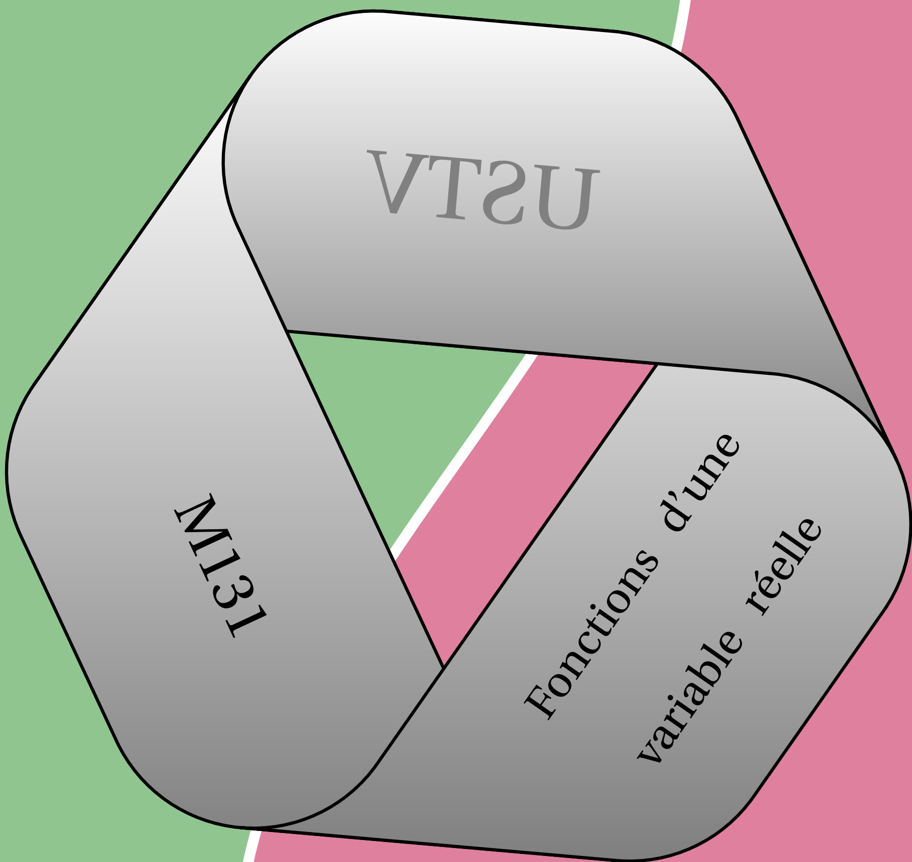
L1PC

2010/2011

Résumé du cours
et exercices.



J.-J. Alibert
G. Faccanoni
J. Gilewicz
A. Novotny

Gloria FACCANONI

IMATH Bâtiment U-318
Université du Sud Toulon-Var
Avenue de l'université
83957 LA GARDE - FRANCE

☎ 0033 (0)4 94 14 23 81

✉ gloria.faccanoni@univ-tln.fr
ℹ http://faccanoni.univ-tln.fr

Table des matières

1 Logique, ensemble

Assertion. Une assertion est un énoncé dont on peut affirmer sans ambiguïté s'il est vrai ou s'il est faux.

Par exemple, "$1 < 2$" est une assertion vraie et "$4 < 3$" est une assertion fausse.

Proposition. Une proposition est un énoncé contenant des variables, qui est vrai pour certaines valeurs attribuées à ces variables, faux pour toutes les autres.

Par exemple, "$x < 2$" est une proposition, elle est vraie pour les nombres strictement inférieurs à 2, fausse pour tous les autres.

Négation. La négation d'une proposition "P", notée "non P", est vraie lorsque P est fausse, fausse lorsque P est vraie.

Par exemple, la proposition "$x < 2$" est la négation de la proposition "$x \geq 2$".

Conjonction. La conjonction de deux propositions P, Q, notée "P et Q", est vraie, si les deux propositions sont vraies, fausse dans tous les autres cas.

Par exemple, la conjonction des propositions "$x \leq 2$" et "$x \geq 2$" est "$x = 2$".

Incompatibilité. Deux propositions P, Q sont incompatibles si la conjonction "P et Q" est toujours fausse.

Par exemple, les propositions "$x \leq 2$" et "$x \geq 5$" sont incompatibles.

Disjonction. La disjonction de deux propositions P, Q, notée "P ou Q", est vraie, si au moins une des deux propositions est vraie, fausse dans tous les autres cas (le "ou" est inclusif).

Par exemple, la disjonction "$x > 2$ ou $x < 2$" est "$x \neq 2$".

Implication. L'implication de deux propositions P, Q, notée "$P \implies Q$", est la proposition "(non P) ou Q".

L'implication "$P \implies Q$" se lit "P implique Q" ou "P entraine Q" ou "P est une condition suffisante de Q" ou "Q est une condition nécessaire de P". Le fait que "$P \implies Q$" soit vraie signifie que pour que Q soit vraie il suffit que P soit vraie, ou encore, que pour que P soit fausse il suffit que Q soit fausse. "$P \implies Q$" équivaut à "nonQ $\implies$ nonP".

Théorème. P et Q étant deux assertions, si "$P \implies Q$" est vrai on dit que c'est un théorème (c'est-à-dire une assertion démontrée dont P est l'hypothèse et Q la conclusion).

Équivalence. L'équivalence de deux propositions P, Q, notée "$P \iff Q$", est la proposition "($P \implies Q$) et ($Q \implies P$)".

Des êtres, aussi bien physique (élève, chat, chaise...), qu'objets de notre pensée (nombre, fonction...), seront représentés par des lettres a, b, E, μ ...et considérés comme bien définis si nous disposons d'un critère permettant d'affirmer que deux de ces objets (représentés par a et b) sont, ou bien identiques, ou bien distincts :

$$a = b \qquad \text{ou bien} \qquad a \neq b.$$

Ensemble, élément. Un ensemble E est constitué d'éléments. Il est bien défini si l'on possède un critère permettant d'affirmer pour tout objet a, s'il appartient à l'ensemble E ou non :

$$a \in E \qquad \text{ou bien} \qquad a \notin E.$$

On dit aussi "a est élément de E" ou bien "a n'est pas élément de E" ou encore "E contient a" ou bien "E ne contient pas a". Si un ensemble E est constitué des éléments a, b, c, on écrira : $E = \{a, b, c\}$. L'ordre dans lequel les éléments sont écrits n'importe pas, ainsi $\{a, b, c\} = \{c, a, b\}$. Un même être mathématique ne peut pas être à la fois un ensemble et un élément de cet ensemble, c'est-à-dire qu'il est interdit d'écrire $a \in a$.

Inclusion. Un ensemble F est inclus dans un ensemble E si tout élément de F appartient à E, ce que l'on note : $F \subset E$.

On dit aussi "F est une partie de E" ou encore "F est un sous-ensemble de E".

Complémentaire. Soit E un ensemble. Pour toute partie A de E, on note $C_E A := E \setminus A$ le complémentaire de A dans E.

Égalité. Un ensemble F est égal à un ensemble E si $F \subset E$ et $E \subset F$, ce que l'on note : $F = E$.

Utilisation des quantificateurs. Les quantificateurs $\exists$ et $\forall$ concernent les éléments d'un ensemble déterminé E.

Notation "Il existe x élément de E" s'écrit "$\exists x \in E$".
"Pour tout" x de E ou "Quel que soit un élément x de E" s'écrit "$\forall x \in E$".

Ordre Si l'on utilise deux fois le même quantificateur, l'ordre n'a pas d'importance ; on peut donc permuter les quantificateurs dans des écritures du type

$$\forall x \in E \quad \forall y \in F \quad p(x, y),$$
$$\exists x \in E \quad \exists y \in F \quad p(x, y).$$

Mais si les quantificateurs sont différents, leur ordre est important : dans l'écriture

$$\forall x \in E \quad \exists y \in F \quad p(x, y)$$

y dépend de x et dans l'écriture

$$\exists y \in F \quad \forall x \in E \quad p(x, y)$$

y est indépendant de x.

Négation La négation de "$\forall x \in E$, x vérifie p" est "$\exists x \in E$ tel que x ne vérifie pas p". La négation de "$\exists x \in E$, x vérifie p" est "$\forall x \in E$ tel que x ne vérifie pas p".

Soit A une partie de E.

▷ *L'énoncé "A est la partie* vide*" (on note $A = \emptyset$) et sa négation "A est* non vide*" (on note $A \neq \emptyset$) correspondent respectivement à "quel que soit x élément de E, x n'est pas un élément de A" et "il existe au moins un élément de E qui est élément de A" et s'écrivent respectivement :*

▷ $\forall x \in E \quad x \notin A$,

- ▷ $\exists x \in E \quad x \in A$.

▷ *L'énoncé "A est la partie* pleine*" (on note $A = E$) et sa négation "A n'est pas la partie* pleine*" (on note $A \neq E$) s'écrivent respectivement :*

- ▷ $\forall x \in E \quad x \in A$,
- ▷ $\exists x \in E \quad x \notin A$.

▷ *Les propositions "$x \in A$" et "$x \notin A$" sont souvent remplacées respectivement par "x vérifie la propriété p" et "x ne vérifie pas la propriété p" où p est une propriété caractéristique des éléments de A, c'est à dire un critère permettant de décider pour tout élément x de E entre les deux propositions $x \in A$, $x \notin A$.*

Opérations booléennes. Soit E un ensemble. On note $\mathscr{P}(E)$ l'ensemble des parties de E. Soient A et B deux éléments de $\mathscr{P}(E)$. Les quatre éléments $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $A \triangle B$ de $\mathscr{P}(E)$ sont définies de la façon suivante : pour tout $x \in E$,

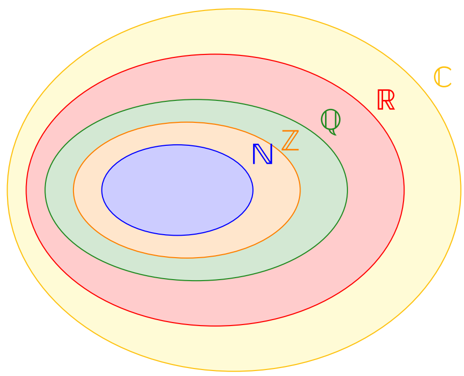
▷ $x \in A \cup B \iff x \in A$ ou $x \in B$, [réunion des ensembles A et B]
▷ $x \in A \cap B \iff x \in A$ et $x \in B$, [intersection des ensembles A et B]
▷ $x \in A \setminus B \iff x \in A$ et $x \notin B$,
▷ $x \in A \triangle B \iff x \in A \setminus B$ ou $x \in B \setminus A$.

Réunion et intersection d'une famille de parties de E. Soit E, I deux ensembles et $\{A_i\}_{i \in I}$ une partie de $\mathscr{P}(E)$. Les deux éléments $\bigcup_{i \in I} A_i$ et $\bigcap_{i \in I} A_i$ de $\mathscr{P}(E)$ sont définies de la façon suivante : pour tout $x \in E$,

$$x \in \bigcup_{i \in I} A_i \iff \exists i \in I \quad x \in A_i, \qquad\qquad x \in \bigcap_{i \in I} A_i \iff \forall i \in I \quad x \in A_i.$$

Exercice 1.1. Pour chaque élément de $\mathbb{C}$ ci-dessous, indiquer s'il appartient à $\mathbb{N}$, à $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$, à $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$, à $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ou à $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$:

i) i
ii) -5
iii) $\sqrt{2}$
iv) $\sqrt{4}$
v) $-\frac{110}{11}$
vi) 2
vii) $\sqrt{-1}$
viii) 0
ix) $3 + 2i$
x) π
xi) $\frac{3}{2}$
xii) i^2



Exercice 1.2. Pour chaque énoncé, écrire la négation, puis dire si l'énoncé original est vrai ou faux (en justifiant la réponse à l'aide d'une démonstration).

1. $\forall x \in \mathbb{R} \quad x > 1$
2. $\exists x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad x + y > 0$
3. $\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists y \in \mathbb{R} \quad x + y > 0$
4. $\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad x + y > 0$
5. $\exists x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad y^2 > x$

6. $\forall n \in \mathbb{N} \quad n^2+n+1 \leq n^3$
7. $\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad n \geq x$
8. $\exists n \in \mathbb{N} \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad n > p \Longrightarrow n+p > 2p$
9. $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \exists p \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad |x-3| < \frac{1}{p} \Longrightarrow |x^2-9| < \frac{1}{n}$
10. $\forall (n,p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \quad n > p \Longleftrightarrow \frac{1}{p} > \frac{1}{n}$
11. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad (x,y) \neq (0,0) \Longleftrightarrow x^2+xy+y^2 > 0$
12. $\forall (x,s,p) \in \mathbb{R}^3 \quad \exists y \in \mathbb{R} \quad x^2 - sx + p = 0 \Longleftrightarrow \big(x+y = s \text{ et } xy = p\big)$

Exercice 1.3. Démontrer (par récurrence) les propositions

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \sum_{i=1}^{n} (2i+1) = n(n+2),$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Exercice 1.4. Expliciter les sous-ensembles suivants de la droite réelle

$$\bigcup_{x\in[0,1]} \left]\frac{x}{2}, 2x\right[\qquad \bigcap_{x\in[0,1]} \left]\frac{x}{2}, 2x\right[\qquad \bigcup_{x\in[0,1]} \left[\frac{x}{2}, 2x\right] \qquad \bigcap_{x\in[0,1]} \left[\frac{x}{2}, 2x\right]$$

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left[-\frac{1}{n}, 2+\frac{1}{n}\right[\qquad \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left[1+\frac{1}{n}, n\right] \qquad \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left[3, 3+\frac{1}{n^2}\right[\qquad \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left]-2-\frac{1}{n}, 4+n^2\right]$$

Exercice 1.5. Soit E, I, J trois ensembles et $\{A_i\}_{i\in I}$ et $\{B_j\}_{j\in J}$ deux parties de $\mathscr{P}(E)$. Montrer que

$$\Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big) \cap \Big(\bigcup_{j\in J} B_j\Big) = \bigcup_{(i,j)\in I\times J} (A_i \cap B_j).$$

Exercice 1.6. Soit E, I et J trois ensembles non vides. Soit $\{A_{i,j}\}_{(i,j)\in I\times J}$ une partie de $\mathscr{P}(E)$. Montrer que

$$\bigcup_{i\in I}\Big(\bigcap_{j\in J} A_{i,j}\Big) \subset \bigcap_{j\in J}\Big(\bigcup_{i\in I} A_{i,j}\Big),$$

puis comparer (en terme d'inclusion)

$$\bigcup_{p\in\mathbb{N}^*}\Big(\bigcap_{q\in\mathbb{N}^*}\left[0, \frac{p}{q}\right]\Big) \quad \text{et} \quad \bigcap_{q\in\mathbb{N}^*}\Big(\bigcup_{p\in\mathbb{N}^*}\left[0, \frac{p}{q}\right]\Big)$$

Exercice 1.7. Soient E un ensemble et F et G deux parties de E. Montrer que

1) $C_E\big(C_E F\big) = F \quad$ et $\quad F \subset G \Longleftrightarrow C_E F \supset C_E G$

2) $C_E(F\cup G) = \big(C_E F\big) \cap \big(C_E G\big) \quad$ et $\quad C_E(F\cap G) = \big(C_E F\big) \cup \big(C_E G\big)$ [Lois de Morgan]

Soit I un ensemble et $\{A\}_{i\in I}$ une partie de $\mathscr{P}(E)$. Montrer que

3) $C_E\Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big) = \bigcap_{i\in I} C_E A_i \quad$ et $\quad C_E\Big(\bigcap_{i\in I} A_i\Big) = \bigcup_{i\in I} C_E A_i$.

