L1PC

2009/2010

Gloria Faccanoni

M231

Calculs Différentiels

Examens et Contrôles continus

Table des matières

Contrôle ①

Contrôle ① - thème A

Exercice ❶ : continuité, dérivabilité, différentiabilité. [12 points]

1. [3 points] Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une application et $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Compléter les phrases suivantes par $\boxed{\Rightarrow}$, $\boxed{\Leftarrow}$, $\boxed{\Leftrightarrow}$ ou $\boxed{\text{Aucune implication}}$:

1.1	f est continue en (x_0, y_0)		il existe $\nabla f(x_0, y_0)$;
1.2	f est continue en (x_0, y_0)		f est différentiable en (x_0, y_0) ;
1.3	f est différentiable en (x_0, y_0)		il existe $\nabla f(x_0, y_0)$;
1.4	f est de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$		f est différentiable en (x_0, y_0) ;
1.5	f est de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$		f est continue en (x_0, y_0) ;
1.6	f est de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$		il existe $\nabla f(x_0, y_0)$;

2. Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction ainsi définie

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

2.1. [2 points] Est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$? Justifier la réponse.

2.2. [2 points] Calculer $\nabla f(x,y)$ pour $(x,y) \neq (0,0)$, *i.e.* le vecteur de composantes

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y).$$

2.3. [2 points] Calculer $\nabla f(0,0)$, *i.e.* le vecteur de composantes

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0).$$

2.4. [2 points] La fonction f est-elle de classe $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2)$? Justifier la réponse.

2.5. [1 point] Que peut-on conclure sur la différentiabilité de la fonction f sur $\mathbb{R}^2$?

Solution de l'exercice ❶.

1. Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une application et $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

1.1	f est continue en (x_0, y_0)	$\boxed{\text{Aucune implication}}$	il existe $\nabla f(x_0, y_0)$;
1.2	f est continue en (x_0, y_0)	$\boxed{\Leftarrow}$	f est différentiable en (x_0, y_0) ;
1.3	f est différentiable en (x_0, y_0)	$\boxed{\Rightarrow}$	il existe $\nabla f(x_0, y_0)$;
1.4	f est de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$	$\boxed{\Rightarrow}$	f est différentiable en (x_0, y_0) ;
1.5	f est de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$	$\boxed{\Rightarrow}$	f est continue en (x_0, y_0) ;
1.6	f est de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$	$\boxed{\Rightarrow}$	il existe $\nabla f(x_0, y_0)$;

2. 2.1. La fonction est clairement continue dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Elle est aussi continue en $(0,0)$ car

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} = \lim_{\substack{\rho\to 0\\ \forall\theta}} \rho^2 \cos^2\theta \sin^2\theta \le \lim_{\rho\to 0} \rho^2 = 0 = f(0,0).$$

f est donc continue sur $\mathbb{R}^2$.

2.2. Pour $(x,y) \neq (0,0)$ on a

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2} \\ \frac{2x^4y}{(x^2+y^2)^2} \end{pmatrix}.$$

2.3. Pour $(x,y) = (0,0)$ on a

$$\nabla f(0,0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} \\ \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2.4. On a déjà vérifié que la fonction est continue sur $\mathbb{R}^2$. Vérifions si ses dérivées partielles sont continues sur $\mathbb{R}^2$. On a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{\substack{\rho\to 0\\ \forall\theta}} \frac{2\rho^5(\cos\theta \sin^4\theta)}{\rho^4} = \lim_{\rho\to 0} 2\rho = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \frac{2x^4y}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \lim_{\substack{\rho\to 0\\ \forall\theta}} \frac{2\rho^5(\cos^4\theta\sin\theta)}{\rho^4} = \lim_{\rho\to 0} 2\rho = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0),$$

la fonction est donc de classe $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2)$.

2.5. Puisque toute fonction de classe $\mathscr{C}^1(\Omega)$ est différentiable sur Ω, on conclut que f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice ❷ : différentielle. [5 points]

1. [2 points] Écrire la définition de différentiabilité en un point $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ pour une application $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.
2. [3 points] Vérifier, en utilisant la définition, que la fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que $f(x,y) = xy - 3x^2$ est différentiable en $(1;2)$.

Solution de l'exercice ❷.

1. Une application $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est différentiable en $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ ssi

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - f(x_0,y_0) - f'_x(x_0,y_0)(x-x_0) - f'_y(x_0,y_0)(y-y_0)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$

2. On a

$$\begin{aligned} f(x,y) &= xy - 3x^2 & f(1,2) &= -1, \\ f'_x(x,y) &= y - 6x & f_x(1,2) &= -4, \\ f'_y(x,y) &= x & f_y(1,2) &= 1, \end{aligned}$$

donc

$$\frac{f(x,y) - f(x_0,y_0) - f'_x(x_0,y_0)(x-x_0) - f'_y(x_0,y_0)(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} = \frac{xy - 3x^2 + 1 + 4(x-1) - (y-2)}{\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}}.$$

Avec le changement de variables $x = 1 + r\cos\theta$ et $y = 2 + r\sin\theta$ ce rapport se réécrit

$$\frac{xy - 3x^2 + 1 + 4(x-1) - (y-2)}{\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}} = \frac{(1+r\cos\theta)(2+r\sin\theta) - 3(1+r\cos\theta)^2 + 1 + 4r\cos\theta - r\sin\theta}{r} = r\cos\theta(\sin\theta - 3\cos\theta)$$

On a alors

$$\left| \frac{xy - 3x^2 + 1 + 4(x-1) - (y-2)}{\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}} \right| \le 4r \xrightarrow[r\to 0]{} 0$$

d'où

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{xy - 3x^2 + 1 + 4(x-1) - (y-2)}{\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}} = 0.$$

La fonction est donc différentiable en $(1,2)$.

Exercice ❸ : fonctions implicites. [8 points]

On considère la courbe plane d'équation

$$ye^x + e^y\sin(2x) = 0. \tag{1}$$

1. [3 points] Vérifier que l'équation (1) définie une et une seule fonction $y = \phi(x)$ au voisinage de $(0,0)$.
2. [3 points] Calculer $\phi'(0)$ et écrire l'équation de la droite tangente au graphe de la fonction ϕ en le point $(0, \phi(0))$.
3. [2 points] En déduire la limite de $\frac{y}{x}$ quand (x,y) tend vers $(0,0)$ en étant sur la courbe.

Solution de l'exercice ❸.

On pose $f(x,y) = ye^x + e^y\sin(2x)$

1. On note que $(0,0)$ est une solution de l'équation $f(x,y) = 0$. On a

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= ye^x + 2e^y\cos(2x), & f'_x(0,0) &= 2, \\ f_y(x,y) &= e^x + e^y\sin(2x), & f'_y(0,0) &= 1. \end{aligned}$$

Puisque $f'_y(0,0) \neq 0$ il existe une et une seule fonction $y = \phi(x)$ définie au voisinage de 0 tel que $f(x,\phi(x)) = 0$.

2. On a

$$\phi'(0) = -\frac{f'_x(0,0)}{f'_y(0,0)} = -2$$

donc l'équation de la droite tangente à ϕ en $x = 0$ est $y = -2x$.

3. On a

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ f(x,y)=0}} \frac{y}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\phi(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\phi(x)-\phi(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \phi'(x) = \phi'(0) = -2.$$

Contrôle ① - thème B

Exercice ❶ : continuité, dérivabilité, différentiabilité. [12 points]

1. [3 points] Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une application et $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Completer les phrases suivantes par $\boxed{\Rightarrow}$, $\boxed{\Leftarrow}$, $\boxed{\Leftrightarrow}$ ou $\boxed{\text{Aucune implication}}$:

1.1	f est continue en (x_0, y_0)		il existe $\nabla f(x_0, y_0)$;
1.2	f est continue en (x_0, y_0)		f est de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$;
1.3	f est continue en (x_0, y_0)		f est différentiable en (x_0, y_0) ;
1.4	f est de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$		f est différentiable en (x_0, y_0) ;
1.5	il existe $\nabla f(x_0, y_0)$		f est de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$;
1.6	il existe $\nabla f(x_0, y_0)$		f est différentiable en (x_0, y_0) ;

2. Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction ainsi définie

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

2.1. [2 points] Est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$? Justifier la réponse.

2.2. [2 points] Calculer $\nabla f(x,y)$ pour $(x,y) \neq (0,0)$, *i.e.* le vecteur de composantes

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y).$$

2.3. [2 points] Calculer $\nabla f(0,0)$, *i.e.* le vecteur de composantes

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0).$$

2.4. [2 points] La fonction f est-elle de classe $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2)$? Justifier la réponse.

2.5. [1 point] Que peut-on conclure sur la différentiabilité de la fonction f sur $\mathbb{R}^2$?

Solution de l'exercice ❶.

1. Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une application et $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

1.1	f est continue en (x_0, y_0)	$\boxed{\text{Aucune implication}}$	il existe $\nabla f(x_0, y_0)$;
1.2	f est continue en (x_0, y_0)	$\boxed{\Leftarrow}$	f est de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$;
1.3	f est continue en (x_0, y_0)	$\boxed{\Leftarrow}$	f est différentiable en (x_0, y_0) ;
1.4	f est de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$	$\boxed{\Rightarrow}$	f est différentiable en (x_0, y_0) ;
1.5	il existe $\nabla f(x_0, y_0)$	$\boxed{\Leftarrow}$	f est de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$;
1.6	il existe $\nabla f(x_0, y_0)$	$\boxed{\Leftarrow}$	f est différentiable en (x_0, y_0) ;

2. 2.1. La fonction est clairement continue dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Elle est aussi continue en $(0,0)$ car

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y^2}{x^2+y^2} = \lim_{\substack{\rho\to 0\\ \forall\theta}} \rho^3 \cos^3\theta \sin^2\theta = \lim_{\rho\to 0} \rho^3 = 0 = f(0,0).$$

f est donc continue sur $\mathbb{R}^2$.

