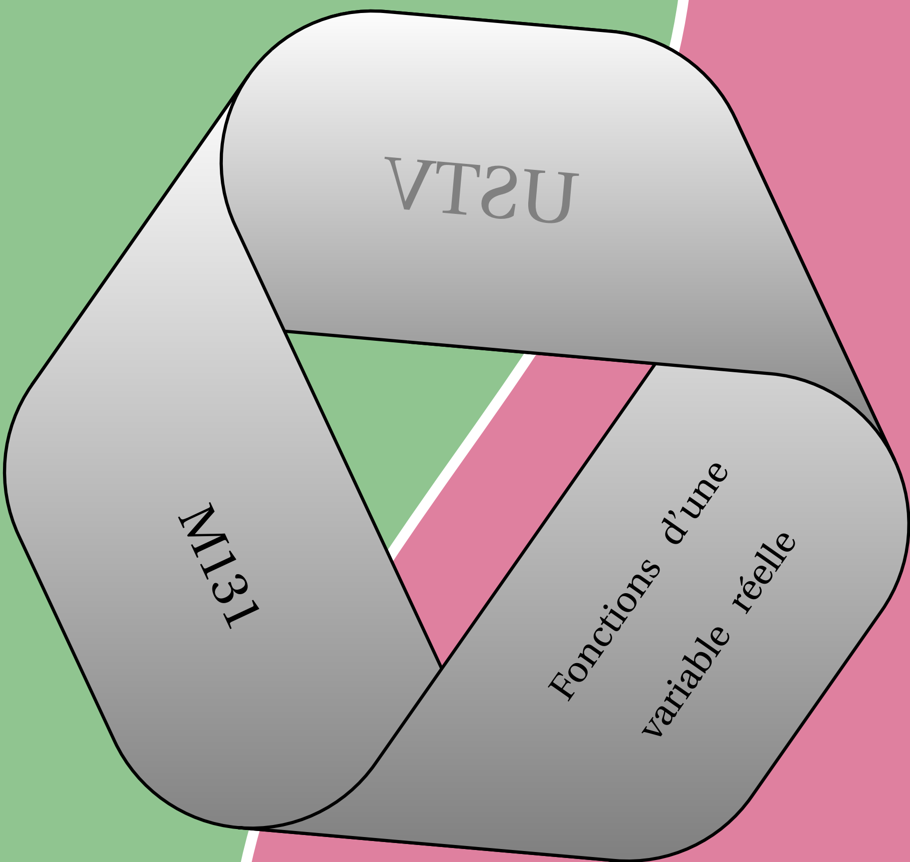
L1PC

2010/2011

Contrôles continus
et examens.



G. Faccanoni
A. Novotny

Gloria FACCANONI

IMATH Bâtiment U-318
Université du Sud Toulon-Var
Avenue de l'université
83957 LA GARDE - FRANCE

☎ 0033 (0)4 94 14 23 81

✉ gloria.faccanoni@univ-tln.fr
🛈 http://faccanoni.univ-tln.fr

Table des matières

Contrôle continu 1 - thème A

Exercice 1.1 (10 points)**.**

1. Soit E un ensemble non vide et A une partie de E. Donner la définition du complémentaire de A dans E.
2. Pour $i \in \mathbb{N}$, soit $A_i = \left[-1, \frac{1}{1+i^2}\right[$ un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. Trouver les ensembles

$$\bigcap_{i=0}^{\infty} A_i, \qquad C_{\mathbb{R}}\left(\bigcap_{i=0}^{\infty} A_i\right), \qquad C_{\mathbb{R}}(A_i), \qquad \bigcup_{i=0}^{\infty} C_{\mathbb{R}}(A_i).$$

Solution.

1. $C_E(A) = E \setminus A$
2. En remarquant que $A_{i+1} \subset A_i$, que $A_0 = [-1,1[$ et que $A_i \xrightarrow[i\to+\infty]{} [-1,0^+[$ on a

$$\bigcap_{i=0}^{\infty} A_i = [-1,0], \qquad C_{\mathbb{R}}\left(\bigcap_{i=0}^{\infty} A_i\right) =]-\infty;-1[\cup]0;+\infty[, \qquad C_{\mathbb{R}}(A_i) =]-\infty;-1[\cup \left[\frac{1}{1+i^2};+\infty\right[, \qquad \bigcup_{i=0}^{\infty} C_{\mathbb{R}}(A_i) =]-\infty;-1[\cup]0;+\infty[.$$

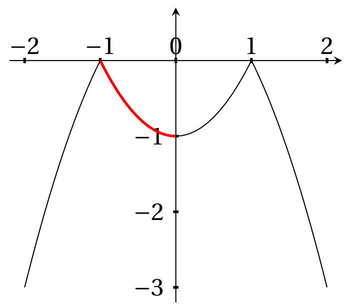
Exercice 1.2 (10 points)**.**

1. Donner la définition d'une application f de E dans F et la définition d'une application injective f de E dans F (faire attention à l'utilisation des quantificateurs).

2. On considère l'application f définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $f(x) = -|x^2-1|$ dont la représentation graphique est donnée ci-contre.

   2.1. Soit g l'application définie de $]-1;0]$ dans $[-1;0]$ par $g(x) = f(x)$. g est-elle injective ? g est-elle surjective ?

   2.2. Soit h l'application définie de $]-1;0]$ dans $[-1;0[$ par $h(x) = f(x)$. Montrer que h est bijective et trouver l'application h^{-1} réciproque inverse de h.



Solution.

1. f est une application si $\forall x \in E, \forall x' \in E,\ x = x' \implies f(x) = f(x')$ (ou, de façon équivalente, $\forall x \in E, \forall x' \in E,\ f(x) \neq f(x') \implies x \neq x'$) ; f est une application injective si $\forall x \in E, \forall x' \in E,\ x \neq x' \implies f(x) \neq f(x')$ (ou, de façon équivalente, $\forall x \in E, \forall x' \in E,\ f(x) = f(x') \implies x = x'$).
2.
   2.1. g est une application injective car pour $x_1, x_2 \in]-1;0]$, $f(x_1) = f(x_2) \implies -|x_1^2-1| = -|x_2^2-1| \overset{x_i^2-1\le0}{\implies} x_1^2-1 = x_2^2-1 \implies x_1^2 = x_2^2 \overset{x_i\le0}{\implies} x_1 = x_2$. Elle n'est pas surjective car 0 n'a pas d'antécédent.

   2.2. h est une application bijective car elle est injective (même démonstration que pour g) et surjective (en effet, pour tout $y \in [-1;0[$, si on pose $x = -\sqrt{1-y}$ alors $x \in]-1;0]$ et $h(x) = y$). Pour trouver h^{-1} application réciproque (inverse) de h on doit isoler x dans l'expression $y = h(x)$ donc

$$\begin{aligned} & y = -|x^2-1| \quad \text{pour } x \in]-1;0] \text{ et } y \in [-1;0[\\ \iff\ & y = 1 - x^2 \\ \iff\ & x^2 = 1 - y \\ \iff\ & x = -\sqrt{1-y} \end{aligned}$$

   donc h^{-1} est l'application de $[-1;0[$ dans $]-1;0]$ définie par $h^{-1}(x) = -\sqrt{1-x}$.

Contrôle continu 1 - thème B

Exercice 1.1 (10 points)**.**

1. Soit E un ensemble non vide et A une partie de E. Donner la définition du complémentaire de A dans E.
2. Pour $i \in \mathbb{N}$, soit $A_i = \left[-2, \frac{1}{-1-i^2}\right]$ un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. Trouver les ensembles

$$\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i, \qquad C_{\mathbb{R}}\left(\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i\right), \qquad C_{\mathbb{R}}(A_i), \qquad \bigcap_{i=0}^{\infty} C_{\mathbb{R}}(A_i).$$

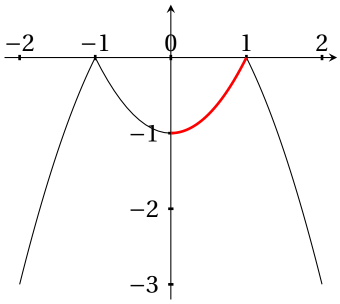
Solution.

1. $C_E(A) = E \setminus A$
2. En remarquant que $A_i \subset A_{i+1}$, que $A_0 = [-2,-1]$ et que $A_i \xrightarrow[i\to+\infty]{} [-2,0^-]$ on a

$$\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i = [-2,0[, \qquad C_{\mathbb{R}}\left(\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i\right) =]-\infty;-2[\cup[0;+\infty[, \qquad C_{\mathbb{R}}(A_i) =]-\infty;-2[\cup\left]\frac{1}{-1-i^2};+\infty\right[, \qquad \bigcap_{i=0}^{\infty} C_{\mathbb{R}}(A_i) =]-\infty;-2[\cup[0;+\infty[.$$

Exercice 1.2 (10 points)**.**

1. Donner la définition d'une application f de E dans F et la définition d'une application injective f de E dans F (faire attention à l'utilisation des quantificateurs).
2. On considère l'application f définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $f(x) = -|x^2-1|$ dont la représentation graphique est donnée ci-contre.
   - 2.1. Soit g l'application définie de $[0;1[$ dans $[-1;0]$ par $g(x) = f(x)$. g est-elle injective ? g est-elle surjective ?
   - 2.2. Soit h l'application définie de $[0;1[$ dans $[-1;0[$ par $h(x) = f(x)$. Montrer que h est bijective et trouver l'application h^{-1} réciproque inverse de h.



Solution.

1. f est une application si $\forall x \in E, \forall x' \in E,\ x = x' \implies f(x) = f(x')$ (ou, de façon équivalente, $\forall x \in E, \forall x' \in E,\ f(x) \neq f(x') \implies x \neq x'$) ; f est une application injective si $\forall x \in E, \forall x' \in E,\ x \neq x' \implies f(x) \neq f(x')$ (ou, de façon équivalente, $\forall x \in E, \forall x' \in E,\ f(x) = f(x') \implies x = x'$).
2.
   - 2.1. g est une application injective car pour $x_1, x_2 \in]-1;0]$, $f(x_1) = f(x_2) \implies -|x_1^2-1| = -|x_2^2-1| \overset{x_i^2-1\le 0}{\Longrightarrow} x_1^2 - 1 = x_2^2 - 1 \implies x_1^2 = x_2^2 \overset{x_i \ge 0}{\Longrightarrow} x_1 = x_2$. Elle n'est pas surjective car 0 n'a pas d'antécédent.
   - 2.2. h est une application bijective car elle est injective (même démonstration que pour g) et surjective (en effet, pour tout $y \in [-1;0[$, si on pose $x = \sqrt{1+y}$ alors $x \in [0;1[$ et $h(x) = y$). Pour trouver h^{-1} application réciproque (inverse) de h on doit isoler x dans l'expression $y = h(x)$ donc

$$\begin{aligned} & y = -|x^2-1| \quad \text{pour } x \in [0;1[\text{ et } y \in [-1;0[\\ \iff & y = x^2 - 1 \\ \iff & x^2 = 1 + y \\ \iff & x = +\sqrt{1+y} \end{aligned}$$

donc h^{-1} est l'application de $[-1;0[$ dans $[0;1[]$ définie par $h^{-1}(x) = +\sqrt{1+x}$.

