

Notation

Pour $p \geq 1$ et $d = 1, 2, 3$ on cherche l'unique fonction

$$\begin{aligned}\mathbf{u}: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d &\rightarrow \mathbb{R}^p \\ (t, \mathbf{x}) &\mapsto \mathbf{u}(t, \mathbf{x})\end{aligned}$$

solution faible entropique du système d'EDPs

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{u} + \operatorname{div} \mathbb{F}(\mathbf{u}) = \mathbf{0}, & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, t > 0, \\ \mathbf{u}(0, \mathbf{x}) = \mathbf{u}^0(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \end{cases}$$

avec le flux

$$\begin{aligned}\mathbb{F}: \mathbb{R}^p &\rightarrow \mathbb{R}^{p \times d} \\ \mathbf{u} &\mapsto \mathbb{F}(\mathbf{u})\end{aligned}$$

A. 2009/2010

A.1. Programme (non contractuel... 😊)

- I. Introduction à l'analyse mathématique d'EDPs hyperboliques
 - I.1. Définitions et exemples
 - I.2. *Hyperbolicité*
 - I.3. *Solutions régulières*
 - I.4. [SALSA (2008, chapitre 4)] *Exemple d'un modèle de trafic routier (méthode des caractéristiques)*
 - I.5. *Solutions faibles (relations de Rankine-Hugoniot)*
 - I.6. *Solutions entropiques (condition d'admissibilité de Lax)*
- II. Introduction à l'analyse numérique d'EDPs hyperboliques
 - II.1. Méthode de DF (différences finies)
 - II.2. [TORO (2009, chapitre 5)] Exemples de schémas DF en une dimension d'espace ($d = 1$) à 2 pas en temps
 - II.3. *Stabilité L^2 dans le cas scalaire ($p = 1$) pour une EDP linéaire*
 - II.4. *Étude de la précision dans le cas scalaire ($p = 1$) en une dimension d'espace ($d = 1$) pour une EDP linéaire*
 - II.5. Importance d'utiliser un schéma conservatif
 - II.6. La méthode de Godunov
- III. Étude mathématique du cas scalaire ($p = 1$) et résolution du problème de Riemann
 - III.1. Quelques éléments sur l'existence et l'unicité de solutions faibles entropiques (entropies de Kruzkov)
 - III.2. *Résolution du problème de Riemann en une dimension d'espace ($d = 1$) (flux convexe, flux concave, flux quelconque)*
- IV. Étude numérique du cas scalaire ($p = 1$) en une dimension d'espace ($d = 1$)
 - IV.1. *Définitions*
 - IV.2. *Théorème de Lax-Wendroff*
 - IV.3. *Exemples de schémas conservatifs [Méthode de VF (volumes finis)]*
 - IV.4. Schémas monotones
- V. [GODLEWSKI et RAVIART (1996, chapitre 1)] Étude mathématique du cas système ($p > 1$)
 - V.1. Définitions
 - V.2. Symétrisabilité du système
 - V.3. Systèmes linéaires en une dimension d'espace ($d = 1$) pour le problème de Riemann
 - V.4. *Types d'ondes : chocs, détente et discontinuités de contact*
 - V.5. Exemple : le système d'Euler
 - V.5.1. [BENZONI-GAVAGE (2004, chapitre 1)] Propriétés thermodynamiques
 - V.5.2. *Hyperbolicité*
 - V.5.3. *Entropie mathématique*
 - V.5.4. [GUILLARD et ABGRALL (2001, chapitre 3)] *Le problème de Riemann pour le système d'Euler en une dimension d'espace ($d = 1$)*
- VI. Étude numérique du cas système ($p > 1$) en une dimension d'espace ($d = 1$)
 - VI.1. Schémas DF centrés
 - VI.2. Schémas à décomposition de flux (schéma Beam-Warming, schéma de Van Leer, schéma de Liu...)
 - VI.3. [LEVEQUE (1990, 2002) ; TORO (2009)] Schéma de type Godunov : schéma de Godunov, schémas basés sur une résolution approchée du problème de Riemann (schéma de Osher, schéma HLL, schéma de Roe)