2.2. Pour $(x,y) \neq (0,0)$ on a

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x^2y^2(x^2+3y^2)}{(x^2+y^2)^2} \\ \frac{2x^5y}{(x^2+y^2)^2} \end{pmatrix}.$$

2.3. Pour $(x,y) = (0,0)$ on a

$$\nabla f(0,0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} \\ \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2.4. On a déjà vérifié que la fonction est continue sur $\mathbb{R}^2$. Vérifions si ses dérivées partielles sont continues sur $\mathbb{R}^2$. On a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2(x^2+3y^2)}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{\substack{\rho\to 0\\ \forall\theta}} \frac{\rho^6 \cos^2\theta \sin^2\theta(\cos^2\theta + 3\sin^2\theta)}{\rho^4} = \lim_{\rho\to 0} 4\rho^2 = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \frac{2x^5y}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \lim_{\substack{\rho\to 0\\ \forall\theta}} \frac{2\rho^6(\cos^5\theta\sin\theta)}{\rho^4} = \lim_{\rho\to 0} 2\rho^2 = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0),$$

la fonction est donc de classe $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2)$.

2.5. Puisque toute fonction de classe $\mathscr{C}^1(\Omega)$ est différentiable sur Ω, on conclut que f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice ❷ : différentielle. [5 points]

1. [2 points] Écrire la définition de différentiabilité en un point $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ pour une application $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.
2. [3 points] Vérifier, en utilisant la définition, que la fonction $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que $f(x,y) = xy - 3y^2$ est différentiable en $(2;1)$.

Solution de l'exercice ❷.

1. Une application $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est différentiable en $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ ssi

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - f(x_0,y_0) - f'_x(x_0,y_0)(x-x_0) - f'_y(x_0,y_0)(y-y_0)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$

2. On a

$$\begin{aligned} f(x,y) &= xy - 3y^2 & f(2,1) &= -1, \\ f'_x(x,y) &= y & f_x(2,1) &= 1, \\ f'_y(x,y) &= x - 6y & f_y(2,1) &= -4, \end{aligned}$$

donc

$$\frac{f(x,y) - f(x_0,y_0) - f'_x(x_0,y_0)(x-x_0) - f'_y(x_0,y_0)(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} = \frac{xy - 3y^2 + 1 - (x-2) + 4(y-1)}{\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}}.$$

Avec le changement de variables $x = 2 + r\cos\theta$ et $y = 1 + r\sin\theta$ ce rapport se réécrit

$$\frac{xy - 3y^2 + 1 - (x-2) + 4(y-1)}{\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}} = \frac{(2+r\cos\theta)(1+r\sin\theta) - 3(1+r\sin\theta)^2 + 1 - r\cos\theta + 4r\sin\theta}{r} = r\sin\theta(\cos\theta - 3\sin\theta).$$

On a alors

$$\left| \frac{xy - 3y^2 + 1 - (x-2) + 4(y-1)}{\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}} \right| \le 4r \xrightarrow[r\to 0]{} 0$$

d'où

$$\lim_{(x,y)\to(2,1)} \frac{xy - 3y^2 + 1 - (x-2) + 4(y-1)}{\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}} = 0.$$

La fonction est donc différentiable en $(2,1)$.

Exercice ❸ : fonctions implicites. [8 points]

On considère la courbe plane d'équation

$$ye^x + e^y \sin(2x) = 0. \tag{2}$$

1. [3 points] Vérifier que l'équation (2) définie une et une seule fonction $y = \phi(x)$ au voisinage de $(0,0)$.
2. [3 points] Calculer $\phi'(0)$ et écrire l'équation de la droite tangente au graphe de la fonction ϕ en le point $(0, \phi(0))$.
3. [2 points] En déduire la limite de $\frac{y}{x}$ quand (x,y) tend vers $(0,0)$ en étant sur la courbe.

Solution de l'exercice ❸.

On pose $f(x,y) = ye^x + e^y\sin(2x)$

1. On note que $(0,0)$ est une solution de l'équation $f(x,y) = 0$. On a

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= ye^x + 2e^y\cos(2x), & f'_x(0,0) &= 2, \\ f_y(x,y) &= e^x + e^y\sin(2x), & f'_y(0,0) &= 1. \end{aligned}$$

Puisque $f'_y(0,0) \neq 0$ il existe une et une seule fonction $y = \phi(x)$ définie au voisinage de 0 tel que $f(x, \phi(x)) = 0$.

2. On a

$$\phi'(0) = -\frac{f'_x(0,0)}{f'_y(0,0)} = -2$$

donc l'équation de la droite tangente à ϕ en $x = 0$ est $y = -2x$.

3. On a

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ f(x,y)=0}} \frac{y}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\phi(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\phi(x) - \phi(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \phi'(x) = \phi'(0) = -2.$$

Contrôle ① - thème C

Exercice ❶ : continuité, dérivabilité, différentiabilité. [12 points]

1. [3 points] Soit $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une application et $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Compléter les phrases suivantes par $\boxed{\Rightarrow}$, $\boxed{\Leftarrow}$, $\boxed{\Leftrightarrow}$ ou $\boxed{\text{Aucune implication}}$:

1.1	f est différentiable en (x_0, y_0)		f est continue en (x_0, y_0) ;
1.2	f est différentiable en (x_0, y_0)		f est de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$;
1.3	f est différentiable en (x_0, y_0)		il existe $\nabla f(x_0, y_0)$;
1.4	il existe $\nabla f(x_0, y_0)$		f est continue en (x_0, y_0) ;
1.5	il existe $\nabla f(x_0, y_0)$		f est de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$;
1.6	f est continue en (x_0, y_0)		f est de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$;

2. Soit $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction ainsi définie

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

2.1. [2 points] Est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$? Justifier la réponse.

2.2. [2 points] Calculer $\nabla f(x,y)$ pour $(x,y) \neq (0,0)$, *i.e.* le vecteur de composantes

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y).$$

2.3. [2 points] Calculer $\nabla f(0,0)$, *i.e.* le vecteur de composantes

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0).$$

2.4. [2 points] La fonction f est-elle de classe $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2)$? Justifier la réponse.

2.5. [1 point] Que peut-on conclure sur la différentiabilité de la fonction f sur $\mathbb{R}^2$?

Solution de l'exercice ❶.

1. Soit $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une application et $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

1.1	f est différentiable en (x_0, y_0)	$\boxed{\Rightarrow}$	f est continue en (x_0, y_0) ;
1.2	f est différentiable en (x_0, y_0)	$\boxed{\Leftarrow}$	f est de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$;
1.3	f est différentiable en (x_0, y_0)	$\boxed{\Rightarrow}$	il existe $\nabla f(x_0, y_0)$;
1.4	il existe $\nabla f(x_0, y_0)$	$\boxed{\text{Aucune implication}}$	f est continue en (x_0, y_0) ;
1.5	il existe $\nabla f(x_0, y_0)$	$\boxed{\Leftarrow}$	f est de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$;
1.6	f est continue en (x_0, y_0)	$\boxed{\Leftarrow}$	f est de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$;

2. 2.1. La fonction est clairement continue dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Elle est aussi continue en $(0,0)$ car

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^3}{x^2+y^2} = \lim_{\substack{\rho\to0\\ \forall\theta}} \rho^3\cos^2\theta\sin^3\theta = \lim_{\rho\to0}\rho^3 = 0 = f(0,0).$$

f est donc continue sur $\mathbb{R}^2$.

2.2. Pour $(x,y) \neq (0,0)$ on a

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2xy^5}{(x^2+y^2)^2} \\ \frac{x^2y^2(3x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} \end{pmatrix}.$$

2.3. Pour $(x,y) = (0,0)$ on a

$$\nabla f(0,0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lim_{x\to0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} \\ \lim_{y\to0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2.4. On a déjà vérifié que la fonction est continue sur $\mathbb{R}^2$. Vérifions si ses dérivées partielles sont continues sur $\mathbb{R}^2$. On a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy^5}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{\substack{\rho\to0\\ \forall\theta}} \frac{2\rho^6(\cos\theta\sin^5\theta)}{\rho^4} = \lim_{\rho\to0} 2\rho^2 = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2(3x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \lim_{\substack{\rho\to 0\\ \forall\theta}} \frac{\rho^6(3\cos^2\theta + \sin^2\theta)}{\rho^4} = \lim_{\rho\to 0} 4\rho^2 = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0),$$

la fonction est donc de classe $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2)$.

2.5. Puisque toute fonction de classe $\mathscr{C}^1(\Omega)$ est différentiable sur Ω, on conclut que f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice ❷ : différentielle. [5 points]

1. [2 points] Écrire la définition de différentiabilité en un point $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ pour une application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.
2. [3 points] Vérifier, en utilisant la définition, que la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que $f(x,y) = xy + 3y^2$ est différentiable en $(2;1)$.

Solution de l'exercice ❷.

