

Exemple d'examen

Étude mathématique et numérique de systèmes hyperboliques de lois de conservation.

Université du Sud Toulon-Var

- ★ Durée de l'épreuve : 3 heures.
- ★ Ce sujet, de 5 pages, comporte 3 exercices indépendants. À l'intérieur de chacun, les sections et de nombreuses questions sont elles-mêmes très largement indépendantes entre elles. Le texte est long, mais il n'est pas nécessaire de tout faire pour obtenir la note maximale. Une grande valeur sera attribuée à la rigueur des raisonnements.
- ▷ Portables, calculatrices, photocopiés et livres strictement interdits.
- ▷ Notes personnelles autorisées.
- ▶ *Aucun raisonnement vague ou insuffisant ne sera pris en compte.*
- ▶ *Toute question où les notations de l'énoncé ne seraient pas respectées se verra attribuer la note zéro.*
- ▶ *Il sera tenu compte de la présentation et de la rédaction dans l'évaluation de la copie.*

Exercice I : résolution analytique d'une équation hyperbolique non linéaire monodimensionnelle

Soit l'équation hyperbolique non-linéaire

$$\partial_t u + \partial_x \frac{u(1-u)}{2} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0.$$

1. Considérons la donnée initiale

$$u(x, 0) = g(x) \equiv \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0, \\ 2, & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

- ▷ Tracer les caractéristiques dans le plan (x, t) .
- ▷ Calculer explicitement l'unique solution entropique de ce problème de Riemann pour $t > 0$ et tracer la solution à différents temps.

2. Considérons la donnée initiale

$$u(x, 0) = g(x) \equiv \begin{cases} -1, & \text{si } x < 0, \\ 0, & \text{si } 0 < x < 1, \\ 1, & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

- ▷ Tracer les caractéristiques dans le plan (x, t) .
- ▷ Calculer explicitement l'unique solution entropique de ce problème de Riemann pour $0 < t < 1$.
- ▷ Calculer explicitement l'unique solution entropique de ce problème de Riemann pour $t > 0$ et tracer la solution à différents temps.

Exercice II : étude mathématique d'un système de lois de conservation monodimensionnel

On veut étudier un modèle qui décrit la dynamique d'un gaz isentropique en coordonnées lagrangiennes. On note $\tau \equiv \tau(x, t) > 0$ le volume spécifique du fluide, $u \equiv u(x, t) \in \mathbb{R}$ sa vitesse et $p \equiv p(\tau) > 0$ sa pression. Dans tout l'exercice la pression sera une fonction de classe \mathcal{C}^2 strictement décroissante et convexe :¹

$$\begin{cases} p'(\tau) < 0, \\ p''(\tau) > 0. \end{cases}$$

En dimension un d'espace, on modélise ce type d'écoulements par le p-système :

$$\begin{cases} \partial_t \tau - \partial_x u = 0, \\ \partial_t u + \partial_x p(\tau) = 0, \end{cases} \quad \text{avec } x \in \mathbb{R}, t > 0. \quad (1)$$

1. Trouver les vecteurs $\mathbf{W} : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ et $\mathbf{F}(\mathbf{W}) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tels que le système (1) s'écrit

$$\partial_t \mathbf{W} + \partial_x \mathbf{F}(\mathbf{W}) = \mathbf{0}.$$

2. Le système (1) se réécrit, pour des solutions régulières, sous la forme quasi-linéaire

$$\partial_t \mathbf{W} + \mathbb{A}(\mathbf{W}) \partial_x \mathbf{W} = \mathbf{0}. \quad (2)$$

Montrer que la matrice $\mathbb{A}(\mathbf{W})$ s'écrit

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ p'(\tau) & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Calculer les deux valeurs propres $\lambda_1(\mathbf{W})$ et $\lambda_2(\mathbf{W})$ de la matrice $\mathbb{A}(\mathbf{W})$. Afin de fixer les notations on ordonne les deux valeurs propres selon $\lambda_1(\mathbf{W}) < \lambda_2(\mathbf{W})$. Proposer une base associée de vecteurs propres à droite $\{\mathbf{r}_1(\mathbf{W}), \mathbf{r}_2(\mathbf{W})\}$. En déduire que le système (2) est strictement hyperbolique.
4. Vérifier que les champs 1 et 2 sont vraiment non linéaires.
5. On note I_k l'invariant de Riemann du k -ème champ caractéristique. Montrer qu'un choix possible pour I_1 et I_2 est

$$\begin{aligned} I_1 &= u - \int_{\tau_0}^{\tau} \sqrt{-p'(r)} dr, \\ I_2 &= u + \int_{\tau_0}^{\tau} \sqrt{-p'(r)} dr. \end{aligned}$$

6. Cherchons maintenant une entropie pour le système (1). Montrer que la fonction

$$\eta(\mathbf{W}) = \frac{u^2}{2} + \int_{\tau_0}^{\tau} p(r) dr$$

est une entropie du système avec flux d'entropie

$$\Phi(\mathbf{W}) = up(\tau).$$

7. Pour un état gauche $\mathbf{W}_L = (\tau_L, u_L)$ donné on cherche les états $\mathbf{W} = (\tau, u)$ qui peuvent être relié à \mathbf{W}_L par une onde de choc entropique.

7.1. Considérons le 1-champ.

7.1.1. Montrer que $u < u_L, \tau < \tau_L$.

1. Un exemple de loi de pression qui vérifie ces hypothèses est la suivante

$$p(\tau) = \tau^{-\gamma}, \quad \gamma > 1,$$

qui décrit le comportement d'un gaz parfait polytropique isentropique.

7.1.2. Calculer u en fonction de τ_L , u_L et τ . Plus précisément, montrer que u peut se mettre su la forme

$$u = u_L + d(\tau_L, \tau)$$

en explicitant la fonction d . Étudier la fonction $\tau \mapsto u = u_L + d(\tau_L, \tau)$ et tracer son graphe dans le plan (τ, u) .

7.2. Reprendre la question pour le 2-champ.

8. Pour un état gauche $\mathbf{W}_L = (\tau_L, u_L)$ donné on cherche les états $\mathbf{W} = (\tau, u)$ qui peuvent être relié à \mathbf{W}_L par une onde de détente.

8.1. Considérons le 1-champ.

8.1.1. Montrer que $u > u_L$, $\tau > \tau_L$.

8.1.2. Calculer u et σ_1 (vitesse du 1-choc) en fonction de τ_L , u_L et τ . Plus précisément, montrer que u peut se mettre su la forme

$$u = u_L + r(\tau_L, \tau)$$

en explicitant la fonction r . Étudier la fonction $\tau \mapsto u = u_L + r(\tau_L, \tau)$ et tracer son graphe dans le plan (τ, u) .

8.2. Reprendre la question pour le 2-champ.

9. À l'aide du dessin d'onde dans le plan (τ, u) résoudre le problème de Riemann : pour un état gauche \mathbf{W}_L et un état droit \mathbf{W}_R on construira une solution composée d'une 1-onde et d'une 2-onde séparant un état intermédiaire \mathbf{W}^* . On précisera les valeurs de cet état intermédiaire ainsi que les vitesses des ondes.

