L2 MATH MASS INFO

2009/2010

Gloria FACCANONI

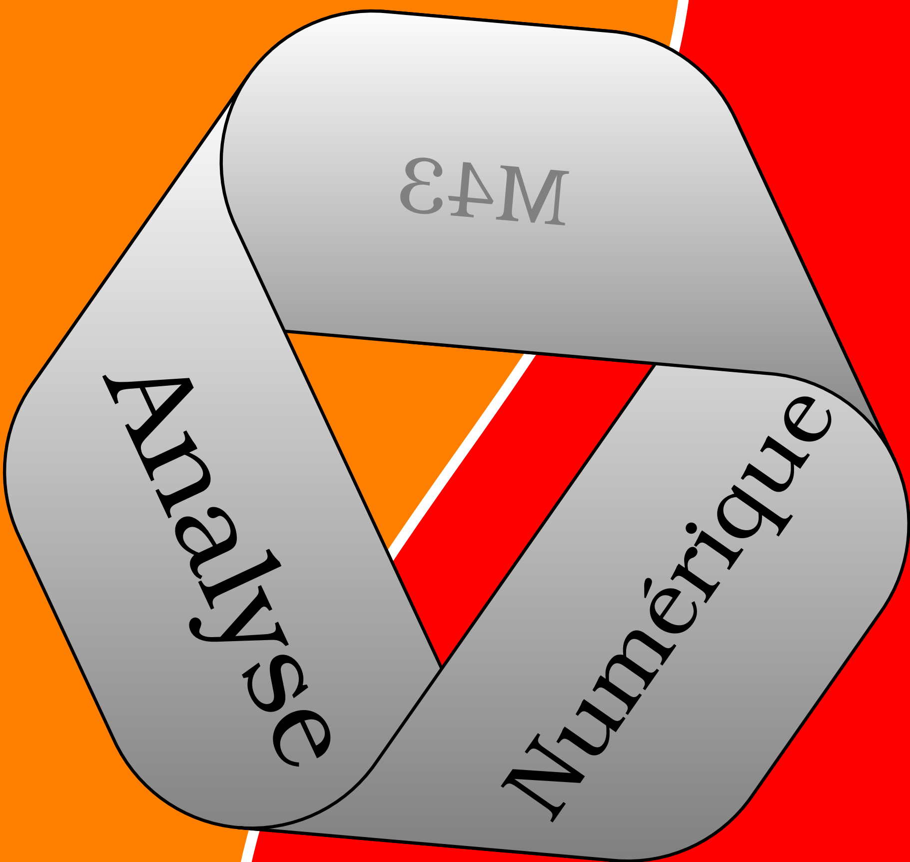


Table des matières

Rappels

Polynôme de Lagrange

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i(x) \qquad \in \mathbb{P}_n$$

où

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

Exemple avec $n = 2$:

$$\begin{aligned} P(x) = y_0 &\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} \\ + y_1 &\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} \\ + y_2 &\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} \end{aligned}$$

Polynôme d'Hermite

$$Q(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i A_i(x) + y_i' B_i(x) \qquad \in \mathbb{P}_N$$

où

$$\begin{aligned} L_i(x) &= \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}, \\ c_i &= \sum_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{1}{x_i - x_j}, \\ A_i(x) &= (1 - 2(x - x_i)c_i)(L_i(x))^2, \\ B_i(x) &= (x - x_i)(L_i(x))^2, \\ N &= 2n + 1. \end{aligned}$$

qu'on peut réécrire comme

$$Q(x) = \sum_{i=0}^{n} (y_i D_i(x) + y_i'(x - x_i))(L_i(x))^2$$

où

$$\begin{aligned} L_i(x) &= \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}, \\ c_i &= \sum_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{1}{x_i - x_j}, \end{aligned}$$

$$D_i(x) = 1 - 2(x - x_i)c_i,$$
$$N = 2n + 1.$$

Exemple avec $n = 2$:

