$ et f est continue en tout point de $\mathscr{D}_f$.

Théorème (fonctions composées). Si $(x_0, f(x_0)) \in D_f \times D_g$ et f est continue en x_0 et g est continue en $f(x_0)$, alors $x_0 \in D_{g \circ f}$ et $g \circ f$ est continue en x_0.

Théorème (valeurs intermédiaires).

Formulation 1 L'image d'un intervalle de $\mathbb{R}$ par une fonction continue est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Formulation 2 Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et soient $a, b \in I$ avec $f(a) \leq f(b)$. Alors f atteint toutes les valeurs intermédiaires entre $f(a)$ et $f(b)$. Autrement dit :

$$\forall d \in [f(a), f(b)], \exists c \text{ compris entre } a \text{ et } b \text{ tel que } f(c) = d.$$

Théorème de la bijection. Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, alors f induit une bijection de I dans $f(I)$. De plus, sa bijection réciproque est continue sur I, monotone sur I et de même sens de variation que f.

Théorème d'encadrement (ou des gendarmes ou sandwich). Soit f, g et h trois fonctions définies au voisinage de x_0 et vérifiant $f \leq g \leq h$ au voisinage de x_0. Si f et h ont la même limite ℓ (finie ou infinie) en x_0 alors g a pour limite ℓ en x_0.

Comparaison au voisinage d'un point. Soit f et g deux fonctions définies sur I et soit x_0 un point (fini ou infini) appartenant à I ou une extrémité de I.

- ▷ On dit que f est dominée par g au voisinage de x_0, et on écrit $f = O(g)$, s'il existe $M > 0$ tel que $|f(x)| \leq M|g(x)|$ pour tout x d'un voisinage de x_0. Si g ne s'annule pas dans ce voisinage, cela signifie que $\frac{f}{g}$ est bornée dans ce voisinage.
- ▷ On dit que f est négligeable devant g ou que g est prépondérant devant f au voisinage de x_0, et on écrit $f = o(g)$, si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un voisinage de x_0 tel que $|f(x)| \leq \varepsilon|g(x)|$ pour tout x de ce voisinage. Si g ne s'annule pas dans ce voisinage, cela signifie que $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

Asymptotes

Si $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ (resp. $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ell$), la droite d'équation $y = \ell$ est une asymptote horizontale de la courbe représentative de f.

Si $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ (resp. $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$), la droite d'équation $x = x_0$ est une asymptote verticale de la courbe représentative de f.

Si $\lim_{x \to +\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$ (resp. $\lim_{x \to -\infty} f(x)(f(x) - (ax + b)) = 0$), la droite d'équation $y = ax + b$ est une asymptote oblique de la courbe représentative de f.

Fonctions dérivables et développements limités

Soient f, g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$.

Dérivabilité en un point. On dit que f est dérivable en x_0 si f est définie en tout point d'un intervalle ouvert contenant x_0 et si
$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$
existe dans $\mathbb{R}$. Lorsque cette limite existe, elle est notée $f'(x_0)$.

Nota bene. Si f est dérivable en x_0 alors f est continue en x_0. Attention, la réciproque est fausse : par exemple, la fonction $f(x) = |x|$ est continue en 0 mais non dérivable en 0.

Tangente f dérivable en x_0 signifie que le graphe de f admet au point d'abscisse x_0 une tangente de pente $f'(x_0)$. Son équation est $y = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$.

Théorème (fonctions composées). Si f est dérivable en x_0 et g dérivable en $f(x_0)$ alors $g\circ f$ est dérivable en x_0 et
$$(g\circ f)'(x_0) = f'(x_0)g'\big(f(x_0)\big).$$

Théorème (fonctions réciproques). Si f est continue strictement monotone sur un intervalle I, dérivable en $x_0 \in I$ et $f'(x_0) \neq 0$ alors la réciproque f^{-1} est dérivable en $f(x_0)$ et
$$(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Sens de variation Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction dérivable sur I.