(Aide : il faut considérer cinq configurations différentes.)

Exercice III :

étude d'un schéma numérique pour l'approximation d'une équation hyperbolique linéaire monodimensionnelle

On considère l'équation d'advection linéaire

$$\partial_t u + a \partial_x u = 0 \quad (3)$$

que l'on approche par le schéma à un pas de temps

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a \frac{\alpha u_{j+2}^n + \beta u_{j+1}^n + \gamma u_j^n + \delta u_{j-1}^n + \varepsilon u_{j-2}^n}{\Delta x} = 0 \quad (4)$$

où Δx et Δt sont respectivement le pas d'espace et de temps et $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ et ε des constantes.

1. Représenter le stencil de cette famille de schémas.
2. À quelle condition nécessaire et suffisante portant sur $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ et ε le schéma (4) est-il consistant avec l'équation (3)? À quel ordre?
3. Mettre le schéma sous forme conservative.
4. Soit $\gamma = -\varepsilon$ et $\alpha = \beta = \delta = 0$. À quelle condition nécessaire et suffisante portant sur $c \equiv a \frac{\Delta t}{\Delta x}$ le schéma correspondant est-il stable au sens L^2 ? On rappelle que pour étudier la stabilité au sens L^2 d'un schéma on considère des solutions discrètes particulières du type

$$u_j^n = A^n e^{i\xi(j\Delta x)} \quad (5)$$

où A est l'amplitude et ξ la fréquence de cette solution, tandis que i désigne la racine complexe de -1 . On dit que le schéma est stable au sens L^2 si $|A| \leq 1$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}$.

5. Dans les conditions du point précédent, le schéma est-il convergent?

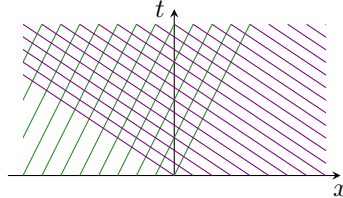
Correction de l'exercice I

On a $\partial_t u + \partial_x q(u) = 0$ avec

$$q(u) = \frac{u(1-u)}{2} = \frac{u-u^2}{2}, \quad q'(u) = \frac{1}{2} - u, \quad (q')^{-1}(r) = \frac{1}{2} - r.$$

1. L'équation de la caractéristique de pied $(\xi, 0)$ est

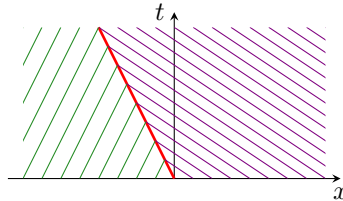
$$x(t) = \xi + q'(g(\xi))t = \xi + \left(\frac{1}{2} - g(\xi)\right)t = \begin{cases} \xi + \frac{1}{2}t, & \text{si } \xi < 0, \\ \xi - \frac{3}{2}t, & \text{si } \xi > 0. \end{cases}$$



L'unique solution entropique présente une onde de choc qui part en $(0, 0)$. Pour calculer l'équation $x = s(t)$ de l'onde de choc on utilise les relations de Rankine-Hugoniot

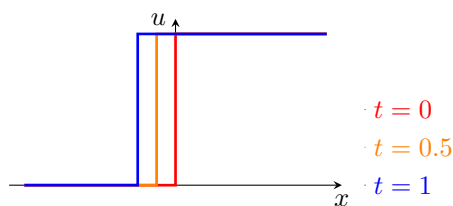
$$s'(t) = \frac{q(u_R(s(t), t)) - q(u_L(s(t), t))}{u_R(s(t), t) - u_L(s(t), t)} = \frac{(u_R - u_R^2) - (u_L - u_L^2)}{2(u_R - u_L)} = \frac{1 - u_R - u_L}{2} = -\frac{1}{2}$$

avec la donnée initiale $s(0) = 0$. On trouve donc $x = s(t) = -\frac{1}{2}t$.



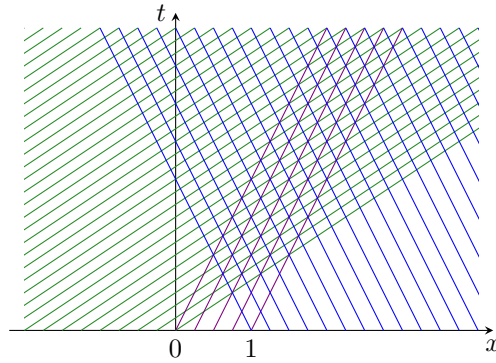
L'unique solution faible entropique est donc

$$u(x, t) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < -t/2, \\ 2, & \text{si } x > -t/2. \end{cases}$$



2. L'équation de la caractéristique de pied $(\xi, 0)$ est

$$x(t) = \xi + q'(g(\xi))t = \xi + \left(\frac{1}{2} - g(\xi)\right)t = \begin{cases} \xi + \frac{3}{2}t, & \text{si } \xi < 0, \\ \xi + \frac{1}{2}t, & \text{si } \xi = 0, \\ \xi - \frac{1}{2}t, & \text{si } \xi > 0. \end{cases}$$



La solution présente au moins deux ondes de choc qui partent l'une de $(0, 0)$, l'autre de $(1, 0)$. Pour calculer l'équation $x = s(t)$ de ces deux ondes on utilise les relations de Rankine-Hugoniot :

▷ choc de pied $(0, 0)$:

$$s'(t) = \frac{q(u_R(s(t), t)) - q(u_L(s(t), t))}{u_R(s(t), t) - u_L(s(t), t)} = \frac{(u_R - u_R^2) - (u_L - u_L^2)}{2(u_R - u_L)} = \frac{1 - u_R - u_L}{2} = 1$$

avec la donnée initiale $s(0) = 0$; on trouve $x = s(t) = t$;

▷ choc de pied $(1, 0)$:

$$s'(t) = \frac{q(u_R(s(t), t)) - q(u_L(s(t), t))}{u_R(s(t), t) - u_L(s(t), t)} = \frac{(u_R - u_R^2) - (u_L - u_L^2)}{2(u_R - u_L)} = \frac{1 - u_R - u_L}{2} = 0$$

avec la donnée initiale $s(0) = 1$; on trouve $x = s(t) = 1$.