Contrôle continu 2 - thème A

Exercice 2.1 (10 points)**.** Soient E, F deux ensembles non vides et f une application de E dans F.

1. Rappeler la définition de l'image directe $f(A)$ de $A \subset E$ par f et de l'image inverse (réciproque) $f^{-1}(B)$ de $B \subset F$ par f.
2. Montrer que $\forall B \subset F$, $f\big(f^{-1}(B)\big) \subset B$.
3. Soient $E = F = \mathbb{R}$ et f l'application définie par $f(x) = (x-1)^2$. Soit $B = [-1;1[$. Trouver

   3.1. $f^{-1}(B)$,

   3.2. $f\big(f^{-1}(B)\big)$,

   3.3. $\sup\limits_B f^{-1}$ (est-il maximum ?),

   3.4. $\inf\limits_B f^{-1}$ (est-il minimum ?).

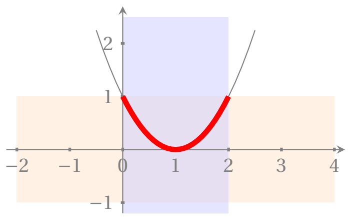
Solution.

1. Image
   1.1. directe $f(A) = \{y \in F \mid \exists x \in \mathscr{D}_f,\ y = f(x)\}$, *i.e.* l'ensemble des $f(x) \in F$ pour x parcourant A ;
   1.2. inverse (réciproque) $f^{-1}(B) = \{x \in \mathscr{D}_f \mid f(x) \in B\}$. L'image réciproque se note $f^{-1}(B)$ bien que f^{-1} ne soit pas définie en générale. Cependant, si f est bijective, le symbole f^{-1} a deux sens : il représente d'abord l'image réciproque I de B par f et aussi l'image directe I' de B par f^{-1}. Heureusement, $I = I'$.
2. On a $x_0 \in f\big(f^{-1}(B)\big)$ ssi $\exists\, z \in f^{-1}(B)$ tel que $x_0 = f(z)$ et $z \in f^{-1}(B)$ ssi $f(z) \in B$. Ceci prouve que $f\big(f^{-1}(B)\big) \subset B$. Si f est surjective on a $B = f\big(f^{-1}(B)\big)$.
3. 3.1. $f^{-1}(B) =]0;2[$,

   3.2. $f\big(f^{-1}(B)\big) = [0;1[$ et on remarque que $[0,1[\subset [-1;1[$,

   3.3. $\sup\limits_B f^{-1} = 2$ mais ce n'est pas un maximum,

   3.4. $\inf\limits_B f^{-1} = 0$ mais ce n'est pas un minimum.



Exercice 2.2 (10 points)**.** On considère le polynôme

$$P(x) = x^6 - x^5 - x^4 + x^2 + x - 1.$$

1. Écrire la formule de Taylor de P en 1 ; montrer que 1 est une racine de P et déterminer son ordre de multiplicité.
2. Factoriser P sur $\mathbb{R}$ en sachant qu'il possède une autre racine réelle évidente (*i.e.* elle est un diviseur du terme de degré 0).
3. Factoriser P sur $\mathbb{C}$.

Solution.

1. Pour un polynôme P de degré 6, la formule de Taylor en 1 s'écrit

$$P(x) = \sum_{k=0}^{k=6} P^{(k)}(1)\,\frac{(x-1)^k}{k!}.$$

On calcul alors les dérivées $P^{(k)}(x)$ pour $k = 0, \dots, 6$ et on les évalue en 1 :

$$\begin{aligned}
P(x) &= x^6 - x^5 - x^4 + x^2 + x - 1 & P(1) &= 0\\
P'(x) &= 6x^5 - 5x^4 - 4x^3 + 2x + 1 & P'(1) &= 0\\
P''(x) &= 30x^4 - 20x^3 - 12x^2 + 2 & P''(1) &= 0\\
P'''(x) &= 120x^3 - 60x^2 - 24x & P'''(1) &= 36\\
P^{IV}(x) &= 360x^2 - 120x - 24 & P^{IV}(1) &= 216\\
P^{V}(x) &= 720x - 120 & P^{V}(1) &= 600\\
P^{VI}(x) &= 720 & P^{VI}(1) &= 720
\end{aligned}$$

La formule de Taylor en 1 s'écrit alors

$$\begin{aligned}
P(x) &= 36\,\frac{(x-1)^3}{6} + 216\,\frac{(x-1)^4}{24} + 600\,\frac{(x-1)^5}{120} + 720\,\frac{(x-1)^6}{720}\\
&= 6(x-1)^3 + 9(x-1)^4 + 5(x-1)^5 + (x-1)^6\\
&= (x-1)^3\Big(6 + 9(x-1) + 5(x-1)^2 + (x-1)^3\Big)\\
&= (x-1)^3\Big(x^3 + 2x^2 + 2x + 1\Big)
\end{aligned}$$

Ceci implique que 1 est une racine de P de multiplicité 3.

2. On pose $Q(x) = x^3 + 2x^2 + 2x + 1$. Une racine réelle évidente de Q est -1. En effectuant la division euclidienne de Q par $(x+1)$ on obtient
$$Q(x) = (x+1)(x^2+x+1).$$
Étant donné que $x^2 + x + 1$ ne se factorise pas sur $\mathbb{R}$, on conclut que la factorisation de P sur $\mathbb{R}$ est
$$P(x) = (x-1)^3(x+1)(x^2+x+1).$$
3. Pour factoriser P sur $\mathbb{C}$ il ne reste que factoriser le polynôme $x^2 + x + 1$ sur $\mathbb{C}$. Avec les notations usuelles du cours, on a $\Delta = -3$ et une racine carrée de Δ est $\delta = i\sqrt{3}$ d'où les deux racines complexes conjuguées $x_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{2}{3}\pi}$ et $x_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{4}{3}\pi}$. On conclut que la factorisation de P sur $\mathbb{C}$ est
$$P(x) = (x-1)^3(x+1)(x-e^{i\frac{2}{3}\pi})(x-e^{i\frac{4}{3}\pi}).$$

Contrôle continu 2 - thème B

Exercice 2.1 (10 points). Soient E, F deux ensembles non vides et f une application de E dans F.

1. Rappeler la définition de l'image directe $f(A)$ de $A \subset E$ par f et de l'image inverse (réciproque) $f^{-1}(B)$ de $B \subset F$ par f.
2. Montrer que $\forall B \subset F$, $f\big(f^{-1}(B)\big) \subset B$.
3. Soient $E = F = \mathbb{R}$ et f l'application définie par $f(x) = (x+1)^2$. Soit $B = [-1;1[$. Trouver

   3.1. $f^{-1}(B)$,

   3.2. $f\big(f^{-1}(B)\big)$,

   3.3. $\sup\limits_B f^{-1}$ (est-il maximum ?),

   3.4. $\inf\limits_B f^{-1}$ (est-il minimum ?).

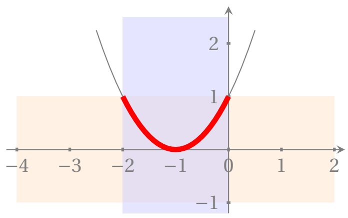
SOLUTION.

1. Image
   1.1. directe $f(A) = \{y \in F \mid \exists x \in \mathscr{D}_f,\ y = f(x)\}$, *i.e.* l'ensemble des $f(x) \in F$ pour x parcourant A ;
   1.2. inverse (réciproque) $f^{-1}(B) = \{x \in \mathscr{D}_f \mid f(x) \in B\}$. L'image réciproque se note $f^{-1}(B)$ bien que f^{-1} ne soit pas définie en générale. Cependant, si f est bijective, le symbole f^{-1} a deux sens : il représente d'abord l'image réciproque I de B par f et aussi l'image directe I' de B par f^{-1}. Heureusement, $I = I'$.
2. On a $x_0 \in f\big(f^{-1}(B)\big)$ ssi $\exists\, z \in f^{-1}(B)$ tel que $x_0 = f(z)$ et $z \in f^{-1}(B)$ ssi $f(z) \in B$. Ceci prouve que $f\big(f^{-1}(B)\big) \subset B$. Si f est surjective on a $B = f\big(f^{-1}(B)\big)$.
3.
   3.1. $f^{-1}(B) =]-2;0[$,

   3.2. $f\big(f^{-1}(B)\big) = [0;1[$ et on remarque que $[0,1[\subset [-1;1[$,

   3.3. $\sup\limits_B f^{-1} = 0$ mais ce n'est pas un maximum,

   3.4. $\inf\limits_B f^{-1} = -2$ mais ce n'est pas un minimum.



Exercice 2.2 (10 points). On considère le polynôme

$$P(x) = x^6 + 3x^5 + 3x^4 - 3x^2 - 3x - 1.$$

1. Écrire la formule de Taylor de P en -1 ; montrer que -1 est une racine de P et déterminer son ordre de multiplicité.
2. Factoriser P sur $\mathbb{R}$ en sachant qu'il possède une autre racine réelle évidente (*i.e.* elle est un diviseur du terme de degré 0).
3. Factoriser P sur $\mathbb{C}$.

SOLUTION.

1. Pour un polynôme P de degré 6, la formule de Taylor en -1 s'écrit

$$P(x) = \sum_{k=0}^{k=6} P^{(k)}(-1)\frac{(x+1)^k}{k!}.$$

On calcul alors les dérivées $P^{(k)}(x)$ pour $k = 0, \dots, 6$ et on les évalue en -1 :

$$\begin{aligned}
P(x) &= x^6 + 3x^5 + 3x^4 - 3x^2 - 3x - 1 & P(-1) &= 0\\
P'(x) &= 6x^5 + 15x^4 + 12x^3 - 6x - 3 & P'(-1) &= 0\\
P''(x) &= 30x^4 + 60x^3 + 36x^2 - 6 & P''(-1) &= 0\\
P'''(x) &= 120x^3 + 180x^2 + 72x & P'''(-1) &= -12\\
P^{IV}(x) &= 360x^2 + 360x + 72 & P^{IV}(-1) &= 72\\
P^{V}(x) &= 720x + 360 & P^{V}(-1) &= -360\\
P^{VI}(x) &= 720 & P^{VI}(-1) &= 720
\end{aligned}$$

La formule de Taylor en -1 s'écrit alors

$$\begin{aligned}
P(x) &= -12\frac{(x+1)^3}{6} + 76\frac{(x+1)^4}{24} - 360\frac{(x+1)^5}{120} + 720\frac{(x+1)^6}{720}\\
&= -2(x+1)^3 + 3(x+1)^4 - 3(x+1)^5 + (x+1)^6\\
&= (x+1)^3\Big(-2 + 3(x+1) - 3(x+1)^2 + (x+1)^3\Big)\\
&= (x+1)^3\Big(x^3 - 1\Big)
\end{aligned}$$

Ceci implique que -1 est une racine de P de multiplicité 3.