1. f est croissante sur $I \iff \forall x \in I,\ f'(x) \geq 0$.
2. f est décroissante sur $I \iff \forall x \in I,\ f'(x) \leq 0$.
3. f est constante sur $I \iff \forall x \in I,\ f'(x) = 0$.
4. Si $\forall x \in I,\ f'(x) > 0$, alors f est strictement croissante sur I.
5. Si $\forall x \in I,\ f'(x) < 0$, alors f est strictement décroissante sur I.

Dérivées successives. Soit f dérivable sur E. Pour $n \in \mathbb{N}$ on définit par récurrence la dérivée n-ième, ou dérivée d'ordre n, de f en posant $f^{(0)} = f$ puis $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$ lorsque $f^{(n-1)}$ est dérivable sur E.

On dit que f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur E, et on écrit $f \in \mathscr{C}^n(E)$, lorsque f est n fois dérivable sur E et $f^{(n)}$ est continue sur E.

Théorème (accroissements finis). Si f est continue en tout point d'un intervalle fermé $[a, b]$ (avec $a < b$) et dérivable en tout point de $]a, b[$ alors il existe au moins un point $c \in]a, b[$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Notation. On écrit $f(x) = \varepsilon(x)$ si f est une fonction telle que $D_f \cap] -\delta, +\delta[\setminus \{0\} \neq \emptyset$ pour tout $\delta > 0$ et $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.

Développement limité. f admet un développement limité à l'ordre n en x_0, et on le note $DL_n(x_0)$, si $D_f \cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\setminus \{x_0\} \neq \emptyset$ pour tout $\delta > 0$ et s'il existe un polynôme P_n de degré n tel que

$$f(x) = P_n(x - x_0) + (x - x_0)^n \varepsilon(x - x_0).$$

Lorsqu'il existe, le polynôme P_n est unique.

Au lieu de $(x - x_0)^n \varepsilon(x - x_0)$ on écrit souvent $o((x - x_0)^n)$.

Théorème (Taylor). Si f et toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre n sont définies et continues en tout point d'un intervalle ouvert contenant x_0 alors f admet un développement limité à l'ordre n en x_0 donné par la formule

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + (x - x_0)^n \varepsilon(x - x_0).$$

Asymptotes. Soit f définie sur un intervalle $]A, +\infty[$ ou $]-\infty, A[$. Quand x tend vers l'infini, $X := 1/x$ tend vers 0 et, en remplaçant x par $1/X$, on est ramené au voisinage de 0.

Lorsque x et $f(x)$ tendent vers l'infini, on obtient une asymptote oblique (si elle existe) en effectuant un développement limité au voisinage de l'infini :

$$\frac{f(x)}{x} = a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^k} + o\left(\frac{1}{x^k}\right)$$

où $\frac{c}{x^k}$ est le premier terme non nul après $\frac{b}{x}$. Dans ce cas, la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à la courbe représentative de f. Et la position relative de la courbe et de l'asymptote résulte du signe de $\frac{c}{x^k}$ lorsque x tend vers l'infini.

Étude de fonctions

Fonction logarithme népérien.

La fonction "ln" est définie pour $x > 0$ par

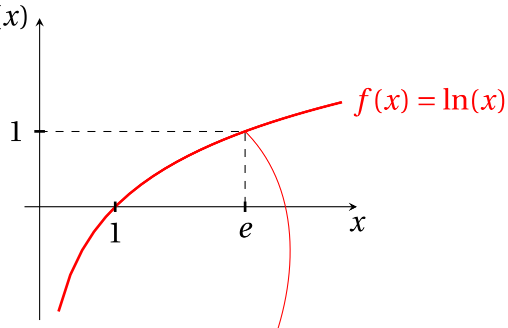
$$\begin{cases} \ln(1) = 0 \\ (\ln(x))' = \frac{1}{x} \quad \forall x > 0. \end{cases}$$

Elle est strictement croissante, de classe $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*)$ et

$$\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty,$$

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0.$$

La dérivée en $x = 1$ étant égale à 1, on a aussi $\ln(1+x) = x + o(x^2)$ au voisinage de 0.