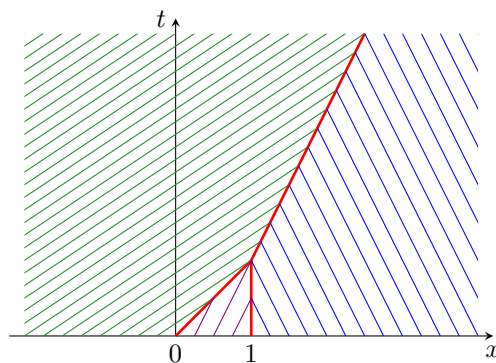
Les deux ondes s'intersectent en $(1, 1)$ donc la solution faible entropique pour $0 < t < 1$ est

$$u(x, t) = \begin{cases} -1, & \text{si } x < t, \\ 0, & \text{si } t < x < 1, \\ 1, & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Pour $t > 1$ les deux ondes de choc vont interagir et on obtient une unique onde de choc dont l'équation est calculée encore à partir des conditions de Rankine-Hugoniot :

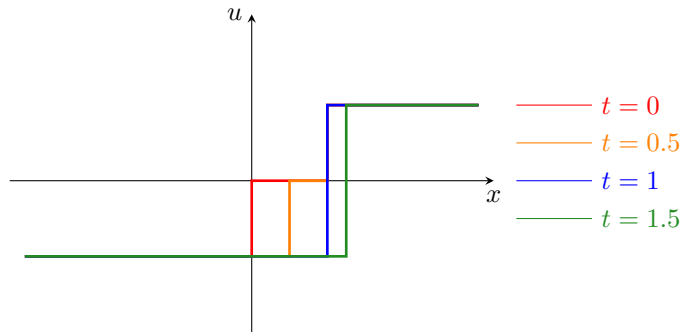
$$s'(t) = \frac{q(u_R(s(t), t)) - q(u_L(s(t), t))}{u_R(s(t), t) - u_L(s(t), t)} = \frac{(u_R - u_R^2) - (u_L - u_L^2)}{2(u_R - u_L)} = \frac{1 - u_R - u_L}{2} = \frac{1}{2}$$

avec la donnée initiale $s(1) = 1$; on trouve $x = s(t) = \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}$.



L'unique solution faible entropique pour $t > 0$ est donc

$$u(x, t) = \begin{cases} -1, & x < \min\{t, \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\}, \\ 0, & \min\{t, \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\} < x < \max\{\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}, 1\}, \\ 1, & x > \max\{\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}, 1\}. \end{cases}$$



Correction de l'exercice II

1. On a $\partial_t \mathbf{V} + \partial_x \mathbf{F}(\mathbf{V}) = \mathbf{0}$ avec

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} \tau \\ u \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}(\mathbf{V}) = \begin{pmatrix} -u \\ p(\tau) \end{pmatrix}.$$

2. On développe les dérivées du système (1) pour des solutions régulières :

$$\begin{cases} \partial_t \tau - \partial_x u = 0, \\ \partial_t u + p'(\tau) \partial_x \tau = 0, \end{cases}$$

et on trouve le système quasi-linéaire suivant :

$$\partial_t \begin{pmatrix} \tau \\ u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ p'(\tau) & 0 \end{pmatrix} \partial_x \begin{pmatrix} \tau \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

3. On cherche les deux solutions $\lambda_k(\mathbf{W})$ de l'équation $\det(\mathbb{A}(\mathbf{W}) - \lambda(\mathbf{W})\mathbf{Id}) = 0$, *i.e.* de l'équation

$$(-\lambda)^2 - (p'(\tau))^2 = 0.$$

On obtient

$$\lambda_1(\mathbf{W}) = -\sqrt{-p'(\tau)} < 0 < \lambda_2(\mathbf{W}) = +\sqrt{-p'(\tau)}.$$

On peut alors prendre

$$\mathbf{r}_1(\mathbf{W}) = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{-p'(\tau)} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_2(\mathbf{W}) = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{-p'(\tau)} \end{pmatrix}.$$

Puisque $p'(\tau) \neq 0$, les valeurs propres sont réelles et distinctes donc le système (1) est strictement hyperbolique.

4. Pour déterminer la nature des deux champs caractéristiques on calcule $\nabla \lambda_k \cdot \mathbf{r}_k$ pour $k = 1, 2$:

$$\begin{aligned} \nabla \lambda_1(\mathbf{W}) \cdot \mathbf{r}_1(\mathbf{W}) &= \frac{\partial \left(-\sqrt{-p'(\tau)} \right)}{\partial \tau} + \sqrt{-p'(\tau)} \frac{\partial \left(-\sqrt{-p'(\tau)} \right)}{\partial u} = \frac{p''}{2\sqrt{-p'}} > 0, & \text{1-champ VNL,} \\ \nabla \lambda_2(\mathbf{W}) \cdot \mathbf{r}_2(\mathbf{W}) &= \frac{\partial \left(\sqrt{-p'(\tau)} \right)}{\partial \tau} - \sqrt{-p'(\tau)} \frac{\partial \left(\sqrt{-p'(\tau)} \right)}{\partial u} = \frac{-p''}{2\sqrt{-p'}} < 0, & \text{2-champ VNL.} \end{aligned}$$

Étant donné qu'aucun champ est LD, il n'y aura aucune discontinuité de contact.

5. On vérifie que $\nabla I_k(\mathbf{W}) \cdot \mathbf{r}_k(\mathbf{W}) = 0$ pour $k = 1, 2$:

$$\begin{aligned} \nabla I_1(\mathbf{W}) \cdot \mathbf{r}_1(\mathbf{W}) &= \frac{\partial \left(u - \int_{\tau_0}^{\tau} \sqrt{-p'(r)} dr \right)}{\partial \tau} + \sqrt{-p'(\tau)} \frac{\partial \left(u - \int_{\tau_0}^{\tau} \sqrt{-p'(r)} dr \right)}{\partial u} = 0, \\ \nabla I_2(\mathbf{W}) \cdot \mathbf{r}_2(\mathbf{W}) &= \frac{\partial \left(u + \int_{\tau_0}^{\tau} \sqrt{-p'(r)} dr \right)}{\partial \tau} - \sqrt{-p'(\tau)} \frac{\partial \left(u + \int_{\tau_0}^{\tau} \sqrt{-p'(r)} dr \right)}{\partial u} = 0. \end{aligned}$$

6. Pour vérifier que η est une entropie du système (1) avec le flux d'entropie Φ , on montre que

$$\nabla_{\mathbf{W}} \Phi(\mathbf{W}) = \nabla_{\mathbf{W}} \eta(\mathbf{W}) \cdot \mathbb{A}(\mathbf{W}).$$

Or,

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} \tau \\ u \end{pmatrix}, \quad \Phi(\mathbf{W}) = up(\tau),$$

donc

$$\nabla_{\mathbf{W}} \Phi(\mathbf{W}) = \begin{pmatrix} up'(\tau) \\ p(\tau) \end{pmatrix}$$

et

$$\eta(\mathbf{W}) = \frac{u^2}{2} + \int_{\tau_0}^{\tau} p(r) dr$$

d'où

$$\nabla_{\mathbf{W}} \eta(\mathbf{W}) = \begin{pmatrix} -p(\tau) \\ u \end{pmatrix}.$$

Donc

$$\nabla_{\mathbf{W}} \eta(\mathbf{W}) \cdot \mathbb{A}(\mathbf{W}) = \begin{pmatrix} -p(\tau) \\ u \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ p'(\tau) & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} up'(\tau) \\ p(\tau) \end{pmatrix} = \nabla_{\mathbf{W}} \Phi(\mathbf{W}).$$

Il ne reste à prouver que la convexité de l'entropie en calculant la matrice hessienne :

$$d^2 \eta(\mathbf{W}) = \begin{pmatrix} -p'(\tau) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Puisque $p'(\tau) < 0$ l'entropie est bien convexe.