2. On pose $Q(x) = x^3 - 1$. Une racine réelle évidente de Q est 1. En effectuant la division euclidienne de Q par $(x-1)$ on obtient
$$Q(x) = (x-1)(x^2+x+1).$$
Étant donné que x^2+x+1 ne se factorise pas sur $\mathbb{R}$, on conclut que la factorisation de P sur $\mathbb{R}$ est
$$P(x) = (x+1)^3(x-1)(x^2+x+1).$$

3. Pour factoriser P sur $\mathbb{C}$ il ne reste que factoriser le polynôme x^2+x+1 sur $\mathbb{C}$. Avec les notations usuelles du cours, on a $\Delta = -3$ et une racine carrée de Δ est $\delta = i\sqrt{3}$ d'où les deux racines complexes conjuguées $x_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{2}{3}\pi}$ et $x_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{4}{3}\pi}$. On conclut que la factorisation de P sur $\mathbb{C}$ est
$$P(x) = (x+1)^3(x-1)(x-e^{i\frac{2}{3}\pi})(x-e^{i\frac{4}{3}\pi}).$$

Contrôle continu 3 - thème A

Exercice 3.1 (13 points)**.**

1. Énoncer le théorème de la limite par encadrement (ou «des deux gendarmes»). En déduire le comportement de la suite
$$u_n = \frac{\cos n}{e^{3n}+1}.$$
2. Soit (u_n) une suite telle que $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = 3 - \frac{4}{u_n+2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   2.1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 1$.
   2.2. Montrer que (u_n) est une suite monotone.
   2.3. En étudier sa convergence.
3. Calculer, si elles existent, les limites suivantes :
   3.1. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{3n+1} - \sqrt{2n+1}$,
   3.2. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sin\left(\pi + \frac{\pi}{n}\right)$,
   3.3. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2n\sqrt{n}+1}{n^2+1}$,
   3.4. $\lim\limits_{n\to+\infty} (-1)^n \frac{4n-1}{2n+3}$.

Solution.

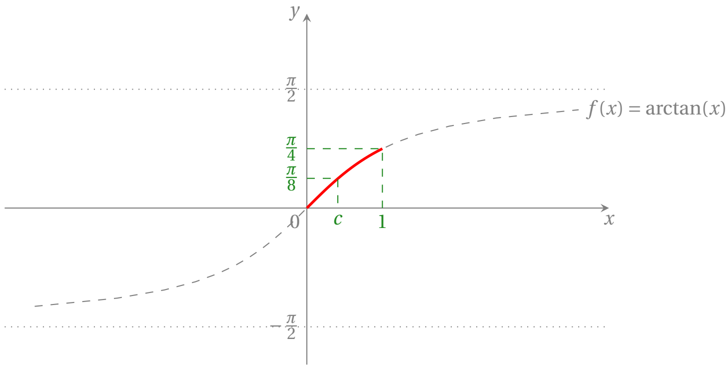
1. Soit u_n une suite. S'il existe deux suites v_n et w_n ayant une même limite $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ et satisfaisant
$$\exists M \in \mathbb{N} \text{ tel que } v_n \le u_n \le w_n \; \forall n \in \mathbb{N},\ n \ge M,$$
alors $\lim u_n = \ell$.
Étant donné que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $-\frac{1}{e^{3n}+1} \le u_n \le \frac{1}{e^{3n}+1}$ et que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\pm 1}{e^{3n}+1} = 0$, on conclut que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
2. 2.1. La propriété se démontre par récurrence. On a bien $u_0 = 4 > 1$. Il reste à démontrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, si $u_k > 1$ alors $u_{k+1} > 1$. On a
$$u_{k+1} > 1 \iff 3 - \frac{4}{u_k+2} > 1 \iff \frac{4}{u_k+2} < 2 \overset{u_k+2>0}{\iff} 2 < u_k + 2 \iff 0 < u_k.$$
Comme $u_k > 1 > 0$ alors $u_{k+1} > 1$.
   2.2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a
$$u_{n+1} - u_n = 3 - \frac{4}{u_n+2} - u_n = \frac{-u_n^2 + u_n + 2}{u_n+2} = 1 - u_n^2 < 0.$$
Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 1$, alors $1 - u_n^2 < 0$ donc (u_n) est une suite monotone décroissante.
   2.3. On a montré que la suite (u_n) est décroissante et minorée. Elle est donc convergente. Notons ℓ sa limite. La suite (u_{n+1}) tend vers ℓ et la suite $f(u_n)$ tend vers $f(\ell)$. La limite vérifie donc
$$\ell = 3 - \frac{4}{\ell+2} \iff \ell^2 - \ell - 2 = 0 \iff (\ell-2)(\ell+1) = 0.$$
Comme $u_n > 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, il faut $\ell \ge 1$; on a donc $\ell = 2$.
3. 3.1. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{3n+1} - \sqrt{2n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} (\sqrt{3n+1} - \sqrt{2n+1}) \frac{\sqrt{3n+1}+\sqrt{2n+1}}{\sqrt{3n+1}+\sqrt{2n+1}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(3n+1)-(2n+1)}{\sqrt{3n+1}+\sqrt{2n+1}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{3n+1}{n^2}} + \sqrt{\frac{2n+1}{n^2}}} = +\infty$,
   3.2. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sin\left(\pi + \frac{\pi}{n}\right) = 0$,
   3.3. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2n\sqrt{n}+1}{n^2+1} = 0$,
   3.4. Notons $u_n = (-1)^n \frac{4n-1}{2n+3}$. Cette suite ne converge pas car la sous-suite u_{2n} tend vers 2 tandis que la sous-suite u_{2n+1} tend vers -2.

Exercice 3.2 (7 points)**.**

1. Dire si l'application $f : \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2}$ se prolonge par continuité en -1 et en 1. Donner le prolongement par continuité le cas échéant.
2. Montrer qu'il existe $x \in]0,1[$ tel que $\arctan(x) = \pi/8$, puis qu'il est unique.
   Facultatif : déterminer x par dichotomie avec une précision de $1/8$.

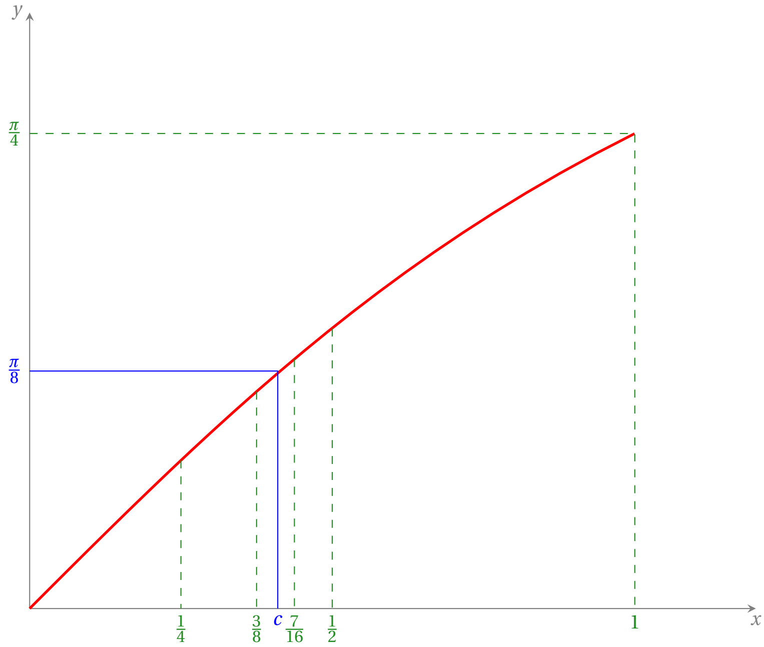
Solution.

1. On a $f(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2} = -\frac{1}{1+x}$ donc $\lim_{x\to 1} f(x) = -1/2$ et $\lim_{x\to(-1)^\pm} f(x) = \mp\infty$. La fonction f n'est donc pas prolongeable par continuité en -1 mais elle est prolongeable par continuité en 1 et ce prolongement vaut $-1/2$.
2. Rappelons le théorème des valeurs intermédiaires : *soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$. Alors pour toute valeur y comprise entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = y$*. Comme la fonction arctan est définie et continue de $\mathbb{R}$ dans $]-\pi/2, \pi/2[$, elle est donc continue sur l'intervalle $[0;1]$. Puisque $\pi/8$ est compris entre $\arctan(0) = 0$ et $\arctan(1) = \pi/4$, alors il existe un $c \in [0,1]$ tel que $\arctan(c) = \pi/8$. De plus, la fonction arctan est monotone croissante donc ce c est unique.



Dichotomie :

k	a_k	b_k	x_k	erreur$_k \leq$
1	0	1	1/2	1
2	0	1/2	1/4	1/2
3	1/4	1/2	3/8	1/4
4	3/8	1/2	7/16	1/8



Contrôle continu 3 - thème B

Exercice 3.1 (13 points)**.**

1. Énoncer le théorème de la limite par encadrement (ou «des deux gendarmes»). En déduire le comportement de la suite

$$u_n = \left(e^{-4n} + \frac{1}{n}\right)(\sin(n))$$

2. Soit (u_n) une suite telle que $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = 3 - \frac{4}{u_n+2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   2.1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 1$.
   2.2. Montrer que (u_n) est une suite monotone.
   2.3. En étudier sa convergence.
3. Calculer, si elles existent, les limites suivantes :

   3.1. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{2n+1} - \sqrt{3n+1}$,
   3.2. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sin\left(\pi - \frac{\pi}{n}\right)$,
   3.3. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^2+1}{2n\sqrt{n+1}}$,
   3.4. $\lim\limits_{n\to+\infty} (-1)^n \frac{6n+3}{2n-1}$.

Solution.

1. Soit u_n une suite. S'il existe deux suites v_n et w_n ayant une même limite $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ et satisfaisant

$$\exists M \in \mathbb{N} \text{ tel que } v_n \le u_n \le w_n \ \forall n \in \mathbb{N},\ n \ge M,$$

   alors $\lim u_n = \ell$.
   Étant donné que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $-(e^{-4n} + \frac{1}{n}) \le u_n \le (e^{-4n} + \frac{1}{n})$ et que $\lim\limits_{n\to+\infty} \pm(e^{-4n} + \frac{1}{n}) = 0$, on conclut que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
2. 2.1. La propriété se démontre par récurrence. On a bien $u_0 = 4 > 1$. Il reste à démontrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, si $u_k > 1$ alors $u_{k+1} > 1$. On a

$$u_{k+1} > 1 \iff 3 - \frac{4}{u_k+2} > 1 \iff \frac{4}{u_k+2} < 2 \overset{u_k+2>0}{\iff} 2 < u_k + 2 \iff 0 < u_k.$$

   Comme $u_k > 1 > 0$ alors $u_{k+1} > 1$.
   2.2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$u_{n+1} - u_n = 3 - \frac{4}{u_n+2} - u_n = \frac{-u_n^2 + u_n + 2}{u_n+2} = 1 - u_n^2 < 0.$$

   Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 1$, alors $1 - u_n^2 < 0$ donc (u_n) est une suite monotone décroissante.
   2.3. On a montré que la suite (u_n) est décroissante et minorée. Elle est donc convergente. Notons ℓ sa limite. La suite (u_{n+1}) tend vers ℓ et la suite $f(u_n)$ tend vers $f(\ell)$. La limite vérifie donc

$$\ell = 3 - \frac{4}{\ell+2} \iff \ell^2 - \ell - 2 = 0 \iff (\ell-2)(\ell+1) = 0.$$