L'unique solution de l'équation $\ln(x) = 1$ est notée e ($e \approx 2{,}718$).

Propriétés algébriques $\forall a > 0, \forall b > 0, \forall r \in \mathbb{Q}$

$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b); \quad \ln(a^r) = r\ln a; \quad \ln(a/b) = \ln(a) - \ln(b).$$

Convexité La fonction ln est concave sur $]0, +\infty[$ ce qui entraîne

$$\forall x > -1 \qquad \ln(1+x) \leq x.$$

Fonction exponentielle.

La fonction exponentielle est la bijection réciproque de la fonction ln ; elle est définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $]0, +\infty[$; elle est notée exp ou $x \mapsto e^x$:

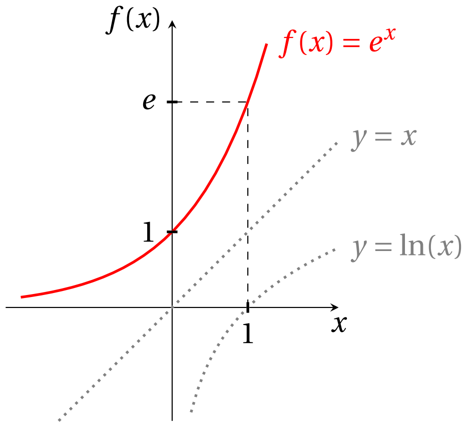
$$y = e^x \iff x = \ln(y).$$

Elle est strictement croissante,

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0^+, \qquad \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty,$$

$$\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty,$$

de classe $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*)$ et $(e^x)' = e^x$. La dérivée en $x = 0$ étant égale à 1, on a aussi $e^x - 1 = x + o(x^2)$ au voisinage de 0.



L'unique solution de l'équation $e^x = 1$ est $x = 0$.

Propriétés algébriques $\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}, \forall r \in \mathbb{Q}$

$$e^{a+b} = e^a \cdot e^b; \quad e^{ra} = (e^a)^r; \quad e^{-a} = \frac{1}{e^a}; \quad e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}.$$

Convexité La fonction exp est convexe sur $\mathbb{R}$ ce qui entraîne

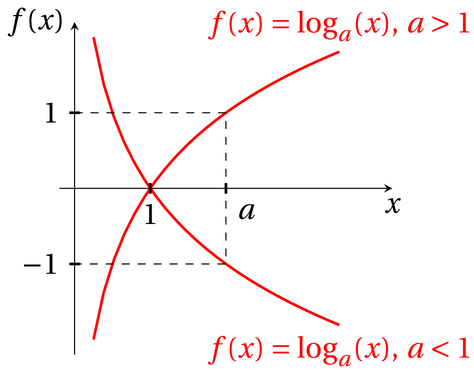
$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad 1 + x \leq e^x.$$

Logarithme de base a.

La fonction logarithme de base a ($a > 0$, $a \neq 1$) est la fonction définie par

$$\forall x > 0 \qquad \log_a(x) := \frac{\ln x}{\ln a}.$$

Sa dérivée est $(\log_a(x))' = \frac{1}{x \ln a}$. Ses propriété algébriques sont les mêmes que celles de la fonction ln.



Exponentielle de base a.