Exercice 1.8. Soient les sous-ensembles de $\mathbb{R}$ $A_i = \left[0, 1+\frac{1}{i}\right]$, $B_i = \left[0, 1-\frac{1}{i}\right]$ et $C_i = \left[-1-\frac{1}{i}, 1+\frac{1}{i}\right]$ avec $i \in \mathbb{N}^*$. Trouver les ensembles

$$C_E(A_i), \quad \bigcup_{i=1}^{\infty} C_E(A_i), \quad \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i, \quad C_E\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right);$$

$$C_E(B_i), \quad \bigcup_{i=1}^{\infty} C_E(B_i), \quad \bigcap_{i=1}^{\infty} B_i, \quad C_E\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i\right);$$

$$C_E(C_i), \quad \bigcup_{i=1}^{\infty} C_E(C_i), \quad \bigcap_{i=1}^{\infty} C_i, \quad C_E\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} C_i\right).$$

2 Relation, fonction, application

Soient E et F deux ensembles.

Produit cartésien. $E \times F$ est l'ensemble des couples (x, y) où x est un élément de E et y un élément de F. L'égalité dans $E \times F$ est définie par : $(x, y) = (x', y') \iff x = x'$ et $y = y'$.

Relation binaire. Une relation binaire (ou correspondance) de E dans (ou vers) F est un triplet $\mathscr{R} = (E, F; G)$ où G une partie de $E \times F$. L'ensemble E est appelé *ensemble de départ de $\mathscr{R}$*, l'ensemble F est appelé *ensemble d'arrivée de $\mathscr{R}$*. L'ensemble G est appelé *graphe* de $\mathscr{R}$.

NOTATION. Pour tout $(x, y) \in E \times F$, on écrit "$x \mathscr{R} y$" et on dit "x est en relation avec y" ssi "$(x, y) \in G$".

Fonction. Une fonction f de E dans F est une relation de E dans F vérifiant : pour tout $x \in E$, il existe au plus un élément $y \in F$ satisfaisant $x f y$.

Domaine de définition. Le domaine de définition D_f d'une fonction f de E dans F est l'ensemble des $x \in E$ satisfaisant : il existe un et un seul $y \in F$ tel que $x f y$.

NOTATION. Pour tout $x \in D_f$, on note $f(x)$ le seul point $y \in F$ satisfaisant $x f y$. Donc pour tout $(x, y) \in D_f \times F$, $x f y \iff y = f(x)$. Si $x \in D_f$ alors $f(x)$ est appelé "l'image de x par f". Si $y \in F$ alors tout point $x \in D_f$ satisfaisant $y = f(x)$ est appelé "un antécédent de x par f".

Image directe. Soit f une fonction de E dans F et A une partie de E. L'image directe de A par f est la partie de F définie par $f(A) := \{y \in F \ : \ \exists x \in A \cap D_f \quad y = f(x)\}$.

Image réciproque. Soit f une fonction de E dans F et B une partie de F. L'image réciproque de B par f est la partie de E définie par $f^{-1}(B) := \{x \in D_f \ : \ f(x) \in B\}$.

Attention à ne pas confondre l'image réciproque de B, qui existe toujours, avec l'image de B par f^{-1}, qui n'existe que si f est une bijection. Ici on ne suppose rien sur f.

Application. Une application f de E dans F est une fonction de E dans F dont le domaine de définition est égal à E.

Injection. Une injection f de E dans F est une application de E dans F vérifiant

$$\forall (x, x') \in E \times E \quad f(x) = f(x') \implies x = x'.$$

Attention à ne pas confondre :

▷ *la définition d'une application qui s'écrit*

$$\forall x \in E \quad \forall x' \in E \qquad x = x' \implies f(x) = f(x'),$$
$$\forall x \in E \quad \forall x' \in E \qquad f(x) \neq f(x') \implies x \neq x',$$

▷ *la définition d'application injective qui s'écrit*

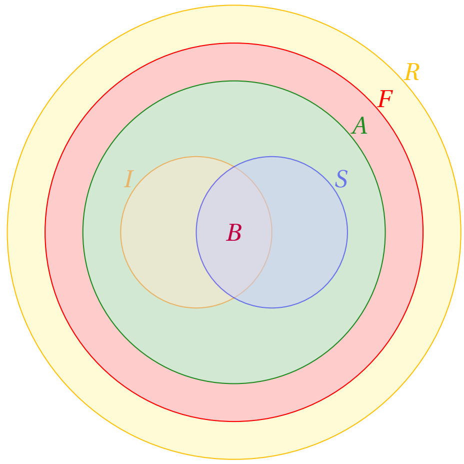
$$\forall x \in E \quad \forall x' \in E \qquad x \neq x' \implies f(x) \neq f(x'),$$
$$\forall x \in E \quad \forall x' \in E \qquad f(x) = f(x') \implies x = x'.$$

Surjection. Une surjection f de E dans F est une application de E dans F vérifiant

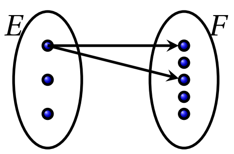
$$\forall y \in F \quad \exists x \in E \quad y = f(x).$$

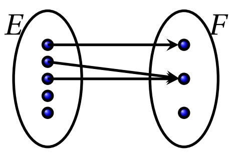
Bijection. Une bijection f de E dans F est une application de E dans F qui est injective et surjective.

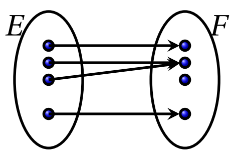
Soient
▷ *R l'ensemble des relations*
▷ *F l'ensemble des fonctions*
▷ *A l'ensemble des applications*
▷ *I l'ensemble des applications injectives*
▷ *S l'ensemble des applications surjectives*
▷ *B l'ensemble des applications bijectives*
Le dessin ci-contre se lit comme suit : "toute fonction est une relation mais il existe des relations qui ne sont pas des fonctions, de même toute application est une fonction mais il existe des fonctions qui ne sont pas des applications. Il existe des applications qui ne sont ni injectives ni surjectives, il existe des applications qui sont injectives mais qui ne sont pas surjectives, il existe des applications qui ne sont pas injectives mais qui sont surjectives et il existe des applications qui sont injectives et surjectives et sont appelées bijections."

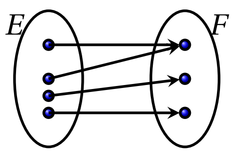


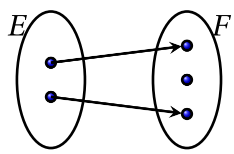
Exercice 2.1. Soit E et F deux ensembles. Pour chaque relation $x\mathscr{R}y$ avec $x \in E$ et $y \in F$ déterminer celles qui sont des fonctions, puis le domaine de définition de chacune de ces fonctions, puis celles qui sont des applications et si elles sont injectives et/ou surjectives.

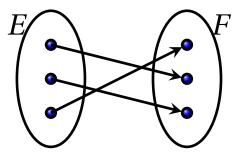
1. 

2. 

3. 

4. 

5. 

6. 

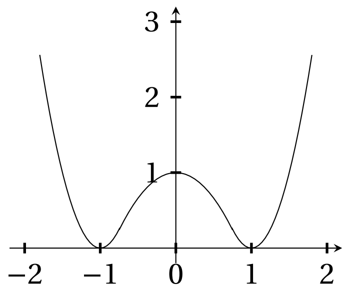
Exercice 2.2. On note $E := \{1,2,3\}$ et $F := \{1,2,3,4\}$. Tracer le graphe des six relations binaires de E dans F définies ci-dessous.

1. $\forall (x,y) \in E \times F \quad x\mathscr{R}_1 y \iff x - y + 3 \geq 0,$
2. $\forall (x,y) \in E \times F \quad x\mathscr{R}_2 y \iff x + 1 \geq y,$
3. $\forall (x,y) \in E \times F \quad x\mathscr{R}_3 y \iff x \geq y,$

4. $\forall (x,y) \in E \times F \quad x\mathscr{R}_4 y \iff x - y + 2 = 0$,
5. $\forall (x,y) \in E \times F \quad x\mathscr{R}_5 y \iff y$ est pair,
6. $\forall (x,y) \in E \times F \quad x\mathscr{R}_6 y \iff x = y$.

Parmi les six relations ci-dessus, déterminer celles qui sont des fonctions, puis le domaine de définition de chacune de ces fonctions. L'une de ces fonction est-elle une application ?

Exercice 2.3. On considère l'application f définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dont la représentation graphique est donnée ci-contre.



1. Quelle est l'image de 0 par f ?
2. Donner, en fonction de y, le nombre d'antécédents de y par f.
3. f est-elle injective ? f est-elle surjective ?

Exercice 2.4. Soit $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$.

1. f est-elle injective ?
2. f est-elle surjective ?
3. Montrer que $f(\mathbb{R}) = [-1,1]$.
4. Montrer que la restriction $g: [-1,1] \to [-1,1]$ avec $g(x) = f(x)$ est une bijection.

Exercice 2.5. Soit $f: [1,+\infty[\to [0,+\infty[$ définie par $f(x) = x^2 - 1$. f est-elle bijective ?

Exercice 2.6. Soit $\mathscr{R}$ une relation de E dans F telle que

$$\forall (x,y) \in E \times F \qquad x\mathscr{R}y \iff (1+x^2)y = 1.$$

1. Montrer que si $E = \mathbb{C}$ et $F = \mathbb{C}$ alors $\mathscr{R}$ est une fonction (on déterminera son domaine de définition) mais n'est pas une application.
2. Montrer que si $E = \mathbb{R}$ et $F = \mathbb{R}$ alors $\mathscr{R}$ est une application qui n'est ni injective, ni surjective.
3. Montrer que si $E = [0,+\infty[$ et $F = \mathbb{R}$ alors $\mathscr{R}$ est une application qui est injective mais non surjective.
4. Montrer que si $E = \mathbb{R}$ et $F =]0,1]$ alors $\mathscr{R}$ est une application qui est surjective mais non injective.
5. Montrer que si $E = [0,\infty[$ et $F =]0,1]$ alors $\mathscr{R}$ est une application qui est injective et surjective (c'est-à-dire bijective).

Exercice 2.7. Soit $\mathscr{R}_1$ et $\mathscr{R}_2$ deux relations de E dans F telles que

$$x\mathscr{R}_1 y \iff x^2 = y \qquad \text{et} \qquad x\mathscr{R}_2 y \iff x = y^2.$$

1. Montrer que si $E = \mathbb{N}$ et $F = \mathbb{N}$ alors $\mathscr{R}_1$ et $\mathscr{R}_2$ sont des fonctions dont on déterminera les domaines de définition.
2. Montrer que si $E = \mathbb{R}$ et $F = \mathbb{R}$ alors $\mathscr{R}_1$ est une application et $\mathscr{R}_2$ n'est pas une fonction.
3. Montrer que si $E = \mathbb{R}$ et $F = [0,\infty[$ alors $\mathscr{R}_2$ est une fonction dont on déterminera le domaine de définition.
4. Montrer que si $E = \mathbb{R}$ et F est l'ensemble des nombres complexes de parties réelle et imaginaire positives, alors $\mathscr{R}_2$ est une application.

Exercice 2.8. Déterminer le nombre de fonctions (applications, injections, surjections, bijections) de E dans F dans chacun des cas suivants.

1. $E = \{1\}$ et $F = \{1\}$,
2. $E = \{1,2\}$ et $F = \{1,2,3\}$,
3. $E = \{1,2,3\}$ et $F = \{1,2\}$,
4. $E = \{1,2,3\}$ et $F = \{1,2,3\}$.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ le nombre de bijection de $\{1,\dots,n\}$ dans $\{1,\dots,n\}$ est égal à $n!$ (où $n!$ est la factorielle de n).

Exercice 2.9. Soit E et F deux parties de $\mathbb{R}$ et $\mathscr{R}$ la relation binaire de E dans F définie par

$$x\mathscr{R}y \iff x^2 + y^2 = 1.$$

1. Montrer que si $E = \mathbb{R}$ et $F = \mathbb{R}$ alors $\mathscr{R}$ n'est pas une fonction.
2. Montrer que si $E = \mathbb{R}$ et $F = [0,+\infty[$ alors $\mathscr{R}$ est une fonction dont on déterminera le domaine de définition D. Pour tout $(x,y) \in D \times F$ tel que $x\mathscr{R}y$, expliciter y en fonction de x.
3. Montrer que si $E = [-1,+1]$ et $F = [0,+\infty[$ alors $\mathscr{R}$ est une application qui n'est ni injective ni surjective.
4. Définir E et F de telle sorte que $\mathscr{R}$ soit une injection mais pas une surjection, puis une surjection mais pas une injection, et enfin une bijection.

Exercice 2.10. Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1 + x^2$. Déterminer l'image directe et réciproque par f des ensembles suivants

$$A = [0,1] \qquad B =]-1,4[\qquad C = [0,+\infty[\qquad D =]-\infty,5]$$

Exercice 2.11. Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$. Soient $A := [-2,1]$ et $B := [-1,4]$.

1. Comparer $f(A \cap B)$ et $f(A) \cap f(B)$.
2. Comparer $f(A \cup B)$ et $f(A) \cup f(B)$.
3. Calculer $f^{-1}\big(f(A)\big)$ et $f\big(f^{-1}(A)\big)$ puis comparer ces deux ensembles et A.

Exercice 2.12. Soit $f : E \to F$ une application. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes

(a) f est injective

(b) pour tout A, B sous-ensembles de E on a $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

Exercice 2.13. Soit E, F deux ensembles non vides et f une application de E dans F.

1. Soit $\{A_i\}_{i \in I}$ une famille de parties de E. Montrer que

$$f\Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big) = \bigcup_{i\in I} f(A_i) \qquad \text{et} \qquad f\Big(\bigcap_{i\in I} A_i\Big) \subset \bigcap_{i\in I} f(A_i).$$

2. Soit $\{B_j\}_{j \in J}$ une famille de parties de F. Montrer que

$$f^{-1}\Big(\bigcup_{j\in J} B_j\Big) = \bigcup_{j\in J} f^{-1}(B_j) \qquad \text{et} \qquad f^{-1}\Big(\bigcap_{j\in J} B_j\Big) = \bigcap_{j\in J} f^{-1}(B_j).$$

Exercice 2.14. Les fonctions suivantes sont-elles injectives ? Surjectives ? Bijectives ?

1. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ telle que $f(n) = 2n$,
2. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ telle que $f(n) = -n$,
3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = x^2$,
4. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ telle que $f(x) = x^2$,

5. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $f(n) = n+1$,
6. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^*$ telle que $f(n) = n+1$,
7. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ telle que $f(n) = n+1$,
8. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telle que $f(x, y) = (x+y, x-y)$.

Exercice 2.15. Soit E et F deux ensembles non vides. Soit f une application de E dans F.

1. Montrer que : $\forall A \in \mathscr{P}(E)$, $f^{-1}\big(f(A)\big) \supset A$.
2. Montrer que : $\forall B \in \mathscr{P}(F)$, $f\big(f^{-1}(B)\big) \subset B$.
3. Montrer que f est injective ssi $\forall A \in \mathscr{P}(E)$, $f^{-1}\big(f(A)\big) = A$.
4. Montrer que f est surjective ssi $\forall B \in \mathscr{P}(F)$, $f\big(f^{-1}(B)\big) = B$.