1. Une application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est différentiable en $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ ssi
$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - f(x_0,y_0) - f'_x(x_0,y_0)(x-x_0) - f'_y(x_0,y_0)(y-y_0)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$
2. On a
$$\begin{aligned} f(x,y) &= xy + 3y^2 & f(2,1) &= 5, \\ f'_x(x,y) &= y & f_x(2,1) &= 1, \\ f'_y(x,y) &= x + 6y & f_y(2,1) &= 8, \end{aligned}$$
donc
$$\frac{f(x,y) - f(x_0,y_0) - f'_x(x_0,y_0)(x-x_0) - f'_y(x_0,y_0)(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} = \frac{xy+3y^2-5-(x-2)-8(y-1)}{\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}}.$$
Avec le changement de variables $x = 2 + r\cos\theta$ et $y = 1 + r\sin\theta$ ce rapport se réécrit
$$\frac{xy+3y^2-5-(x-2)-8(y-1)}{\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}} = \frac{(2+r\cos\theta)(1+r\sin\theta)+3(1+r\sin\theta)^2-5-r\cos\theta-8r\sin\theta}{r} = r\sin\theta(3\sin\theta+\cos\theta).$$
On a alors
$$\left|\frac{xy+3y^2-5-(x-2)-8(y-1)}{\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}}\right| \le 4r \xrightarrow[r\to 0]{} 0$$
d'où
$$\lim_{(x,y)\to(2,1)} \frac{xy+3y^2-5-(x-2)-8(y-1)}{\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}} = 0.$$
La fonction est donc différentiable en $(2,1)$.

Exercice ❸ : fonctions implicites. [8 points]

On considère la courbe plane d'équation
$$xe^y + e^x\sin(2y) = 0. \tag{3}$$

1. [3 points] Vérifier que l'équation (3) définie une et une seule fonction $y = \phi(x)$ au voisinage de $(0,0)$.
2. [3 points] Calculer $\phi'(0)$ et écrire l'équation de la droite tangente au graphe de la fonction ϕ en le point $(0,\phi(0))$.
3. [2 points] En déduire la limite de $\frac{y}{x}$ quand (x,y) tend vers $(0,0)$ en étant sur la courbe.

Solution de l'exercice ❸.

On pose $f(x,y) = xe^y + e^x\sin(2y)$

1. On note que $(0,0)$ est une solution de l'équation $f(x,y) = 0$. On a
$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= e^y + e^x\sin(2y), & f'_x(0,0) &= 1, \\ f_y(x,y) &= xe^y + 2e^x\cos(2y), & f'_y(0,0) &= 2. \end{aligned}$$
Puisque $f'_y(0,0) \neq 0$ il existe une et une seule fonction $y = \phi(x)$ définie au voisinage de 0 tel que $f(x,\phi(x)) = 0$.
2. On a
$$\phi'(0) = -\frac{f'_x(0,0)}{f'_y(0,0)} = -\frac{1}{2}$$
donc l'équation de la droite tangente à ϕ en $x = 0$ est $y = -\frac{1}{2}x$.
3. On a
$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ f(x,y)=0}} \frac{y}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\phi(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\phi(x)-\phi(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \phi'(x) = \phi'(0) = -\frac{1}{2}.$$

Contrôle ① - thème D

Exercice ❶ : continuité, dérivabilité, différentiabilité. [12 points]

1. [3 points] Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une application et $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Compléter les phrases suivantes par $\boxed{\Rightarrow}$, $\boxed{\Leftarrow}$, $\boxed{\Leftrightarrow}$ ou $\boxed{\text{Aucune implication}}$:

1.1	il existe $\nabla f(x_0, y_0)$		f est continue en (x_0, y_0) ;
1.2	il existe $\nabla f(x_0, y_0)$		f est différentiable en (x_0, y_0) ;
1.3	il existe $\nabla f(x_0, y_0)$		f est de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$;
1.4	f est différentiable en (x_0, y_0)		f est continue en (x_0, y_0) ;
1.5	f est différentiable en (x_0, y_0)		f est de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$;
1.6	f est continue en (x_0, y_0)		f est de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$;

2. Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction ainsi définie
$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)^3 \cos\frac{1}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0),\\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0).\end{cases}$$

2.1. [2 points] Est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$? Justifier la réponse.

2.2. [2 points] Calculer $\nabla f(x,y)$ pour $(x,y) \neq (0,0)$, *i.e.* le vecteur de composantes
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y).$$

2.3. [2 points] Calculer $\nabla f(0,0)$, *i.e.* le vecteur de composantes
$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0).$$

2.4. [2 points] La fonction f est-elle de classe $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2)$? Justifier la réponse.

2.5. [1 point] Sans faire de calculs, que peut-on conclure sur la différentiabilité de la fonction f sur $\mathbb{R}^2$?

Solution de l'exercice ❶.

1. Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une application et $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

1.1	il existe $\nabla f(x_0, y_0)$	$\boxed{\text{Aucune implication}}$	f est continue en (x_0, y_0) ;
1.2	il existe $\nabla f(x_0, y_0)$	$\boxed{\Leftarrow}$	f est différentiable en (x_0, y_0) ;
1.3	il existe $\nabla f(x_0, y_0)$	$\boxed{\Leftarrow}$	f est de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$;
1.4	f est différentiable en (x_0, y_0)	$\boxed{\Rightarrow}$	f est continue en (x_0, y_0) ;
1.5	f est différentiable en (x_0, y_0)	$\boxed{\Leftarrow}$	f est de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$;
1.6	f est continue en (x_0, y_0)	$\boxed{\Leftarrow}$	f est de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$;

2. 2.1. La fonction est clairement continue dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Elle est aussi continue en $(0,0)$ car
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{\substack{\rho\to 0\\ \forall\theta}} \rho^6 \cos\frac{1}{\rho^2} = 0 = f(0,0).$$
f est donc continue sur $\mathbb{R}^2$.

2.2. Pour $(x,y) \neq (0,0)$ on a
$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x(x^2+y^2)^2 \cos\frac{1}{x^2+y^2} + 2x(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2} \\ 6y(x^2+y^2)^2 \cos\frac{1}{x^2+y^2} + 2y(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2} \end{pmatrix}.$$

2.3. Pour $(x,y) = (0,0)$ on a
$$\nabla f(0,0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} \\ \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2.4. On a déjà vérifié que la fonction est continue sur $\mathbb{R}^2$. Vérifions si ses dérivées partielles sont continues sur $\mathbb{R}^2$. On a
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} 6x(x^2+y^2)^2 \cos\frac{1}{x^2+y^2} + 2x(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0),\\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0),\end{cases}$$
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{\substack{\rho\to 0\\ \forall\theta}} 6\rho^5 \cos\theta \cos\frac{1}{\rho^2} + 2\rho^3 \cos\theta \sin\frac{1}{\rho^2} = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} 6y(x^2+y^2)^2\cos\frac{1}{x^2+y^2} + 2y(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \lim_{\substack{\rho\to 0\\ \forall\theta}} 6\rho^5 \sin\theta\cos\frac{1}{\rho^2} + 2\rho^3\sin\theta\sin\frac{1}{\rho^2} = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0),$$

la fonction est donc de classe $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2)$.

2.5. Puisque toute fonction de classe $\mathscr{C}^1(\Omega)$ est différentiable sur Ω, on conclut que f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice ❷ : différentielle. [5 points]

1. [2 points] Écrire la définition de différentiabilité en un point $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ pour une application $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.
2. [3 points] Vérifier, en utilisant la définition, que la fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que $f(x,y) = xy - 2y^2$ est différentiable en $(-2;3)$.

Solution de l'exercice ❷.

1. Une application $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est différentiable en $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ ssi

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - f(x_0,y_0) - f'_x(x_0,y_0)(x-x_0) - f'_y(x_0,y_0)(y-y_0)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$

2. On a

$$\begin{aligned} f(x,y) &= xy - y^2 & f(2,1) &= -15, \\ f'_x(x,y) &= y & f_x(2,1) &= 3, \\ f'_y(x,y) &= x - 2y & f_y(2,1) &= -8, \end{aligned}$$

donc
$$\frac{f(x,y) - f(x_0,y_0) - f'_x(x_0,y_0)(x-x_0) - f'_y(x_0,y_0)(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} = \frac{xy - y^2 + 15 - 3(x+2) + 8(y-3)}{\sqrt{(x+2)^2+(y-3)^2}}.$$

Avec le changement de variables $x = -2 + r\cos\theta$ et $y = 3 + r\sin\theta$ ce rapport se réécrit

$$\frac{xy - y^2 + 15 - 3(x+2) + 8(y-3)}{\sqrt{(x+2)^2+(y-3)^2}} = \frac{(-2+r\cos\theta)(3+r\sin\theta) - 2(3+r\sin\theta)^2 + 15 - 3r\cos\theta + 8r\sin\theta}{r} = r\sin\theta(\cos\theta - 2\sin\theta).$$

On a alors
$$\left| \frac{xy - y^2 + 15 - 3(x+2) + 8(y-3)}{\sqrt{(x+2)^2+(y-3)^2}} \right| \le 3r \xrightarrow[r\to 0]{} 0$$

d'où
$$\lim_{(x,y)\to(-2,3)} \frac{xy - y^2 + 15 - 3(x+2) + 8(y-3)}{\sqrt{(x+2)^2+(y-3)^2}} = 0.$$

La fonction est donc différentiable en $(-2,3)$.

Exercice ❸ : fonctions implicites. [8 points]

On considère la courbe plane d'équation
$$2x^3y + 2x^2 + y^2 = 5. \tag{4}$$

1. [3 points] Vérifier que l'équation (4) définie une et une seule fonction $y = \phi(x)$ au voisinage de $(1,1)$.
2. [3 points] Calculer $\phi'(1)$ et écrire l'équation de la droite tangente au graphe de la fonction ϕ en le point $(1, \phi(1))$.
3. [2 points] Sachant que
$$\phi''(x) = -\frac{f''_{xx}(f'_y)^2 - 2f'_x f'_y f''_{xy} + (f'_x)^2 f''_{yy}}{(f'_y)^3}$$
en déduire le dévéloppement de Taylor de ϕ à l'ordre 2 centré en $x = 1$.

Solution de l'exercice ❸.