$$\begin{aligned}
Q(x) = {} & y_0 \left(1 - 2(x - x_0)\left(\frac{1}{x_0 - x_1} + \frac{1}{x_0 - x_2}\right)\right)\left(\frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}\right)^2 + y_0'(x - x_0)\left(\frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}\right)^2 \\
& + y_1 \left(1 - 2(x - x_1)\left(\frac{1}{x_1 - x_0} + \frac{1}{x_1 - x_2}\right)\right)\left(\frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}\right)^2 + y_1'(x - x_1)\left(\frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}\right)^2 \\
& + y_2 \left(1 - 2(x - x_2)\left(\frac{1}{x_2 - x_0} + \frac{1}{x_2 - x_1}\right)\right)\left(\frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}\right)^2 + y_2'(x - x_2)\left(\frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}\right)^2,
\end{aligned}$$

qu'on peut réécrire comme

$$\begin{aligned}
Q(x) = {} & \left(y_0 \left(1 - 2(x - x_0)\left(\frac{1}{x_0 - x_1} + \frac{1}{x_0 - x_2}\right)\right) + y_0'(x - x_0)\right)\left(\frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}\right)^2 \\
& + \left(y_1 \left(1 - 2(x - x_1)\left(\frac{1}{x_1 - x_0} + \frac{1}{x_1 - x_2}\right)\right) + y_1'(x - x_1)\right)\left(\frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}\right)^2 \\
& + \left(y_2 \left(1 - 2(x - x_2)\left(\frac{1}{x_2 - x_0} + \frac{1}{x_2 - x_1}\right)\right) + y_2'(x - x_2)\right)\left(\frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}\right)^2.
\end{aligned}$$

Étude mathématique et numérique du refroidissement d'une tasse de café

Considérons une tasse de café à la température de 75 dans une salle à 25. On suppose que la température du café suit la loi de Newton, c'est-à-dire que la vitesse de refroidissement du café est proportionnelle à la différence des températures. En formule cela signifie qu'il existe une constante $K < 0$ telle que la température vérifie l'équation différentielle ordinaire (EDO) du premier ordre.

$$T'(t) = K(T(t) - 25).$$

La condition initiale (CI) est donc simplement

$$T(0) = 75.$$

Pour calculer la température à chaque instant on a besoin de connaître la constante K. Cette valeur peut être déduite en constatant qu'après 5 minutes le café est à 50, c'est-à-dire

$$T(5) = 50.$$

Solution exacte

1. On commence par calculer toutes les solutions de l'EDO. Étant une équation différentielle du premier ordre, la famille de solutions dépendra d'une constante qu'on fixera en utilisant la CI. Il s'agit d'une EDO à variables séparables donc on a

$$\begin{aligned} T'(t) &= K(T(t) - 25) \\ \frac{T'(t)}{(T(t) - 25)} &= K \\ \frac{\mathrm{d}\,T}{(T - 25)} &= K \mathrm{d}\,t \\ \int \frac{1}{(T - 25)} \mathrm{d}\,T &= K \int \mathrm{d}\,t \\ \ln(T - 25) &= Kt + c \\ T - 25 &= De^{Kt} \\ T(t) &= 25 + De^{Kt} \end{aligned}$$