Exercice 2.16.

1. Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1 + x + x^2$. Est-elle injective ? Est-elle surjective ?
2. Soit g l'application de $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $g(x) = \frac{2x-1}{x+2}$. Est-elle injective ? Est-elle surjective ?

3 Composition, réciprocité

Soit E, F, G et H quatre ensembles.

Composition. Si f est une application de E dans F et g une application de F dans G alors $g \circ f$ est l'application de E dans G définie par : $\forall x \in E \quad (g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$.

Théorème (associativité). Si f est une application de E dans F, g une application de F dans G et h une application de G dans H alors $h \circ \big(g \circ f\big) = \big(h \circ g\big) \circ f$.

Application réciproque. Soit f une application de E dans F. On dit que f admet une réciproque (ou inverse) ssi il existe une application g de F dans E telle que

$$\forall (x, y) \in E \times F \qquad y = f(x) \iff g(y) = x.$$

Si une telle application g existe, elle est unique et notée f^{-1}.

Théorème (réciprocité). Soit f une application de E dans F. Alors f admet une réciproque ssi f est bijective.

Exercice 3.1 (composition, réciprocité)**.** Soient f, g les deux applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par $f(x) = 2x + 1$ et $g(x) = 7x^2 - 2$. Montrer que f admet une application réciproque (que l'on calculera), puis que g n'en admet pas. Calculer $g \circ f$ et $f \circ g$.

Exercice 3.2 (composition, réciprocité)**.** Soient les applications f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ et g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ définies par $f(x, y) = 2x + 3y + 1$ et $g(t) = (t, 2t - 1)$. Calculer $g \circ f$ et $f \circ g$. Montrer que $f \circ g$ admet une application réciproque (que l'on calculera), puis que $g \circ f$ n'en admet pas.

Exercice 3.3 (composition, associativité)**.** Soient les applications f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$, g de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ et h de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ définies par $f(x, y, z) = (2x, y + z)$, $g(u, v) = v - u$ et $h(t) = (3t + 1, 2t)$. Calculer $h \circ g$ puis $h \circ \big(g \circ f\big)$.

Exercice 3.4 (réciprocité)**.** Soit l'application f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (2x + y, x - 2y)$. Démontrer que f admet une application réciproque (que l'on calculera).

Exercice 3.5 (réciprocité)**.** Soit l'application f de $]\,1, +\infty\,[$ dans $]\,0, +\infty\,[$ définie par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^3 - 1}}$. Démontrer que f admet une application réciproque (que l'on calculera).

Exercice 3.6 (réciproque du sinus hyperbolique)**.** Soit l'application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$. Démontrer que f admet une application réciproque (que l'on calculera).

Exercice 3.7 (réciprocité)**.** Soit les applications f de $\mathbb{R}$ dans $]-1,+1[$ et g de $]-1,+1[$ dans $\mathbb{R}$ définies par $f(x)=\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$ et $g(y)=\frac{1}{2}\ln\frac{1+y}{1-y}$. Calculer $f\circ g$ et $g\circ f$ puis en déduire que f admet une application réciproque (que l'on calculera).

Exercice 3.8 (réciprocité)**.** L'application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x)=1+x+x^2$ admet-elle une application réciproque ?

Exercice 3.9 (réciprocité)**.** L'application f de $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x)=\frac{2x-1}{x+2}$ admet-elle une application réciproque ?

Exercice 3.10 (composition, injection, surjection)**.** Démontrer que

1. la composée de deux injections est une injection,
2. la composée de deux surjections est une surjection.

En déduire que la composée de deux bijections est une bijection.

Exercice 3.11. Soit f la fonction de E dans F définie par $f(x)=2+x^2$.

1. Supposons que $E=F=\mathbb{R}$.
   1.1. Montrer que f est une application.
   1.2. Montrer que f n'est pas une application injective.
   1.3. Montrer que f n'est pas une application surjective.
2. Supposons que $E=]-\infty,0]$ et $F=[2,+\infty[$.
   2.1. Montrer que f est une application bijective.
   2.2. Trouver l'application f^{-1} réciproque (inverse) pour f.

Exercice 3.12. Soit f la fonction de E dans F définie par $f(x)=-x^2$.

1. Supposons que $E=F=\mathbb{R}$.
   1.1. Montrer que f est une application.
   1.2. Montrer que f n'est pas une application injective.
   1.3. Montrer que f n'est pas une application surjective.
2. Supposons que $E=]-\infty,0]$ et $F=]-\infty,0]$.
   2.1. Montrer que f est une application bijective.
   2.2. Trouver l'application f^{-1} réciproque (inverse) pour f.

Exercice 3.13. Soit f la fonction de E dans F définie par $f(x)=1-x^2$.

1. Supposons que $E=F=\mathbb{R}$.
   1.1. Montrer que f est une application.
   1.2. Montrer que f n'est pas une application injective.
   1.3. Montrer que f n'est pas une application surjective.
2. Supposons que $E=[0,+\infty[$ et $F=]-\infty,1]$.
   2.1. Montrer que f est une application bijective.
   2.2. Trouver l'application f^{-1} réciproque (inverse) pour f.

4 Maximum, minimum

Soit X un ensemble ordonné (par exemple $\mathbb{R}$) et soit Y une partie de X.

Majorant. Un élément $a \in X$ est appelé majorant de Y si $a \geq y$ pour tout $y \in Y$.

Minorant. Un élément $a \in X$ est appelé minorant de Y si $a \leq y$ pour tout $y \in Y$.

Ensemble majoré, minoré, borné.
▷ Si Y admet des majorants, on dit que Y est majoré.
▷ Si Y admet des minorants, on dit que Y est minoré.
▷ Si Y est majoré et minoré, on dit que Y est borné.

Supremum. $a \in X$ est appelé borne supérieure de Y si c'est le plus petit des majorants de Y. Si elle existe, elle est unique et est notée $\sup Y$.

Infimum. $a \in X$ est appelé borne inférieure de Y si c'est le plus grand des minorants de Y. Si elle existe, elle est unique et est notée $\inf Y$.

Maximum. $a \in X$ est appelé plus grand élément de Y ou élément maximale de Y ou max de Y si $a \in Y$ et a est majorant de Y.

Minimum. $a \in X$ est appelé plus petit élément de Y ou élément minimale de Y ou min de Y si $a \in Y$ et a est minorant de Y.

Nota bene : on a les implications suivantes

1. "a est le max de Y" $\implies$ "a est le sup de Y" $\implies$ "a est majorant de Y";
2. "a est le min de Y" $\implies$ "a est le inf de Y" $\implies$ "a est minorant de Y".

Les réciproques sont fausses.

Supremum, infimum, maximum et minimum d'une fonction. Soient E un ensemble et $f : E \mapsto \mathbb{R}$ une fonction. On appelle borne supérieure de f dans E la borne supérieure de l'image directe de E par f, c'est-à-dire $\sup f(E)$. De la même manière on définit la borne inférieure de f dans E, ainsi que le maximum et le minimum et on les note

$$\sup_E f(x) \qquad \inf_E f(x) \qquad \max_E f(x) \qquad \min_E f(x).$$

Exercice 4.1. Calculer

$$\sup_{x\in[1,2]} \frac{1}{x} \qquad \sup_{x\in]1,2[} \frac{1}{x} \qquad \sup_{x>0} \frac{1}{x} \qquad \inf_{x>0} \frac{1}{x}$$

Exercice 4.2. Soit $\mathscr{S}$ le sous-ensemble de $\mathbb{R}$ défini par

$$\mathscr{S} := \Big]-2,-1\Big[\cup \Big]0,\frac{1}{2}\Big[.$$

Calculer inf et sup de chacun des ensembles suivants en spécifiant s'ils sont respectivement aussi max et min.

$$\mathscr{A} := \left\{\log_{10}\left|\frac{x}{y}\right| \;:\; x,y\in\mathscr{S}\right\}, \qquad \mathscr{B} := \left\{2^{xy} \;:\; x,y\in\mathscr{S}\right\},$$
$$\mathscr{C} := \left\{2^{x/y} \;:\; x,y\in\mathscr{S}\right\}, \qquad \mathscr{D} := \left\{\sin(x+y) \;:\; x,y\in\mathscr{S}\right\},$$
$$\mathscr{E} := \left\{\cos(x+y) \;:\; x,y\in\mathscr{S}\right\}.$$

Exercice 4.3. Soit $\mathscr{S}$ le sous-ensemble de $\mathbb{R}$ défini par

$$\mathscr{S} := \Big[-1,0\Big[\cup \Big]1,2\Big[.$$

Calculer $\inf\limits_{(x,y)\in\mathscr{S}^2} f(x,y)$ et $\sup\limits_{(x,y)\in\mathscr{S}^2} f(x,y)$ de chacune des fonctions suivantes en spécifiant s'ils sont respectivement aussi max et min.

1. $f(x,y) = x\log_{10}|y|$
2. $f(x,y) = \sin(xy)$
3. $f(x,y) = \cos(xy)$
4. $f(x,y) = e^{-x} + (y-3/2)^2$

Exercice 4.4. Pour chacune des parties $A_i \subset \mathbb{R}$ ci-dessous, déterminer si A_i est majorée, minorée, bornée, si elle admet une borne supérieure, une borne inférieure, un maximum, un minimum (justifier chaque réponse).

$A_1 = \{1,2,3,5,12\}$ $\qquad A_4 = \{3+7q \;:\; q\in\mathbb{N}\}$ $\qquad A_7 = \{p/3^n \;:\; p,n\in\mathbb{N}^*\}$

$A_2 = \mathbb{N}$ $\qquad A_5 = \{3-7q \;:\; q\in\mathbb{N}\}$ $\qquad A_8 = \mathbb{R}$

$A_3 = \mathbb{Z}$ $\qquad A_6 = \{p/3^n \;:\; p,n\in\mathbb{N}\}$ $\qquad A_9 =]5,6]$

Exercice 4.5. Soient $E = F = \mathbb{R}$ et f l'application définie par $f(x) = 2x^2+1$. Soit $A = [-2,1]$. Trouver

1. $f(A)$,
2. $f^{-1}\big(f(A)\big)$,
3. $\sup\limits_A f$ (est-il maximum ?),
4. $\inf\limits_A f$ (est-il minimum ?).

Exercice 4.6. Soient $E = F = \mathbb{R}$ et f l'application définie par $f(x) = 1-2x^2$. Soit $A = [-2,1]$. Trouver

1. $f(A)$,
2. $f^{-1}\big(f(A)\big)$,
3. $\sup_A f$ (est-il maximum ?),
4. $\inf_A f$ (est-il minimum ?).

Exercice 4.7. Soient $E = F = \mathbb{R}$ et f l'application définie par $f(x) = 1 - x^2$. Soit $B = [-3, 1]$. Trouver

1. $f^{-1}(B)$,
2. $f\big(f^{-1}(B)\big)$,
3. $\sup_B f^{-1}$ (est-il maximum ?),
4. $\inf_B f^{-1}$ (est-il minimum ?).

5 Nombres complexes

Forme algébrique

Définitions Tout nombre $z \in \mathbb{C}$ s'écrit, de manière unique, sous la forme algébrique $z = x + iy$ où $x, y \in \mathbb{R}$ et i est tel que $i^2 = -1$. Le réel x s'appelle "partie réelle de z" et se note $\Re(z)$. Le réel y s'appelle "partie imaginaire de z" et se note $\Im(Z)$. Si $y = 0$ alors $z \in \mathbb{R}$, si $x = 0$ alors z est un imaginaire pur.

Égalité Deux nombres complexes $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ sont égaux ssi $(x, y) = (x', y')$. Attention : il n'y a pas d'inégalité en $\mathbb{C}$.

Opérations Soient deux nombres complexes $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$.

$$z + z' = (x + x') + i(y + y'), \qquad zz' = (xx' - yy') + i(xy' + x'y).$$

Conjugué Le conjugué d'un nombre complexe $z = x + iy$ est le numéro complexe $\bar{z} = x + i(-y)$ et on a

$$\bar{\bar{z}} = z, \qquad \overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}', \qquad \overline{zz'} = \bar{z}\bar{z}', \qquad \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'}, \qquad z + \bar{z} = 2\Re(z), \qquad z - \bar{z} = 2\Im(z).$$

Forme trigonométrique Tout nombre complexe non nul z s'écrit sous forme trigonométrique $z = \varrho(\cos\vartheta + \sin\vartheta)$ avec $\varrho > 0$ le module de z et ϑ un argument de z.

Module Le module d'un nombre complexe $z = x + iy$ est le nombre réel positif $\sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$. On le note $|z|$ ou ϱ ou r. On a

$$|z| = 0 \iff z = 0; \qquad |\Re(z)| \le |z|; \qquad |\Im(z)| \le |z|;$$

$$|zz'| = |z|\,|z'|; \qquad |z^n| = |z|^n, \text{ pour } n \in \mathbb{N}; \qquad \left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|};$$

$$\Big||z| - |z'|\Big| \le |z - z'| \le |z| + |z'|.$$

Argument On le note $\arg(z)$ et il est défini, modulo 2π, par $\cos\vartheta = \frac{x}{\varrho}$ et $\sin\vartheta = \frac{y}{\varrho}$. On a (à $2k\pi$ près, $k \in \mathbb{Z}$)

$$\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z'); \qquad \arg(1/z) = -\arg(z);$$
$$\arg(z/z') = \arg(z) - \arg(z'); \qquad \arg(z^n) = n\arg(z), \text{ pour } n \in \mathbb{Z}.$$

Forme exponentielle Tout nombre complexe non nul z s'écrit sous forme exponentielle $z = \varrho e^{i\vartheta}$.

▷ Formule de Moivre : pour tout $\vartheta \in \mathbb{R}$ et pour tout $k \in \mathbb{Z}$

$$z^n = (\varrho(\cos\vartheta + \sin\vartheta))^n = \varrho^n(\cos(n\vartheta) + \sin(n\vartheta)) = \varrho^n e^{in\vartheta}.$$

▷ Formules d'Euler : pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $k \in \mathbb{Z}$ on a

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \qquad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i},$$
$$\cos(nx) = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2}, \qquad \sin(nx) = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}.$$

Racines n-ièmes Tout nombre complexe non nul $z=\varrho e^{i\vartheta}$ possède n racines n-ièmes

$$z_k=\sqrt[n]{\varrho}e^{i\frac{\vartheta+2k\pi}{n}} \text{ avec } k\in\{0,1,\dots,n-1\}.$$

Pour déterminer les racines carrées de $z=x+iy$ il est plus simple de procéder par identification, c'est-à-dire de chercher les réels α et β tels que $(x+iy)=(\alpha+i\beta)^2$; on obtient

$$\begin{aligned}\alpha^2+\beta^2&=\sqrt{x^2+y^2},\\ 2\alpha\beta&=y.\end{aligned}$$

L'équation $az^2+bz+c=0$, où $a\neq 0$, b et c appartiennent à $\mathbb{C}$, admet deux solutions dans $\mathbb{C}$ (pas nécessairement distinctes) :

$$z_1=\frac{-b+\delta}{2a}, \qquad z_2=\frac{-b-\delta}{2a},$$

où δ est une racine carrée de $\Delta=b^2-4ac$.

Exercice 5.1. Calculer les racines carrées de

(a) 1
(b) i
(c) $3+4i$
(d) $8-6i$
(e) $7+24i$
(f) $3-4i$
(g) $24-10i$
(h) $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$

Exercice 5.2. Calculer

1. les racines carrées de $z=4ab+2(a^2-b^2)i$ avec $a,b\in\mathbb{R}$,
2. les racines cubiques du nombre complexe $1+i$,
3. les racines cubiques de $z=\frac{-1+i}{4}$.