On pose $f(x,y) = 2x^3y + 2x^2 + y^2 - 5$

1. On note que $(1,1)$ est une solution de l'équation $f(x,y) = 0$. On a

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 6x^2y + 4x & f_x(1,1) &= 10, \\ f_y(x,y) &= 2x^3 + 2y, & f_y(1,1) &= 4. \end{aligned}$$

Puisque $f'_y(1,1) \neq 0$ il existe une et une seule fonction $y = \phi(x)$ définie au voisinage de 1 tel que $f(x, \phi(x)) = 1$.

2. On a
$$\phi'(1) = -\frac{f'_x(1,1)}{f'_y(1,1)} = -\frac{5}{2}$$
donc l'équation de la droite tangente à ϕ en $x = 1$ est $y = -\frac{5}{2}(x-1) + 1 = -\frac{5}{2}x + \frac{7}{2}$.
3. On a
$$\phi''(x) = -\frac{f''_{xx}(f'_y)^2 - 2f'_xf'_yf''_{xy} + (f'_x)^2f''_{yy}}{(f'_y)^3}$$
et
$$\begin{aligned} f_{xx}(x,y) &= 4(3xy+1) & f_{xx}(1,1) &= 16,\\ f_{xy}(x,y) &= 6x^2 & f_{xy}(1,1) &= 6,\\ f_{yy}(x,y) &= 2, & f_{yy}(1,1) &= 2, \end{aligned}$$
donc $\phi''(1) = -1$ d'où $\phi(x) = \phi(1) + \phi'(1)(x-1) + \frac{\phi''(1)}{2}(x-1)^2 = 1 - \frac{5}{2}(x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2$.

Contrôle ②

Contrôle ② - thème A

Nome :	Prénom :
Signature :	Note :

Exercice ❶ : extrema libres. [10 points]

☐ 1. [2 points] Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathscr{C}^2(\mathbb{R}^2)$ et soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Compléter les phrases suivantes par $\boxed{\Rightarrow}$, $\boxed{\Leftarrow}$, $\boxed{\Leftrightarrow}$ ou $\boxed{\text{Aucune implication}}$:

1.1	$\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0)$		(x_0, y_0) est un extrema ;
1.2	$\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0)$		(x_0, y_0) est un point critique ;
1.3	(x_0, y_0) est un point critique		(x_0, y_0) est un extrema ;
1.4	(x_0, y_0) est un point critique		(x_0, y_0) est un point de selle ;

☐ 2. [8 points] Déterminer et classifier les 5 points critiques (en spécifiant s'ils sont des max, des min ou des points de selle) de la fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = (x^2 - y^2)e^{(-x^2-y^2)}.$$

Solution de l'exercice ❶.

1. On a

1.1	$\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0)$	$\boxed{\Leftarrow}$	(x_0, y_0) est un extrema ;
1.2	$\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0)$	$\boxed{\Leftrightarrow}$	(x_0, y_0) est un point critique ;
1.3	(x_0, y_0) est un point critique	$\boxed{\Leftarrow}$	(x_0, y_0) est un extrema ;
1.4	(x_0, y_0) est un point critique	$\boxed{\Leftarrow}$	(x_0, y_0) est un point de selle ;

2. Cherchons d'abord les 5 points critiques :

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x(1 - x^2 + y^2)e^{(-x^2-y^2)} \\ 2y(-1 - x^2 + y^2)e^{(-x^2-y^2)} \end{pmatrix}$$

et $\nabla f(x, y) = (0, 0)$ ssi

$$(x, y) \in \{ (0, 0),\ (0, 1),\ (0, -1),\ (1, 0),\ (-1, 0) \}.$$

Étudions maintenant séparément chacun de ces points en calculant au préalable le déterminant de la matrice hessienne de la fonction f en un point quelconque :

$$\begin{aligned} f_{xx}(x, y) &= 2e^{(-x^2-y^2)}(1 - 5x^2 + y^2 + 2x^4 - 2x^2y^2), \\ f_{xy}(x, y) &= 4xy(x^2 - y^2)e^{(-x^2-y^2)}, \\ f_{yy}(x, y) &= 2e^{(-x^2-y^2)}(-1 - x^2 + 5y^2 + 2x^2y^2 - 2y^4), \\ D(x, y) &= f_{xx}(x, y)f_{yy}(x, y) - (f_{xy}(x, y))^2. \end{aligned}$$

On a alors

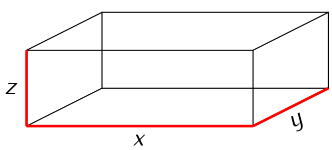
(x_0, y_0)	$f_{xx}(x_0, y_0)$	$f_{xy}(x_0, y_0)$	$f_{yy}(x_0, y_0)$	$D(x_0, y_0)$	
$(0, 0)$	2	0	-2	-4	c'est un POINT DE SELLE
$(1, 0)$	$-\frac{4}{e}$	0	$-\frac{4}{e}$	$\frac{16}{e^2}$	c'est un MAX
$(-1, 0)$	$-\frac{4}{e}$	0	$-\frac{4}{e}$	$\frac{16}{e^2}$	c'est un MAX
$(0, 1)$	$\frac{4}{e}$	0	$\frac{4}{e}$	$\frac{16}{e^2}$	c'est un MIN
$(0, -1)$	$\frac{4}{e}$	0	$\frac{4}{e}$	$\frac{16}{e^2}$	c'est un MIN

Exercice ❷ : extrema liés. [6 points]

Trouver le parallélépipède (*i.e.* une boîte **fermée**) de volume 8 dont la surface est minimale …

☐ 1. [3 points]…avec la méthode des multiplicateurs de Lagrange (i.e. minimisation d'une fonction $f(x, y, z)$ sous une contrainte $g(x, y, z) = 0$) ;

☐ 2. [3 points] …avec la méthode des extrema libres en éliminant une variable de la contrainte (par exemple en minimisant une fonction $h(x, y) = f(x, y, z(x, y))$).



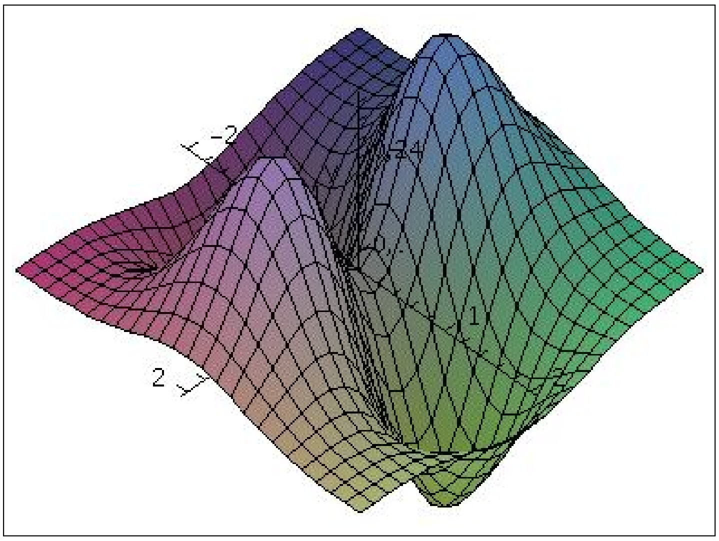


Figure 1: Contrôle ②, thème A, exercice ❶ : $f(x,y) = (x^2 - y^2)e^{(-x^2-y^2)}$

Solution de l'exercice ❷.

1. On doit minimiser la fonction $f\colon (\mathbb{R}_*^+)^3 \to \mathbb{R}_*^+$ définie par
$$f(x,y,z) = 2(xy + xz + yz)$$
sous la contrainte $g(x,y,z) = 0$ où $g\colon (\mathbb{R}_*^+)^3 \to \mathbb{R}_*^+$ est définie par
$$g(x,y,z) = xyz - 8.$$
En introduisant le système de Lagrange, il s'agit de chercher les solutions $(x,y,z,\lambda) \in (\mathbb{R}_*^+)^3 \times \mathbb{R}$ de
$$\begin{cases} 2y + 2z - \lambda yz = 0, & (5a)\\ 2x + 2z - \lambda xz = 0, & (5b)\\ 2x + 2y - \lambda xy = 0, & (5c)\\ xyz - 8 = 0. & (5d)\end{cases}$$
On obtient[1] que le seul point critique est $(2,2,2)$.
2. La contrainte se réécrit $z = \frac{8}{xy}$ donc il s'agit de chercher les extrema de la fonction de deux variables $h\colon (\mathbb{R}_+^*)^2 \to \mathbb{R}^+$ définie par
$$h(x,y) = f\left(x, y, \frac{8}{xy}\right) = 2\left(xy + \frac{8}{y} + \frac{8}{x}\right).$$
Cherchons d'abord les points critiques :
$$\nabla h(x,y) = \begin{pmatrix} 2\left(y - \frac{8}{x^2}\right) \\ 2\left(x - \frac{8}{y^2}\right)\end{pmatrix}$$
et $\nabla h(x,y) = (0,0)$ ssi $(x,y) = (2,2)$. Étudions maintenant ce point en calculant le déterminant de la matrice hessienne de la fonction h :
$$\begin{aligned} h_{xx}(x,y) &= \frac{32}{x^3} & h_{xx}(2,2) &= 4 > 0,\\ h_{xy}(x,y) &= 2 & h_{xy}(2,2) &= 2,\\ h_{yy}(x,y) &= \frac{32}{y^3} & h_{yy}(2,2) &= 4,\\ D(2,2) &= h_{xx}(2,2)h_{yy}(2,2) - (h_{xy}(2,2))^2 = 12 > 0. \end{aligned}$$
On a donc que $(2,2)$ est bien un minimum.