7. Étude des chocs. On cherche à déterminer les états droits $\mathbf{W} = (\tau, u)$ qui peuvent être reliés à un état gauche $\mathbf{W}_L = (\tau_L, u_L)$ par une discontinuité de vitesse σ .

7.1. 1-champ :

7.1.1. la condition d'entropie (Lax) pour $k = 1$ demande à ce que la vitesse σ_1 du 1-choc vérifie

$$\begin{cases} \lambda_1(\mathbf{W}) < \sigma_1 < \lambda_2(\mathbf{W}_L), \\ \sigma_1 < \lambda_1(\mathbf{W}_L), \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} -\sqrt{-p'(\tau)} < \sigma_1 < \sqrt{-p'(\tau_L)}, \\ \sigma_1 < -\sqrt{-p'(\tau_L)}, \end{cases}$$

donc $-\sqrt{-p'(\tau)} < \sigma_1 < -\sqrt{-p'(\tau_L)} < 0$. Puisque p est convexe alors p' est croissante donc

$$\tau < \tau_L.$$

En utilisant les relations de Rankine-Hugoniot on trouve

$$\begin{cases} \sigma_1 = \frac{u_L - u}{\tau - \tau_L}, \\ \sigma_1 = \frac{p(\tau) - p(\tau_L)}{u - u_L}, \end{cases}$$

donc, puisque $\sigma_1 < 0$, on a

$$u < u_L.$$

On conclut donc que les états $\mathbf{W} = (\tau, u)$ qui peuvent être reliés à un état gauche $\mathbf{W}_L = (\tau_L, u_L)$ par un 1-choc doivent satisfaire les deux inégalités

$$\begin{cases} u < u_L, \\ \tau < \tau_L. \end{cases}$$

7.1.2. En éliminant σ_1 dans les relations de Rankine-Hugoniot on trouve

$$u = u_L + d(\tau_L, \tau) \quad \text{pour } \tau < \tau_L$$

avec $d(\tau_L, \tau) = -\sqrt{(p(\tau_L) - p(\tau))(\tau_L - \tau)}$ et la vitesse du 1-choc est

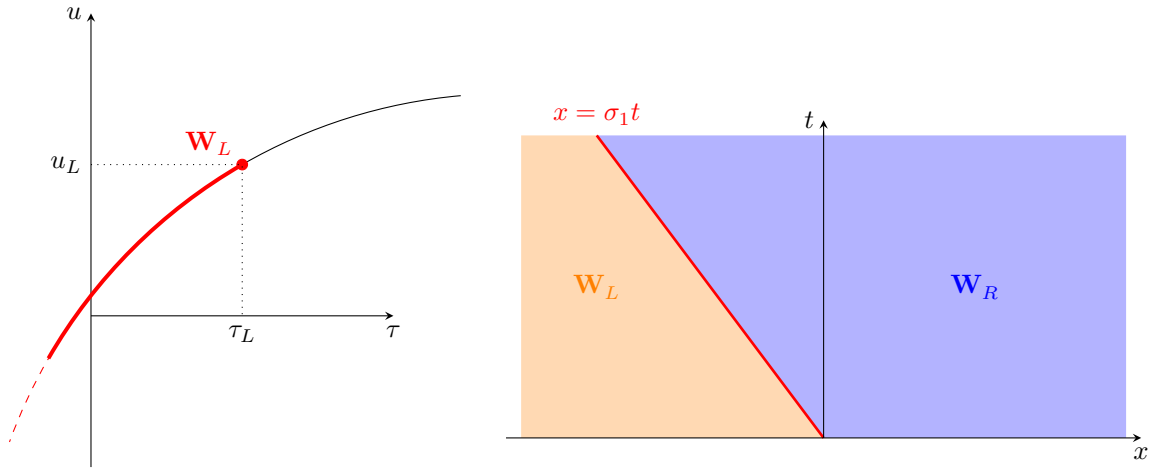
$$\sigma_1 = -\sqrt{\frac{p(\tau) - p(\tau_L)}{\tau_L - \tau}}.$$

De plus,

$$u'(\tau) = \frac{p'(\tau)(\tau - \tau_L) + p(\tau) - p(\tau_L)}{2\sqrt{(p(\tau) - p(\tau_L))(\tau_L - \tau)}} > 0, \quad \text{pour } \tau < \tau_L,$$

$$u''(\tau) = \dots < 0, \quad \text{pour } \tau < \tau_L.$$

On a donc les graphes suivants :



7.2. 2-champ :

7.2.1. la condition d'entropie (Lax) pour $k = 2$ demande à ce que la vitesse σ_2 du 2-choc vérifie

$$\begin{cases} \lambda_2(\mathbf{W}) < \sigma_2, \\ \lambda_1(\mathbf{W}_L) < \sigma_2 < \lambda_2(\mathbf{W}_L), \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} \sqrt{-p'(\tau)} < \sigma_2, \\ -\sqrt{-p'(\tau_L)} < \sigma_2 < \sqrt{-p'(\tau_L)}, \end{cases}$$

donc $0 < \sqrt{-p'(\tau)} < \sigma_2 < \sqrt{-p'(\tau_L)}$. Puisque p est convexe alors

$$\tau > \tau_L.$$

En utilisant les relations de Rankine-Hugoniot on trouve

$$\begin{cases} \sigma_2 = \frac{u_L - u}{\tau - \tau_L}, \\ \sigma_2 = \frac{p(\tau) - p(\tau_L)}{u - u_L}, \end{cases}$$

d'où

$$u < u_L.$$

On conclut donc que

$$\begin{cases} u < u_L, \\ \tau > \tau_L. \end{cases}$$

7.2.2. Les relations de Rankine-Hugoniot donnent aussi

$$u = u_L + d(\tau_L, \tau) \quad \text{pour } \tau > \tau_L$$

avec $d(\tau_L, \tau) = -\sqrt{(p(\tau) - p(\tau_L))(\tau_L - \tau)}$ et la vitesse du 2-choc est

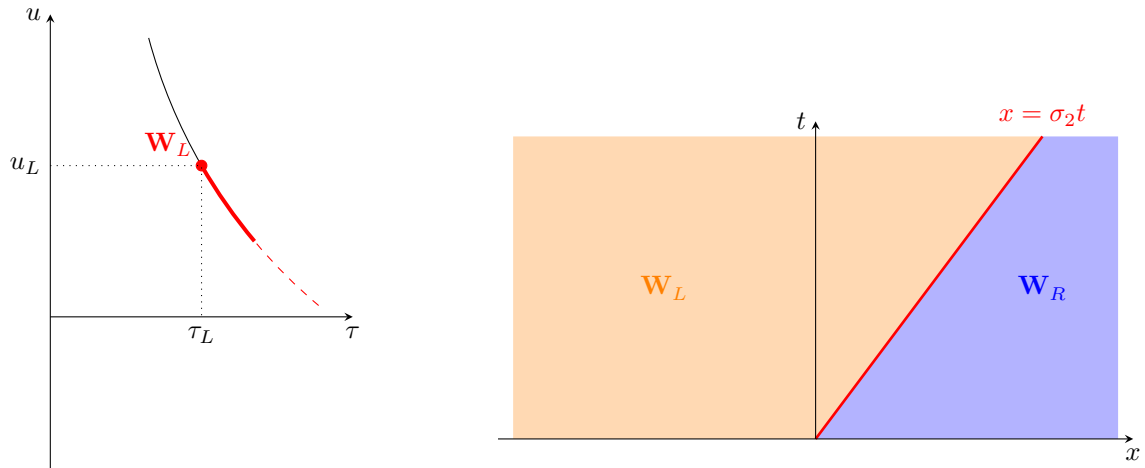
$$\sigma_2 = \sqrt{\frac{p(\tau) - p(\tau_L)}{\tau_L - \tau}}.$$