Exercice 5.3. Trouver toutes les solutions complexes des équations

1. $z^2=2$,
2. $z^2=3i$,
3. $z^2=2+3i$,
4. $z^2=1+bi$ (b est un paramètre réel),
5. $z^2=a^4$ (a est un paramètre complexe),
6. $z^2-2iz+2-4i=0$,
7. $z^2+2z+(1-2i)=0$,
8. $z^2+2(1+i)z-5(1+2i)=0$,
9. $z^2+2(1-2i)z-8+\sqrt{3}=0$,
10. $z^2-(5+3i)z+7i+4=0$,
11. $z^2-\sqrt{3}z-i=0$,
12. $z^2+z+1=0$,
13. $z^2-(1+2i)z+i-1=0$,
14. $z^2-(5-14i)z-2(5i+12)=0$,
15. $z^2-(3+4i)z-1+5i=0$,
16. $4z^2-2z+1=0$,
17. $z^2-(11-5i)z+24-27i=0$,
18. $z^4+2z^2+4=0$,
19. $x^2+|x|-2=0$,
20. $x^2+|x|+2=0$.

6 Fonctions polynomiales

Fonctions polynomiales. Une application P de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ est polynomiale s'il existe une famille finie $\{a_n, \dots, a_1, a_0\}$ de nombres complexes telle que pour tout $x \in \mathbb{C}$,

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n.$$

Pour faire bref, nous ferons un abus de langage en utilisant le terme "polynôme" pour "application polynomiale".

Théorème et définition (degré). Pour tout polynôme non nul P, il existe un unique entier $n \in \mathbb{N}$ et une unique famille $\{a_n, \dots, a_1, a_0\}$ de nombres complexes telle que

$$a_n \neq 0 \quad \text{et} \quad \big(\forall x \in \mathbb{C} \quad P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n\big).$$

L'entier n est, par définition, le degré de P (on le note $\mathrm{d}^o P$).

Le polynôme nul n'a pas de degré, mais par convention $\mathrm{d}^o 0 < \mathrm{d}^o g$ pour tout polynôme non nul g.

Théorème (division euclidienne). Soient f et g deux polynômes avec g non nul. Alors il existe un unique couple (Q, R) de polynômes vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{C} \quad f(x) = g(x)Q(x) + R(x) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{d}^o R < \mathrm{d}^o g.$$

Q s'appelle le quotient et R le reste. On dit que f est divisible par g si $R = 0$.

Racine, multiplicité. Un nombre complexe a est racine d'un polynôme P si $P(a) = 0$. L'ordre de multiplicité d'une racine a de P est le plus grand entier n tel que "$(x-a)^n$" divise P.

On montre facilement (voir exercice 6.3) que a est racine de P si et seulement si P est divisible par $(x-a)$.

Théorème (décomposition de D'Alembert-Gauss). Soit P un polynôme de degré supérieur ou égal à 1. Alors l'ensemble des racines de P est fini et non vide. Notons $x_1, \dots, x_k$ les k racines deux à deux distinctes de P et n_i l'ordre de multiplicité de x_i. Alors il existe un unique $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{C}$,

$$P(x) = a\big(x - x_1\big)^{n_1} \dots \big(x - x_k\big)^{n_k}.$$

On a donc $n_1 + \cdots + n_k = \mathrm{d}^o P$.

Théorème (Taylor). Soit P un polynôme de degré $n \geq 1$. Pour tout $x_0 \in \mathbb{C}$ et tout $x \in \mathbb{C}$,

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(x_0) \frac{(x - x_0)^k}{k!}$$

où $P^{(k)}(x_0)$ est la dérivée d'ordre k en x_0.

Théorème. Soient P un polynôme et x_0 une racine de P. Elle est de multiplicité n si et seulement si

$$P^{(n)}(x_0) \neq 0 \qquad \text{et} \qquad P^{(k)}(x_0) = 0 \text{ pour tout } k \leq n-1.$$

Exercice 6.1 (division euclidienne)**.** Effectuer la division euclidienne de f par g dans les cas suivants

1. $f(x) = 7x^4 - x^3 + 2x - 4$ et $g(x) = x^2 - 3x + 5$,
2. $f(x) = x^5 - x^4 - x + 1$ et $g(x) = x^2 - 2x + 1$.

Exercice 6.2 (résolution d'équations polynomiales)**.** Trouver toutes les solutions complexes des équations

1. $z^3 - i = 6(z + i)$,
2. $z^4 + 10z^1 + 169 = 0$,
3. $z^3 + 3z - 2i = 0$,
4. $z^6 + z^3(z+1)^3 + (z+1)^6 = 0$. *Poser $x = 1 + \frac{1}{z}$*

Exercice 6.3. Si a et b sont deux nombres complexes alors on a les deux identités remarquables

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 &= (a-b)(a+b), \\ a^3 - b^3 &= (a-b)(a^2 + ab + b^2). \end{aligned}$$

Ces identités admettent la généralisation suivante : avec la convention $a^0 = b^0 = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$a^n - b^n = (a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k-1}.$$

1. Démontrer cette formule par récurrence sur n.
2. En déduire qu'un nombre complexe a est racine d'un polynôme P si et seulement si le polynôme $g(x) := x - a$ divise le polynôme P.

Exercice 6.4 (multiplicité)**.** Calculer la multiplicité de la racine x_0 de P dans les cas suivants :

▷ $x_0 = 1$ et $P(x) = x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 2$,
▷ $x_0 = i$ et $P(x) = x^3 - ix^2 + x - i$.

Exercice 6.5.

1. On considère le polynôme
$$P(x) := x^5 - 2x^4 + x^3 + x^2 - 2x + 1.$$
   1.1. Écrire la formule de Taylor de P en 1. Montrer que 1 est une racine de P et en déterminer son ordre de multiplicité.
   1.2. Factoriser P sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$.
2. On considère le polynôme
$$P(x) := x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 2.$$
   2.1. Montrer que $x = 1$ est une racine du polynôme et en déterminer son ordre de multiplicité.
   2.2. Factoriser P à l'aide de la formule de Taylor.
3. On considère le polynôme
$$P(x) = x^5 - x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 5x + 2.$$
   3.1. Écrire la formule de Taylor de P en 1 ; montrer que 1 est une racine de P et déterminer son ordre de multiplicité.
   3.2. Factoriser P sur $\mathbb{R}$ en sachant qu'il possède une autre racine réelle évidente (*i.e.* elle est un diviseur du terme de degré 0).

3.3. Factoriser P sur $\mathbb{C}$.

4. On considère le polynôme
$$P(x) = x^5 - x^4 - 2x^3 + x^2 - x - 2.$$
4.1. Écrire la formule de Taylor de P en -1 ; montrer que -1 est une racine de P et déterminer son ordre de multiplicité.

4.2. Factoriser P sur $\mathbb{R}$ en sachant qu'il possède une autre racine réelle évidente (*i.e.* elle est un diviseur du terme de degré 0).

4.3. Factoriser P sur $\mathbb{C}$.

5. On considère le polynôme
$$P(x) = x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 11x^2 + 7x - 2.$$
5.1. Écrire la formule de Taylor de P en 1 ; montrer que 1 est une racine de P et déterminer son ordre de multiplicité.

5.2. Factoriser P sur $\mathbb{R}$ en sachant qu'il possède une autre racine réelle évidente (*i.e.* elle est un diviseur du terme de degré 0).

5.3. Factoriser P sur $\mathbb{C}$.

6. On considère le polynôme
$$P(x) = x^6 - 5x^5 + 10x^4 - 12x^3 + 11x^2 - 7x + 2.$$
6.1. Écrire la formule de Taylor de P en 1 ; montrer que 1 est une racine de P et déterminer son ordre de multiplicité.

6.2. Factoriser P sur $\mathbb{R}$ en sachant qu'il possède une autre racine réelle évidente (*i.e.* elle est un diviseur du terme de degré 0).

6.3. Factoriser P sur $\mathbb{C}$.

7. On considère le polynôme
$$P(x) = x^8 + 5x^7 + 9x^6 + 7x^5 + 3x^4 + 5x^3 + 9x^2 + 7x + 2.$$
7.1. Écrire la formule de Taylor de P en -1 ; montrer que -1 est une racine de P et déterminer son ordre de multiplicité.

7.2. Factoriser P sur $\mathbb{R}$ en sachant qu'il possède une autre racine réelle évidente (*i.e.* elle est un diviseur du terme de degré 0).

7.3. Factoriser P sur $\mathbb{C}$.

Exercice 6.6 (factorisation)**.** Factoriser les polynômes suivants en exploitant les informations données
- ▷ $P(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$,
- ▷ $P(x) = 2x^3 - (5+6i)x^2 + 9ix + 1 - 3i$ (P possède une racine réelle),
- ▷ $P(x) = x^3 - 2x^2 - (i+2)x + 3i - 3$ (P possède une racine réelle),
- ▷ $P(x) = x^3 + (3i-2)x^2 - (2+6i)x + 4$ (P possède une racine réelle),
- ▷ $P(x) = x^4 + \frac{1}{2}x^3 + ix + \frac{1}{2}i$ (P possède une racine réelle),
- ▷ $P(x) = x^5 + 3x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 3x + 1$ (P possède une racine évidente),
- ▷ $P(x) = 2x^4 + x^3 - 6x^2 + x + 2$ (poser $u = x + \frac{1}{x}$).

Exercice 6.7 (multiplicité)**.** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ le polynôme $P_n(x) := 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$ n'a pas de racines multiples. *On pourra calculer P' et l'exprimer en fonction de P.*

Exercice 6.8. Soient a et b deux nombres complexes et $P(x) := x^4 - 2ix^3 + 3(1+i)x^2 + ax + b$.
▷ Calculer a et b pour que i soit une racine multiple de P.
Dans toute la suite, on suppose que i est une racine multiple de P.
▷ Quelle est la multiplicité de la racine i de P ?
▷ Calculer les autres racines de P.

Exercice 6.9. Montrer que le polynôme $P(x) := 2x^4 - 7x^3 + 9x^2 - 5x + 1$ admet une racine triple que l'on déterminera, puis factoriser P à l'aide de la formule de Taylor.

Exercice 6.10. Soit x_1, x_2, x_3 les trois racines du polynôme $P(x) := x^3 - 3x^2 + 2x + 1$. Sans calculer les racines de P, donner les valeurs
▷ $\sigma_1 := x_1 + x_2 + x_3$,
▷ $\sigma_2 := x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1$,
▷ $\sigma_3 := x_1x_2x_3$,
▷ $A := x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$.

Exercice 6.11 (division par les puissances croissantes)**.** Effectuer la division de $A(x) := 1 + x^2 + x^4$ par $B(x) := 1 + x + x^3$ suivant les puissances croissantes à l'ordre quatre.

Exercice 6.12. Factoriser $P(x) := x^8 + x^4 + 1$ sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$. *On remarquera pour commencer que $P(x) = (x^4+1)^2 - x^4$.*

Exercice 6.13. Factoriser $P(x) := x^6 - i$ sans utiliser la méthode trigonométrique. En déduire $\sin\frac{\pi}{12}$ et $\cos\frac{\pi}{12}$. *On remarquera pour commencer que $P(x) = (x^2)^3 - (-i)^3$.*

Exercice 6.14. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. On considère le polynôme P défini par $P = ax^{n+1} + bx^n + 1$. Déterminer les réels a et b pour que P soit divisible par $(x-1)^2$.

Exercice 6.15. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que $P = x^{n+1} + x^n - 2x^{n-1} + nx - n$ est divisible par $(x-1)$.

Exercice 6.16. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que $P = (x-2)^{2n} + (x-1)^n - 1$ est divisible par $x^2 - 3x + 2$.

Exercice 6.17. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$. Démontrer que $P = nx^{n+2} - (n+2)x - n$ est divisible par $(x-1)^3$. P est-il divisible par $(x-1)^4$?

7 Suites numériques et limites

Suites. Une suite numérique est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$. La notation traditionnelle est $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

N.B. Dans ce qui suit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désigne toujours une suite numérique.

Limite d'une suite.

On dit qu'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $x \in \mathbb{R}$ (on écrit $\lim_n x_n = x$) si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n > N \implies |x_n - x| < \varepsilon.$$

On dit qu'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers plus l'infini (on écrit $\lim_n x_n = +\infty$) si

$$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n > N \implies x_n > M.$$

On dit qu'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers moins l'infini (on écrit $\lim_n x_n = -\infty$)

$$\forall m \in \mathbb{R} \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n > N \implies x_n < m.$$

La suppression d'un nombre fini de termes ne modifie pas la nature de la suite, ni sa limite éventuelle.

Suite convergente. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. On dit que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente s'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $\lim_n x_n = x$.

Suite de Cauchy. On dit que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie le critère de Cauchy si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall (p,q) \in \mathbb{N}^2 \quad p,q > N \implies |x_q - x_p| < \varepsilon.$$

Théorème de complétude. Une suite est convergente si et seulement si elle vérifie le critère de Cauchy.

Suite bornée, suite monotone.
- ▷ Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante lorsque pour tout n, $x_n \le x_{n+1}$.
- ▷ Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante lorsque pour tout n, $x_n \ge x_{n+1}$.
- ▷ Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée s'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout n, $x_n \le a$. On dit que a est un majorant de la suite.
- ▷ Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée s'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout n, $x_n \ge a$. On dit que a est un minorant de la suite.
- ▷ Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite bornée si elle est à la fois majorée et minorée, c'est-à-dire s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $|x_n| \le M$ pour tout n.

Théorème (condition suffisante). Tout suite convergente est bornée.

Une suite non bornée ne peut donc pas être convergente.

Théorème de la convergence monotone (conditions suffisantes).
▷ Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui est croissante et majorée est convergente et $\lim_n x_n = \sup_n x_n$.
▷ Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui est croissante et non majorée diverge vers $+\infty$.
▷ Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui est décroissante et minorée est convergente et $\lim_n x_n = \inf_n x_n$.
▷ Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui est décroissante et non minorée diverge vers $-\infty$.

Théorème d'encadrement (condition suffisante). Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. S'il existe deux suites convergentes $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ayant une même limite $x \in \mathbb{R}$ et satisfaisant

$$\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n > N \implies u_n \le x_n \le v_n,$$

alors $\lim_n x_n = x$.

Valeur d'adhérence. On dit que $\ell \in \mathbb{R}$ est une valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ssi il existe une sous-suite extraite qui converge vers ℓ.

Théorème Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. Si (x_n) converge vers ℓ, toute sous-suite converge aussi vers ℓ.

Si une suite extraite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge, ou si deux suites extraites de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ont des limites différentes, alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

Si deux suites extraites de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite ℓ et si x_n est un terme d'une de ces suites extraites, alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers ℓ. Par exemple, si (x_{2n}) et (x_{2n+1}) convergent vers ℓ, alors (x_n) converge vers ℓ.

Suites adjacentes Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes si
▷ (u_n) est croissante,
▷ (v_n) est décroissante,
▷ $\lim_n(u_n - v_n) = 0$.

Théorème Si deux suites sont adjacentes, elles convergent et ont la même limite.