Exercice ❸ : intégrales, fonctions intégrales. [9 points]

1. [3 points] Calculer la surface de la région plane coloriée en figure 2a.
2. [3 points] Calculer la surface de la région plane infinie coloriée en figure 2b.
3. [3 points] Celui en figure 2c est le graphe de la fonction f continue sur l'intervalle $]-3,3[$. Tracer un graphe plausible de la fonction $F(x) = \int_{-2}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ en surlignant notamment les éventuels points de changement de concavité. Préciser ensuite, en fournissant une adéquate explication, combien de solutions a l'équation $F(x) = 5$.

1. Avec les trois soustractions (5b)-(5a), (5c)-(5a) et (5c)-(5b) on obtient $x = y = z$, on insère ce résultat dans (5d) et on trouve la solution.

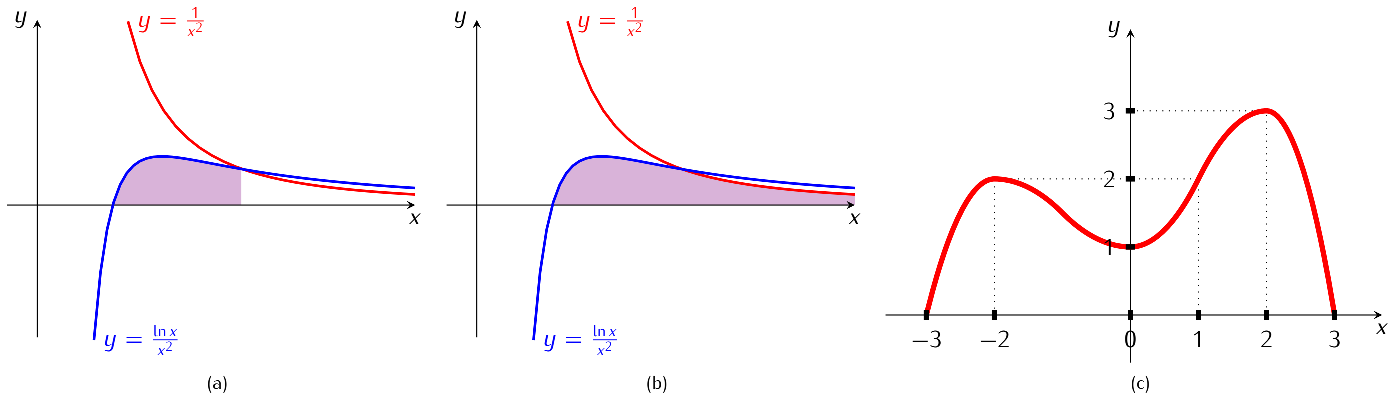


Figure 2: Exercice ❸ : intégrales, fonctions intégrales.

Solution de l'exercice ❸.

1. On a $\frac{\ln x}{x^2} = 0$ ssi $x = 1$ et $\frac{\ln x}{x^2} = \frac{1}{x^2}$ ssi $x = e$. Donc
$$\text{Surface} = \int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx = \left[-\frac{\ln x}{x}\right]_1^e + \int_1^e \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}\right]_1^e = 1 - \frac{2}{e}.$$
2. Il suffit de rajouter à la surface calculée au point précédent l'intégrale généralisé suivant
$$\int_e^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{a\to+\infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_e^a = \frac{1}{e}.$$
Donc la surface plane infinie mesure $1 - \frac{1}{e}$.
3. F est clairement continue. De plus $f(x) > 0$ donc F est croissante et $\begin{cases} F(x) < 0 & \text{si } x < -2, \\ F(x) = 0 & \text{si } x = -2, \\ F(x) > 0 & \text{si } x > -2, \end{cases}$. Enfin, f est croissante pour $x \in [-3, -2[\cup]0, 2[$ et décroissante pour $x \in]-2, 0[\cup]2, 3[$ donc F est convexe sur $[-3, -2[$ et sur $]0, 2[$, concave sur $]-2, 0[$ et sur $]2, 3[$; $x = -2$ et $x = 2$ sont points de max et $x = 0$ est point de min pour f donc ils sont des points de changement de concavité pour F. Puisque $F(2) > 5$, l'équation $F(x) = 5$ a exactement une solution.

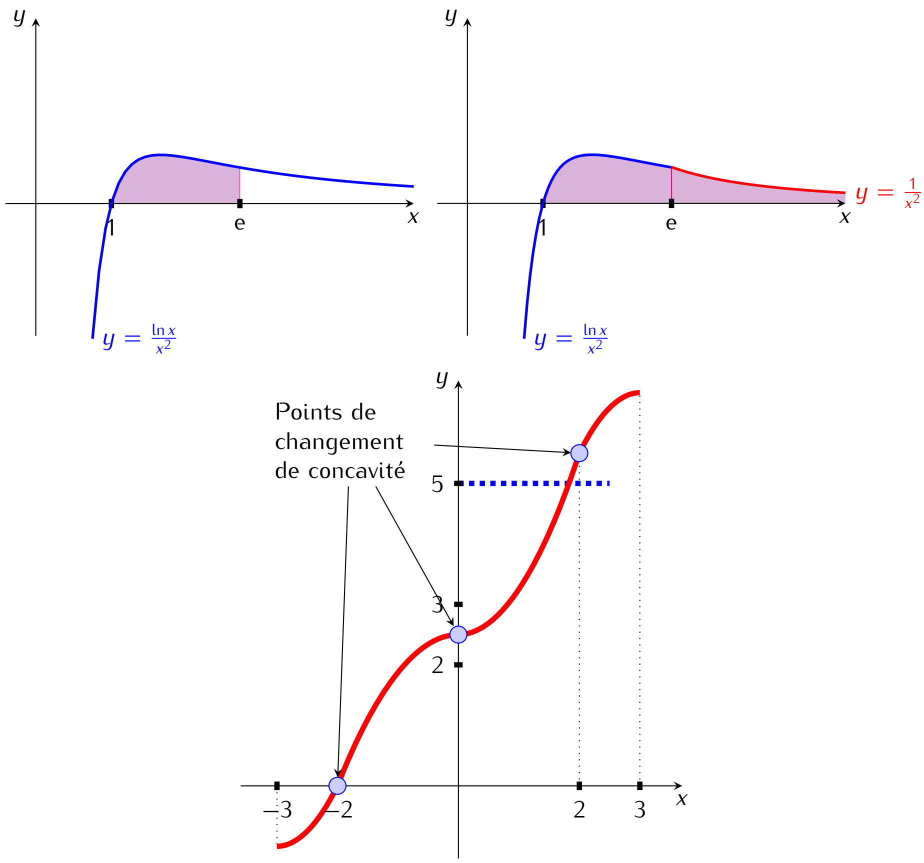


Figure 3: Solution de l'exercice ❸.

Contrôle ② - thème B

Nome :	Prénom :
Signature :	Note :

Exercice ❶ : extrema libres. [10 points]

1. [2 points] Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathscr{C}^2(\mathbb{R}^2)$ et soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Compléter les phrases suivantes par $\boxed{\Rightarrow}$, $\boxed{\Leftarrow}$, $\boxed{\Leftrightarrow}$ ou $\boxed{\text{Aucune implication}}$:

1.1	(x_0, y_0) est un point critique		(x_0, y_0) est un point de selle ;
1.2	(x_0, y_0) est un point critique		$\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0)$;
1.3	(x_0, y_0) est un extrema		(x_0, y_0) est un point critique ;
1.4	(x_0, y_0) est un extrema		$\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0)$;

2. [8 points] Déterminer et classifier les 5 points critiques (en spécifiant s'ils sont des max, des min ou des points de selle) de la fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par
$$f(x, y) = (y^2 - x^2)e^{(-x^2-y^2)}.$$

Solution de l'exercice ❶.

1. On a

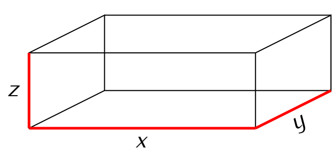
1.1	(x_0, y_0) est un point critique	$\boxed{\Leftarrow}$	(x_0, y_0) est un point de selle ;
1.2	(x_0, y_0) est un point critique	$\boxed{\Leftrightarrow}$	$\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0)$;
1.3	(x_0, y_0) est un extrema	$\boxed{\Rightarrow}$	(x_0, y_0) est un point critique ;
1.4	(x_0, y_0) est un extrema	$\boxed{\Rightarrow}$	$\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0)$;

2. Cherchons d'abord les 5 points critiques :
$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x(-1 + x^2 - y^2)e^{(-x^2-y^2)} \\ 2y(1 + x^2 - y^2)e^{(-x^2-y^2)} \end{pmatrix}$$
et $\nabla f(x, y) = (0, 0)$ ssi
$$(x, y) \in \{ (0, 0), (0, 1), (0, -1), (1, 0), (-1, 0) \}.$$
Étudions maintenant séparément chacun de ces points en calculant au préalable le déterminant de la matrice hessienne de la fonction f en un point quelconque :
$$\begin{aligned} f_{xx}(x, y) &= -2e^{(-x^2-y^2)}(1 - 5x^2 + y^2 + 2x^4 - 2x^2y^2), \\ f_{xy}(x, y) &= -4xy(x^2 - y^2)e^{(x^2-y^2)}, \\ f_{yy}(x, y) &= -2e^{(-x^2-y^2)}(-1 - x^2 + 5y^2 + 2x^2y^2 - 2y^4), \\ D(x, y) &= f_{xx}(x, y)f_{yy}(x, y) - (f_{xy}(x, y))^2. \end{aligned}$$
On a alors

(x_0, y_0)	$f_{xx}(x_0, y_0)$	$f_{xy}(x_0, y_0)$	$f_{yy}(x_0, y_0)$	$D(x_0, y_0)$	
$(0, 0)$	-2	0	2	-4	c'est un POINT DE SELLE
$(1, 0)$	$\frac{4}{e}$	0	$\frac{4}{e}$	$\frac{16}{e^2}$	c'est un MIN
$(-1, 0)$	$\frac{4}{e}$	0	$\frac{4}{e}$	$\frac{16}{e^2}$	c'est un MIN
$(0, 1)$	$-\frac{4}{e}$	0	$-\frac{4}{e}$	$\frac{16}{e^2}$	c'est un MAX
$(0, -1)$	$-\frac{4}{e}$	0	$-\frac{4}{e}$	$\frac{16}{e^2}$	c'est un MAX

Exercice ❷ : extrema liés. [6 points]

Trouver le parallélépipède (*i.e.* une boîte **fermée**) de volume 27 dont la surface est minimale …



1. [3 points]…avec la méthode des multiplicateurs de Lagrange (i.e. minimisation d'une fonction $f(x, y, z)$ sous une contrainte $g(x, y, z) = 0$) ;
2. [3 points] …avec la méthode des extrema libres en éliminant une variable de la contrainte (par exemple en minimisant une fonction $h(x, y) = f(x, y, z(x, y))$).