A.2. Séances (contenu provisoire)

Cours	Date	Horaire	Salle	Contenu provisoire
1	25 novembre 2009	09:00 - 12:00	U328	(I.1, I.2, I.3, II.1, II.2)
2	02 décembre 2009	09:30 - 12:30	U328	(I.4)
3	09 décembre 2009	14:00 - 17:00	T002	(I.5, I.6, II.3, II.4)
4	06 janvier 2010	09:30 - 12:30	U328	(II.5, II.6, III.1, III.2, IV.1, IV.2, IV.3)
5	13 janvier 2010	09:30 - 12:30	U328	(V.1, V.2, V.3, V.4)
6	20 janvier 2010	09:30 - 12:30	U328	(V.5)
7	27 janvier 2010	09:30 - 11:30	U328	(VI)
extra	29 janvier 2010	09:30 - 12:30	U328	(Intervention de M. Benjamin BOUTIN)

A.3. Examen

Preuve écrite : mercredi 24 février 2010 à 09:30 en salle U328

«**Soutenances**» **projets** : jeudi 25 février 2010 à partir de 09:30 en salle U328 :

09:30 Anas BANOUN
 10:00 Cheikh FODE
 10:30 Geoffrey MARTI
 11:00 Ludovic MOYA
 11:30 Amel OULD AMER

A.4. Me contacter

IMATH Bâtiment U-331
 Université du Sud Toulon-Var
 Avenue de l'université - BP. 20132
 83957 LA GARDE CEDEX - FRANCE

☎ 0033 (0)4 94 14 23 84
 ☎ 0033 (0)6 27 72 62 43
 ✉ gloria.faccanoni@univ-tln.fr
 🌐 <http://faccanoni.univ-tln.fr>

A.5. Stages

Les entreprises suivantes proposent des stages et/ou thèses dans le domaine de l'analyse numérique de lois de conservation hyperboliques :

CEA : http://www.cea.fr/ressources_humaines/stages_et_formeion_en_alternance
CNES : <http://www.cnes.fr/web/CNES-fr/175-stages-cnes.php>
IRSN : <http://www.irsn.fr/FR/Pages/home.aspx>
EADS : http://www.eads.net/1024/fr/career/Entry_Options/Undergraduates/Internships.html
INRIA : <http://www.inria.fr/travailler/stage/index.fr.html>
ONERA : <http://www.onera.fr/stages/index.php>
DASSAULT : <http://www.dassault-aviation.com/fr/aviation/carrieres/espace-etudiants/stages.html?L=0>
EDF : http://www.edfrecrete.com/page.php?id_page=77
INRETS : <http://www.inrets.fr/travailler-a-linrets/recrutement/doctorat-a-linrets.html>
IFP : <http://stages.ifp.fr/>
SAFRAN : <http://www.safran-group.com/site-safran/carrieres/nous-rejoindre/>

Voir aussi la page des stages du Master de Sciences & Technologies, M2 Mathématiques & Applications de l'Université Pierre et Marie Curie <http://www.ann.jussieu.fr/MathModel/sujetsdestages.php>

Références de base

Quelques livres de base portant sur l'analyse mathématique et/ou numérique de systèmes hyperboliques de lois de conservation.

GODLEWSKI, Edwige et RAVIART, Pierre-Arnaud

1991 *Hyperbolic Systems of Conservation Laws*, t. 3/4, Mathématiques & Applications (Paris) [Mathematics and Applications], Ellipses, Paris.

1996 *Numerical Approximation of Hyperbolic Systems of Conservation Laws*, t. 118, Springer. [Cité aux pages 95, 100.].