2. La valeur numérique de la constante d'intégration D est obtenue grâce à la CI :

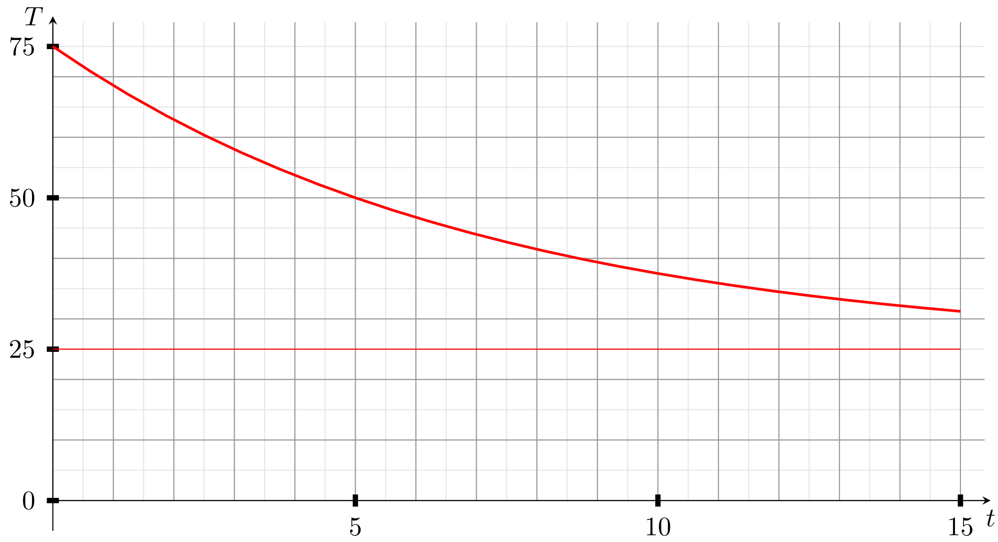
$$\begin{aligned} 75 = T(0) &= 25 + De^{K \cdot 0} \\ D &= 50 \\ T(t) &= 25 + 50e^{Kt} \end{aligned}$$

3. Il ne reste qu'à établir la valeur numérique de la constante de refroidissement K grâce à l'«indice» :

$$\begin{aligned} 50 = T(5) &= 25 + 50e^{Kt} \\ K &= -\frac{\ln(2)}{5} \\ T(t) &= 25 + 50e^{-\frac{\ln(2)}{5} t} \end{aligned}$$

On peut donc conclure que la température du café évolue selon la fonction

$$T(t) = 25 + 50e^{-\frac{\ln(2)}{5} t}.$$



Solution approchée par la méthode d'Euler

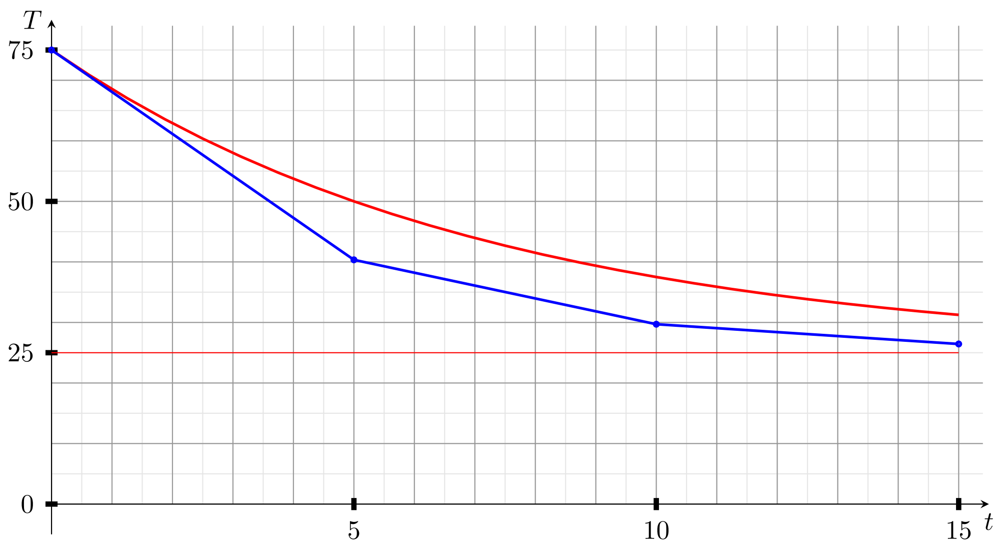
Supposons de connaître K mais de ne pas vouloir/pouvoir calculer la fonction $T(t)$. Grâce à la méthode d'Euler on peut estimer la température à différentes instantes t_i en faisant une discrétisation temporelle du futur (i.e. on construit une suite de valeurs $\{t_i = 0 + i\Delta t\}_i$) et en construisant une suite de valeurs $\{T_i\}_i$ où chaque T_i est une approximation de $T(t_i)$. Si on utilise la méthode d'Euler, cette suite de température est ainsi construite :