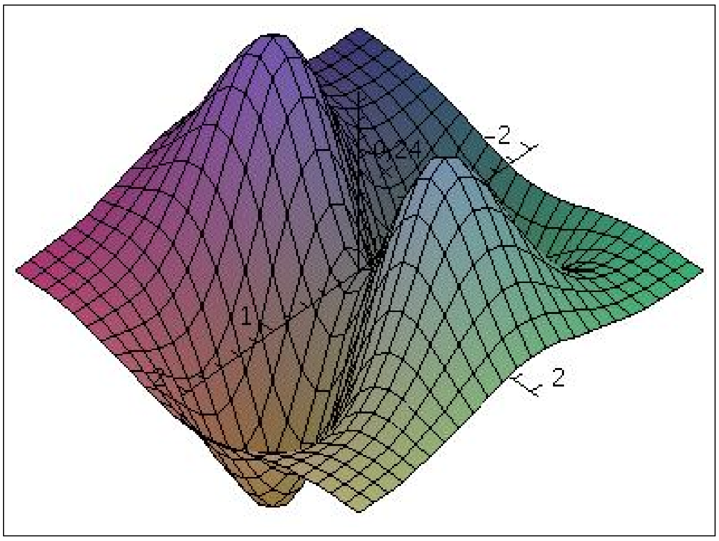


FIGURE 4: Contrôle ②, thème B, exercice ❶ : $f(x,y) = (y^2 - x^2)e^{(-x^2-y^2)}$

Solution de l'exercice ❷.

1. On doit minimiser la fonction $f\colon (\mathbb{R}_*^+)^3 \to \mathbb{R}_*^+$ définie par
$$f(x,y,z) = 2(xy + xz + yz)$$
sous la contrainte $g(x,y,z) = 0$ où $g\colon (\mathbb{R}_*^+)^3 \to \mathbb{R}_*^+$ est définie par
$$g(x,y,z) = xyz - 27.$$
En introduisant le système de Lagrange, il s'agit de chercher les solutions $(x,y,z,\lambda) \in (\mathbb{R}_*^+)^3 \times \mathbb{R}$ de
$$\begin{cases} 2y + 2z - \lambda yz = 0, & \text{(6a)} \\ 2x + 2z - \lambda xz = 0, & \text{(6b)} \\ 2x + 2y - \lambda xy = 0, & \text{(6c)} \\ xyz - 27 = 0. & \text{(6d)} \end{cases}$$
On obtient[2] que le seul point critique est $(3,3,3)$.
2. La contrainte se réécrit $z = \frac{27}{xy}$ donc il s'agit de chercher les extrema de la fonction de deux variables $h\colon (\mathbb{R}_+^*)^2 \to \mathbb{R}^+$ définie par
$$h(x,y) = f\left(x, y, \frac{27}{xy}\right) = 2\left(xy + \frac{27}{y} + \frac{27}{x}\right).$$
Cherchons d'abord les points critiques :
$$\nabla h(x,y) = \begin{pmatrix} 2\left(y - \frac{27}{x^2}\right) \\ 2\left(x - \frac{27}{y^2}\right) \end{pmatrix}$$
et $\nabla h(x,y) = (0,0)$ ssi $(x,y) = (3,3)$. Étudions maintenant ce point en calculant le déterminant de la matrice hessienne de la fonction h :
$$\begin{aligned} h_{xx}(x,y) &= 4\frac{27}{x^3}, & h_{xx}(3,3) &= 4, \\ h_{xy}(x,y) &= 2, & h_{xy}(3,3) &= 2, \\ h_{yy}(x,y) &= 4\frac{27}{y^3}, & h_{yy}(3,3) &= 4, \end{aligned}$$
$$D(3,3) = h_{xx}(3,3)h_{yy}(3,3) - (h_{xy}(3,3))^2 = 12 > 0.$$
Donc $(3,3)$ est bien un minimum.

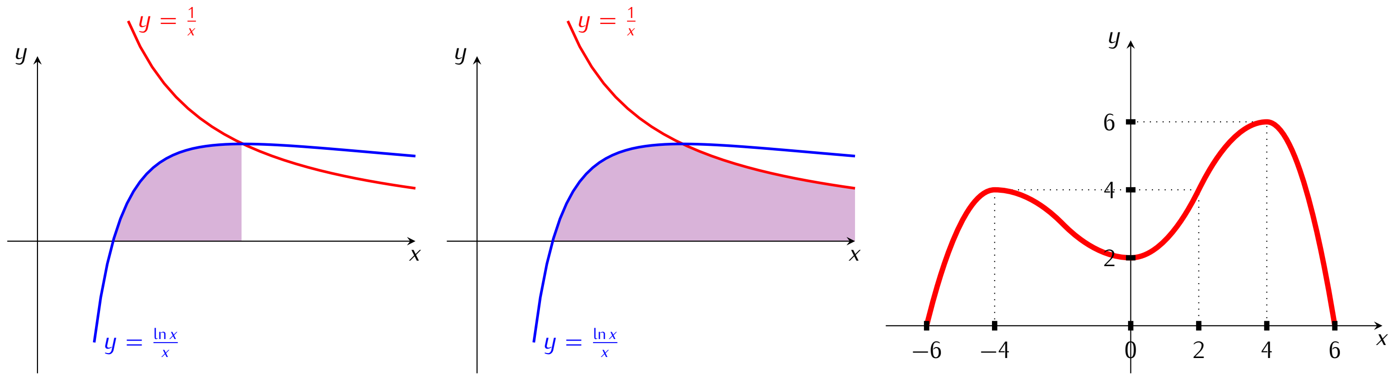
Exercice ❸ : intégrales, fonctions intégrales. [10 points]

☐ 1. [3 points] Calculer la surface de la région plane coloriée en figure 5a.

☐ 2. [3 points] Calculer la surface de la région plane infinie coloriée en figure 5b.

☐ 3. [4 points] Celui en figure 5c est le graphe de la fonction f continue sur l'intervalle $]-6,6[$. Tracer un graphe plausible de la fonction $F(x) = \int_{-4}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ en surlignant notamment les éventuels points de changement de concavité. Préciser ensuite, en fournissant une adéquate explication, combien de solutions a l'équation $F(x) = 10$.

2. Avec les trois soustractions (6b)-(6a), (6c)-(6a) et (6c)-(6b) on obtient $x = y = z$, on insère ce résultat dans (6d) et on trouve la solution.



(a) (b) (c)

Figure 5: Exercice ❸ : intégrales, fonctions intégrales.

Solution de l'exercice ❸.

1. On a $\frac{\ln x}{x} = 0$ ssi $x = 1$ et $\frac{\ln x}{x} = \frac{1}{x}$ ssi $x = e$. Donc
$$\text{Surface} = \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = \left[\frac{1}{2}\ln^2 x\right]_1^e = \frac{1}{2}.$$
2. Il suffit de rajouter à la surface calculée au point précédent l'intégrale généralisé suivant
$$\int_e^{+\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{a\to+\infty} [\ln(x)]_e^a = +\infty.$$
Donc la surface plane infinie mesure $+\infty$.
3. F est clairement continue. De plus $f(x) > 0$ donc F est croissante et $\begin{cases} F(x) < 0 & \text{si } x < -4, \\ F(x) = 0 & \text{si } x = -4, \\ F(x) > 0 & \text{si } x > -4, \end{cases}$. Enfin, f est croissante pour $x \in [-6, -4[\cup]0, 4[$ et décroissante pour $x \in]-4, 0[\cup]4, 6[$ donc F est convexe sur $[-6, -4[$ et sur $]0, 4[$, concave sur $]-4, 0[$ et sur $]4, 6[$; $x = -4$ et $x = 4$ sont points de max et $x = 0$ est point de min pour f donc ils sont des points de changement de concavité pour F. Puisque $F(4) > 10$, l'équation $F(x) = 10$ a exactement une solution.