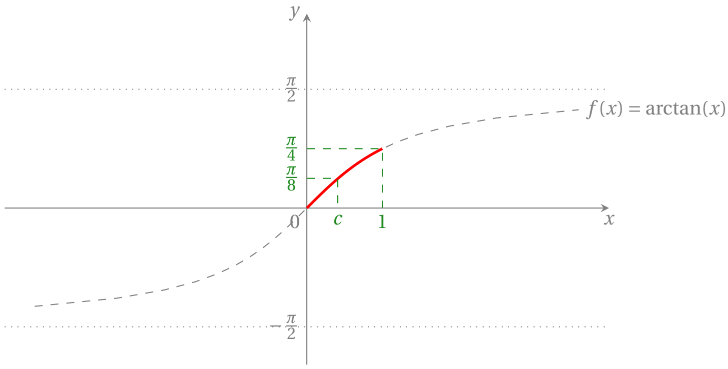
   Comme $u_n > 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, il faut $\ell \ge 1$; on a donc $\ell = 2$.
3. 3.1. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{2n+1} - \sqrt{3n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} (\sqrt{2n+1} - \sqrt{3n+1}) \frac{\sqrt{2n+1}+\sqrt{3n+1}}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{3n+1}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(2n+1)-(3n+1)}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{3n+1}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{-1}{\sqrt{\frac{2n+1}{n^2}} + \sqrt{\frac{3n+1}{n^2}}} = -\infty$,
   3.2. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sin\left(\pi - \frac{\pi}{n}\right) = 0$,
   3.3. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^2+1}{2n\sqrt{n+1}} = +\infty$,
   3.4. Notons $u_n = (-1)^n \frac{6n+3}{2n-1}$. Cette suite ne converge pas car la sous-suite u_{2n} tend vers 3 tandis que la sous-suite u_{2n+1} tend vers -3.

Exercice 3.2 (7 points)**.**

1. Dire si l'application $f : \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{2}{1-x^2}$ se prolonge par continuité en -1 et en 1. Donner le prolongement par continuité le cas échéant.
2. Montrer qu'il existe $x \in]0,1[$ tel que $\arctan(x) = \pi/8$, puis qu'il est unique.
   Facultatif : déterminer x par dichotomie avec une précision de $1/8$.

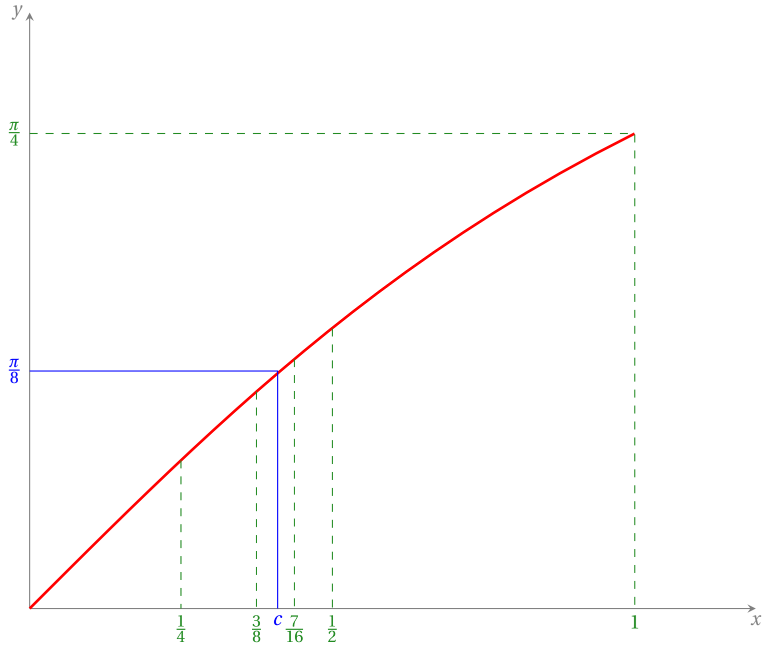
Solution.

1. On a $f(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{2}{1-x^2} = \frac{1}{x-1}$ donc $\lim_{x\to-1} f(x) = -1/2$ et $\lim_{x\to1^\pm} f(x) = \pm\infty$. La fonction f n'est donc pas prolongeable par continuité en 1 mais elle est prolongeable par continuité en -1 et ce prolongement vaut $-1/2$.
2. Rappelons le théorème des valeurs intermédiaires : *soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$. Alors pour toute valeur y comprise entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = y$.* Comme la fonction arctan est définie et continue de $\mathbb{R}$ dans $]-\pi/2, \pi/2[$, elle est donc continue sur l'intervalle $[0;1]$. Puisque $\pi/8$ est compris entre $\arctan(0) = 0$ et $\arctan(1) = \pi/4$, alors il existe un $c \in [0,1]$ tel que $\arctan(c) = \pi/8$. De plus, la fonction arctan est monotone croissante donc ce c est unique.



Dichotomie :

k	a_k	b_k	x_k	erreur$_k \leq$
1	0	1	1/2	1
2	0	1/2	1/4	1/2
3	1/4	1/2	3/8	1/4
4	3/8	1/2	7/16	1/8



Contrôle continu 4 - thème A

Exercice 4.1 (10 points)**.**

1. Énoncer le théorème des accroissement finis.
2. Un glaçon sphérique fond en conservant sa forme. Le taux de variation de son volume avec le temps est proportionnel à sa surface. Il faut une heure pour qu'un glaçon de un centimètre de rayon fonde totalement. Après combien de temps le glaçon a-t-il diminué de moitié en volume ? Rappel : la surface et le volume d'une sphère de rayon r sont respectivement $S = 4\pi r^2$ et $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.
3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application définie par $f(x) = x^2 \cos\left(\frac{1}{x^2}\right)$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.
   3.1. f est-elle continue en $x = 0$?
   3.2. Calculer $f'(x)$ pour $x \neq 0$. En déduire l'équation de la droite tangente à f en $x = 1$.
   3.3. f est-elle dérivable en $x = 0$? Calculer l'équation de la droite tangente à f en $x = 0$ le cas échéant.
   3.4. f est-elle de classe $\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$?

SOLUTION.

1. Théorème des accroissements finis : *soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$ avec $a < b$, dérivable sur $]a,b[$. Alors il existe au moins un point $c \in]a,b[$ tel que : $f'(c) = (f(b) - f(a))/(b-a)$.*
2. Le rayon est fonction du temps donc $V'(t) = 4\pi[r(t)]^2 r'(t)$. Comme le taux de variation de son volume avec le temps est proportionnel à sa surface, il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $V'(t) = k4\pi[r(t)]^2$. Donc $4\pi[r(t)]^2 r'(t) = k4\pi[r(t)]^2$, autrement dit $k = r'(t)$ ce qui implique que $r(t) = at + b$. Comme il faut une heure pour qu'un glaçon de un centimètre de rayon fonde totalement, on a $r(0) = 1$ et $r(1) = 0$ et on obtient la relation $r(t) = 1 - t$. On cherche alors $\hat{t}$ tel que $V(\hat{t}) = V(0)/2$, c'est-à-dire $\frac{4}{3}\pi(1-\hat{t})^3 = \frac{4}{3}\pi\frac{1}{2}$: le glaçon a diminué de moitié en volume après $\hat{t} = 1 - 2^{-1/3} \approx 0.20$ h = 12 minutes.
3.
   3.1. Comme $\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$ (théorème d'encadrement), la fonction est continue en 0.
   3.2. Pour $x \neq 0$, $f'(x) = 2x\cos\left(\frac{1}{x^2}\right) + \frac{2}{x}\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$. L'équation de la droite tangente à f en $x = 1$ est donc $y = f'(1)(x-1) + f(1) = 2(\cos(1) + \sin(1))(x-1) + \cos(1)$.
   3.3. f est dérivable en $x = 0$ et on a $f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2\cos(\frac{1}{x^2})-0}{x} = 0$ (théorème d'encadrement). L'équation de la droite tangente à f en $x = 0$ est donc $y = f'(0)x + f(0) = 0$.
   3.4. f n'est pas de classe $\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$ car $\lim_{x\to 0} f'(x)$ n'existe pas.

Exercice 4.2 (10 points)**.**

1. Déterminer le développement limité de la fonction $g(x) = \dfrac{\sinh^2(t)}{1-\cos(t)}$ au point 0 à l'ordre 4.
2. Déterminer le développement limité asymptotique en $+\infty$ de la fonction $f(x) = \dfrac{\sqrt{3+x+x^2} - \sqrt{2-x+x^2}}{x}$ à l'ordre 2.
3. Déterminer le développement limité de $x^4 - 1$ au point -1 à l'ordre 3.
4. Soit $f(x) := \left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^{\ln(x)}$. Quel est son domaine de définition ? Est-elle prolongeable par continuité en 0 ?

On pourra utiliser la règle de L'Hôpital.

SOLUTION.

1. $\sinh(t) = t + \frac{t^3}{6} + \frac{t^5}{120} + o(t^6)$ et $1 - \cos(t) = \frac{t^2}{2} - \frac{t^4}{24} + \frac{t^6}{720} + o(t^7)$ donc
$$\frac{\sinh^2(t)}{1-\cos(t)} = \frac{\left(t + \frac{t^3}{6} + \frac{t^5}{120} + o(t^6)\right)^2}{\frac{t^2}{2} - \frac{t^4}{24} + \frac{t^6}{720} + o(t^7)} = \frac{t^2 + \frac{t^4}{3} + \frac{2t^6}{45} + o(t^7)}{\frac{t^2}{2}\left(1 - \frac{t^2}{12} + \frac{t^4}{360} + o(t^5)\right)} = \frac{2 + \frac{2t^2}{3} + \frac{4t^4}{45} + o(t^5)}{1 - \frac{t^2}{12} + \frac{t^4}{360} + o(t^5)}.$$
   Maintenant on peux utiliser deux méthodes :
   1.1. la première utilise le développement limité de $\frac{1}{1-A}$ avec $A = \frac{t^2}{12} - \frac{t^4}{360} + o(t^5)$:
$$\begin{aligned}\frac{\sinh^2(t)}{1-\cos(t)} &= \frac{2 + \frac{2t^2}{3} + \frac{4t^4}{45} + o(t^5)}{1-A}\\ &= \left(2 + \frac{2t^2}{3} + \frac{4t^4}{45} + o(t^5)\right)\left(1 + A + A^2 + o(A^2)\right)\\ &= \left(2 + \frac{2t^2}{3} + \frac{4t^4}{45} + o(t^5)\right)\left(1 + \frac{t^2}{12} - \frac{t^4}{360} + o(t^5) + \frac{t^4}{144}\right)\\ &= 2 + \frac{5}{6}t^2 + \frac{11}{72}t^4 + o(t^4);\end{aligned}$$

1.2. la deuxième méthode applique la technique de la division suivant les puissances croissantes : si f et g ont au point a un développement limité à l'ordre n et si $g(a)\neq 0$, le polynôme d'approximation de f/g à l'ordre n s'obtient en divisant suivant les puissances croissantes à l'ordre n le polynôme d'approximation de f par celui de g. Ici $f(x)=2+\frac{2t^2}{3}+\frac{4t^4}{45}$ et $g(x)=1-\frac{t^2}{12}+\frac{t^4}{360}$ et on pose la division suivant les puissances croissantes en ne gardant que les termes de degré inférieur ou égal à 4 :

$$
\begin{array}{rrr|rrr}
2 & +\frac{2}{3}t^2 & +\frac{4}{45}t^4 & 1 & -\frac{1}{12}t^2 & +\frac{1}{360}t^4 \\ \cline{4-6}
-2 & +\frac{1}{6}t^2 & -\frac{1}{180}t^4 & 2 & +\frac{5}{6}t^2 & +\frac{11}{72}t^4 \\ \cline{1-3}
 & +\frac{5}{6}t^2 & +\frac{1}{12}t^4 & & & \\
 & -\frac{5}{6}t^2 & +\frac{5}{72}t^4 & & & \\ \cline{1-3}
 & & +\frac{11}{72}t^4 & & & \\
 & & -\frac{11}{72}t^4 & & & \\ \cline{1-3}
 & & 0 & & &
\end{array}
$$

On conclut que $\frac{\sinh^2(t)}{1-\cos(t)}=2+\frac{5}{6}t^2+\frac{11}{72}t^4+o(t^4)$.