La fonction exponentielle de base a ($a > 0$) est la fonction définie par

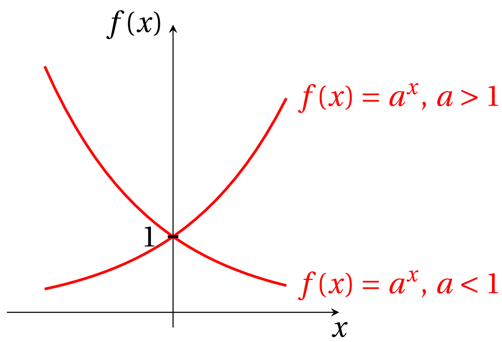
$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad a^x := e^{x \ln a}.$$

Pour $a \neq 1$ c'est la fonction réciproque de la fonction $\log_a$:

$$y = a^x \iff x = \log_a(y).$$

Sa dérivée est $(a^x)' = a^x \ln a$.

Remarquez bien qu'ici la variable est en exposant.



Fonctions puissances.

La fonction $x \mapsto x^r$ pour $x > 0$ et $r \in \mathbb{Q}$ est connue. On la généralise pour $r \in \mathbb{R}$ en posant

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad x^r := e^{r \ln x}.$$

Les propriétés connues pour les exposants rationnels sont prolongées ; en particulier $(x^r)' = r x^{r-1}$.

Remarquez bien qu'ici l'exposant est constant.

Pour $r < 0$, la fonction $x \mapsto x^r$ est décroissante de $+\infty$ à 0.

Pour $r > 0$, la fonction $x \mapsto x^r$ est croissante de 0 à $+\infty$. Dans ce cas on peut prolonger la fonction par continuité en 0 ; la fonction prolongée est dérivable en 0 si $r > 1$.

Pour $b > 0$ on a

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^b} = 0; \qquad \lim_{x\to 0^+} x^b \ln x = 0.$$

Pour $a > 1$ et $b \in \mathbb{R}$ on a

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x^b} = +\infty.$$

Pour $a > 1$ on a

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{a^x} = 0.$$

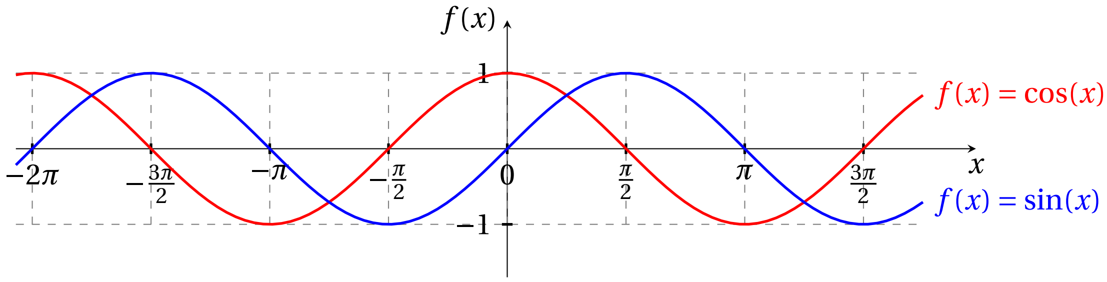
Fonctions circulaires et trigonométriques.

Fonctions sinus et cosinus Elles sont définies dans $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $[-1,1]$. Elles sont 2π-périodiques. La fonction cos est paire, la fonction sin est impaire.

Dérivées : $(\cos(x))' = -\sin(x)$, $(\sin(x))' = -\cos(x)$.

Si $x \in \mathbb{R}$ est la mesure d'un angle, ces expressions des dérivées ne sont correctes que si x est exprimé en radians.