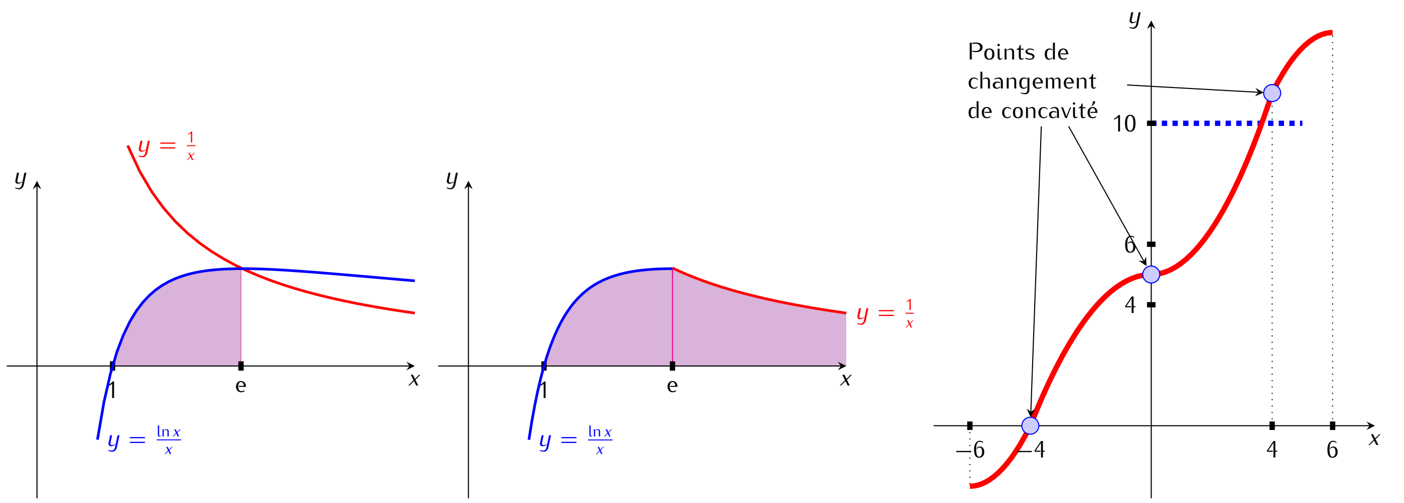


Figure 6: Solution de l'exercice ❸.

Contrôle ② - thème C

Nome : ______________________	Prénom : ______________________
Signature : ______________________	Note : ______________________

Exercice ❶ : extrema libres. [10 points]

☐ 1. [2 points] Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathscr{C}^2(\mathbb{R}^2)$ et soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Completer les phrases suivantes par $\boxed{\Rightarrow}$, $\boxed{\Leftarrow}$, $\boxed{\Leftrightarrow}$ ou $\boxed{\text{Aucune implication}}$:

1.1	(x_0, y_0) est un point critique	☐	(x_0, y_0) est un extrema ;
1.2	(x_0, y_0) est un point critique	☐	$\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0)$;
1.3	(x_0, y_0) est un point critique	☐	(x_0, y_0) est un point de selle ;
1.4	(x_0, y_0) est un extrema	☐	$\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0)$;

☐ 2. [8 points] Déterminer et classifier les 5 points critiques (en spécifiant s'ils sont des max, des min ou des points de selle) de la fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = -(x^2 - y^2)e^{(-x^2-y^2)}.$$

Solution de l'exercice ❶.

1. On a

1.1	(x_0, y_0) est un point critique	$\boxed{\Leftarrow}$	(x_0, y_0) est un extrema ;
1.2	(x_0, y_0) est un point critique	$\boxed{\Leftrightarrow}$	$\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0)$;
1.3	(x_0, y_0) est un point critique	$\boxed{\Leftarrow}$	(x_0, y_0) est un point de selle ;
1.4	(x_0, y_0) est un extrema	$\boxed{\Rightarrow}$	$\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0)$;

2. Cherchons d'abord les 5 points critiques :

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x(-1 + x^2 - y^2)e^{(-x^2-y^2)} \\ 2y(1 + x^2 - y^2)e^{(-x^2-y^2)} \end{pmatrix}$$

et $\nabla f(x, y) = (0, 0)$ ssi

$$(x, y) \in \{\ (0, 0),\ (0, 1),\ (0, -1),\ (1, 0),\ (-1, 0)\ \}.$$

Étudions maintenant séparemment chacun de ces points en calculant au préalable le déterminant de la matrice hessienne de la fonction f en un point quelconque :

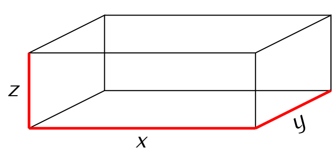
$$\begin{aligned} f_{xx}(x, y) &= -2e^{(-x^2-y^2)}(1 - 5x^2 + y^2 + 2x^4 - 2x^2y^2), \\ f_{xy}(x, y) &= -4xy(x^2 - y^2)e^{(x^2-y^2)}, \\ f_{yy}(x, y) &= -2e^{(-x^2-y^2)}(-1 - x^2 + 5y^2 + 2x^2y^2 - 2y^4), \\ D(x, y) &= f_{xx}(x, y)f_{yy}(x, y) - (f_{xy}(x, y))^2. \end{aligned}$$

On a alors

(x_0, y_0)	$f_{xx}(x_0, y_0)$	$f_{xy}(x_0, y_0)$	$f_{yy}(x_0, y_0)$	$D(x_0, y_0)$	
$(0, 0)$	-2	0	2	-4	c'est un POINT DE SELLE
$(1, 0)$	$\frac{4}{e}$	0	$\frac{4}{e}$	$\frac{16}{e^2}$	c'est un MIN
$(-1, 0)$	$\frac{4}{e}$	0	$\frac{4}{e}$	$\frac{16}{e^2}$	c'est un MIN
$(0, 1)$	$-\frac{4}{e}$	0	$-\frac{4}{e}$	$\frac{16}{e^2}$	c'est un MAX
$(0, -1)$	$-\frac{4}{e}$	0	$-\frac{4}{e}$	$\frac{16}{e^2}$	c'est un MAX

Exercice ❷ : extrema liés. [6 points]

Trouver le parallélepipède (*i.e.* une boîte **fermée**) de volume 8 dont la surface est minimale …



☐ 1. [3 points]…avec la méthode des multiplicateurs de Lagrange (i.e. minimisation d'une fonction $f(x, y, z)$ sous une contrainte $g(x, y, z) = 0$) ;

☐ 2. [3 points] …avec la méthode des extrema libres en éliminant une variable de la contrainte (par exemple en minimisant une fonction $h(x, y) = f(x, y, z(x, y))$).

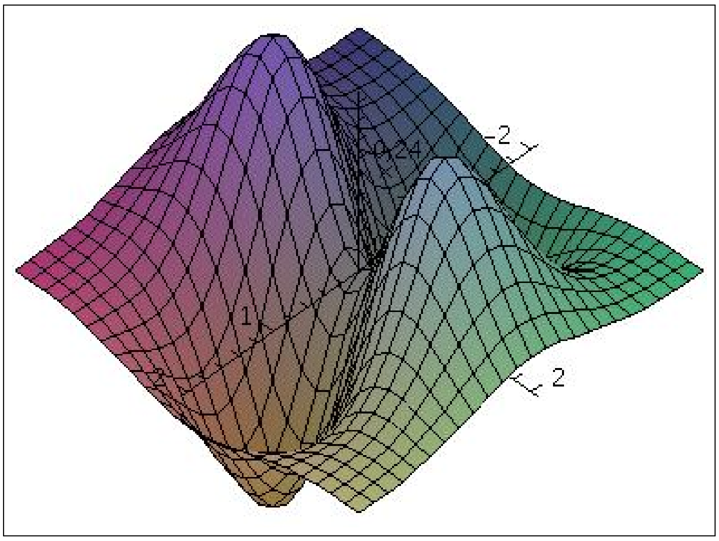


FIGURE 7: Contrôle ②, thème C, exercice ❶ : $f(x,y) = -(x^2 - y^2)e^{(-x^2-y^2)}$

Solution de l'exercice ❷.

1. On doit minimiser la fonction $f\colon (\mathbb{R}_*^+)^3 \to \mathbb{R}_*^+$ définie par
$$f(x,y,z) = 2(xy + xz + yz)$$
sous la contrainte $g(x,y,z) = 0$ où $g\colon (\mathbb{R}_*^+)^3 \to \mathbb{R}_*^+$ est définie par
$$g(x,y,z) = xyz - 8.$$
En introduisant le système de Lagrange, il s'agit de chercher les solutions $(x,y,z,\lambda) \in (\mathbb{R}_*^+)^3 \times \mathbb{R}$ de
$$\begin{cases} 2y + 2z - \lambda yz = 0, & (7a)\\ 2x + 2z - \lambda xz = 0, & (7b)\\ 2x + 2y - \lambda xy = 0, & (7c)\\ xyz - 8 = 0. & (7d)\end{cases}$$
On obtient[3] que le seul point critique est $(2,2,2)$.
2. La contrainte se réécrit $z = \frac{8}{xy}$ donc il d'agit de chercher les extrema de la fonction de deux variables $h\colon (\mathbb{R}_+^*)^2 \to \mathbb{R}^+$ définie par
$$h(x,y) = f\left(x, y, \frac{8}{xy}\right) = 2\left(xy + \frac{8}{y} + \frac{8}{x}\right).$$
Cherchons d'abord les points critiques :
$$\nabla h(x,y) = \begin{pmatrix} 2\left(y - \frac{8}{x^2}\right) \\ 2\left(x - \frac{8}{y^2}\right)\end{pmatrix}$$
et $\nabla h(x,y) = (0,0)$ ssi $(x,y) = (2,2)$. Étudions maintenant ce point en calculant le déterminant de la matrice hessienne de la fonction h :
$$\begin{aligned} h_{xx}(x,y) &= \frac{32}{x^3} & h_{xx}(2,2) &= 4 > 0,\\ h_{xy}(x,y) &= 2 & h_{xy}(2,2) &= 2,\\ h_{yy}(x,y) &= \frac{32}{y^3} & h_{yy}(2,2) &= 4,\\ D(2,2) &= h_{xx}(2,2)h_{yy}(2,2) - (h_{xy}(2,2))^2 = 12 > 0. \end{aligned}$$
On a donc que $(2,2)$ est bien un minimum.