Limites fondamentaux

$$\lim_n n\sin\left(\tfrac{1}{n}\right) = 1 \qquad (n \text{ en radiant}) \qquad \lim_n n^2\Big(1-\cos\left(\tfrac{1}{n}\right)\Big) = \tfrac{1}{2} \qquad (n \text{ en radiant})$$

$$\lim_n \left(1+\tfrac{\alpha}{n}\right)^n = e^\alpha \qquad (\alpha \in \mathbb{R}) \qquad \lim_n n\Big(\ln\left(1+\tfrac{1}{n}\right)\Big) = 1$$

$$\lim_n n\Big(a^{1/n}-1\Big) = \ln a \qquad (a>0) \qquad \lim_n n\Big(\left(1+\tfrac{1}{n}\right)^\alpha - 1\Big) = \alpha \qquad (\alpha \in \mathbb{R})$$

$$\lim_n \frac{P(n)}{Q(n)} = \begin{cases} 0 & \text{si } a<b, \\ \frac{p_a}{q_b} & \text{si } a=b, \\ \infty & \text{si } a>b, \end{cases} \qquad \text{avec} \qquad \begin{array}{l} P(n) = p_0 + p_1 n + \cdots + p_a n^a, \\ Q(n) = q_0 + q_1 n + \cdots + q_b n^b. \end{array}$$

Exercice 7.1 (limites connues)**.** Montrer que pour $k>1$, $\alpha>0$ et $\beta>0$

$$\lim_n \frac{k^n}{n!}=0, \qquad \lim_n \frac{n^\alpha}{k^n}=0, \qquad \lim_n \frac{(\ln n)^\beta}{n^\alpha}=0.$$

Exercice 7.2. Montrer que la suite $(\frac{n!}{n^n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

Exercice 7.3. Montrer que la suite $((n!)^{\frac{1}{n}})_{n\in\mathbb{N}^*}$ diverge vers $+\infty$.

Exercice 7.4. Quel lien y a t-il entre les deux résultats suivants ?

$$\lim_n \frac{\ln n}{n}=0 \qquad \lim_n n^{\frac{1}{n}}=1$$

Exercice 7.5. Calculer, si elles existent, les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2\left(1-\cos\dfrac{2}{n}\right)$, *b)* $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2\left(1-\cos\dfrac{2}{\sqrt{n}}\right)$, *c)* $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(1-\cos\dfrac{2}{n}\right)$,

d) $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2\left((-1)^n-\cos\dfrac{1}{n}\right)$, *e)* $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(n\sin\dfrac{2}{n}\right)$, *f)* $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(n\sin\dfrac{2}{\sqrt{n}}\right)$,

g) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n}\sin\dfrac{2}{n}\right)$, *h)* $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(n\sin\dfrac{(-1)^n}{n}\right)$, *i)* $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\dfrac{2}{n}\right)^n$,

j) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\dfrac{2}{\sqrt{n}}\right)^n$, *k)* $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\dfrac{2}{n}\right)^{\sqrt{n}}$, *l)* $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\dfrac{(-1)^n}{n}\right)^n$.

Exercice 7.6. Étudier la convergence de la suite $(n^r)_{n\in\mathbb{N}^*}$ suivant la valeur de $r\in\mathbb{Q}$.

Exercice 7.7 (Suite géométrique de raison λ)**.** Étudier la convergence de la suite $(\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ suivant la valeur de $\lambda\in\mathbb{R}$.

Exercice 7.8 (Série géométrique)**.** Soit $\lambda\in\mathbb{R}$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $x_n:=\sum_{k=0}^n\lambda^k$.

1. Montrer que si $|\lambda|<1$ alors la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\frac{1}{1-\lambda}$.
2. Montrer que si $\lambda\geq 1$ alors la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.
3. Montrer que si $\lambda=-1$ alors la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et divergente.
4. Montrer que si $\lambda<-1$ alors la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non bornée.

Exercice 7.9 (Série harmonique)**.** Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, où $x_n:=\sum_{k=1}^n\frac{1}{k}$, diverge vers $+\infty$.

Exercice 7.10. Montrer que

1. la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, où $x_n:=\sum_{k=1}^n\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{1+k}\right)$, est convergente ;
2. la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, où $y_n:=\sum_{k=1}^n\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{1+k}\right)\sin(k\theta)$ et $\theta\in\mathbb{R}$, est convergente.

On pourra utiliser le critère de Cauchy.

Exercice 7.11. Calculer, si elles existent, les limites des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ suivantes : $\forall n \in \mathbb{N}^*$

a) $u_n > \ln n$ *b)* $\dfrac{1}{n+1} \le u_n \le \dfrac{1}{n}$ *c)* $\dfrac{1}{n+1} \le u_n \le \dfrac{1}{n}$ *d)* $u_n \nearrow$ et $u_n < 1 + \dfrac{1}{n}$

e) $u_n = \ln n + \sin(n)$ *f)* $u_n = \sin \dfrac{n\pi}{3}$ *g)* $u_n = \dfrac{n}{e} + \dfrac{1}{e^n}$ *h)* $u_n = \dfrac{n}{n+1} \ln n$

i) $u_n = \dfrac{n^2}{n!}$ *j)* $u_n = \dfrac{(2n)!}{n!}$ *k)* $u_n = \dfrac{n\sin(n)}{n^2+1}$ *l)* $u_n = \dfrac{n+(-1)^n}{3n-(-1)^n}$

m) $u_n = (n^2+n+1)^{1/n}$ *n)* $u_n = \dfrac{n!}{n^n}$ *o)* $u_n = \dfrac{n^2}{n^2+1}$ *p)* $u_n = (-1)^n \dfrac{n^2}{n^2+1}$

Exercice 7.12 (suite récurrente)**.** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2 - \frac{1}{u_n}$.

1. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bien définie qui satisfait $u_n > 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone puis en étudier la convergence.

Exercice 7.13 (suite récurrente)**.** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que $u_0 > 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = u_n^2 + 1$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n > 2$.
2. Montrer que la suite (u_n) est divergente.
3. Montrer que (u_n) est croissante et diverge vers $+\infty$.

Exercice 7.14 (suite récurrente)**.** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que $u_0 > 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = u_n^2 - 2$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n > 2$.
2. En supposant que $\lim_n u_n$ existe, la calculer.
3. Montrer que (u_n) est croissante et diverge vers $+\infty$.

Exercice 7.15 (suite récurrente)**.** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = 2u_n + 1$. Montrer qu'il existe une suite géométrique $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n - v_n = u_0 - v_0,$$

puis en déduire la limite de la suite (u_n) en fonction de u_0.

Exercice 7.16 (suite récurrente)**.**

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$.
   1.1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-1 < u_n < 2$.
   1.2. En supposant que la limite de u_n existe, la calculer.
   1.3. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite monotone et en étudier sa convergence.
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n^2}$.
   2.1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.
   2.2. En supposant que la limite de u_n existe, la calculer.
   2.3. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite monotone et en étudier sa convergence.
3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que $u_0 = \frac{1}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = \frac{u_n^2+u_n}{2}$.
   3.1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < 1$.
   3.2. En supposant que la limite de u_n existe, la calculer.
   3.3. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite monotone et en étudier sa convergence.
4. Soit (u_n) une suite telle que $u_0 > \frac{3}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = u_n^2 - \frac{3}{4}$.

4.1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > \frac{3}{2}$.

4.2. En supposant que la limite de u_n existe, la calculer.

4.3. Montrer que (u_n) est une suite monotone et en étudier sa convergence.

5. Soit (u_n) une suite telle que $u_0 > 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = u_n^2 - 1$.

5.1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 2$.

5.2. En supposant que la limite de u_n existe, la calculer.

5.3. Montrer que (u_n) est une suite monotone et en étudier sa convergence.

6. Soit (u_n) une suite telle que $u_0 > \frac{15}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = u_n^2 - \frac{15}{4}$.

6.1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > \frac{15}{2}$.

6.2. En supposant que la limite de u_n existe, la calculer.

6.3. Montrer que (u_n) est une suite monotone et en étudier sa convergence.

Exercice 7.17 (suite récurrente)**.** Soit $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite récurrente définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = \frac{a+1+u_n}{a}$. On pose $v_n := u_{n+1} - u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $s_n := \sum_{k=0}^{k=n-1} v_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Exprimer v_n en fonction de v_{n-1}. En déduire qu'il existe une valeur a_0 de a (à préciser) pour laquelle $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite constante.
2. Montrer que pour tout $a \neq a_0$, la suite (v_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison.
3. Donner l'expression de v_n en fonction de n et de a.
4. Calculer $\lim_n s_n$ en fonction des valeurs de a.
5. Montrer que $u_n = 1 + s_n$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$. En déduire $\lim_n u_n$ en fonction des valeurs de a.

Exercice 7.18 (suites adjacentes)**.** Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites adjacentes, c'est à dire telle que (u_n) est croissante, (v_n) est décroissante et $\lim_n\big(v_n - u_n\big) = 0$. Montrer que $(v_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante puis que les deux suites convergent vers une même limite.

Exercice 7.19 (moyenne arithmético-harmonique)**.** Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites telles que $u_0 > 0$, $v_0 > 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n} \qquad \text{et} \qquad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$

1. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites bien définies puis que
$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad v_n \geq u_n.$$
2. Vérifier que la suite $(u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire.
3. Montrer que les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.

   On commencera par vérifier que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante
4. Calculer la limite commune au deux suites dans le cas particulier où $u_0 = 1$ et $v_0 = 2$.

Exercice 7.20 (moyenne géometrico-harmonique)**.** Soient a, b deux nombres réels tels que $0 < a < b$. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites telles que $u_0 = a$, $v_0 = b$ et

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \qquad \text{et} \qquad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$

Montrer que ces deux suites convergent et ont même limite (appelée *moyenne géométrico-harmonique* de a et b).

Exercice 7.21.

1. Donner l'exemple d'une suite non bornée (donc divergente).
2. Donner l'exemple d'une suite bornée et divergente.
3. Donner l'exemple de deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que (u_n) converge et (v_n) diverge et $(u_n v_n)$ diverge.
4. Donner l'exemple de deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que (u_n) converge et (v_n) diverge et $(u_n v_n)$ converge. Montrer qu'un tel exemple doit nécessairement satisfaire $\lim_n u_n = 0$.
5. Donner l'exemple de deux suites bornées $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que (u_n) diverge et (v_n) diverge et $(u_n v_n)$ converge.

Exercice 7.22. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ dans les cas suivants

$$(1) \quad u_n := \frac{n-(-1)^{n+1}}{n+(-1)^{n+1}}, \qquad (2) \quad u_n := \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}.$$

Exercice 7.23. Déterminer l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ dans les cas suivants

$$(1) \quad u_n := (-1)^n, \qquad (2) \quad u_n := \frac{(-1)^n}{1+\frac{1}{n}}, \qquad (3) \quad u_n := \sin\frac{n\pi}{2}.$$

8 Fonctions continues et limites

Soient f, g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$.

Limite en plus l'infini. Si $D_f \cap]\delta, +\infty[\neq \emptyset$ pour tout $\delta \in \mathbb{R}$ alors on dit que la limite de f quand x tend vers $+\infty$ est égale à $\ell \in \mathbb{R}$ (et on écrit $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$) si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta \in \mathbb{R} \quad \forall x \in D_f \quad x > \delta \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

On dit que la limite de f quand x tend vers $+\infty$ est égale à $+\infty$ (et on écrit $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$) si

$$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists \delta \in \mathbb{R} \quad \forall x \in D_f \quad x > \delta \implies f(x) > M.$$

On dit que la limite de f quand x tend vers $+\infty$ est égale à $-\infty$ (et on écrit $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$) si

$$\forall m \in \mathbb{R} \quad \exists \delta \in \mathbb{R} \quad \forall x \in D_f \quad x > \delta \implies f(x) < m.$$

Limite en moins l'infini. Les définitions sont du même type que ci-dessus. Il faut simplement remplacer $D_f \cap]\delta, +\infty[\neq \emptyset$ par $D_f \cap]-\infty, \delta[\neq \emptyset$ puis $x > \delta$ par $x < \delta$.

Limite en un point. Si $D_f \cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\neq \emptyset$ pour tout $\delta > 0$ alors on dit que la limite de f quand x tend vers x_0 est égale à $\ell \in \mathbb{R}$ (et on écrit $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$) si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D_f \quad |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

Cette limite peut exister même si f n'est pas définie en x_0. Mais si f est définie en x_0 et si $\lim_{x\to x_0} f(x)$ existe, alors $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

On dit que la limite de f quand x tend vers x_0 est égale à $+\infty$ (et on écrit $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$) si

$$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D_f \quad |x - x_0| < \delta \implies f(x) > M.$$

On dit que la limite de f quand x tend vers x_0 est égale à $-\infty$ (et on écrit $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$) si

$$\forall m \in \mathbb{R} \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D_f \quad |x - x_0| < \delta \implies f(x) < m.$$

Théorème (unicité). Si une fonction admet une limite ℓ en x_0, cette limite est unique.

Continuité en un point. On dit que f est continue en x_0 si $x_0 \in D_f$ et $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Continuité. On dit que f est continue si elle est continue dans tout point de son domaine de définition.

Prolongement par continuité. Soit f une fonction définie sur I et $x_0 \notin I$. Si $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$, la fonction $\widetilde{f}$ définie sur $I \cup \{x_0\}$ par $\widetilde{f}(x_0) = \ell$ et $\widetilde{f}(x) = f(x)$ pour $x \in I$ est la seule fonction continue en x_0 dont la restriction à I soit f. On l'appelle le prolongement par continuité de f à x_0.

Théorème (fonctions composées). Si $(x_0, f(x_0)) \in D_f \times D_g$ et f est continue en x_0 et g est continue en $f(x_0)$, alors $x_0 \in D_{g\circ f}$ et $g \circ f$ est continue en x_0.

Théorème (valeurs intermédiaires).

Formulation 1 L'image d'un intervalle de $\mathbb{R}$ par une fonction continue est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Formulation 2 Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et soient $a, b \in I$ avec $f(a) \leq f(b)$. Alors f atteint toutes les valeurs intermédiaires entre $f(a)$ et $f(b)$. Autrement dit :

$$\forall d \in [f(a), f(b)], \exists c \text{ compris entre } a \text{ et } b \text{ tel que } f(c) = d.$$

Théorème de la bijection. Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, alors f induit une bijection de I dans $f(I)$. De plus, sa bijection réciproque est continue sur I, monotone sur I et de même sens de variation que f.

Théorème d'encadrement (ou des gendarmes ou sandwich). Soit f, g et h trois fonctions définies au voisinage de x_0 et vérifiant $f \leq g \leq h$ au voisinage de x_0. Si f et h ont la même limite ℓ (finie ou infinie) en x_0 alors g a pour limite ℓ en x_0.

Comparaison au voisinage d'un point. Soit f et g deux fonctions définies sur I et soit x_0 un point (fini ou infini) appartenant à I ou une extrémité de I.

- ▷ On dit que f est dominée par g au voisinage de x_0, et on écrit $f = O(g)$, s'il existe $M > 0$ tel que $|f(x)| \leq M|g(x)|$ pour tout x d'un voisinage de x_0. Si g ne s'annule pas dans ce voisinage, cela signifie que $\frac{f}{g}$ est bornée dans ce voisinage.
- ▷ On dit que f est négligeable devant g ou que g est prépondérant devant f au voisinage de x_0, et on écrit $f = o(g)$, si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un voisinage de x_0 tel que $|f(x)| \leq \varepsilon|g(x)|$ pour tout x de ce voisinage. Si g ne s'annule pas dans ce voisinage, cela signifie que $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

Asymptotes

Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ (resp. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell$), la droite d'équation $y = \ell$ est une asymptote horizontale de la courbe représentative de f.