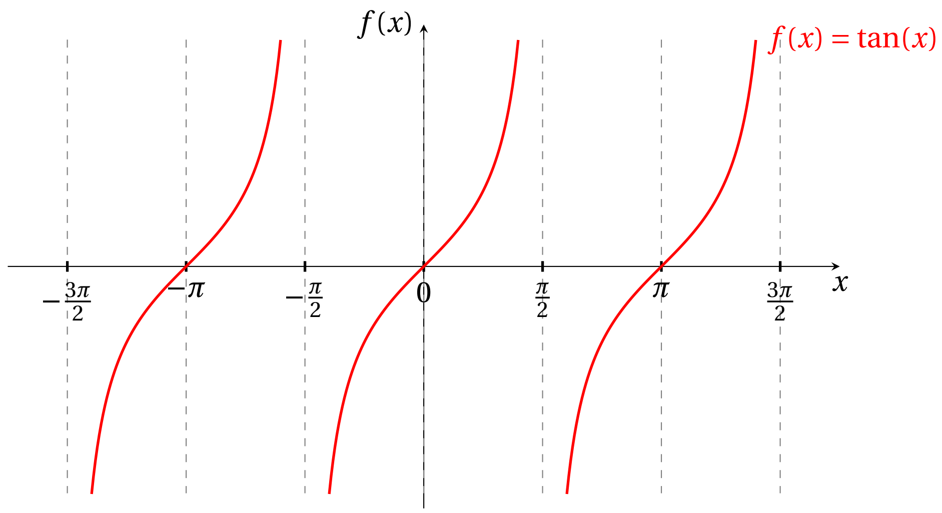
Limites : $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = \frac{1}{2}$.



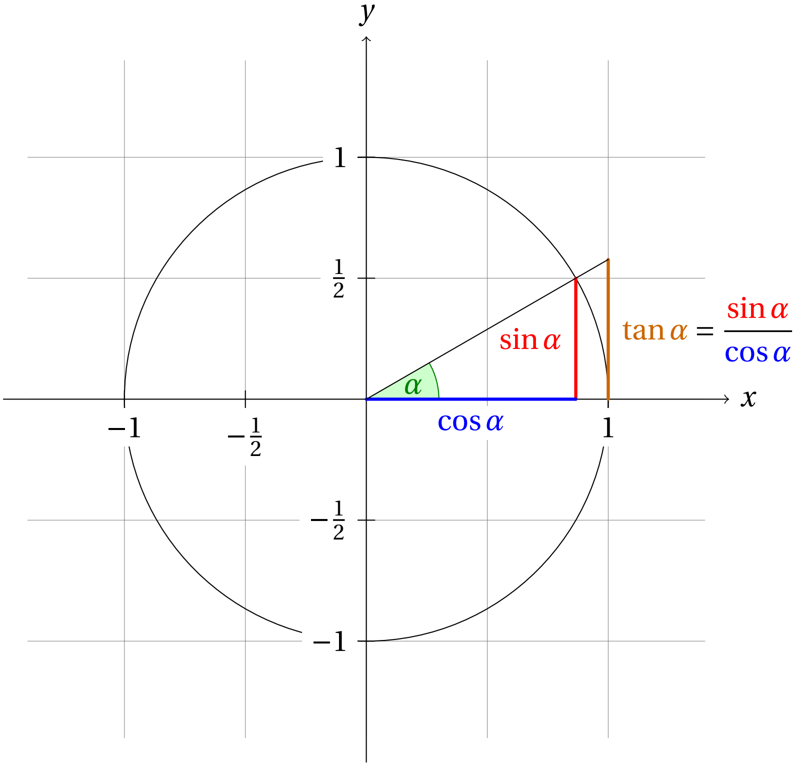
Fonction tangente Elle est définie sur $D := \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$ par $\tan(x) := \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$. Elle est π-périodique et impaire.

