

B. Projets 2009/2010 : étude du tube à choc

«Soutenances» jeudi 25 février 2010 à partir de 09:30 en salle U328 :

09:30 Anas BANOUN

10:00 Cheikh FODE

10:30 Geoffrey MARTI

11:00 Ludovic MOYA

11:30 Amel OULD AMER

12:00 Nathalie MABILEAU

B.1. Problème physique et hypothèses de modélisation

Le principe du tube à choc est le suivant : on considère un canal fermé à ses deux extrémités, contenant un gaz inerte qu'un diaphragme maintient dans des conditions thermodynamiques (pression, masse volumique et température) différentes (voir la figure B.1).

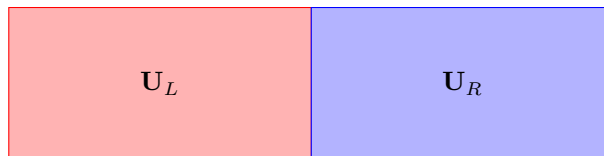


FIGURE B.1.: Configuration initiale.

À l'instant $t = 0$ le diaphragme est rompu ; un processus d'égalisation des pressions s'établit alors. La rupture brutale du diaphragme provoque la formation immédiate d'une onde de discontinuité (onde de choc) qui se propage dans le gaz à basse pression qui est comprimé pendant que le gaz à haute pression se détend par une onde de raréfaction. Le gaz détendu est séparé du gaz comprimé par une discontinuité de contact (ou ligne de glissement), qui peut être assimilée à une membrane fictive qui se déplace avec une vitesse constante (voir la figure B.2).

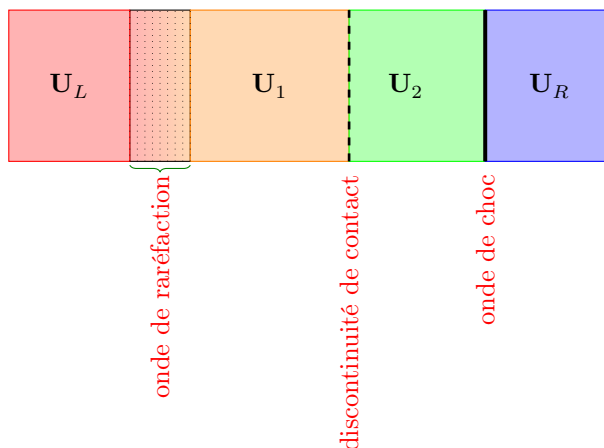


FIGURE B.2.: Marche en temps.

Pour écrire un modèle simple qui décrit ce type d'écoulement, on suppose que le diaphragme s'ouvre instantanément et complètement ; que le gaz suit la loi des gaz parfaits et que le tube est assez long pour

ignorer les réflexions des ondes à ses extrémités. Sous ces hypothèses, l'écoulement monodimensionnel qui s'établit dans le tube à choc est décrit par le système des équations d'Euler :

$$\partial_t \mathbf{U} + \partial_x \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \mathbf{0}, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0,$$

avec

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho E \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ (\rho E + p)u \end{pmatrix}.$$

On a indiqué par $\rho(x, t) > 0$ la densité du gaz, $u(x, t) \in \mathbb{R}$ sa vitesse et $E(x, t) = \frac{u^2}{2} + \varepsilon$ l'énergie totale avec $\varepsilon(x, t)$ l'énergie interne.

On rappelle que selon la loi des gaz parfait, la pression s'écrit $p(\rho, \varepsilon) = (\gamma - 1)\rho\varepsilon$ avec $\gamma > 1$ constante.

B.2. Solution exacte VS résolution numérique

1. Avant de résoudre numériquement le problème du tube à choc, écrire au préalable la solution exacte pour le très générale problème de Riemann

$$\mathbf{U}(x, t = 0) = \begin{cases} \mathbf{U}_L, & \text{si } x < 0.5, \\ \mathbf{U}_R, & \text{si } x > 0.5. \end{cases}$$

NB : il faut considérer cinq cas différentes car l'ordre des ondes dépend des données ainsi que leur comportement. Le tube à choc, qui correspond à la situation de la figure B.2, est seulement un de ces cinq possibles configurations de la solution d'un problème de Riemann.

NB : l'interface est en $x = 0.5$ et non en $x = 0$.

2. Tracer la solution exacte (ρ, u, p) sur $[0, 1]$ à l'instant $t = 0.2$ pour le cas du tube à choc avec $\gamma = 1.4$, $\rho_L = 8$, $\rho_R = 1$, $p_L = 10/\gamma$, $p_R = 1/\gamma$ et $u_L = u_R = 0$:

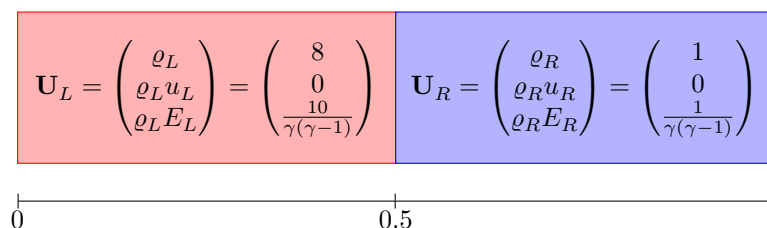


FIGURE B.3.: Données initiales du problème de Riemann pour le tube à choc

3. Choisir un des schémas qui suivent, écrire dans le langage préféré un solveur pour le problème de Riemann, comparer la solution numérique du tube à choc avec la solution exacte calculée au point précédent et commenter les résultats obtenus :¹
 - ▷ schéma de Rusanov
 - ▷ schéma de type Lax-Wendroff : Ritchmeyer (sans et avec dissipation artificielle)
 - ▷ schéma de type Lax-Wendroff : MacCormack (sans et avec dissipation artificielle)
 - ▷ schéma Steger-Warming
 - ▷ schéma de Liu (AUSM)
 - ▷ schéma de Osher
 - ▷ schéma de Van Leer
 - ▷ schéma de Godunov
 - ▷ schéma de Roe
 - ▷ schéma VFRoe
 - ▷ schéma VFRoe-ncv

1. La plupart de ces schémas est décrite par exemple dans [LeVEQUE 2002](#), (chapitre 15), dans [TORO 2009](#), (chapitres 6, 7, 10 et 11) et dans [GODLEWSKI et RAVIART 1996](#), (chapitre III).

- ▷ schéma de Glimm
- ▷ schéma HLL ou HLLÉ ou HLLEC ou HLLEM
- ▷ schéma de type Galerkin Discontinu

Données de calcul : 80 mailles spatiales, $x \in [0, 1]$, membrane en $x_0 = 0.5$, temps final du calcul $t = 0.2$.