$$\begin{cases} T_{i+1} = T_i - \frac{\ln(2)}{5}\Delta t\ (T_i - 25), \\ T_0 = 75, \end{cases}$$

qu'on peut réécrire comme

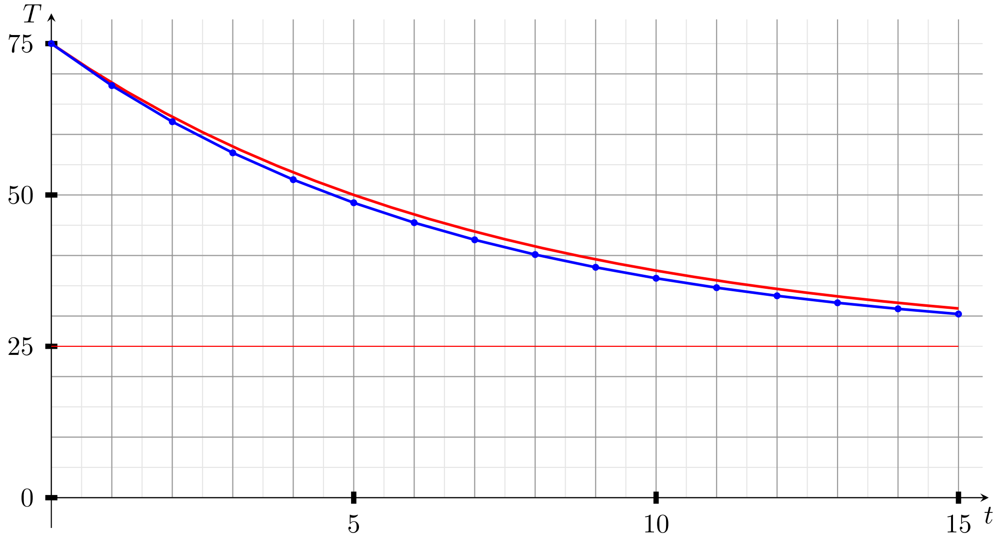
$$\begin{cases} T_{i+1} = (1 - \frac{\ln(2)}{5}\Delta t)T_i + 5\ln(2)\Delta t, \\ T_0 = 75. \end{cases}$$

1. Exemple avec $\Delta t = 5$:



t_i	$T(t_i)$	T_i	$T(t_i) - T_i$
0.000000	75.000000	75.000000	0.000000
5.000000	50.000000	40.342641	9.657359
10.000000	37.500000	29.707933	7.792067
15.000000	31.250000	26.444642	4.805358

2. Exemple avec $\Delta t = 1$:



t_i	$T(t_i)$	T_i	$T(t_i) - T_i$
0.000000	75.000000	75.000000	0.000000
1.000000	68.527528	68.068528	0.459000
2.000000	62.892914	62.097962	0.794952
3.000000	57.987698	56.955093	1.032605
4.000000	53.717459	52.525176	1.192283
5.000000	50.000000	48.709377	1.290623
6.000000	46.763764	45.422559	1.341205
7.000000	43.946457	42.591391	1.355066
8.000000	41.493849	40.152707	1.341142
9.000000	39.358729	38.052095	1.306634
10.000000	37.500000	36.242691	1.257309
11.000000	35.881882	34.684123	1.197759
12.000000	34.473229	33.341618	1.131610
13.000000	33.246924	32.185225	1.061700
14.000000	32.179365	31.189141	0.990224
15.000000	31.250000	30.331144	0.918856