De plus,

$$u'(\tau) = \frac{p'(\tau)(\tau - \tau_L) + p(\tau) - p(\tau_L)}{2\sqrt{(p(\tau) - p(\tau_L))(\tau_L - \tau)}} < 0, \quad \text{pour } \tau > \tau_L,$$

$$u''(\tau) = \dots > 0, \quad \text{pour } \tau > \tau_L.$$

On a donc les graphes suivants :



8. Étude des détetes. On cherche à déterminer les états droits $\mathbf{W} = (\tau, u)$ qui peuvent être reliés à un état gauche $\mathbf{W}_L = (\tau_L, u_L)$ par une onde de détet.

8.1. 1-champ :

8.1.1. Dans une détet les invariants de Riemann sont conservés. Ici $k = 1$ d'où

$$I_1(\mathbf{W}_L) = I_1(\mathbf{W})$$

donc

$$u = u_L + \int_{\tau_L}^{\tau} \sqrt{-p'(y)} dy.$$

Puisque p est convexe, la condition $\lambda_1(\mathbf{W}_L) < \lambda_1(\mathbf{W})$ implique $\tau > \tau_L$ et $u > u_L$.

8.1.2. On obtient ainsi

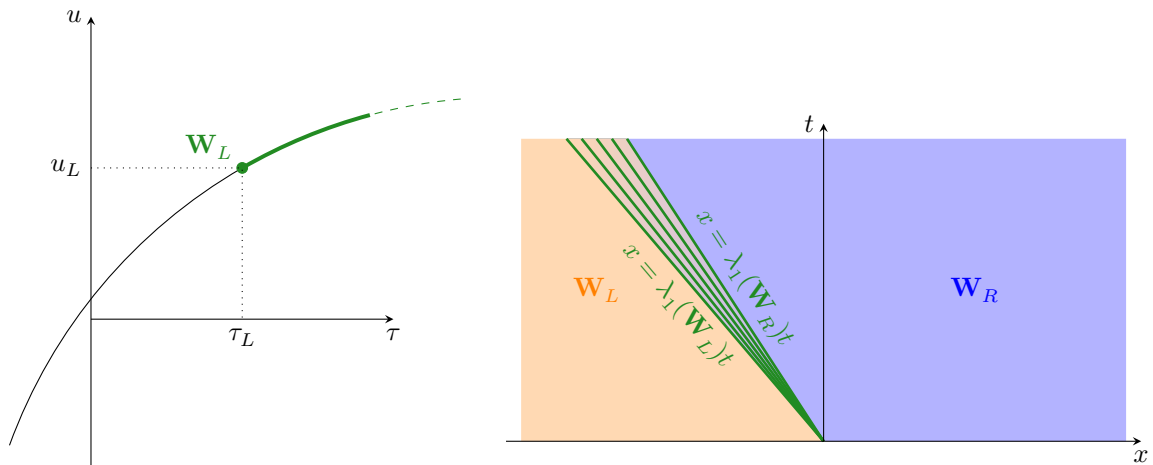
$$u = u_L + r(\tau_L, \tau) \quad \text{pour } \tau > \tau_L$$

avec $r(\tau_L, \tau) = \int_{\tau_L}^{\tau} \sqrt{-p'(y)} dy$. De plus,

$$u'(\tau) = \sqrt{-p'(\tau)} > 0, \quad \text{pour } \tau > \tau_L,$$

$$u''(\tau) = \frac{-p''(\tau)\sqrt{-p'(\tau)}}{2} < 0, \quad \text{pour } \tau > \tau_L.$$

On a donc les graphes suivants :



8.2. 2-champ :

8.2.1. Dans une détet les invariants de Riemann sont conservés. Ici $k = 2$ d'où

$$I_2(\mathbf{W}_L) = I_2(\mathbf{W})$$

donc

$$u = u_L - \int_{\tau_L}^{\tau} \sqrt{-p'(y)} dy.$$

Puisque p est convexe, la condition $\lambda_2(\mathbf{W}_L) < \lambda_2(\mathbf{W})$ implique $\tau < \tau_L$ et $u > u_L$.

8.2.2. On obtient ainsi

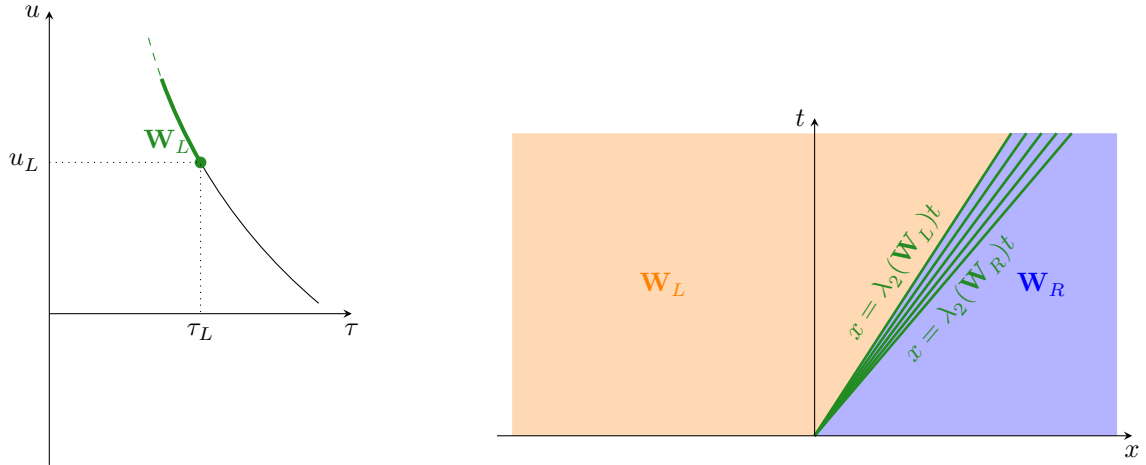
$$u = u_L + r(\tau_L, \tau) \quad \text{pour } \tau < \tau_L$$

avec $r(\tau_L, \tau) = -\int_{\tau_L}^{\tau} \sqrt{-p'(y)} dy$. De plus,

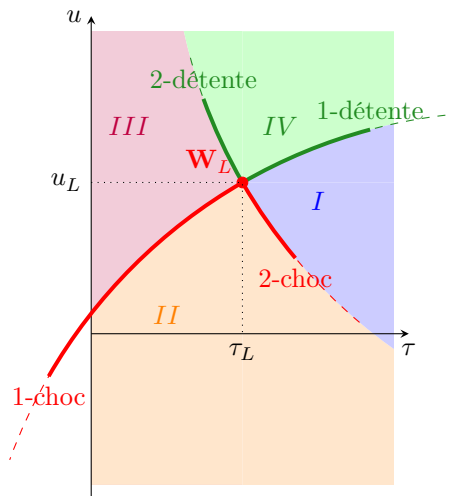
$$u'(\tau) = -\sqrt{-p'(\tau)} < 0, \quad \text{pour } \tau < \tau_L,$$

$$u''(\tau) = \frac{p''(\tau)\sqrt{-p'(\tau)}}{2} > 0, \quad \text{pour } \tau > \tau_L.$$