2. On dit que f admet un développement limité généralisé à l'ordre n en $a=+\infty$ (ou en $a=-\infty$) s'il existe un polynôme P tel que $f(x)=P(1/x)+o(1/x^n)$ au voisinage de ce point. L'expression $P(1/x)$ n'est pas un polynôme, mais a des propriétés similaires. Dans la pratique, on peut obtenir un développement limité de $f(x)$ en $a=+\infty$ (ou en $a=-\infty$) en posant $x=1/t$ (de sorte que t tend vers 0, avec un signe fixe) et en tentant de développer $f(1/t)$ au voisinage de 0 :

$$
\begin{aligned}
f(1/t)&=t\left(\sqrt{3+\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}}-\sqrt{2-\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}}\right)\\
&=\sqrt{3t^2+t+1}-\sqrt{2t^2-t+1}\\
&=(1-A)^{1/2}-(1-B)^{1/2}\qquad \text{avec } A=-t-3t^2\xrightarrow[t\to 0]{}0,\ B=t-2t^2\xrightarrow[t\to 0]{}0\\
&=\left(1-\frac{1}{2}A+\frac{1}{8}A^2+o(A^2)\right)-\left(1-\frac{1}{2}B+\frac{1}{8}B^2+o(A^2)\right)\\
&=\left(1+\frac{1}{2}t+\frac{3}{2}t^2+\frac{1}{8}t^2+o(t^2)\right)-\left(1-\frac{1}{2}t+t^2+\frac{1}{8}t^2+o(t^2)\right)\\
&=t+\frac{1}{2}t^2+o(t^2)\\
&=\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+o(1/x^2).
\end{aligned}
$$

3. Selon la formule de Taylor, le développement limité à l'ordre n au point x_0 de f peut être calculé selon la formule $DL_n(x_0)=\sum_{k=0}^{k=n}f^{(k)}(x_0)\frac{(x-x_0)^k}{k!}+o((x-x_0)^n)$. Ici $f(x)=x^4-1$, $x_0=-1$ et

$$
\begin{aligned}
f^{(0)}(x)&=x^4-1 & f^{(0)}(-1)&=0,\\
f^{(i)}(x)&=4x^3 & f^{(i)}(-1)&=-4,\\
f^{(ii)}(x)&=12x^2 & f^{(ii)}(-1)&=12,\\
f^{(iii)}(x)&=24x & f^{(iii)}(-1)&=-24,
\end{aligned}
$$

donc

$$
\begin{aligned}
x^4-1&=f^{(0)}(-1)\frac{(x+1)^0}{0!}+f^{(i)}(-1)\frac{(x+1)^1}{1!}+f^{(ii)}(-1)\frac{(x+1)^2}{2!}+f^{(iii)}(-1)\frac{(x+1)^3}{3!}+o((x+1)^3)\\
&=0\frac{1}{1}+(-4)\frac{(x+1)}{1}+12\frac{(x+1)^2}{2}+(-24)\frac{(x+1)^3}{6}+o((x+1)^3)\\
&=-4(x+1)+6(x+1)^2-4(x+1)^3+o((x+1)^3).
\end{aligned}
$$

4. Pour que f soit bien définie il faut que, pour tout $x\in\mathbb{R}$, x vérifie le système suivant

$$
\begin{cases}
1+x\neq 0,\\
\frac{1-x}{1+x}>0,\\
x>0,
\end{cases}
$$

donc $\mathscr{D}_f=]0;1[$. De plus

$$
\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\ln(x)}=\lim_{x\to 0^+}e^{\ln(x)\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)}=e^{\lim_{x\to 0^+}\ln(x)\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)}
$$

et

$$
\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)}{1/\ln(x)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\frac{-(1+x)-(1-x)}{(1-x)^2}}{1/(x\ln^2(x))}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-2x\ln^2(x)(1+x)}{(1-x)^3}=\left(\lim_{x\to 0^+}\frac{-2(1+x)}{(1-x)^3}\right)\left(\lim_{x\to 0^+}x\ln^2(x)\right)=-2\lim_{x\to 0^+}x\ln^2(x)=0
$$

donc

$$
\lim_{x\to 0^+}f(x)=e^0=1.
$$

Contrôle continu 4 - thème B

Exercice 4.1 (10 points)**.**

1. Énoncer le théorème des accroissement finis.
2. Un glaçon cubique fond en conservant sa forme. Le taux de variation de son volume avec le temps est proportionnel à sa surface. Il faut une heure pour qu'un glaçon de un centimètre de coté fonde totalement. Après combien de temps le glaçon a-t-il diminué de moitié en volume ?
3. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application définie par $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.
   3.1. f est-elle continue en $x = 0$?
   3.2. Calculer $f'(x)$ pour $x \neq 0$. En déduire l'équation de la droite tangente à f en $x = 1$.
   3.3. f est-elle dérivable en $x = 0$? Calculer l'équation de la droite tangente à f en $x = 0$ le cas échéant.
   3.4. f est-elle de classe $\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$?

SOLUTION.

1. Théorème des accroissements finis : *soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ avec $a < b$, dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe au moins un point $c \in]a, b[$ tel que : $f'(c) = (f(b) - f(a))/(b - a)$.*
2. La surface et le volume d'un cube de coté ℓ sont respectivement $S = 6\ell^2$ et $V = \ell^3$. Le coté est fonction du temps donc $V'(t) = [\ell(t)]^2\ell'(t)$. Comme le taux de variation de son volume avec le temps est proportionnel à sa surface, il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $V'(t) = k6[\ell(t)]^2$. Donc $[\ell(t)]^2\ell'(t) = k6[\ell(t)]^2$, autrement dit $6k = \ell'(t)$ ce qui implique que $\ell(t) = at + b$. Comme il faut une heure pour qu'un glaçon de un centimètre de coté fonde totalement, on a $\ell(0) = 1$ et $\ell(1) = 0$ et on obtient la relation $\ell(t) = 1 - t$. On cherche alors $\hat{t}$ tel que $V(\hat{t}) = V(0)/2$, c'est-à-dire $(1 - \hat{t})^3 = 1/2$: le glaçon a diminué de moitié en volume après $\hat{t} = 1 - 2^{-1/3} \approx 0.20$ h = 12 minutes.
3. 3.1. Comme $\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$ (théorème d'encadrement), la fonction est continue en 0.
   3.2. Pour $x \neq 0$, $f'(x) = 2x\sin\left(\frac{1}{x^2}\right) - \frac{2}{x}\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)$. L'équation de la droite tangente à f en $x = 1$ est donc $y = f'(1)(x-1) + f(1) = 2(\sin(1) - \cos(1))(x-1) + \sin(1)$.
   3.3. f est dérivable en $x = 0$ car on a $f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2\sin(\frac{1}{x^2})-0}{x} = 0$ (théorème d'encadrement). L'équation de la droite tangente à f en $x = 0$ est donc $y = f'(0)x + f(O) = 0$.
   3.4. f n'est pas de classe $\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$ car $\lim_{x\to 0} f'(x)$ n'existe pas.

Exercice 4.2 (10 points)**.**

1. Déterminer le développement limité de la fonction $g(x) = \dfrac{\sinh^2(t)}{1-\cos(t)}$ au point 0 à l'ordre 4.
2. Déterminer le développement limité asymptotique en $+\infty$ de la fonction $f(x) = \dfrac{\sqrt{2-x+x^2} - \sqrt{3+x+x^2}}{x}$ à l'ordre 2.
3. Déterminer le développement limité de $x^4 + 1$ au point 1 à l'ordre 3.
4. Soit $f(x) := \left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^{\ln(x)}$. Quel est son domaine de définition ? Est-elle prolongeable par continuité en 1 ?

On pourra utiliser la règle de L'Hôpital.

SOLUTION.

1. $\sinh(t) = t + \frac{t^3}{6} + \frac{t^5}{120} + o(t^6)$ et $1 - \cos(t) = \frac{t^2}{2} - \frac{t^4}{24} + \frac{t^6}{720} + o(t^7)$ donc

$$\frac{\sinh^2(t)}{1-\cos(t)} = \frac{\left(t + \frac{t^3}{6} + \frac{t^5}{120} + o(t^6)\right)^2}{\frac{t^2}{2} - \frac{t^4}{24} + \frac{t^6}{720} + o(t^7)} = \frac{t^2 + \frac{t^4}{3} + \frac{2t^6}{45} + o(t^7)}{\frac{t^2}{2}\left(1 - \frac{t^2}{12} + \frac{t^4}{360} + o(t^5)\right)} = \frac{2 + \frac{2t^2}{3} + \frac{4t^4}{45} + o(t^5)}{1 - \frac{t^2}{12} + \frac{t^4}{360} + o(t^5)}.$$

Maintenant on peux utiliser deux méthodes :

1.1. la première utilise le développement limité de $\frac{1}{1-A}$ avec $A = \frac{t^2}{12} - \frac{t^4}{360} + o(t^5)$:

$$\begin{aligned}\frac{\sinh^2(t)}{1-\cos(t)} &= \frac{2 + \frac{2t^2}{3} + \frac{4t^4}{45} + o(t^5)}{1-A} \\ &= \left(2 + \frac{2t^2}{3} + \frac{4t^4}{45} + o(t^5)\right)\left(1 + A + A^2 + o(A^2)\right) \\ &= \left(2 + \frac{2t^2}{3} + \frac{4t^4}{45} + o(t^5)\right)\left(1 + \frac{t^2}{12} - \frac{t^4}{360} + o(t^5) + \frac{t^4}{144}\right) \\ &= 2 + \frac{5}{6}t^2 + \frac{11}{72}t^4 + o(t^4);\end{aligned}$$

1.2. la deuxième méthode applique la technique de la division suivant les puissances croissantes : si f et g ont au point a un développement limité à l'ordre n et si $g(a) \neq 0$, le polynôme d'approximation de f/g à l'ordre n s'obtient en divisant suivant les puissances croissantes à l'ordre n le polynôme d'approximation de f par celui de g. Ici $f(x) = 2 + \frac{2t^2}{3} + \frac{4t^4}{45}$ et $g(x) = 1 - \frac{t^2}{12} + \frac{t^4}{360}$ et on pose la division suivant les puissances croissantes en ne gardant que les termes de degré inférieur ou égal à 4 :

$$
\begin{array}{ccc|ccc}
2 & +\frac{2}{3}t^2 & +\frac{4}{45}t^4 & 1 & -\frac{1}{12}t^2 & +\frac{1}{360}t^4 \\
\cline{4-6}
-2 & +\frac{1}{6}t^2 & -\frac{1}{180}t^4 & 2 & +\frac{5}{6}t^2 & +\frac{11}{72}t^4 \\
\cline{1-3}
 & +\frac{5}{6}t^2 & +\frac{1}{12}t^4 & & & \\
 & -\frac{5}{6}t^2 & +\frac{5}{72}t^4 & & & \\
\cline{1-3}
 & & +\frac{11}{72}t^4 & & & \\
 & & -\frac{11}{72}t^4 & & & \\
\cline{1-3}
 & & 0 & & &
\end{array}
$$

On conclut que $\frac{\sinh^2(t)}{1-\cos(t)} = 2 + \frac{5}{6}t^2 + \frac{11}{72}t^4 + o(t^4)$.