Étude mathématique et numérique de l'évolution d'une population de bactéries

Considérons une population de bactéries. Soit $p(t)$ le nombre d'individus (≥ 0) à l'instant $t \geq 0$. Un modèle qui décrit l'évolution de cette population est l'«équation de la logistique» : soit k et h deux constantes positives, alors $p(t)$ vérifie l'équation différentielle ordinaire (EDO) du premier ordre

$$p'(t) = kp(t) - hp^2(t).$$

On veut calculer $p(t)$ à partir d'un nombre initiale d'individus donné

$$p(0) = p_0 \geq 0.$$

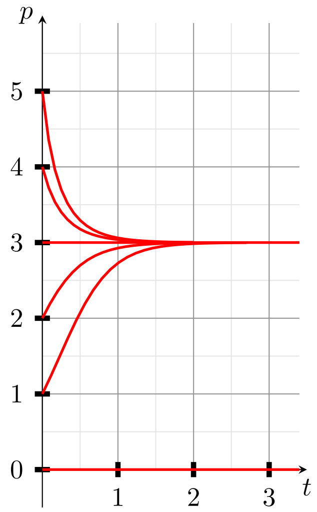
Solution exacte

1. On commence par calculer toutes les solutions de l'EDO. Étant une équation différentielle du premier ordre, la famille de solutions dépendra d'une constante qu'on fixera en utilisant la CI. Il s'agit d'une EDO à variables séparables.
   On cherche d'abord les solutions constantes, c'est-à-dire les solutions du type $p(t) \equiv c$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$:
   $$0 = kc - hc^2.$$
   On a donc deux solutions constantes :
   $$p(t) \equiv 0 \qquad \text{et} \qquad p(t) \equiv \frac{k}{h}.$$
   Étant donné que deux solutions d'une EDO ne s'intersectent jamais, dorénavant on supposera $p(t) \neq 0$ et $p(t) \neq \frac{k}{h}$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$. On peut alors écrire :
   $$\begin{aligned}
   p'(t) &= kp(t) - hp^2(t) \\
   \frac{p'(t)}{kp(t) - hp^2(t)} &= 1 \\
   \frac{\mathrm{d}\,p}{kp - hp^2} &= 1\mathrm{d}\,t \\
   \int \frac{1}{p(k-hp)}\mathrm{d}\,p &= \int \mathrm{d}\,t \\
   \frac{1}{k}\int \frac{1}{p}\mathrm{d}\,p - \frac{1}{k}\int \frac{-h}{k-hp}\mathrm{d}\,p &= \int \mathrm{d}\,t \\
   \frac{1}{k}\ln(p) - \frac{1}{k}\ln(k-hp) &= t + c \\
   \ln\left(\frac{p}{k-hp}\right) &= kt + kc \\
   \frac{p}{k-hp} &= De^{kt} \\
   p(t) &= \frac{k}{\frac{1}{De^{kt}} + h}.
   \end{aligned}$$
2. La valeur numérique de la constante d'intégration D est obtenue grâce à la CI :
   $$\begin{aligned}
   p_0 = p(0) &= \frac{kD}{1 + hDe^{0k}} \\
   D &= \frac{p_0}{k - hp_0}.
   \end{aligned}$$

On peut donc conclure que la population évolue selon la fonction

$$p(t)=\begin{cases}0 & \text{si } p_0=0,\\ \frac{k}{h} & \text{si } p_0=\frac{k}{h},\\ \frac{k}{\frac{k-hp_0}{p_0e^{kt}}+h} & \text{sinon.}\end{cases}$$

Une simple étude de la fonction p montre que
- si $p_0 \in]0;k/h[$ alors $p'(t)>0$ et $\lim_{t\to+\infty} p(t)=k/h$,
- si $p_0 \in]k/h;+\infty[$ alors $p'(t)<0$ et $\lim_{t\to+\infty} p(t)=k/h$.