On a donc les graphes suivants :



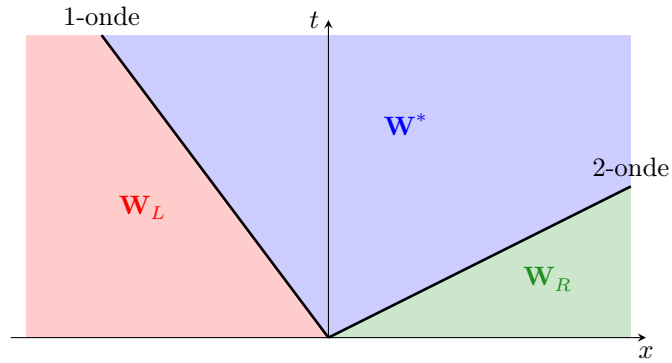
Récapitulatif : quel que soit $W_L = (\tau_L, u_L)$, le demi-plan $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ se décompose en quatre zones séparées par les quatre demi-courbes 1-choc, 2-choc, 1-détente et 2-détente.



9. Soit un problème de Riemann avec les deux états constants donnés suivants :

$$W_L = \begin{pmatrix} \tau_L \\ u_L \end{pmatrix}, \quad W_R = \begin{pmatrix} \tau_R \\ u_R \end{pmatrix}.$$

La solution est constituée de trois états constants séparés par deux ondes.



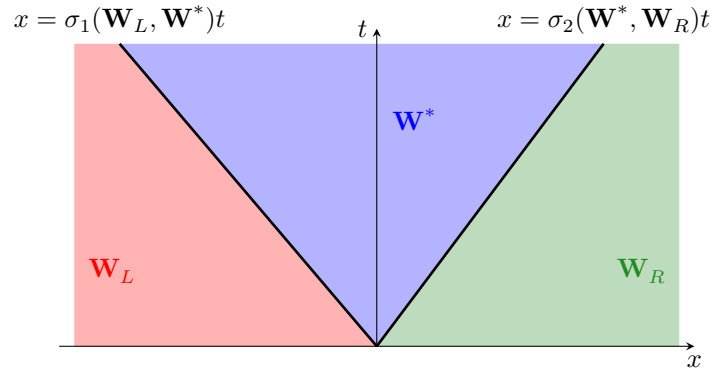
Pour expliciter cette solution on cherche à définir l'inconnue

$$\mathbf{W}^* = \begin{pmatrix} \tau^* \\ u^* \end{pmatrix}$$

à l'aide de l'étude des ondes précédent.

On a cinq cas possibles :

Cas 1) 1-choc et 2-choc (il correspond au cas où \mathbf{W}_R appartient à la zone II)



L'unique solution faible entropique est

$$\mathbf{W}(x, t) = \begin{cases} \mathbf{W}_L, & \text{si } x < \sigma_1(\tau_L, \tau^*)t, \\ \mathbf{W}^*, & \text{si } \sigma_1(\tau_L, \tau^*)t < x < \sigma_2(\tau^*, \tau_R)t, \\ \mathbf{W}_R, & \text{si } x > \sigma_2(\tau^*, \tau_R)t, \end{cases}$$

avec

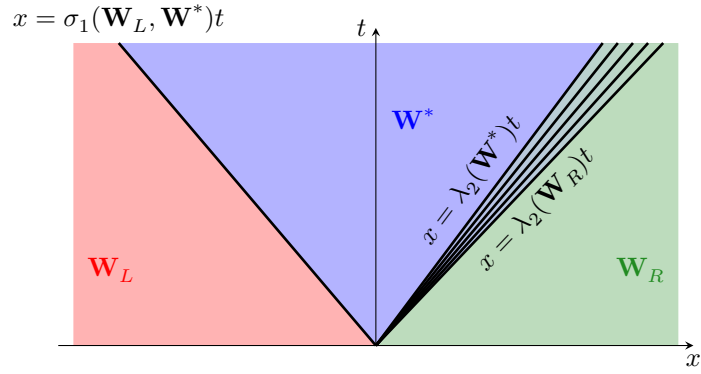
$$\sigma_1(\tau_L, \tau^*) = \sqrt{\frac{p(\tau^*) - p(\tau_L)}{\tau_L - \tau^*}},$$

$$\sigma_2(\tau^*, \tau_R) = \sqrt{\frac{p(\tau_R) - p(\tau^*)}{\tau^* - \tau_R}}$$

et τ^* et u^* est l'unique solution du système

$$\begin{cases} u^* = u_L - \sqrt{(p(\tau^*) - p(\tau_L))(\tau_L - \tau^*)}, \\ u_R = u^* - \sqrt{(p(\tau_R) - p(\tau^*))(\tau^* - \tau_R)}. \end{cases}$$

Cas 2) 1-choc et 2-détente (il correspond au cas où \mathbf{W}_R appartient à la zone III)



L'unique solution faible entropique est

$$\mathbf{W}(x, t) = \begin{cases} \mathbf{W}_L, & \text{si } x < \sigma_1(\tau_L, \tau^*)t, \\ \mathbf{W}^*, & \text{si } \sigma_1(\tau_L, \tau^*)t < x < \sqrt{-p'(\tau^*)}t, \\ \mathbf{W}_{2\text{-det}}, & \text{si } \sqrt{-p'(\tau^*)}t < x < \sqrt{-p'(\tau_R)}t, \\ \mathbf{W}_R, & \text{si } x > \sqrt{-p'(\tau_R)}t, \end{cases}$$

avec

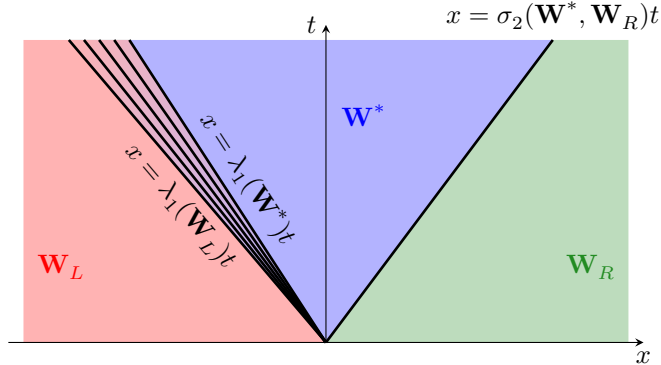
$$\sigma_1(\tau_L, \tau^*) = \sqrt{\frac{p(\tau^*) - p(\tau_L)}{\tau_L - \tau^*}},$$

$$\mathbf{W}_{2\text{-det}} = \left(\int f\left(-\frac{x}{t}\right) \sqrt{-p'(s)} ds, f(\xi) \equiv \left(\frac{\sqrt{\gamma}}{\xi}\right)^{\frac{2}{\gamma+1}} \right),$$

et τ^* et u^* l'unique solution du système

$$\begin{cases} u^* = u_L - \sqrt{(p(\tau^*) - p(\tau_L))(\tau_L - \tau^*)}, \\ u_R = u^* - \int_{\tau^*}^{\tau_R} \sqrt{-p'(y)} dy. \end{cases}$$