2. On dit que f admet un développement limité généralisé à l'ordre n en $a = +\infty$ (ou en $a = -\infty$) s'il existe un polynôme P tel que $f(x) = P(1/x) + o(1/x^n)$ au voisinage de ce point. L'expression $P(1/x)$ n'est pas un polynôme, mais a des propriétés similaires. Dans la pratique, on peut obtenir un développement limité de $f(x)$ en $a = +\infty$ (ou en $a = -\infty$) en posant $x = 1/t$ (de sorte que t tend vers 0, avec un signe fixe) et en tentant de développer $f(1/t)$ au voisinage de 0 :

$$
\begin{aligned}
f(1/t) &= t\left(\sqrt{2 - \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2}} - \sqrt{3 + \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2}}\right) \\
&= \sqrt{2t^2 - t + 1} - \sqrt{3t^2 + t + 1} \\
&= (1-A)^{1/2} - (1-B)^{1/2} \qquad \text{avec } A = t - 2t^2 \xrightarrow[t\to 0]{} 0,\ B = -t - 3t^2 \xrightarrow[t\to 0]{} 0 \\
&= \left(1 - \frac{1}{2}A + \frac{1}{8}A^2 + o(A^2)\right) - \left(1 - \frac{1}{2}B + \frac{1}{8}B^2 + o(A^2)\right) \\
&= \left(1 - \frac{1}{2}t + t^2 + \frac{1}{8}t^2 + o(t^2)\right) - \left(1 + \frac{1}{2}t + \frac{3}{2}t^2 + \frac{1}{8}t^2 + o(t^2)\right) \\
&= -t - \frac{1}{2}t^2 + o(t^2) \\
&= -\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + o(1/x^2).
\end{aligned}
$$

3. Selon la formule de Taylor, le développement limité à l'ordre n au point x_0 de f peut être calculé selon la formule $DL_n(x_0) = \sum_{k=0}^{k=n} f^{(k)}(x_0)\frac{(x-x_0)^k}{k!} + o((x-x_0)^n)$. Ici $f(x) = x^4 + 1$, $x_0 = 1$ et

$$
\begin{aligned}
f^{(0)}(x) &= x^4 + 1 & f^{(0)}(1) &= 2, \\
f^{(i)}(x) &= 4x^3 & f^{(i)}(1) &= 4, \\
f^{(ii)}(x) &= 12x^2 & f^{(ii)}(1) &= 12, \\
f^{(iii)}(x) &= 24x & f^{(iii)}(1) &= 24,
\end{aligned}
$$

donc

$$
\begin{aligned}
x^4 + 1 &= f^{(0)}(1)\frac{(x-1)^0}{0!} + f^{(i)}(1)\frac{(x-1)^1}{1!} + f^{(ii)}(1)\frac{(x-1)^2}{2!} + f^{(iii)}(1)\frac{(x-1)^3}{3!} + o((x-1)^3) \\
&= 2\frac{1}{1} + 4\frac{(x-1)}{1} + 12\frac{(x-1)^2}{2} + 24\frac{(x-1)^3}{6} + o((x-1)^3) \\
&= 2 + 4(x-1) + 6(x-1)^2 + 4(x-1)^3 + o((x-1)^3).
\end{aligned}
$$

4. Pour que f soit bien définie il faut que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, x vérifie le système suivant

$$
\begin{cases}
1 + x \neq 0, \\
\frac{1+x}{1-x} > 0, \\
x > 0,
\end{cases}
$$

donc $\mathscr{D}_f =]0;1[$. De plus

$$
\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\ln(x)} = \lim_{x\to 1^-} e^{\ln(x)\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)} = e^{\lim_{x\to 1^-}\ln(x)\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}
$$

et

$$
\lim_{x\to 1^-}\frac{\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}{1/\ln(x)} = \lim_{x\to 1^-}\frac{\left(\frac{1-x}{1+x}\right)\frac{(1-x)+(1+x)}{(1-x)^2}}{1/(x\ln^2(x))} = \lim_{x\to 1^-}\frac{2x\ln^2(x)}{(1-x^2)} = \left(\lim_{x\to 1^-}\frac{-2x}{1+x}\right)\left(\lim_{x\to 1^-}\frac{\ln^2(x)}{1-x}\right) = -1\lim_{x\to 1^-}\frac{2\ln(x)}{-x} = 0
$$

donc

$$
\lim_{x\to 1^-} f(x) = e^0 = 1.
$$

Examen

Exercice 1 (7 points)**.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \sin \frac{1}{x}, & \text{si } x > 0, \\ 0, & \text{si } x = 0, \\ x^3 \ln|x|, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue en 0.
2. Calculer $f'(x)$ pour $x \neq 0$, puis $f'(0)$.
3. Étudier la continuité de f' en 0.
4. Est-ce que $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$? Justifier la réponse.
5. Calculer la dérivée seconde $f''(0)$ si elle existe.
6. Peut-on utiliser la formule de Taylor-Young pour écrire le développement limité de f en 0 à l'ordre 2 ? Pourquoi ?
7. Écrire le développement limité de f en 0 à l'ordre 2 s'il existe.

Solution. L'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se réécrit

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \sin \frac{1}{x}, & \text{si } x > 0, \\ 0, & \text{si } x = 0, \\ x^3 \ln(-x), & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

1. f est continue en 0 car

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x^3 \sin \frac{1}{x} = 0 = f(0)$$

et

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} x^3 \ln(-x) = 0 = f(0).$$

2. Comme

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^3 \sin \frac{1}{x} - 0}{x - 0} = 0$$

et

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{x^3 \ln(-x) - 0}{x - 0} = 0$$

la dérivée de f est l'application $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 \sin \frac{1}{x} - x \cos \frac{1}{x}, & \text{si } x > 0, \\ 0, & \text{si } x = 0, \\ 3x^2 \ln(-x) + x^2, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

3. f' est continue en $x = 0$ car

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} 3x^2 \sin \frac{1}{x} - x \cos \frac{1}{x} = 0 = f'(0)$$

et

$$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} 3x^2 \ln(-x) + x^2 = 0 = f'(0).$$

4. $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$ car elle est continue, dérivable et sa dérivée est continue.
5. La dérivée seconde de f en $x = 0$ n'existe pas car

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{3x^2 \sin \frac{1}{x} - x \cos \frac{1}{x} - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \left(3x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} \right)$$

n'existe pas.

6. On dit qu'une fonction f admet un développement limité à l'ordre n (entier naturel) au point a s'il existe un polynôme P de degré au plus n tel que

$$f(x) = P(x) + o((x-a)^n) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$$

au voisinage de a.
Si f est n fois continûment dérivable sur un intervalle I avec n entier positif ou nul, alors pour tout point $a \in I$, f a un développement limité au point a donné par la formule de Taylor-Young

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + o((x-a)^n).$$

Dans notre cas, comme f n'admet pas de dérivée seconde en 0, on ne peut pas utiliser la formule de Taylor-Young pour calculer le développement limité de f en 0 à l'ordre 2.

7. Il est tentant de penser que la réciproque est vraie, c'est-à-dire qu'une fonction qui admet un développement limité à l'ordre n en un point a est dérivable n fois en ce point. C'est effectivement le cas si $n=0$ ou $n=1$. Dans le premier cas, le développement limité s'écrit juste $f(x)=a_o+o(1)$ et donc $a_o=f(a)$ par définition d'un $o(1)$. Si $n=1$ et $f(x)=a_o+a_1(x-a)+o(x-a)$, alors $a_o=f(a)$ pour la même raison, et par suite :
$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=a_1+o(1)$$
ce qui implique que l'accroissement fini a une limite égale à a_1, ainsi f est bien dérivable en a et $a_1=f'(a)$. Mais la réciproque est fausse pour $n\geq 2$, autrement dit une fonction peut admettre un développement limité à l'ordre $n\geq 2$ bien qu'elle ne soit pas n fois continûment dérivable.
Dans notre cas, on peut utiliser la formule de Taylor-Young pour calculer le développement limité de f en 0 à l'ordre 1 :
$$f(x)=f(0)+f'(0)x+o(x)=0+o(x).$$
Pour calculer le développement limité de f en 0 à l'ordre 2 il suffit de remarquer que
$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x^3\sin\frac{1}{x}}{x^2}=0\quad\text{et}\quad\lim_{x\to 0^-}\frac{x^3\ln(-x)}{x^2}=0,$$
c'est-à-dire $f(x)=o(x^2)$: le développement limité de f en 0 à l'ordre 2 est $f(x)=0+o(x^2)$. Remarquons que, en revanche, il n'existe pas de développement limité de f en 0 à l'ordre 3 car
$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x^3\sin\frac{1}{x}}{x^3}$$
n'existe pas.

Exercice 2 (7 points)**.** On considère la fonction $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par
$$f(x)=2x+\sqrt{x^2+2x-2}.$$

1. Trouver le domaine de définition $\mathscr{D}_f$ de f.
2. Calculer les limites de f aux extrémités du domaine de définition.
3. Calculer la dérivée $f'(x)$ de f, son domaine de définition et étudier son signe.
4. En déduire le sens de variation de f et dresser le tableau de variation de f.
5. Établir le développement limité à l'ordre 2 de la fonction $x\mapsto\frac{f(x)}{x}$ en $-\infty$ puis en $+\infty$ et préciser la position de la courbe représentative de f par rapport à ces asymptotes.
6. Tracer les asymptotes et l'allure de la courbe de f.

SOLUTION.