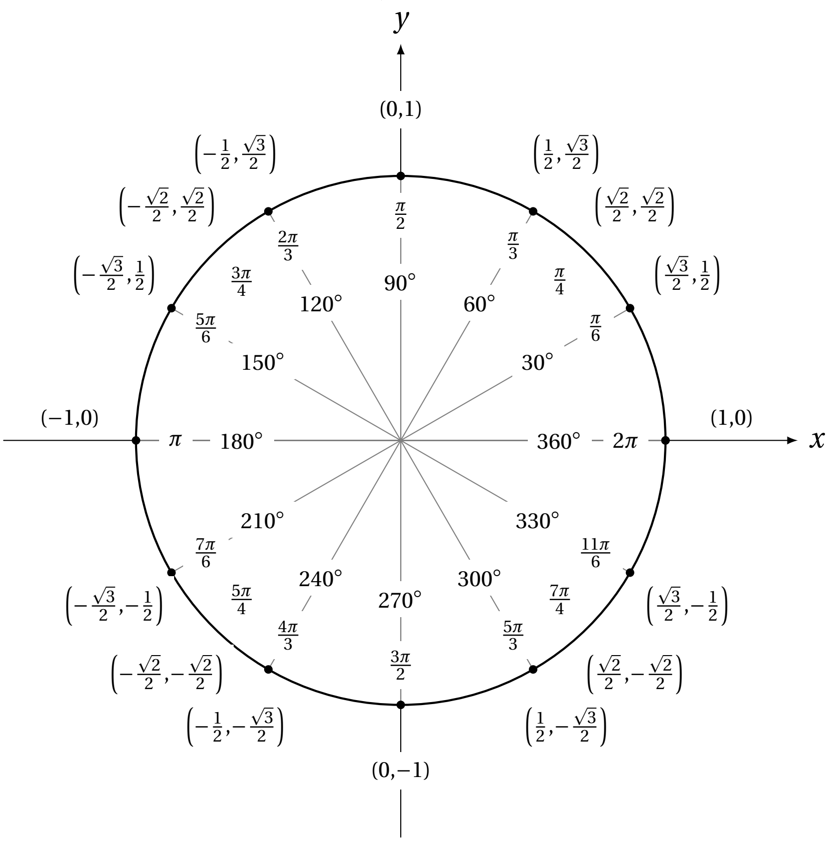
Dérivée : $(\tan(x))' = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$ pour tout $x \in D$.

Limites : $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$.



Propriétés





$$
\begin{array}{rrr}
\cos(\pi-x) = -\cos(x) & \sin(\pi-x)=\sin(x) & \tan(\pi-x) = -\tan(x)\\
\cos(\pi+x) = -\cos(x) & \sin(\pi+x) = -\sin(x) & \tan(\pi+x) = \tan(x)\\
\cos(\pi/2-x) = \sin(x) & \sin(\pi/2-x) = \cos(x) & \tan(\pi/2-x) = 1/\tan(x)\\
\cos(\pi/2+x) = -\sin(x) & \sin(\pi/2+x) = \cos(x) & \tan(\pi/2+x) = -1/\tan(x)
\end{array}
$$

$$\cos(a+b)=\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b) \qquad \cos(a-b)=\cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b)$$
$$\sin(a+b)=\sin(a)\cos(b)+\cos(a)\sin(b) \qquad \sin(a-b)=\sin(a)\cos(b)-\cos(a)\sin(b)$$
$$\tan(a+b)=\frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)} \qquad \tan(a-b)=\frac{\tan(a)-\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$$

$$\cos(2a)=\cos^2(a)-\sin^2(a)=2\cos^2(a)-1=1-2\sin^2(a)$$
$$\sin(2a)=2\sin(a)\cos(a)$$
$$\tan(2a)=\frac{2\tan(a)}{1-\tan^2(a)}$$

$$\cos(a)+\cos(b)=2\cos\frac{a-b}{2}\cos\frac{a+b}{2} \qquad \cos(a)-\cos(b)=-2\sin\frac{a-b}{2}\sin\frac{a+b}{2}$$
$$\sin(a)+\sin(b)=2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} \qquad \sin(a)-\sin(b)=2\sin\frac{a-b}{2}\cos\frac{a+b}{2}$$

$$\cos(a)\cos(b)=\frac{\cos(a+b)+\cos(a-b)}{2}$$
$$\sin(a)\sin(b)=\frac{\cos(a-b)-\cos(a+b)}{2}$$
$$\sin(a)\cos(b)=\frac{\sin(a+b)+\sin(a-b)}{2}$$

$$\cos^2(a)=\frac{1+\cos(2a)}{2} \qquad \sin^2(a)=\frac{1-\cos(2a)}{2}$$

Soit $t:=\tan\frac{a}{2}$, alors

$$\cos(a)=\frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \sin(a)=\frac{2t}{1+t^2} \qquad \tan(a)=\frac{2t}{1-t^2}$$

Fonctions circulaires réciproques.