Si $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ (resp. $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$), la droite d'équation $x = x_0$ est une asymptote verticale de la courbe représentative de f.

Si $\lim_{x\to+\infty} (f(x) - (ax+b)) = 0$ (resp. $\lim_{x\to-\infty} f(x)(f(x) - (ax+b)) = 0$), la droite d'équation $y = ax+b$ est une asymptote oblique de la courbe représentative de f.

Exercice 8.1 (discontinuité de première espèce)**.** Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ satisfaisant

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \qquad f(x) := \frac{x}{|x|}.$$

Montrer que f n'est pas prolongeable par continuité en 0.

Exercice 8.2 (discontinuité de seconde espèce)**.** Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ satisfaisant

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \qquad f(x) := \sin \frac{1}{x}.$$

Montrer que f n'est pas prolongeable par continuité en 0.

Exercice 8.3 (fonction prolongeable par continuité)**.** Soit f l'application de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \qquad f(x) := x \sin \frac{1}{x}.$$

Montrer que f est prolongeable par continuité en 0.

Exercice 8.4. Étudier la continuité de la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) := \begin{cases} \lim_n \frac{x^n+1}{x^n-1} & \text{si } |x| \neq 1, \\ 1 & \text{si } |x| = 1. \end{cases}$$

Exercice 8.5. Étudier les limites quand x tend vers $+\infty$ des fonctions suivantes

$$f(x) := \sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x} \qquad \text{et} \qquad g(x) := \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} - \sqrt{x}.$$

Exercice 8.6. Calculer, en fonction des deux paramètres réels n et m, la limite suivante

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x^m} - \sqrt{1-x^m}}{x^n}$$

Exercice 8.7. Soient $E := [-2,-1[\cup \{0\} \cup]+1,+2]$ et $F := [-1,+1]$. Soit f l'application de E dans F définie par

$$\forall x \in E \qquad f(x) := \begin{cases} x+1 & \text{si } x \in [-2,-1[, \\ 0 & \text{si } x = 0, \\ x-1 & \text{si } x \in]+1,+2]. \end{cases}$$

Montrer que f est bijective et continue en tout point de E mais qu'il existe un point de F en lequel f^{-1} n'est pas continue.

Exercice 8.8. Étudier la continuité en 0 des fonctions f et g suivantes

$$f(x) := \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 1 & \text{si } x = 0, \end{cases} \qquad g(x) := \begin{cases} x\sin(x) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Exercice 8.9.

1. Soit f l'application définie par

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

   1.1. Établir si f est continue.

   1.2. En utilisant le théorème des valeurs intermédiaires, déduire le nombre de solutions de l'équation $x^2 - 16 = 0$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$ sans résoudre l'équation.

2. Soit f l'application définie par

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

   2.1. Établir si f est continue.

   2.2. En utilisant le théorème des valeurs intermédiaires, déduire le nombre de solutions de l'équation $x^2 - 16 = 0$ sur l'intervalle $]-\infty, 0[$ sans résoudre l'équation.

3. Soit f l'application définie par

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x) = \begin{cases} -x \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

   3.1. Établir si f est continue.

   3.2. En utilisant le théorème des valeurs intermédiaires, déduire le nombre de solutions de l'équation $x^2 - \sqrt{2} = 0$ sur l'intervalle $]-\infty, 0[$ sans résoudre l'équation.

4. Soit f l'application définie par

$$f\colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x) = \frac{x}{1 + e^{1/x}}.$$

   4.1. Montrer que f est continue.

   4.2. f est-elle prolongeable par continuité en 0 ?

   4.3. Calculer $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

5. Soit f l'application définie par

$$f\colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x) = x - 1 - \ln|x|.$$

   5.1. Établir si f est continue.

   5.2. Calculer les limites de f en 0, en $-\infty$ et en $+\infty$.

   5.3. Montrer qu'il existe un unique réel α appartenant à $]-0{,}3, -0{,}2[$ tel que $g(\alpha) = 0$.

Exercice 8.10. Soit $f(x) := \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\ln(x)}$. Quel est son domaine de définition ? Est-elle prolongeable par continuité en 0 ?

Exercice 8.11. Soit f l'application définie par

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto f(x) = \begin{cases} \frac{x \ln|x|}{x-1} & \text{si } x \notin \{0,1\}, \\ 1 & \text{si } x = 1, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Est-elle continue ?

Exercice 8.12 (application du théorème de la bijection)**.** Soit f l'application de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x - 2 + \ln(x)$.

1. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique qu'on notera a.
2. Soit g la bijection réciproque de f. Étudier monotonie et continuité de g en précisant son comportement aux bornes du domaine de définition.
3. Calculer $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$.

Exercice 8.13 (application du théorème des valeurs intermédiaires)**.** Montrer qu'il existe $x \in]0,1[$ tel que $x^{17} + x - 1 = 0$.

Exercice 8.14 (application du théorème des valeurs intermédiaires)**.** Combien de solutions a-t-elle l'équation $x^2 - e = 0$ dans $]-\infty, 0]$.

Exercice 8.15 (application du théorème des valeurs intermédiaires)**.** Combien de solutions a-t-elle l'équation $x^3 - \sqrt{\pi} = 0$ dans $]0, +\infty, 0[$.

Exercice 8.16 (application du théorème des valeurs intermédiaires)**.** Soit f une application de $[0,1]$ dans $[0,1]$. Montrer que si f est continue en tout point de $[0,1]$ alors il existe $x_0 \in [0,1]$ tel que $f(x_0) = x_0$, autrement dit f a un point fixe.

Exercice 8.17 (application du théorème des valeurs intermédiaires)**.** Montrer que toute fonction polynomiale de degré impair possède au moins un zéro réel.

9 Fonctions dérivables et développements limités

Soient f, g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$.

Dérivabilité en un point. On dit que f est dérivable en x_0 si f est définie en tout point d'un intervalle ouvert contenant x_0 et si

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

existe dans $\mathbb{R}$. Lorsque cette limite existe, elle est notée $f'(x_0)$.

Nota bene. Si f est dérivable en x_0 alors f est continue en x_0. Attention, la réciproque est fausse : par exemple, la fonction $f(x) = |x|$ est continue en 0 mais non dérivable en 0.

Tangente f dérivable en x_0 signifie que le graphe de f admet au point d'abscisse x_0 une tangente de pente $f'(x_0)$. Son équation est $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

Théorème (fonctions composées). Si f est dérivable en x_0 et g dérivable en $f(x_0)$ alors $g \circ f$ est dérivable en x_0 et

$$(g \circ f)'(x_0) = f'(x_0) g'\big(f(x_0)\big).$$

Théorème (fonctions réciproques). Si f est continue strictement monotone sur un intervalle I, dérivable en $x_0 \in I$ et $f'(x_0) \neq 0$ alors la réciproque f^{-1} est dérivable en $f(x_0)$ et

$$(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Sens de variation Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction dérivable sur I.

1. f est croissante sur $I \iff \forall x \in I,\ f'(x) \geq 0$.
2. f est décroissante sur $I \iff \forall x \in I,\ f'(x) \leq 0$.
3. f est constante sur $I \iff \forall x \in I,\ f'(x) = 0$.
4. Si $\forall x \in I,\ f'(x) > 0$, alors f est strictement croissante sur I.
5. Si $\forall x \in I,\ f'(x) < 0$, alors f est strictement décroissante sur I.

Dérivées successives. Soit f dérivable sur E. Pour $n \in \mathbb{N}$ on définit par récurrence la dérivée n-ième, ou dérivée d'ordre n, de f en posant $f^{(0)} = f$ puis $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$ lorsque $f^{(n-1)}$ est dérivable sur E.

On dit que f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur E, et on écrit $f \in \mathscr{C}^n(E)$, lorsque f est n fois dérivable sur E et $f^{(n)}$ est continue sur E.

Théorème (accroissements finis). Si f est continue en tout point d'un intervalle fermé $[a,b]$ (avec $a<b$) et dérivable en tout point de $]a,b[$ alors il existe au moins un point $c\in]a,b[$ tel que

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Notation. On écrit $f(x)=\varepsilon(x)$ si f est une fonction telle que $D_f\cap]-\delta,+\delta[\setminus\{0\}\neq\emptyset$ pour tout $\delta>0$ et $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$.

Développement limité. f admet un développement limité à l'ordre n en x_0, et on le note $DL_n(x_0)$, si $D_f\cap]x_0-\delta,x_0+\delta[\setminus\{x_0\}\neq\emptyset$ pour tout $\delta>0$ et s'il existe un polynôme P_n de degré n tel que

$$f(x)=P_n(x-x_0)+(x-x_0)^n\varepsilon(x-x_0).$$

Lorsqu'il existe, le polynôme P_n est unique.

Au lieu de $(x-x_0)^n\varepsilon(x-x_0)$ on écrit souvent $o((x-x_0)^n)$.

Théorème (Taylor). Si f et toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre n sont définies et continues en tout point d'un intervalle ouvert contenant x_0 alors f admet un développement limité à l'ordre n en x_0 donné par la formule

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+(x-x_0)^n\varepsilon(x-x_0).$$

Asymptotes. Soit f définie sur un intervalle $]A,+\infty[$ ou $]-\infty,A[$. Quand x tend vers l'infini, $X:=1/x$ tend vers 0 et, en remplaçant x par $1/X$, on est ramené au voisinage de 0.

Lorsque x et $f(x)$ tendent vers l'infini, on obtient une asymptote oblique (si elle existe) en effectuant un développement limité au voisinage de l'infini :

$$\frac{f(x)}{x}=a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^k}+o\left(\frac{1}{x^k}\right)$$

où $\frac{c}{x^k}$ est le premier terme non nul après $\frac{b}{x}$. Dans ce cas, la droite d'équation $y=ax+b$ est asymptote à la courbe représentative de f. Et la position relative de la courbe et de l'asymptote résulte du signe de $\frac{c}{x^k}$ lorsque x tend vers l'infini.

Exercice 9.1. Étudier la continuité et la dérivabilité des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ci-dessous puis la continuité des fonctions dérivées.

1. $f(x):=|x|$,
2. $g(x):=|x^2-1|$,
3. $h(x):=\frac{x}{1+|x|}$,
4. $j(x):=x\sin(x)\sin(\frac{1}{x})$ si $x\neq 0$ et $j(0):=0$,
5. $k(x):=e^{-1/x^2}$ si $x\neq 0$ et $k(0):=0$,
6. $\ell_n(x):=x^n\sin\frac{1}{x}$ si $x\neq 0$ et $\ell_n(0):=0$, (pour $n=1,2,3$).

Exercice 9.2. Soit f l'application de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x) := \begin{cases} x^3 \sin \frac{1}{x} & \text{si } x < 0, \\ x^2|x-1| & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

1. Montrer que f peut-être prolongée par continuité en 0.

Dans la suite ce prolongement sera encore noté f.

2. Calculer $f'(x)$ pour $x < 0$, puis $\lim_{x\to 0^-} f'(x)$.
3. Calculer $f'(x)$ pour $x \in]0,1[$, puis $\lim_{x\to 0^+} f'(x)$.
4. Étudier la dérivabilité de f dans $\mathbb{R}$.

Exercice 9.3. Un automobiliste entre sur une autoroute où la vitesse est limitée à 130 Km/h. Quand il ressort, deux heures plus tard et à 305 Km de son point d'entrée, des gendarmes lui dressent un PV pour excès de vitesse, bien que sa vitesse n'ait été jamais matériellement contrôlée. Ont-ils raison ?

Exercice 9.4 (application du théorème des accroissements finis)**.** Prouver les inégalités suivantes

1. $\forall x > 0 \qquad \sin x < x,$
2. $\forall x > 0 \qquad x > \arctan(x) > \frac{x}{1+x^2},$
3. $\forall x > 0 \qquad \ln x \leq x - 1.$

Exercice 9.5 (définition des sinus et cosinus hyperboliques)**.** Sinus et cosinus hyperbolique sont définies par

$$\sinh(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \cosh(x) := \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

1. Vérifier que $\cosh^2 - \sinh^2 = 1$ puis que la dérivée de sinh est cosh et la dérivée de cosh est sinh.
2. Montrer que sinh est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et que sa fonction réciproque (notée argsinh) satisfait
$$\forall y \in \mathbb{R} \qquad \operatorname{argsinh}(y) = \ln\left(y + \sqrt{1+y^2}\right) \quad \text{et} \quad \operatorname{argsinh}'(y) = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}.$$
3. Montrer que cosh est une bijection de $[0,\infty[$ dans $[1,\infty[$ et que sa fonction réciproque (notée argcosh) satisfait
$$\forall y \in [1,\infty[\quad \operatorname{argcosh}(y) = \ln\left(y + \sqrt{y^2-1}\right) \quad \text{et} \quad \forall y \in]1,\infty[\quad \operatorname{argcosh}'(y) = \frac{1}{\sqrt{y^2-1}}.$$

Exercice 9.6 (définition des arcsinus et arccosinus)**.**

1. Montrer que l'application f de $[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$ dans $[-1,+1]$ définie par
$$\forall x \in [-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}] \qquad f(x) := \sin x,$$
est bijective. La fonction réciproque f^{-1} est notée "arcsin". Montrer que
$$\forall y \in]-1,+1[\qquad \arcsin'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$
2. Montrer que l'application g de $[0,\pi]$ dans $[-1,+1]$ définie par
$$\forall x \in [0,+\pi] \qquad g(x) := \cos x,$$
est bijective. La fonction réciproque g^{-1} est notée "arccos". Montrer que
$$\forall y \in]-1,+1[\qquad \arccos'(y) = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Exercice 9.7 (définition de l'arctangente)**.** Montrer que la fonction f de $]-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}[$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in]-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}[\qquad f(x) := \frac{\sin x}{\cos x}$$

est bijective. La fonction réciproque f^{-1} est notée “arctan”. Montrer que

$$\forall y \in \mathbb{R} \qquad \arctan'(y) := \frac{1}{1+y^2}.$$

Exercice 9.8 (application du théorème des accroissements finis)**.** Soit I un intervalle ouvert non vide et f une application de I dans $\mathbb{R}$. On suppose que f est dérivable en tout point de I.

1. Montrer que
$$\forall x \in I \quad f'(x) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists c \in \mathbb{R} \quad \forall x \in I \quad f(x) = c.$$
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ on a
$$\arctan(x) + \arctan\frac{1}{x} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0, \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0. \end{cases}$$
3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$ on a
$$\arctan\frac{1+x}{1-x} - \arctan(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{4} & \text{si } x > 1, \\ -\frac{3\pi}{4} & \text{si } x < 1. \end{cases}$$
4. Montrer que pour tout $x \in [-1,+1]$ on a
$$\arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 9.9. Soit $f_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application définie par

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} x^\alpha \cos\frac{1}{x}, & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Pour $\alpha = 0,1,2,3$, répondre aux questions suivantes :
▷ f_α est-elle continue en $x = 0$?
▷ f_α est-elle dérivable en $x = 0$?
▷ f_α est-elle de classe $\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$?

Exercice 9.10. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \cos\frac{1}{x}, & \text{si } x > 0, \\ 0, & \text{si } x = 0, \\ x^3 \sin\frac{1}{x}, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

1. Établir si f est continue en $x = 0$.
2. Calculer $f'(x)$ pour $x \neq 0$. En déduire l'équation de la droite tangente à f en $x = \frac{1}{\pi}$.
3. Établir si f est dérivable en $x = 0$.
4. Établir si f est f est de classe $\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$.