1. La fonction $\star\mapsto\sqrt{\star}$ n'est définie que si $\star\geq 0$ donc
$$\mathscr{D}_f=\left\{x\in\mathbb{R}\ :\ x^2+2x-2\geq 0\right\}=\left]-\infty;-1-\sqrt{3}\right]\cup\left[-1+\sqrt{3};+\infty\right[.$$
2. Observons d'abord que $f(x)=2x+\sqrt{x^2+2x-2}=2x+|x|\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}}$ donc
$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}2x+\sqrt{x^2+2x-2}&=\lim_{x\to-\infty}x\left(2-\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}}\right)=-\infty,\\ \lim_{x\to-1-\sqrt{3}}2x+\sqrt{x^2+2x-2}&=f(-1-\sqrt{3})=-2-2\sqrt{3},\\ \lim_{x\to-1+\sqrt{3}}2x+\sqrt{x^2+2x-2}&=f(-1+\sqrt{3})=-2+2\sqrt{3},\\ \lim_{x\to+\infty}2x+\sqrt{x^2+2x-2}&=\lim_{x\to+\infty}x\left(2+\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}}\right)=+\infty.\end{aligned}$$
3. $f'(x)=2+\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x-2}}$ donc $\mathscr{D}_{f'}=\mathscr{D}_f\setminus\{-1\pm\sqrt{3}\}$ (car il faut exclure les $x\in\mathscr{D}_f$ qui annulent le dénominateur). Pour en étudier le signe on se rappelle que

	Solutions de l'équation $A(x)=\sqrt[n]{B(x)}$	Solutions de l'inégalité $A(x)>\sqrt[n]{B(x)}$	Solutions de l'inégalité $A(x)<\sqrt[n]{B(x)}$
Si n est impaire	$(A(x))^n=B(x)$	$(A(x))^n>B(x)$	$(A(x))^n<B(x)$
Si n est paire	$\begin{cases}A(x)\geq 0\\(A(x))^n=B(x)\end{cases}$	$\begin{cases}B(x)\geq 0\\A(x)>0\\(A(x))^n>B(x)\end{cases}$	$\begin{cases}A(x)<0\\B(x)\geq 0\end{cases}\vee\begin{cases}A(x)\geq 0\\(A(x))^n<B(x)\end{cases}$

donc
$$f'(x)=0\iff 2\sqrt{x^2+2x-2}+x+1=0\iff\underbrace{-\frac{x+1}{2}}_{A(x)}=\underbrace{\sqrt{x^2+2x-2}}_{\sqrt{B(x)}}\iff\begin{cases}-\frac{x+1}{2}\geq 0,\\x^2+2x+1=4x^2+8x-8,\end{cases}\iff\begin{cases}x\leq -1,\\x^2+2x-3=0,\end{cases}\iff x=-3$$
et
$$\begin{aligned}f'(x)>0\iff\frac{x+1+2\sqrt{x^2+2x-2}}{\sqrt{x^2+2x-2}}>0&\iff x+1+2\sqrt{x^2+2x-2}>0\\&\iff\underbrace{-\frac{x+1}{2}}_{A(x)}<\underbrace{\sqrt{x^2+2x-2}}_{\sqrt{B(x)}}\iff\begin{cases}-\frac{x+1}{2}<0,\\x^2+2x-2\geq 0\end{cases}\cup\begin{cases}-\frac{x+1}{2}\geq 0,\\x^2+2x+1<4x^2+8x-8,\end{cases}\iff x>-1+\sqrt{3}.\end{aligned}$$

4. Tableau de variation de f :

x	$-\infty$		-3		$-1-\sqrt{3}$		$-1+\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$				$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-5	$\searrow$	$-2-2\sqrt{3}$		$-2+2\sqrt{3}$	$\nearrow$	$+\infty$

5. On a

$$\frac{f(x)}{x}=\begin{cases}2+\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}} & \text{si } x>0,\\ 2-\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}} & \text{si } x<-1-\sqrt{3}\cup -1+\sqrt{3}\leq x<0,\end{cases}$$

donc

▷ le développement limité de $\frac{f(x)}{x}$ en $-\infty$ à l'ordre 2 est

$$g(t)=tf(1/t)=2-\sqrt{1+2t-2t^2}=2-1-\frac{(2t-2t^2)}{2}+\frac{(2t-2t^2)^2}{8}+o(t^2)=1-t+\frac{t^2}{2}+o(t^2)$$

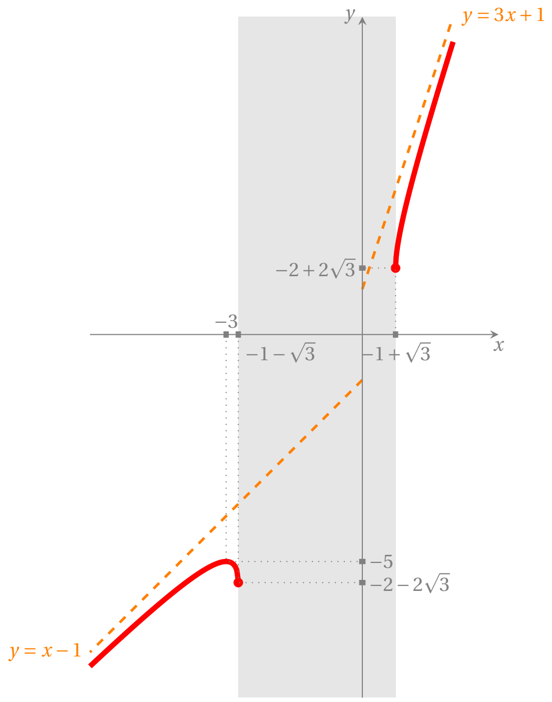
donc $1-\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+o(x^{-2})$ est le développement limité de $f(x)/x$ en $-\infty$ à l'ordre 2. On conclut que $y=x-1$ est l'équation de l'asymptote oblique au graphe de f en $-\infty$; l'asymptote est en dessous de la courbe ;

▷ le développement limité de $\frac{f(x)}{x}$ en $+\infty$ à l'ordre 2 est

$$g(t)=tf(1/t)=2+\sqrt{1+2t-2t^2}=2+1+\frac{(2t-2t^2)}{2}-\frac{(2t-2t^2)^2}{8}+o(t^2)=3+t-\frac{t^2}{2}+o(t^2)$$

donc $3+\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+o(x^{-2})$ est le développement limité de $f(x)/x$ en $+\infty$ à l'ordre 2. On conclut que $y=3x+1$ est l'équation de l'asymptote oblique au graphe de f en $+\infty$; l'asymptote est au dessus de la courbe.

6. On a le graphe suivant



Exercice 3 (7 points).

a) Écrire le développement limité de $\sin(2x)$ et de $\cos(2x)$ en 0 à l'ordre 3 ; en déduire le développement limité de $\tan(2x)=\frac{\sin(2x)}{\cos(2x)}$ en 0 à l'ordre 3 soit en utilisant le développement limité en $u=0$ de la fonction $u\mapsto\frac{1}{1+u}$ soit en appliquant la technique de la division suivant les puissances croissantes.

Suggestion : comme on connait le développement limité de $\tan(x)$ *en* 0 *à l'ordre* 3*, il est facile de calculer le développement limité de* $\tan(2x)$ *et de vérifier qu'on a bien fait les calculs.*

b) En utilisant le développement limité de $\ln(1+z)$ en 0 à l'ordre 3 et le développement limité de $\tan(2x)$ en 0 à l'ordre 3 calculé au point a), déterminer le développement limité de $\ln\big(1+\tan(2x)\big)$ en 0 à l'ordre 3.

c) En utilisant le développement limité de $\arcsin(x)$ en 0 à l'ordre 3 et le développement limité de $\ln\big(1+\tan(2x)\big)$ en 0 à l'ordre 3 calculé au point b), calculer

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\big(1+\tan(2x)\big)+2x(x-1)}{\arcsin(x)-x}.$$

SOLUTION.

a) Comme $\sin(x)=x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)$ et $\cos(x)=1-\frac{x^2}{2}+o(x^3)$, les développements limités de $\sin(2x)$ et $\cos(2x)$ en 0 à l'ordre 3 sont

$$\sin(2x)=(2x)-\frac{(2x)^3}{6}+o((2x)^3)=2x-\frac{4x^3}{3}+o(x^3),\qquad \cos(2x)=1-\frac{(2x)^2}{2}+o((2x)^3)=1-2x^2+o(x^3);$$

on peux alors utiliser deux méthodes pour calculer le développement limité de $\tan(2x)=\frac{\sin(2x)}{\cos(2x)}$ en 0 à l'ordre 3 :

▷ la première méthode utilise le développement limité de $\frac{1}{1+u}$:

$$\begin{aligned}
g(x)=\frac{2x-\frac{4x^3}{3}+o(x^3)}{1-2x^2+o(x^3)}&\underbrace{=}_{u=-2x^2+o(x^3)}\\
&=\frac{2x-\frac{4x^3}{3}+o(x^3)}{1+u}=\\
&=\left[2x-\frac{4x^3}{3}+o(x^3)\right]\left[1-u+u^2-u^3+o(u^3)\right]=\\
&=\left[2x-\frac{4x^3}{3}+o(x^3)\right]\left[1-(-2x^2)+(-2x^2)^2-(-2x^2)^3+o(x^3)\right]=\\
&=\left[2x-\frac{4x^3}{3}+o(x^3)\right]\left[1+2x^2+o(x^3)\right]=\\
&=2x+\frac{8}{3}x^3+o(x^3).
\end{aligned}$$

▷ la deuxième méthode applique la technique de la division suivant les puissances croissantes : si f et g ont au point a un développement limité à l'ordre n et si $g(a)\neq 0$, le polynôme d'approximation de f/g à l'ordre n s'obtient en divisant suivant les puissances croissantes à l'ordre n le polynôme d'approximation de f par celui de g. Ici $f(x)=2x-\frac{4x^3}{3}$ et $g(x)=1-2x^2$ et on pose la division suivant les puissances croissantes en ne gardant que les termes de degré inférieur ou égal à 3 :

$$\begin{array}{rr|ll}
2x & -\frac{4}{3}x^3 & 1 & -2x^2\\ \cline{3-4}
-2x & +4x^3 & 2x & \frac{8}{3}x^3\\ \cline{1-2}
 & \frac{8}{3}x^3 & & \\
 & -\frac{8}{3}x^3 & & \\ \cline{2-2}
 & 0 & &
\end{array}$$

Le développement limité de $\tan(2x)$ à l'ordre 3 en $x=0$ est donc $2x+\frac{8}{3}x^3+o(x^3)$.