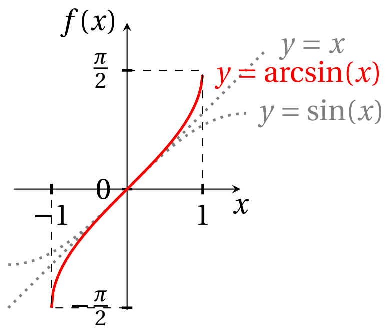
Fonction arc-sinus

C'est la bijection réciproque de la restriction à $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ de la fonction sinus :

$$\left.\begin{array}{c} y=\arcsin(x) \\ -1\le x\le 1\end{array}\right\} \iff \left\{\begin{array}{c} x=\sin(y) \\ -\frac{\pi}{2}\le y\le\frac{\pi}{2}\end{array}\right.$$

Elle est impaire et pour tout $x\in]-1,1[$ on a

$$(\arcsin(x))'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$



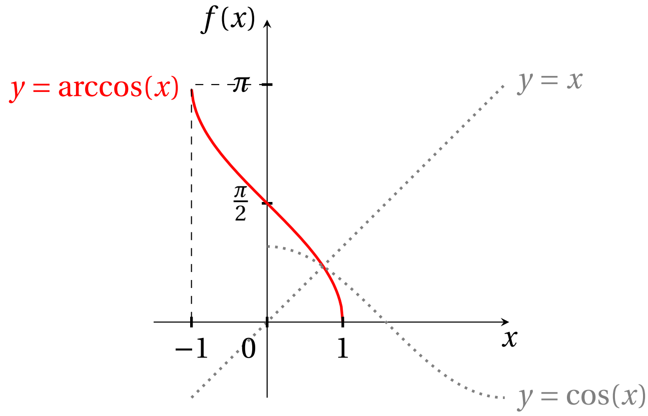
Fonction arc-cosinus

C'est la bijection réciproque de la restriction à $[0,\pi]$ de la fonction cosinus :

$$\left.\begin{array}{c} y=\arccos(x) \\ -1\leq x\leq 1 \end{array}\right\} \iff \left\{\begin{array}{c} x=\cos(y) \\ 0\leq y\leq \pi \end{array}\right.$$

Pour tout $x\in]-1,1[$ on a

$$(\arccos(x))'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$



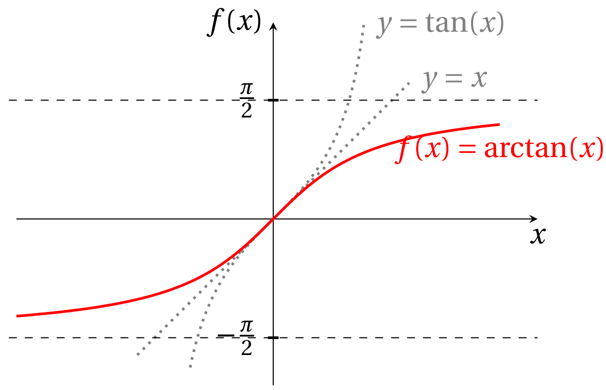
Fonction arc-tangente

C'est la bijection réciproque de la restriction à $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ de la fonction tangente :

$$\left.\begin{array}{c} y=\arctan(x) \\ x\in\mathbb{R} \end{array}\right\} \iff \left\{\begin{array}{c} x=\tan(y) \\ -\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2} \end{array}\right.$$