Exemple avec $k = 3$, $h = 1$ et différentes valeurs de p_0.

Solution approchée par la méthode d'Euler

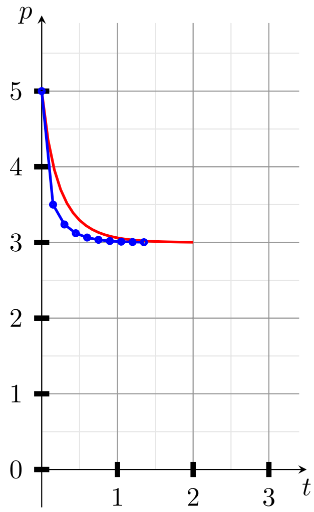
Supposons de ne pas vouloir/pouvoir calculer la fonction $p(t)$. Grâce à la méthode d'Euler on peut estimer le nombre d'indivus à différentes instantes t_i en faisant une discrétisation temporelle du futur (i.e. on construit une suite de valeurs $\{t_i = 0 + i\Delta t\}_i$) et en construisant une suite de valeurs $\{p_i\}_i$ où chaque p_i est une approximation de $p(t_i)$. Si on utilise la méthode d'Euler, cette suite est ainsi construite :

$$\begin{cases}p_{i+1}=p_i+\Delta t\ p_i(k-hp_i),\\ p_0 \text{ donné,}\end{cases}$$

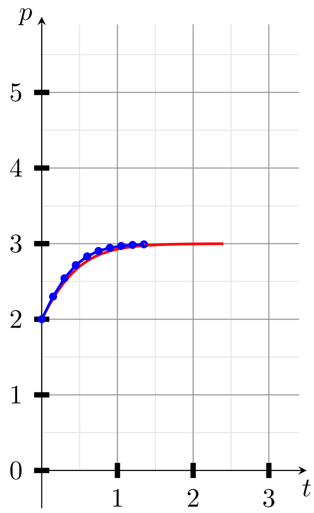
qu'on peut réécrire comme

$$\begin{cases}p_{i+1}=(1+k\Delta t-h\Delta t p_i)p_i,\\ p_0 \text{ donné.}\end{cases}$$

On veut appliquer cette méthode au cas de la figure précédente, i.e. avec $k=3$, $h=1$ et les valeurs initiales $p_0=5$ et $p_0=2$. Si on choisit comme pas temporelle $\Delta t=0{,}15$, on obtient les figures suivantes :



t_i	$p(t_i)$	p_i	$p(t_i) - p_i$
0.000000	5.000000	5.000000	0.000000
0.150000	4.027123	3.500000	0.527123
0.300000	3.582637	3.237500	0.345137
0.450000	3.347079	3.122164	0.224915
0.600000	3.212403	3.064952	0.147451
0.750000	3.132046	3.035091	0.096956
0.900000	3.082874	3.019115	0.063759
1.050000	3.052319	3.010459	0.041861
1.200000	3.033151	3.005736	0.027415
1.350000	3.021054	3.003150	0.017904
1.500000	3.013390	3.001731	0.011659
1.650000	3.008524	3.000952	0.007573
1.800000	3.005430	3.000523	0.004907



t_i	$p(t_i)$	p_i	$p(t_i) - p_i$
0.000000	2.000000	2.000000	0.000000
0.150000	2.274771	2.300000	−0.025229
0.300000	2.493175	2.541500	−0.048325
0.450000	2.655760	2.716292	−0.060532
0.600000	2.770980	2.831887	−0.060907
0.750000	2.849816	2.903298	−0.053483
0.900000	2.902469	2.945411	−0.042942
1.050000	2.937070	2.969529	−0.032459
1.200000	2.959567	2.983102	−0.023535
1.350000	2.974092	2.990663	−0.016571
1.500000	2.983429	2.994852	−0.011423
1.650000	2.989412	2.997164	−0.007752
1.800000	2.993240	2.998439	−0.005199