▷ Pour vérifier nos calculs on va utiliser le développement limité de $\tan(z)$: comme $\tan(z)=z+\frac{z^3}{3}+o(x^3)$, le développement limité de $\tan(2x)$ en 0 à l'ordre 3 est bien $\tan(2x)=2x+\frac{8x^3}{3}+o(x^3)$.

b) Étant donné que les développements limités en $u=0$ à l'ordre 3 de $\ln(1+u)$ et $\tan(2u)$ sont

$$\ln(1+u)=u-\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{3}+o(u^3),\qquad \tan(2u)=2u+\frac{8u^3}{3}+o(u^3),$$

on en déduit le développement limité en $x=0$ à l'ordre 3 de $\ln(1+\tan(2x))$:

$$\begin{aligned}
\ln(1+\tan(2x))&=\ln\left(1+\underbrace{2x+\frac{8x^3}{3}+o(x^3)}_{=z\xrightarrow[x\to 0]{}0}\right)\\
&=\ln(1+z)\\
&=z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}+o(z^3)
\end{aligned}$$

si on remplace $z=2x+\frac{8x^3}{3}+o(x^3)$ on a

$$\begin{aligned}
&=2x+\frac{8x^3}{3}-\frac{\left(2x+\frac{8x^3}{3}\right)^2}{2}+\frac{\left(2x+\frac{8x^3}{3}\right)^3}{3}+o(x^3)\\
&=2x+\frac{8x^3}{3}-\frac{4x^2}{2}+\frac{8x^3}{3}+o(x^3)\\
&=2x-2x^2+\frac{16}{3}x^3+o(x^3).
\end{aligned}$$

c) Étant donné que les développements limités en $u=0$ à l'ordre 3 de $\arcsin(u)$ et $\ln(1+\tan(2u))$ sont

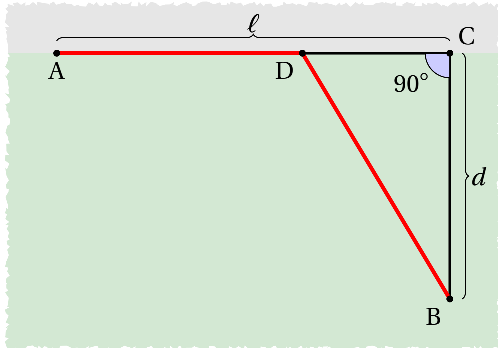
$$\arcsin(u)=u+\frac{u^3}{6}+o(u^3)\qquad \ln(1+\tan(2u))=2u-2u^2+\frac{16}{3}u^3+o(u^3)$$

on a

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\tan(2x))+2x(x-1)}{\arcsin(x)-x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x-2x^2+\frac{16}{3}x^3+o(x^3)+2x^2-2x}{x+\frac{x^3}{6}+o(x^3)-x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{16}{3}x^3+o(x^3)}{\frac{x^3}{6}+o(x^3)}=32.$$

Rattrapage

Exercice 1. Un tracteur partant d'un point A situé sur une route rectiligne doit atteindre un point B situé dans un champ (voir la figure ci-contre). On connait les distances $AC = \ell$ et $CB = d$ et on sait que le tracteur va deux fois moins vite dans le champ que sur la route. Il quitte la route en un point D de $[AC]$ à préciser. Les trajets de A à D et de D à B sont supposés rectilignes. Déterminez le point D pour que le temps total soit minimal. Discutez suivant ℓ et d.



Solution. Soit $AD = x$ avec $0 \le x \le \ell$. On a alors $DB = \sqrt{(\ell - x)^2 + d^2}$. Si v désigne la vitesse du tracteur dans le champ, sa vitesse sur la route est de $2v$ et le temps total mis pas le tracteur pour atteindre B depuis A est

$$t(x) = \frac{x}{2v} + \frac{\sqrt{(\ell - x)^2 + d^2}}{v}.$$

On cherche $x \in [0; \ell]$ qui minimise la fonction t. On a

$$t'(x) = \frac{1}{2v} + \frac{-2(\ell - x)}{2v\sqrt{(\ell - x)^2 + d^2}} = \frac{\sqrt{(\ell - x)^2 + d^2} - 2(\ell - x)}{2v\sqrt{(\ell - x)^2 + d^2}}$$

donc $t'(x) = 0$ si et seulement si $x = \ell - \frac{d}{\sqrt{3}}$ et

$$t''(x) = \frac{d^2}{v((\ell - x)^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}} > 0.$$

ce qui implique que $t'(x) > 0$ si et seulement si $x < \ell - \frac{d}{\sqrt{3}}$. Par conséquent,

▷ si $\ell < \frac{d}{\sqrt{3}}$ alors $t'(x) < 0$ pour tout $x \in [0; \ell]$: la fonction t atteint son minimum en $x = 0$, c'est-à-dire que le tracteur quitte la route en A ;

▷ si $\ell > \frac{d}{\sqrt{3}}$ alors $t'(x) < 0$ pour tout $x \in [0; \ell - \frac{d}{\sqrt{3}}]$ et $t'(x) > 0$ pour tout $x \in [\ell - \frac{d}{\sqrt{3}}; \ell]$: la fonction t atteint son minimum en $x = \ell - \frac{d}{\sqrt{3}}$.

Exercice 2. On considère la fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{x^2}{x+1} e^{\frac{1}{x}}.$$

1. Trouver le domaine de définition $\mathscr{D}_f$ de f.
2. Calculer les limites de f aux extrémités du domaine de définition.
3. Préciser les asymptotes éventuelles et la position de la courbe par rapport aux asymptotes.
4. Calculer la dérivée $f'(x)$ de f et étudier son signe.
5. En déduire le sens de variation de f et dresser le tableau de variation de f.
6. Tracer les asymptotes et l'allure de la courbe de f.

Solution.

1. Le domaine de définition $\mathscr{D}_f$ de f est l'ensemble $\mathscr{D}_f = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq -1 \text{ et } x \neq 0 \}$.
2. On a

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to-1^{\mp}} f(x) = \mp\infty, \qquad \lim_{x\to0^-} f(x) = 0, \qquad \lim_{x\to0^+} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

3. Rechercher l'existence d'une asymptote revient à rechercher un développement limité au voisinage de 0 de la fonction $g(t) = f(1/t)$:

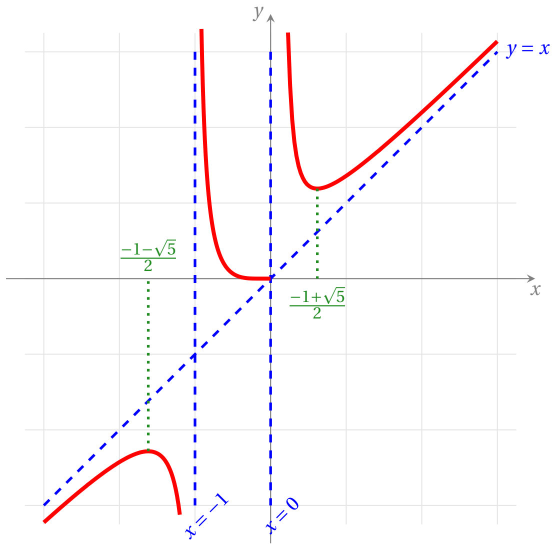
$$g(t) = \frac{1}{t}\frac{1}{1+t}e^t = \frac{1}{t}\left(1 - t + t^2 + o(t^3)\right)\left(1 + t + \frac{t^2}{2} + o(t^2)\right) = \frac{1}{t} + \frac{t}{2} + o(t)$$

d'où $f(x) = x + \frac{1}{2x} + o(1/x)$. La courbe $y = f(x)$ admet donc la droite d'équation $y = x$ pour asymptote à la fois lorsque x tend vers $-\infty$ et lorsque x tend vers $+\infty$.
Lorsque x tend vers $\pm\infty$, $f(x) - x$ est du signe de $\frac{1}{2x}$: la courbe est donc en-dessous de l'asymptote lorsque x tend vers $-\infty$ et au-dessus lorsque x tend vers $+\infty$.

4. La dérivée $f'(x)$ de f est
$$f'(x) = \frac{2x(x+1)-x^2}{(x+1)^2}e^{\frac{1}{x}} + \frac{x^2}{x+1}\left(-\frac{1}{x^2}\right)e^{\frac{1}{x}} = \frac{x^2+x-1}{(x+1)^2}e^{\frac{1}{x}}$$
donc le domaine de définition $\mathscr{D}_{f'}$ de f' est encore l'ensemble $\mathscr{D}_f$ et
   - ▷ $f'(x)=0$ si $x=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ ou $x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$,
   - ▷ $f'(x)>0$ si $x<\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ ou $x>\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$,
   - ▷ $f'(x)<0$ si $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}<x<\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$,
   - ▷ $\lim_{x\to0^-} f'(x)=0$.
5. Tableau de variation de f :

x	$-\infty$		$\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$		-1		0		$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	≈ -2.283253698	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0 ‖ $+\infty$	↘	≈ 1.190529914	↗	$+\infty$

On en déduit que
   - ▷ f est croissante sur $\left]-\infty;\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right]$ et sur $\left[\frac{-1+\sqrt{5}}{2};+\infty\right[$,
   - ▷ f est décroissante sur $\left[\frac{-1-\sqrt{5}}{2};-1\right[$, sur $]-1;0]$ et sur $\left]0;\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right]$,
   - ▷ $x=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ est un maximum local, $x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ un minimum local.
6. Allure de la courbe de f :



Exercice 3.

1. Soit $f(x)=\sqrt[3]{x^3+x+1}-\sqrt{x^2+x}$. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
   Suggestion :
   - ▷ Calculer le développement limité de $(1+z)^{1/2}$ en 0 à l'ordre 1.
   - ▷ Calculer le développement limité de $(1+z^2+z^3)^{1/3}$ en 0 à l'ordre 1.
   - ▷ Calculer le développement asymptotique de $\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}-\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}$ en $+\infty$ à l'ordre 1.
   - ▷ Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
2. Soit f la fonction définie par
$$f(x)=\begin{cases}2+3x+4x^2+x^3\sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x\neq0,\\ 2 & \text{si } x=0.\end{cases}$$
   Montrez que f admet, au voisinage de 0, un développement limité d'ordre 2 et que, pourtant, $f''(0)$ n'existe pas.
   Suggestion :
   - ▷ Calculer le développement limité de f en 0 à l'ordre 2.
   - ▷ Montrer que f est continue en 0.
   - ▷ Calculer $f'(x)$ pour tout x et $f''(x)$ pour $x\neq0$
   - ▷ Montrer que f' est continue.
   - ▷ Montrer que $f''(0)$ n'existe pas.

Solution.

1. On commence par factoriser le terme dominant (comme on s'intéresse à la limite lorsque x tend vers $+\infty$, on peut supposer $x>0$) :

$$f(x)=\sqrt[3]{x^3+x+1}-\sqrt{x^2+x}=\sqrt[3]{x^3\left(1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}-\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}=x\left[\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}-\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right].$$

   On peut alors écrire

$$g(t)=f(1/t)=\frac{1}{t}\left[\left(1+t^2+t^3\right)^{\frac{1}{3}}-(1+t)^{\frac{1}{2}}\right]=\frac{1}{t}\left[(1+o(t))-\left(1+\frac{t}{2}+o(t)\right)\right]=\frac{1}{t}\left[-\frac{t}{2}+o(t)\right]=-\frac{1}{2}+o(1).$$

   Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\frac{1}{2}$.

2. Puisque $\lim_{x\to 0}x\sin\left(\frac{1}{x}\right)=0$, on peut écrire

$$f(x)=2+3x+4x^2+o(x^2)$$

   ce qui, par définition, montre que f admet un développement limité d'ordre 2 au voisinage de 0.
   D'autre part,

$$f'(x)=\begin{cases}3+8x+3x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)-x\cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x\neq 0,\\ \lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}3+4x+x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)=3 & \text{si } x=0.\end{cases}$$

   Mais $f''(0)$ n'existe pas car le quotient

$$\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=8+3x\sin\left(\frac{1}{x}\right)-\cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

   n'a pas de limite quand x tend vers 0.
   On sait que, pour qu'une fonction admette un développement limité d'ordre n au voisinage de 0*, il est suffisante qu'elle soit n fois dérivable en* 0*. Cet exercice montre que ce n'est pas nécessaire.*