Elle est impaire et pour tout $x\in\mathbb{R}$ on a

$$(\arctan(x))'=\frac{1}{1+x^2}.$$



Propriétés

$$\begin{array}{ll}
\forall x\in[-1,1] & \arcsin(x)+\arccos(x)=\dfrac{\pi}{2} \\
 & \sin(\arccos(x))=\sqrt{1-x^2}=\cos(\arcsin(x)) \\
\forall x>0 & \arctan(x)+\arctan(1/x)=\dfrac{\pi}{2} \\
\forall x<0 & \arctan(x)+\arctan(1/x)=-\dfrac{\pi}{2}
\end{array}$$

Fonctions hyperboliques.

On définit les fonctions cosinus hyperbolique, sinus hyperbolique et tangente hyperbolique pour tout $x\in\mathbb{R}$ respectivement par

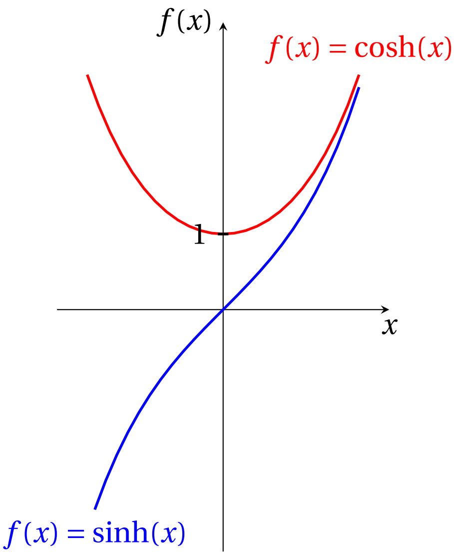
$$\cosh(x):=\frac{e^x+e^{-x}}{2},\qquad \sinh(x):=\frac{e^x-e^{-x}}{2},\qquad \tanh(x):=\frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}=1-\frac{2}{1+e^{2x}}.$$

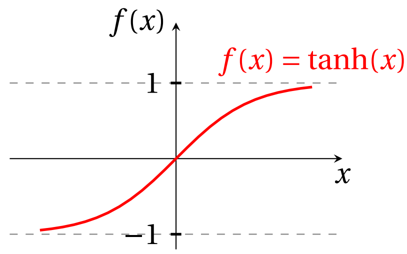
Propriétés : cosh est paire ; sinh et tanh sont impaires et pour tout $x\in\mathbb{R}$ on a

$$\cosh(x)+\sinh(x)=e^x;\qquad \cosh^2(x)-\sinh^2(x)=1;\qquad 1-\tanh^2(x)=\frac{1}{\cosh^2(x)}.$$

Dérivées : pour tout $x\in\mathbb{R}$

$$(\sinh(x))'=\cosh(x);\qquad (\cosh(x))'=\sinh(x);\qquad (\tanh(x))'=\frac{1}{\cosh^2(x)}=1-\tanh^2(x).$$





Fonctions hyperboliques réciproques.

Fonction argument sinus hyperbolique C'est la bijection réciproque de la fonction sinh. Elle est impaire et on a

$$(\operatorname{argsinh}(x))' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Fonction argument cosinus hyperbolique C'est la bijection réciproque de la restriction à $[0, +\infty[$ de la fonction $\cosh(x)$. Pour tout $x \in [0, +\infty[$ on a

$$(\operatorname{argcosh}(x))' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$$

Fonction argument tangente hyperbolique C'est la bijection réciproque de la fonction tanh. Elle est impaire et pour tout $x \in]-1, 1[$ on a

$$(\operatorname{argtanh}(x))' = \frac{1}{1-x^2}.$$

Propriétés

$\forall x \in \mathbb{R}$	$\operatorname{argsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$
$\forall x \in [1, +\infty[$	$\operatorname{argcosh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$
$\forall x \in]-1, 1[$	$\operatorname{argtanh}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$