Cas 3) 1-détente et 2-choc (il correspond au cas où \mathbf{W}_R appartient à la zone I)



L'unique solution faible entropique est

$$\mathbf{W}(x, t) = \begin{cases} \mathbf{W}_L, & \text{si } x < -\sqrt{-p'(\tau_L)}t, \\ \mathbf{W}_{1\text{-det}}, & \text{si } -\sqrt{-p'(\tau_L)}t < x < -\sqrt{-p'(\tau^*)}t, \\ \mathbf{W}^*, & \text{si } -\sqrt{-p'(\tau^*)}t < x < \sigma_2(\tau^*, \tau_R)t, \\ \mathbf{W}_R, & \text{si } x > \sigma_2(\tau^*, \tau_R)t, \end{cases}$$

avec

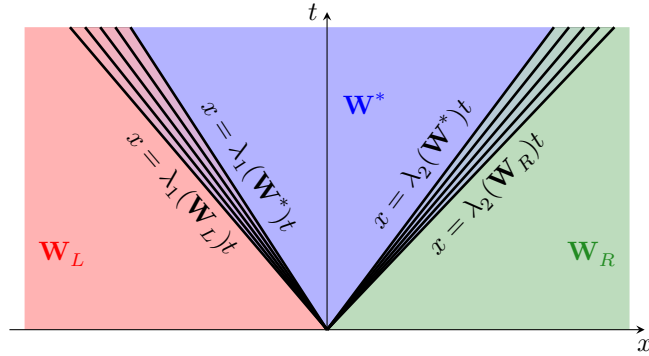
$$\sigma_2(\tau^*, \tau_R) = \sqrt{\frac{p(\tau_R) - p(\tau^*)}{\tau^* - \tau_R}},$$

$$\mathbf{W}_{1\text{-det}} = \left(\begin{array}{c} f\left(-\frac{x}{t}\right), \\ -\int^{f\left(-\frac{x}{t}\right)} \frac{1}{\sqrt{-p'(s)}} ds \end{array} \right), \quad f(\xi) \equiv \left(\frac{\sqrt{\gamma}}{\xi} \right)^{\frac{2}{\gamma+1}}$$

et τ^* et u^* l'unique solution du système

$$\begin{cases} u^* = u_L + \int_{\tau_L}^{\tau^*} \sqrt{-p'(y)} dy, \\ u_R = u^* - \sqrt{(p(\tau_R) - p(\tau^*))(\tau^* - \tau_R)}. \end{cases}$$

Cas 4) 1-détente et 2-détente sans formation du vide (il correspond au cas où \mathbf{W}_R appartient à la zone IV et les données de Riemann ne sont pas trop éloignées)



L'unique solution faible entropique est

$$\mathbf{W}(x, t) = \begin{cases} \mathbf{W}_L, & \text{si } x < -\sqrt{-p'(\tau_L)}t, \\ \mathbf{W}_{1\text{-det}}, & \text{si } -\sqrt{-p'(\tau_L)}t < x < -\sqrt{-p'(\tau^*)}t, \\ \mathbf{W}^*, & \text{si } -\sqrt{-p'(\tau^*)}t < x < \sqrt{-p'(\tau^*)}t, \\ \mathbf{W}_{2\text{-det}}, & \text{si } \sqrt{-p'(\tau^*)}t < x < \sqrt{-p'(\tau_R)}t, \\ \mathbf{W}_R, & \text{si } x > \sqrt{-p'(\tau_R)}t \end{cases}$$

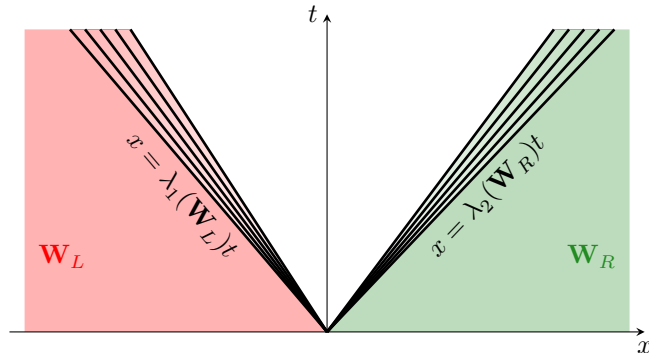
avec

$$\mathbf{W}_{1\text{-det}} = \left(\begin{array}{c} f\left(-\frac{x}{t}\right), \\ -\int^{f\left(-\frac{x}{t}\right)} \frac{1}{\sqrt{-p'(s)}} ds \end{array} \right), \quad \mathbf{W}_{2\text{-det}} = \left(\begin{array}{c} f\left(-\frac{x}{t}\right), \\ \int^{f\left(-\frac{x}{t}\right)} \frac{1}{\sqrt{-p'(s)}} ds \end{array} \right), \quad f(\xi) \equiv \left(\frac{\sqrt{\gamma}}{\xi} \right)^{\frac{2}{\gamma+1}}$$

et τ^* et u^* l'unique solution du système

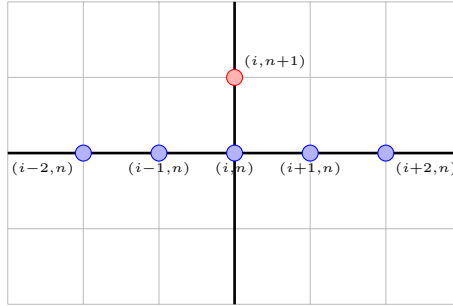
$$\begin{cases} u^* = u_L + \int_{\tau_L}^{\tau^*} \sqrt{-p'(y)} dy, \\ u_R = u^* - \int_{\tau^*}^{\tau_R} \sqrt{-p'(y)} dy. \end{cases}$$

Cas 5) 1-détente et 2-détente avec formation du vide (il peut se générer le vide lorsque \mathbf{W}_R appartient à la zone IV)



Correction de l'exercice III

1. Stencil :



Si les cinq coefficients α , β , γ , δ et ε sont non nuls alors on a un schéma à deux pas en temps et à cinq points en espace.