GUILLARD, Hervé et ABGRALL, Rémi

2001 *Modélisation numérique des fluides compressibles*, t. 5, Series in Applied Mathematics (Paris), Gauthier-Villars, Paris. [Cité à la page 95.].

LEVEQUE, Randall J.

1990 *Numerical methods for conservation laws*, Birkhäuser Verlag, Berlin. [Cité à la page 95.].

2002 *Finite volume methods for hyperbolic problems*, Cambridge Texts in Applied Mathematics, Cambridge University Press, Cambridge. [Cité aux pages 95, 100.].

MATTHEIJ, R.M.M., RIENSTRA, S.W. et TEN THIJE BOONKAMP, J.H.M.

2005 *Partial differential equations : modeling, analysis, computation*, Society for Industrial Mathematics.

SALSA, Sandro

2008 *Partial differential equations in action. From modelling to theory*, Universitext, Springer-Verlag Italia, Milan. [Cité à la page 95.].

TORO, Eleuterio F.

2009 *Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics. A practical introduction*, Third edition, Springer-Verlag, Berlin. [Cité aux pages 95, 100.].

Polycopiés

Polycopiés disponibles sur le web.

BENZONI-GAVAGE, Sylvie

2004 *Analyse mathématique et numérique de la dynamique des fluides compressibles*, <http://math.univ-lyon1.fr/~benzoni/ecl.pdf>. [Cité à la page 95.].

EYMARD, Robert, GALLOUËT, Thierry et HERBIN, Raphaèle

2003 *Finite Volume Methods*, <http://www-gm3.univ-mrs.fr/polys/gm3-07/gm3-07.pdf>.

GHIDAGLIA, Jean-Michel

2007 *Quelques éléments sur les solutions discontinues de systèmes de lois de conservation en mécanique des fluides*, <http://www.cmla.ens-cachan.fr/fileadmin/Membres/ghidaglia/fluide1.pdf>.

PERTHAME, Benoît

2003–2004 *Équations de transport non linéaires et systèmes hyperboliques. Théorie et méthodes numériques*, http://www.ann.jussieu.fr/~perthame/cours_hyp.pdf.

PISKUNOV, Nikolai et FREYTAG, Bernd

2005 *Introduction to Numerical Hydrodynamics and Radiative Transfer. The Hydrodynamics Part*, http://www.astro.uu.se/~bf/course/numhd_course/.

Autres lectures

Livres d'approfondissement.

BENZONI-GAVAGE, S. et SERRE, D.

2007 *Multidimensional hyperbolic partial differential equations*, Oxford University Press.

BOUCHUT, François

2004 *Nonlinear stability of finite volume methods for hyperbolic conservation laws and well-balanced schemes for sources*, Frontiers in Mathematics, Birkhäuser Verlag, Basel.

DAFERMOS, Constantine M.

2005 *Hyperbolic conservation laws in continuum physics*, Second, t. 325, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], Springer-Verlag, Berlin.

KULIKOVSKII, Andrei G., POGORELOV, Nikolai V. et SEMENOV, Andrei Yu.

2001 *Mathematical aspects of numerical solution of hyperbolic systems*, t. 118, Chapman & Hall/CRC Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL.

LAX, Peter D.

2006 *Hyperbolic partial differential equations*, t. 14, Courant Lecture Notes in Mathematics, With an appendix by Cathleen S. Morawetz, New York University Courant Institute of Mathematical Sciences, New York.

QUARTERONI, Alfio et VALLI, Alberto

1991 *Numerical approximation of partial differential equations*, Springer Verlag.

SERRE, Denis

1996a *Systèmes de lois de conservation. I*, Fondations. [Foundations], Hyperbolicité, entropies, ondes de choc. [Hyperbolicity, entropies, shock waves], Diderot Editeur, Paris.

1996b *Systèmes de lois de conservation. II*, Fondations. Structures géométriques, oscillation et problèmes mixtes., Diderot Editeur, Paris.