Exercice 9.11 (développements limités usuels)**.** Montrer que

$$\ln(1+x)=\sum_{k=1}^{k=n}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k}+o\left(x^n\right)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+o\left(x^n\right)$$

$$\ln(1-x)=-\sum_{k=1}^{k=n}\frac{x^k}{k}+o\left(x^n\right)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots-\frac{x^n}{n}+o\left(x^n\right)$$

$$e^x=\sum_{k=0}^{k=n}\frac{x^k}{k!}+o\left(x^n\right)=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+o\left(x^n\right)$$

$$\sin(x)=\sum_{k=0}^{k=n}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}+o\left(x^{2n+2}\right)=x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o\left(x^{2n+2}\right)$$

$$\cos(x)=\sum_{k=0}^{k=n}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}+o\left(x^{2n+1}\right)=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o\left(x^{2n+1}\right)$$

$$\tan(x)=x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\frac{17x^7}{315}+o\left(x^8\right)$$

$$\arcsin(x)=x+\frac{x^3}{6}+\frac{3x^5}{40}+\cdots+\left|\binom{-\frac{1}{2}}{n}\right|\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+o\left(x^{2n+2}\right)$$

$$\arccos(x)=\frac{\pi}{2}-\arcsin(x)$$

$$\arctan(x)=\sum_{k=0}^{k=n}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{2k+1}+o\left(x^{2n+1}\right)=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+o\left(x^{2n+2}\right)$$

$$\sinh(x)=\sum_{k=0}^{k=n}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}+o\left(x^{2n+2}\right)=x+\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+\cdots+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o\left(x^{2n+2}\right)$$

$$\cosh(x)=\sum_{k=0}^{k=n}\frac{x^{2k}}{(2k)!}+o\left(x^{2n+1}\right)=1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+\cdots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o\left(x^{2n+1}\right)$$

$$\tanh(x)=x-\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}-\frac{17x^7}{315}+o\left(x^8\right)$$

$$(1+x)^\alpha=\sum_{k=0}^{k=n}\binom{\alpha}{k}x^k+o\left(x^n\right)=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6}x^3+\cdots+\binom{\alpha}{n}x^n+o\left(x^n\right)$$

avec les cas particuliers

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}-\frac{5x^4}{128}+o\left(x^4\right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}==1-\frac{x}{2}+\frac{3x^2}{8}-\frac{5x^3}{16}+\frac{5x^4}{128}+o\left(x^4\right)$$

$$\sqrt{1-x}=1-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}-\frac{x^3}{16}-\frac{5x^4}{128}+o\left(x^4\right)$$

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{k=0}^{k=n}(-1)^kx^k+o\left(x^n\right)=1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^nx^n+o\left(x^n\right)$$

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{k=0}^{k=n}x^k+o\left(x^n\right)=1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+o\left(x^n\right)$$

Exercice 9.12. Calculer les développements limités à l'ordre 2 au point 0 puis au point 1 des fonctions suivantes

1. $f_1(x) := x$,
2. $f_2(x) := x^4 + 5x^3 + 2x^2 - 1$,
3. $f_3(x) := \frac{1}{1+x}$,
4. $f_4(x) := \frac{1+x^2+x^4}{(1+x)^4}$.

Exercice 9.13. Soit f l'application de $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) := x^3 \sin\frac{1}{x}$. Calculer le développement limité à l'ordre 2 en 0 de f puis montrer que f n'admet pas de développement limité à l'ordre 3 en 0.

Exercice 9.14.

1. Calculer les développements limités à l'ordre 4 en $\frac{\pi}{2}$ puis $\frac{\pi}{4}$ des fonctions "sin" et "cos".
2. Calculer les développements limités à l'ordre 4 en 0 des fonctions "arcsin" et "arccos".
3. Calculer les développements limités à l'ordre 4 en 0 des fonctions "sinh" et "cosh" et "argsinh" puis le développement limité à l'ordre 2 en 2 de "argcosh".

Exercice 9.15. Calculer les développements limités à l'ordre 3 en 0 des fonctions $\ln(\cos x)$, $\sqrt{1+x}$ et $\sqrt{1+\sin x}$.

Exercice 9.16 (calculs de limites)**.**

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos x}{\sin x}\right) \qquad \lim_{x\to 0}\left(\frac{\arctan x - \sin x}{\tan x - \arcsin x}\right) \qquad \lim_{x\to +\infty}\left(\cosh\frac{1}{x^2}\right)^{x^2}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x - e^x}{\arcsin x - x^2}\right) \qquad \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x-\sin x} + \frac{1}{x-\sinh x}\right) \qquad \lim_{x\to 0}\left(x+\sqrt{x}\right)\ln x$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}\ln\frac{\sin x}{x}\right) \qquad \lim_{x\to +\infty}\left(1+\frac{7}{x}\right)^{x}$$

Exercice 9.17. Calculer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $f(x) := \arctan\frac{x}{x+2}$ de trois façon :

1. par la formule de Taylor,
2. par composition de développements limités,
3. en commençant par calculer le développement limité de f'.

Exercice 9.18. Soit f l'application de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \qquad f(x) = \left(1+x^2\right)^{\frac{1}{x}}.$$

1. Calculer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $g(x) := \ln f(x)$.
2. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. *On notera ce prolongement f.*
3. Montrer que f est dérivable en tout point de $\mathbb{R}$.
4. Montrer que f' est continue en tout point de $\mathbb{R}$.

Exercice 9.19 (développement limité au voisinage de l'infini)**.** Déterminer les asymptotes de la courbe d'équation

$$y = 5x + 3\sqrt{x^2-1}.$$

Préciser la position de la courbe par rapport à ces asymptotes.

Exercice 9.20 (développement limité au voisinage de l'infini)**.**

1. Calculer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $\ln\left(1+y+y^2\right)$.
2. Calculer le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de l'infini de la fonction

$$f(x) := (2x-1)\ln\frac{x^2}{1+x+x^2}.$$

3. Calculer la limite de $x^2\left(f(x)+2\right)$ quand x tend vers $+\infty$.

Exercice 9.21. Calculer les limites suivantes

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}$

(b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt[3]{x^3+x+1}-\sqrt{x^2+x}$

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{e^x-1-x-\frac{x^2}{2}}$

(d) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2(\tan x-\sin x)-x^3}{x^5}$

(e) $\lim\limits_{x\to a} \frac{\sin x-\sin a}{x-a}$

(f) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x-x\cos x}{x-\sin x}$

(g) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} (\cos x)^{\frac{\pi}{2}-x}$

(h) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$

(i) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\ln(1+x)}\right)$

(j) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x(\tanh x-x)}{\ln(1+x)}$ *(Rappel :* $\tanh(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$*.)*

Exercice 9.22. On considère la fonction $f(x)=x+\sqrt{x^2+x}$.

▷ Écrire le développement limité de $\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}\right)}$ en $\pm\infty$ à l'ordre 3.

▷ En déduire le développement asymptotique de f à l'ordre 2 en $-\infty$ et en $+\infty$.

▷ Écrire les équations des asymptotes pour f en $-\infty$ et en $+\infty$.

Exercice 9.23.

1. Déterminer le développement limité de la fonction $f(x)=\sin x$ en $\frac{\pi}{3}$ à l'ordre 3.
2. Déterminer le développement limité de la fonction $f(x)=e^x-1+\sin x-2x-\frac{x^2}{2}$ en 0 à l'ordre 4.
3. Déterminer le développement limité de la fonction $g(x)=(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}$ en 0 à l'ordre 2.
4. Déterminer le développement limité asymptotique en $-\infty$ et en $+\infty$ de la fonction $\ell(x)=\dfrac{x}{x-1}\sqrt{x^2+1}$ à l'ordre 1.
5. Déterminer le développement limité de la fonction $h(x)=\frac{\ln x}{(1+x)^2}$ en 1 à l'ordre 2.

Exercice 9.24.

a) Écrire

▷ le développement limité de $\sin x$ en 0 à l'ordre 3 ;

▷ le développement limité de e^{2x} en 0 à l'ordre 3.

Puis calculer

▷ le développement limité de $f(x)=\sin x\times e^{2x}$ en 0 à l'ordre 3.

▷ le développement limité de $g(x)=\frac{\sin x}{e^{2x}}$ en 0 à l'ordre 3.

b) Trouver le développement limité de $\cos x$ en $\frac{\pi}{6}$ à l'ordre 3.

c) Calculer

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(2x)}{e^x-1-x}.$$

10 Étude de fonctions

Fonction logarithme népérien.

La fonction "ln" est définie pour $x > 0$ par

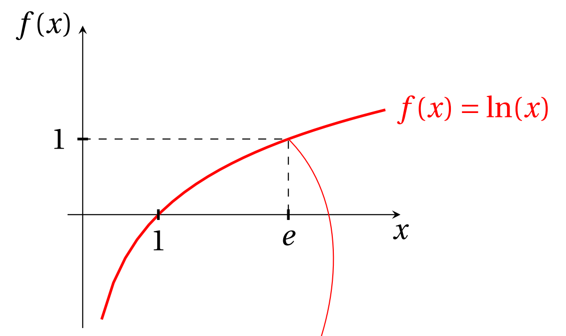
$$\begin{cases} \ln(1) = 0 \\ (\ln(x))' = \frac{1}{x} & \forall x > 0. \end{cases}$$

Elle est strictement croissante, de classe $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*)$ et

$$\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty,$$

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0.$$

La dérivée en $x = 1$ étant égale à 1, on a aussi $\ln(1+x) = x + o(x^2)$ au voisinage de 0.



L'unique solution de l'équation $\ln(x) = 1$ est notée e ($e \approx 2{,}718$).

Propriétés algébriques $\forall a > 0, \forall b > 0, \forall r \in \mathbb{Q}$

$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b); \quad \ln(a^r) = r\ln a; \quad \ln(a/b) = \ln(a) - \ln(b).$$

Convexité La fonction ln est concave sur $]0, +\infty[$ ce qui entraîne

$$\forall x > -1 \qquad \ln(1+x) \le x.$$

Fonction exponentielle.

La fonction exponentielle est la bijection réciproque de la fonction ln ; elle est définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $]0, +\infty[$; elle est notée exp ou $x \mapsto e^x$:

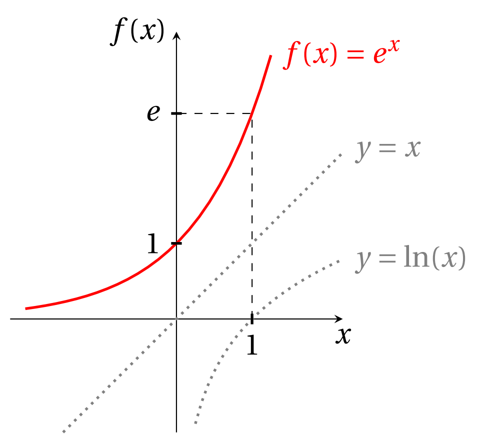
$$y = e^x \iff x = \ln(y).$$

Elle est strictement croissante,

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0^+, \qquad \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty,$$

$$\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty,$$

de classe $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*)$ et $(e^x)' = e^x$. La dérivée en $x = 0$ étant égale à 1, on a aussi $e^x - 1 = x + o(x^2)$ au voisinage de 0.



L'unique solution de l'équation $e^x = 1$ est $x = 0$.

Propriétés algébriques $\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}, \forall r \in \mathbb{Q}$

$$e^{a+b} = e^a \cdot e^b; \quad e^{ra} = (e^a)^r; \quad e^{-a} = \frac{1}{e^a}; \quad e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}.$$

Convexité La fonction exp est convexe sur $\mathbb{R}$ ce qui entraîne

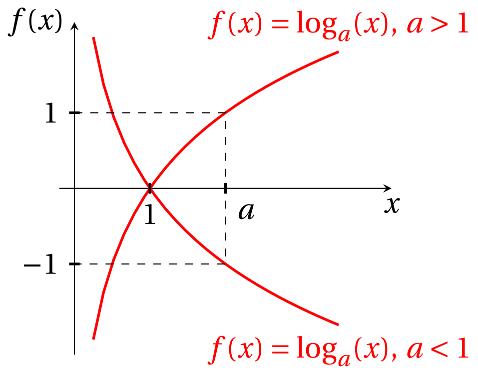
$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad 1 + x \leq e^x.$$

Logarithme de base a.

La fonction logarithme de base a ($a > 0$, $a \neq 1$) est la fonction définie par

$$\forall x > 0 \qquad \log_a(x) := \frac{\ln x}{\ln a}.$$

Sa dérivée est $(\log_a(x))' = \frac{1}{x \ln a}$. Ses propriété algébriques sont les mêmes que celles de la fonction ln.



Exponentielle de base a.

La fonction exponentielle de base a ($a > 0$) est la fonction définie par

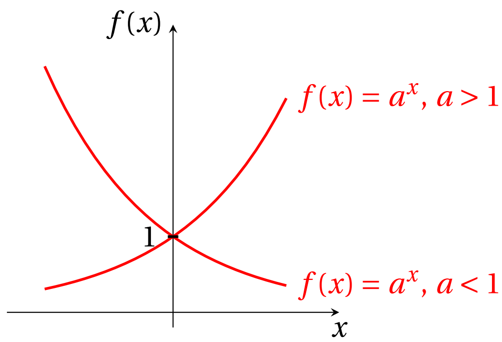
$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad a^x := e^{x \ln a}.$$

Pour $a \neq 1$ c'est la fonction réciproque de la fonction $\log_a$:

$$y = a^x \iff x = \log_a(y).$$

Sa dérivée est $(a^x)' = a^x \ln a$.

Remarquez bien qu'ici la variable est en exposant.



Fonctions puissances.

La fonction $x \longmapsto x^r$ pour $x > 0$ et $r \in \mathbb{Q}$ est connue. On la généralise pour $r \in \mathbb{R}$ en posant

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad x^r := e^{r \ln x}.$$

Les propriétés connues pour les exposants rationnels sont prolongées ; en particulier $(x^r)' = r x^{r-1}$.

Remarquez bien qu'ici l'exposant est constant.

Pour $r < 0$, la fonction $x \longmapsto x^r$ est décroissante de $+\infty$ à 0.

Pour $r > 0$, la fonction $x \longmapsto x^r$ est croissante de 0 à $+\infty$. Dans ce cas on peut prolonger la fonction par continuité en 0 ; la fonction prolongée est dérivable en 0 si $r > 1$.

Pour $b > 0$ on a

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^b} = 0; \qquad \lim_{x\to 0^+} x^b \ln x = 0.$$

Pour $a > 1$ et $b \in \mathbb{R}$ on a

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x^b} = +\infty.$$

Pour $a > 1$ on a

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{a^x} = 0.$$

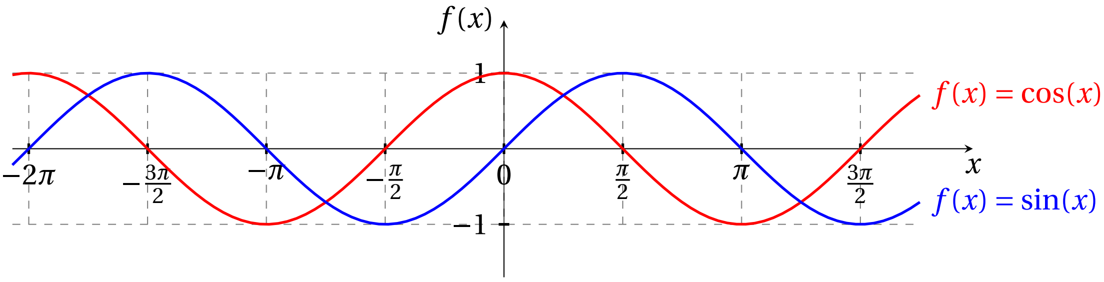
Fonctions circulaires et trigonométriques.