2. On pose $c \equiv a \frac{\Delta t}{\Delta x}$. On remplace u_i^n par $u(x_i, t^n)$ où u est une fonction régulière et on définit l'erreur de troncature par

$$\tau_i^n \equiv \frac{1}{\Delta t} \left[u(x_i, t^{n+1}) + c\alpha u_{i+2}^n + c\beta u_{i+1}^n + (c\gamma - 1)u_i^n + c\delta u_{i-1}^n + c\varepsilon u_{i-2}^n \right].$$

On fait des développements de Taylor en x autour du point x_i

$$u(x_{i\pm 2}, t^n) = u(x_i, t^n) \pm 2\Delta x \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t^n) + 2(\Delta x)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t^n) + O((\Delta x)^3)$$

$$u(x_{i\pm 1}, t^n) = u(x_i, t^n) \pm \Delta x \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t^n) + \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t^n) + O((\Delta x)^3)$$

qui conduisent à

$$\begin{aligned} \tau_i^n &= \frac{1}{\Delta t} \left\{ u(x_i, t^{n+1}) \right. \\ &+ c \left[(\alpha + \varepsilon)u(x_i, t^n) + (\alpha - \varepsilon)2\Delta x \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t^n) + (\alpha + \varepsilon)2(\Delta x)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t^n) + O((\Delta x)^3) \right] \\ &+ c \left[(\beta + \delta)u(x_i, t^n) + (\beta - \delta)\Delta x \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t^n) + (\beta + \delta)\frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t^n) + O((\Delta x)^3) \right] \\ &\left. + (c\gamma - 1)u(x_i, t^n) \right\} = \\ &= \frac{u(x_i, t^{n+1}) - ((\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon)c - 1)u(x_i, t^n)}{\Delta t} + \\ &+ c(2\alpha + \beta - \delta - 2\varepsilon) \frac{\Delta x}{\Delta t} \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t^n) + \\ &+ c(2\alpha + \beta + \delta + 2\varepsilon) \frac{(\Delta x)^2}{2\Delta t} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t^n) + \\ &+ \frac{c}{\Delta t} O((\Delta x)^3). \end{aligned}$$

En faisant un développement de Taylor en t autour du point t^n on a

$$u(x_i, t^{n+1}) = u(x_i, t^n) + \Delta t \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t^n) + \frac{(\Delta t)^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, t^n) + O((\Delta t)^3).$$

u étant solution de l'équation de transport, on a

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t^n) = -a \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t^n)$$

et par dérivation de l'équation de transport

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, t^n) = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t^n)$$

d'où

$$\begin{aligned} \tau_i^n &= \frac{(\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon)cu(x_i, t^n)}{\Delta t} + \\ &+ \left(c(2\alpha + \beta - \delta - 2\varepsilon)\frac{\Delta x}{\Delta t} - a \right) \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t^n) + \\ &+ \left(c(2\alpha + \beta + \delta + 2\varepsilon)\frac{(\Delta x)^2}{2\Delta t} + \frac{a^2\Delta t}{2} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t^n) + \\ &+ \frac{c}{\Delta t} O((\Delta x)^3) + O((\Delta t)^2). \end{aligned}$$

Donc le schéma est consistant si et seulement si $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon = 0$.

Étant donné que $c \equiv a \frac{\Delta t}{\Delta x}$, on a

$$\tau_i^n = O((\Delta x) + (\Delta t))$$

si et seulement si $\gamma = -(\alpha + \beta + \delta + \varepsilon)$ et $2(\alpha - \varepsilon) + \beta - \delta = 0$ et on a

$$\tau_i^n = O((\Delta x)^2 + (\Delta t)^2)$$

si et seulement si $\gamma = -(\alpha + \beta + \delta + \varepsilon)$, $2(\alpha - \varepsilon) + \beta - \delta = 0$ et $2(\alpha + \varepsilon) + \beta + \delta = 0$.

3. Pour mettre le schéma

$$u_i^{n+1} = u_i^n - a \frac{\Delta t}{\Delta x} (\alpha u_{i+2}^n + \beta u_{i+1}^n + \gamma u_i^n + \delta u_{i-1}^n + \varepsilon u_{i-2}^n)$$

sous la forme conservative

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} [f_{i-1/2}^n - f_{i+1/2}^n]$$

il faut calculer le flux numérique qu'ici est de la forme $f_{i-1/2}^n \equiv Au_{i-2}^n + Bu_{i-1}^n + Cu_i^n + Du_{i+1}^n$ et il ne reste que calculer les quatre coefficients A , B , C et D . On a

$$\begin{aligned} u_i^{n+1} &= u_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} [f_{i-1/2}^n - f_{i+1/2}^n] = \\ &= u_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} [Au_{i-2}^n + (B - A)u_{i-1}^n + (C - B)u_i^n + (D - C)u_{i+1}^n - Du_{i+2}^n] \end{aligned}$$

donc

$$\begin{cases} A &= -a\varepsilon, \\ (B - A) &= -a\delta, \\ (C - B) &= -a\gamma, \\ (D - C) &= -a\beta, \\ -D &= -a\alpha, \end{cases}$$

et on obtient $D = a\alpha$, $C = a(\alpha + \beta)$, $B = a(\alpha + \beta + \gamma)$ et $A = a(\alpha + \beta + \gamma + \delta) = -a\varepsilon$.

4. Soit $\gamma = -\varepsilon$ et $\alpha = \beta = \delta = 0$, c'est-à-dire

$$u_j^{n+1} = u_j^n - c\gamma(u_j^n - u_{j-1}^n), \quad c \equiv a \frac{\Delta t}{\Delta x}.$$

Pour étudier la stabilité au sens L^2 du schéma on utilise l'analyse de Fourier : pour $k \in \mathbb{Z}$, le coefficient de Fourier $\hat{u}^n(k)$ de la solution du schéma vérifie

$$\hat{u}^{n+1}(k) = [1 - c\gamma + c\gamma e^{-i\pi k(2\Delta x)}] \hat{u}^n(k).$$

En notant $\xi \equiv 2\pi k\Delta x$, on a

$$\hat{u}^{n+1}(k) = [1 - c\gamma + c\gamma e^{-i\xi}] \hat{u}^n(k).$$

Après simplification on obtient

$$|\hat{u}^{n+1}(k)|^2 = |A(k)|^2 |\hat{u}^n(k)|^2$$

avec

$$\begin{aligned} |A(k)|^2 &\equiv [c\gamma \cos \xi + (1 - c\gamma)]^2 + (c\gamma)^2 \sin^2 \xi = \\ &= 1 + 2c\gamma(1 - c\gamma)(\cos \xi - 1). \end{aligned}$$

On a

$$|A(k)| \leq 1 \iff 2c\gamma(1 - c\gamma)(\cos \xi - 1) \leq 0 \iff c \leq \frac{1}{\gamma}.$$

Pour $0 \leq c \leq \frac{1}{\gamma}$ on a $|A(k)| \leq 1$ pour toute fréquence $k \in \mathbb{Z}$, ce qui prouve que le schéma est stable en norme L^2 sous la condition CFL $0 \leq c \leq \frac{1}{\gamma}$.

5. Un schéma linéaire consistant et stable est convergent d'après le théorème de Lax. Le schéma donné est donc convergent sous la condition CFL ci-dessus.