Fonctions sinus et cosinus Elles sont définies dans $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $[-1, 1]$. Elles sont 2π-périodiques. La fonction cos est paire, la fonction sin est impaire.

Dérivées : $(\cos(x))' = -\sin(x)$, $(\sin(x))' = -\cos(x)$.

Si $x \in \mathbb{R}$ est la mesure d'un angle, ces expressions des dérivées ne sont correctes que si x est exprimé en radians.

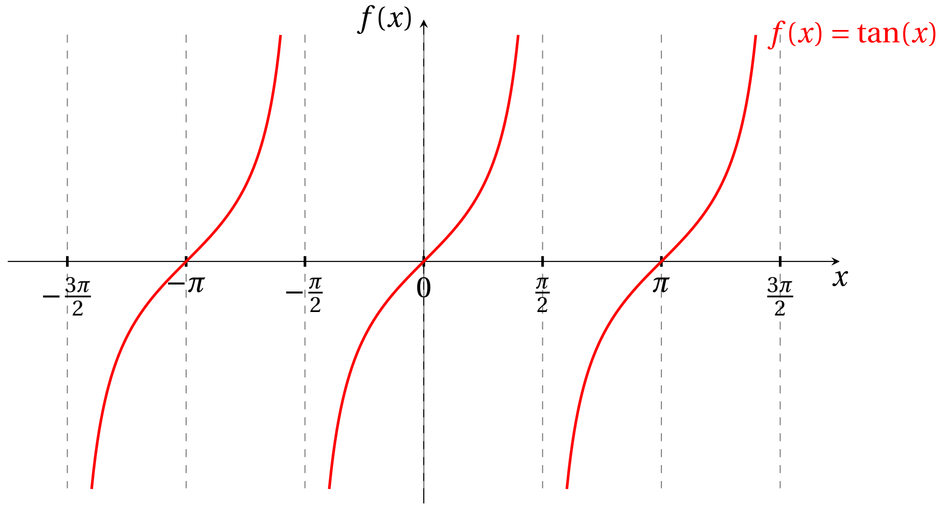
Limites : $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = \frac{1}{2}$.



Fonction tangente Elle est définie sur $D := \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$ par $\tan(x) := \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$. Elle est π-périodique et impaire.

Dérivée : $(\tan(x))' = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$ pour tout $x \in D$.

Limites : $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$.



Propriétés

$$\cos(\pi - x) = -\cos(x) \qquad \sin(\pi - x) = \sin(x) \qquad \tan(\pi - x) = -\tan(x)$$
$$\cos(\pi + x) = -\cos(x) \qquad \sin(\pi + x) = -\sin(x) \qquad \tan(\pi + x) = \tan(x)$$

$$\cos(\pi/2 - x) = \sin(x) \qquad \sin(\pi/2 - x) = \cos(x) \qquad \tan(\pi/2 - x) = 1/\tan(x)$$
$$\cos(\pi/2 + x) = -\sin(x) \qquad \sin(\pi/2 + x) = \cos(x) \qquad \tan(\pi/2 + x) = -1/\tan(x)$$

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \qquad \cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$$
$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b) \qquad \sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$$
$$\tan(a+b) = \frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)} \qquad \tan(a-b) = \frac{\tan(a)-\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$$

$$\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a)$$
$$\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$$
$$\tan(2a) = \frac{2\tan(a)}{1-\tan^2(a)}$$

$$\cos(a) + \cos(b) = 2\cos\frac{a-b}{2}\cos\frac{a+b}{2} \qquad \cos(a) - \cos(b) = -2\sin\frac{a-b}{2}\sin\frac{a+b}{2}$$
$$\sin(a) + \sin(b) = 2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} \qquad \sin(a) - \sin(b) = 2\sin\frac{a-b}{2}\cos\frac{a+b}{2}$$

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{\cos(a+b)+\cos(a-b)}{2}$$
$$\sin(a)\sin(b) = \frac{\cos(a-b)-\cos(a+b)}{2}$$
$$\sin(a)\cos(b) = \frac{\sin(a+b)+\sin(a-b)}{2}$$

$$\cos^2(a) = \frac{1+\cos(2a)}{2} \qquad \sin^2(a) = \frac{1-\cos(2a)}{2}$$

Soit $t := \tan\frac{a}{2}$, alors

$$\cos(a) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \sin(a) = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \tan(a) = \frac{2t}{1-t^2}$$

Fonctions circulaires réciproques.

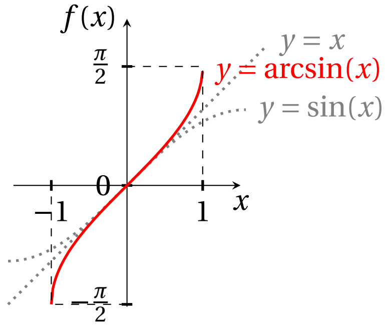
Fonction arc-sinus

C'est la bijection réciproque de la restriction à $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ de la fonction sinus :

$$\left.\begin{array}{c} y = \arcsin(x) \\ -1 \leq x \leq 1 \end{array}\right\} \iff \left\{\begin{array}{c} x = \sin(y) \\ -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2} \end{array}\right.$$

Elle est impaire et pour tout $x \in]-1, 1[$ on a

$$(\arcsin(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$



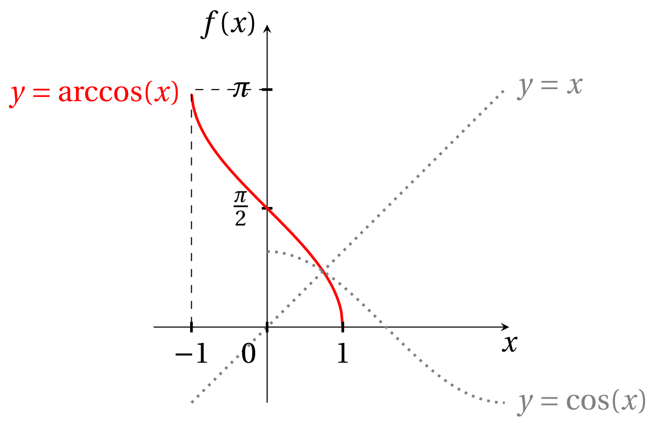
Fonction arc-cosinus

C'est la bijection réciproque de la restriction à $[0,\pi]$ de la fonction cosinus :

$$\left.\begin{array}{c} y=\arccos(x) \\ -1\leq x\leq 1 \end{array}\right\} \iff \left\{\begin{array}{c} x=\cos(y) \\ 0\leq y\leq \pi \end{array}\right.$$

Pour tout $x\in]-1,1[$ on a

$$(\arccos(x))' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$



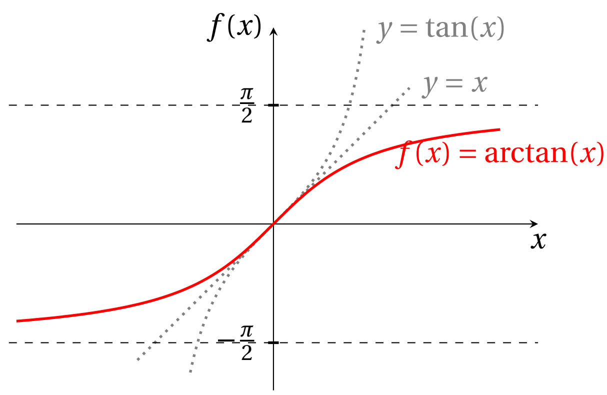
Fonction arc-tangente

C'est la bijection réciproque de la restriction à $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ de la fonction tangente :

$$\left.\begin{array}{c} y=\arctan(x) \\ x\in\mathbb{R} \end{array}\right\} \iff \left\{\begin{array}{c} x=\tan(y) \\ -\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2} \end{array}\right.$$

Elle est impaire et pour tout $x\in\mathbb{R}$ on a

$$(\arctan(x))' = \frac{1}{1+x^2}.$$



Propriétés

$$\begin{array}{ll}
\forall x\in[-1,1] & \arcsin(x)+\arccos(x)=\dfrac{\pi}{2} \\
 & \sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2} = \cos(\arcsin(x)) \\
\forall x>0 & \arctan(x)+\arctan(1/x)=\dfrac{\pi}{2} \\
\forall x<0 & \arctan(x)+\arctan(1/x)=-\dfrac{\pi}{2}
\end{array}$$

Fonctions hyperboliques.

On définit les fonctions cosinus hyperbolique, sinus hyperbolique et tangente hyperbolique pour tout $x\in\mathbb{R}$ respectivement par

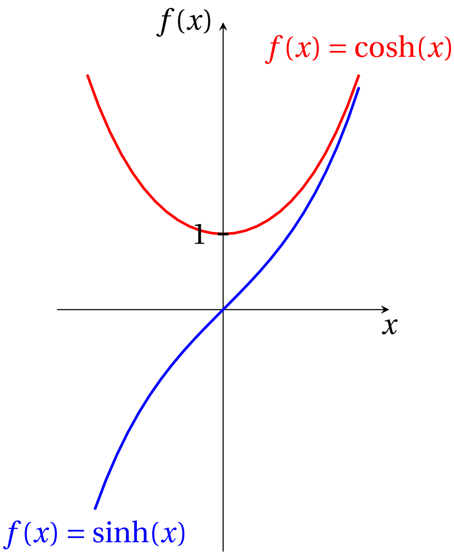
$$\cosh(x):=\frac{e^x+e^{-x}}{2},\qquad \sinh(x):=\frac{e^x-e^{-x}}{2},\qquad \tanh(x):=\frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}=1-\frac{2}{1+e^{2x}}.$$

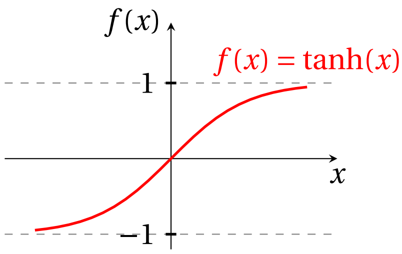
Propriétés : cosh est paire ; sinh et tanh sont impaires et pour tout $x\in\mathbb{R}$ on a

$$\cosh(x)+\sinh(x)=e^x;\qquad \cosh^2(x)-\sinh^2(x)=1;\qquad 1-\tanh^2(x)=\frac{1}{\cosh^2(x)}.$$

Dérivées : pour tout $x\in\mathbb{R}$

$$(\sinh(x))'=\cosh(x);\qquad (\cosh(x))'=\sinh(x);\qquad (\tanh(x))'=\frac{1}{\cosh^2(x)}=1-\tanh^2(x).$$





Fonctions hyperboliques réciproques.

Fonction argument sinus hyperbolique C'est la bijection réciproque de la fonction sinh. Elle est impaire et on a

$$(\operatorname{argsinh}(x))' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Fonction argument cosinus hyperbolique C'est la bijection réciproque de la restriction à $[0, +\infty[$ de la fonction $\cosh(x)$. Pour tout $x \in [0, +\infty[$ on a

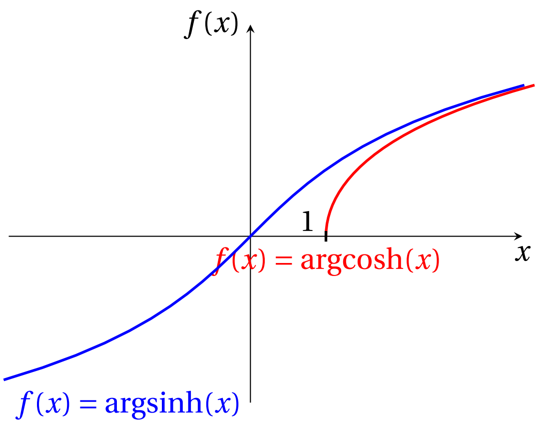
$$(\operatorname{argcosh}(x))' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$$

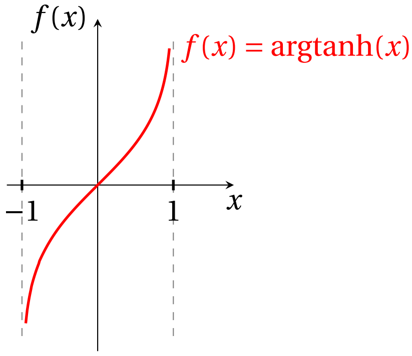
Fonction argument tangente hyperbolique C'est la bijection réciproque de la fonction tanh. Elle est impaire et pour tout $x \in]-1, 1[$ on a

$$(\operatorname{argtanh}(x))' = \frac{1}{1-x^2}.$$

Propriétés

$\forall x \in \mathbb{R}$	$\operatorname{argsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$
$\forall x \in [1, +\infty[$	$\operatorname{argcosh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$
$\forall x \in]-1, 1[$	$\operatorname{argtanh}(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$





Exercice 10.1. Étudier les variations et donner une représentation graphique de la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = x + \ln(x^2 - 1) \end{aligned}$$

en répondant aux questions suivantes :

1. domaine de définition
2. comportement aux extrémités du domaine de définition
3. extrema locaux, sens de variation et tableaux des variations
4. convexité, concavité
5. comportement en $\pm\infty$ (recherche d'asymptotes)
6. graphe

Exercice 10.2. Étudier les variations et donner une représentation graphique de la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = 2x + \sqrt{x^2 - 1} \end{aligned}$$

en répondant aux questions suivantes :

1. domaine de définition et régularité
2. comportement aux extrémités du domaine de définition
3. extrema locaux, sens de variation et tableaux des variations
4. convexité, concavité
5. comportement en $\pm\infty$ (recherche d'asymptotes)
6. graphe

Exercice 10.3. Étudier les variations et donner une représentation graphique de la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = \frac{\ln^2 x}{x^2} \end{aligned}$$

en répondant aux questions suivantes :

1. domaine de définition et régularité
2. comportement aux extrémités du domaine de définition
3. extrema locaux, sens de variation et tableaux des variations
4. convexité, concavité
5. comportement en $+\infty$ (recherche d'asymptotes)
6. graphe

Exercice 10.4. Étudier les variations et donner une représentation graphique de la fonction

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = \ln(x - x^5) \end{aligned}$$

en répondant aux questions suivantes :

1. domaine de définition
2. comportement aux extrémités du domaine de définition
3. extrema locaux, sens de variation et tableaux des variations
4. comportement en $-\infty$ (recherche d'asymptotes)
5. graphe

Exercice 10.5. Étudier les variations et donner une représentation graphique de la fonction

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = \frac{x^2}{\ln(x^2) - 1} \end{aligned}$$

en répondant aux questions suivantes :

1. domaine de définition
2. comportement aux extrémités du domaine de définition
3. extrema locaux, sens de variation et tableaux des variations
4. comportement en $\pm\infty$ (recherche d'asymptotes)
5. graphe

Exercice 10.6. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \ln|x|, & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue en 0.
2. Calculer $f'(x)$ pour $x \neq 0$, puis $f'(0)$.
3. Étudier la continuité de f' en 0.
4. Établir si $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$.
5. Calculer les limites de f aux extrémités du domaine de définition.
6. Trouver les extrema locaux, sens de variation et tableau des variations.
7. Étudier le comportement de f en $\pm\infty$ (recherche d'asymptotes).
8. Dresser le graphe de f.