Exercice ❸ : integrales, fonctions intégrales. [10 points]

☐ 1. [3 points] Calculer la surface de la régione plane coloriée en figure 11a.
☐ 2. [3 points] Calculer la surface de la régione plane infinie coloriée en figure 11b.
☐ 3. [4 points] Celui en figure 11c est le graphe de la fonction f continue sur l'intervalle $]-3,3[$. Tracer un graphe plausible de la fonction $F(x) = \int_{-2}^{x} f(t)\,dt$ en surlignant notamment les eventuels points de changement de concavité. Preciser ensuite, en fournissant une adequate explication, combien de solutions a l'équation $F(x) = 5$.

3. Avec les trois sustractions (7b)-(7a), (7c)-(7a) et (7c)-(7b) on obtient $x = y = z$, on insère ce resultat dans (7d) et on trouve la solution.

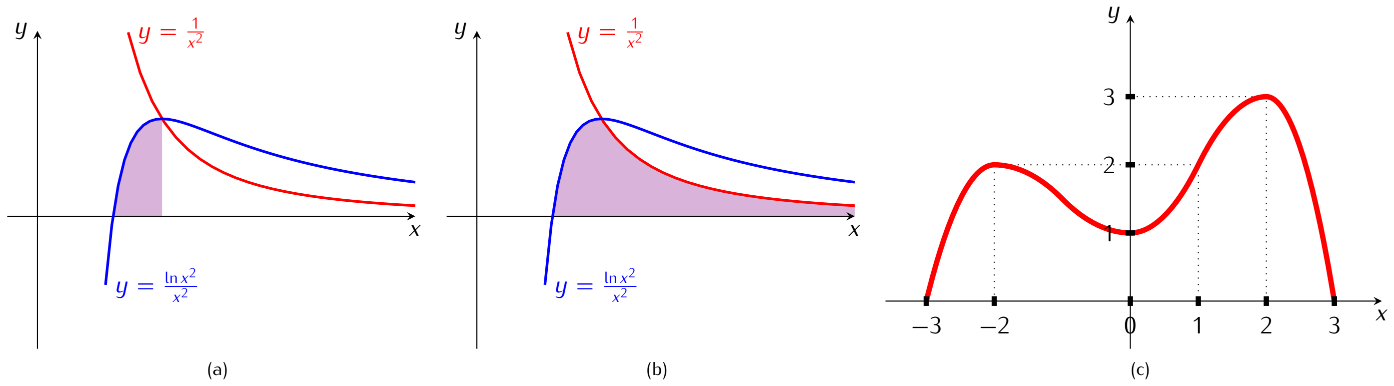


FIGURE 8: Exercice ❸ : integrales, fonctions intégrales.

Solution de l'exercice ❸.

1. On a $\frac{\ln x^2}{x^2} = 0$ ssi $x = 1$ et $\frac{\ln x^2}{x^2} = \frac{1}{x^2}$ ssi $x = \sqrt{e}$. Donc

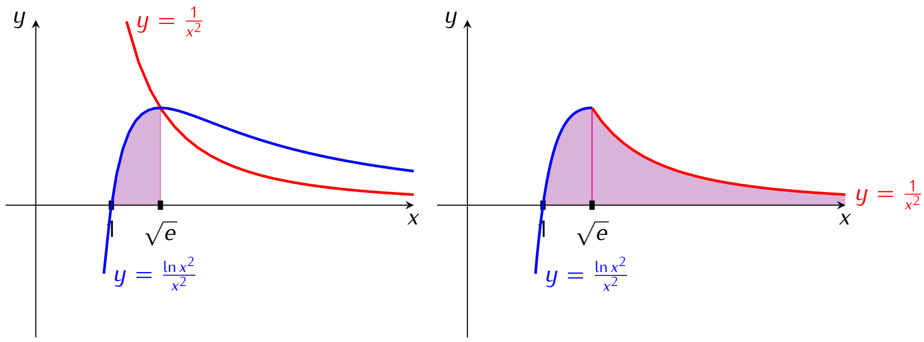
$$\text{Surface} = \int_1^{\sqrt{e}} \frac{\ln x^2}{x^2} dx = \left[-\frac{\ln x^2}{x} \right]_1^{\sqrt{e}} + \int_1^{\sqrt{e}} \frac{2}{x^2} dx = \left[-\frac{\ln x^2}{x} - \frac{2}{x} \right]_1^{\sqrt{e}} = 2 - \frac{3}{\sqrt{e}}.$$

2. Il suffit de rajouter à la surface calculée au point précédent l'intégrale généralisé suivant

$$\int_{\sqrt{e}}^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{a \to +\infty} \left[-\frac{1}{x} \right]_{\sqrt{e}}^{a} = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

Donc la surface plane infinie mesure $2 - \frac{2}{\sqrt{e}}$.

3. F est clairement continue. De plus $f(x) > 0$ donc F est croissante et $\begin{cases} F(x) < 0 & \text{si } x < -2, \\ F(x) = 0 & \text{si } x = -2, \\ F(x) > 0 & \text{si } x > -2, \end{cases}$. Enfin, f est croissante pour $x \in [-3, -2[\cup]0, 2[$ et décroissante pour $x \in]-2, 0[\cup]2, 3[$ donc F est convexe sur $[-3, -2[$ et sur $]0, 2[$, concave sur $]-2, 0[$ et sur $]2, 3[$; $x = -2$ et $x = 2$ sont points de max et $x = 0$ est point de min pour f donc ils sont des points de changement de concavité pour F. Puisque $F(2) > 5$, l'équation $F(x) = 5$ a exactement une solution.



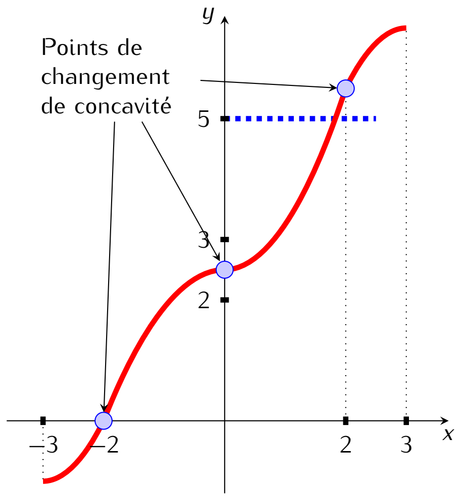


Figure 9: Solution de l'exercice ❸.

Contrôle ② - thème D

Nome :	Prénom :
Signature :	Note :

Exercice ❶ : extrema libres. [10 points]

1. [2 points] Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathscr{C}^2(\mathbb{R}^2)$ et soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Completer les phrases suivantes par $\boxed{\Rightarrow}$, $\boxed{\Leftarrow}$, $\boxed{\Leftrightarrow}$ ou $\boxed{\text{Aucune implication}}$:

1.1	(x_0, y_0) est un point critique		(x_0, y_0) est un extrema ;
1.2	$\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0)$		(x_0, y_0) est un extrema ;
1.3	$\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0)$		(x_0, y_0) est un point critique ;
1.4	(x_0, y_0) est un point de selle		(x_0, y_0) est un point critique ;

2. [8 points] Déterminer et classifier les 5 points critiques (en spécifiant s'ils sont des max, des min ou des points de selle) de la fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = (x^2 - y^2)e^{(-x^2-y^2)}.$$

Solution de l'exercice ❶.

1. On a

1.1	(x_0, y_0) est un point critique	$\boxed{\Leftarrow}$	(x_0, y_0) est un extrema ;
1.2	$\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0)$	$\boxed{\Leftarrow}$	(x_0, y_0) est un extrema ;
1.3	$\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0)$	$\boxed{\Leftrightarrow}$	(x_0, y_0) est un point critique ;
1.4	(x_0, y_0) est un point de selle	$\boxed{\Rightarrow}$	(x_0, y_0) est un point critique.

2. Cherchons d'abord les 5 points critiques :

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x(1 - x^2 + y^2)e^{(-x^2-y^2)} \\ 2y(-1 - x^2 + y^2)e^{(-x^2-y^2)} \end{pmatrix}$$

et $\nabla f(x, y) = (0, 0)$ ssi

$$(x, y) \in \{ (0, 0), (0, 1), (0, -1), (1, 0), (-1, 0) \}.$$

Étudions maintenant séparemment chacun de ces points en calculant au préalable le déterminant de la matrice hessienne de la fonction f en un point quelconque :

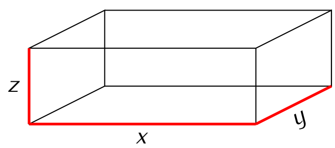
$$\begin{aligned} f_{xx}(x, y) &= 2e^{(-x^2-y^2)}(1 - 5x^2 + y^2 + 2x^4 - 2x^2y^2), \\ f_{xy}(x, y) &= 4xy(x^2 - y^2)e^{(-x^2-y^2)}, \\ f_{yy}(x, y) &= 2e^{(-x^2-y^2)}(-1 - x^2 + 5y^2 + 2x^2y^2 - 2y^4), \\ D(x, y) &= f_{xx}(x, y)f_{yy}(x, y) - (f_{xy}(x, y))^2. \end{aligned}$$

On a alors

(x_0, y_0)	$f_{xx}(x_0, y_0)$	$f_{xy}(x_0, y_0)$	$f_{yy}(x_0, y_0)$	$D(x_0, y_0)$	
$(0, 0)$	2	0	-2	-4	c'est un POINT DE SELLE
$(1, 0)$	$-\frac{4}{e}$	0	$-\frac{4}{e}$	$\frac{16}{e^2}$	c'est un MAX
$(-1, 0)$	$-\frac{4}{e}$	0	$-\frac{4}{e}$	$\frac{16}{e^2}$	c'est un MAX
$(0, 1)$	$\frac{4}{e}$	0	$\frac{4}{e}$	$\frac{16}{e^2}$	c'est un MIN
$(0, -1)$	$\frac{4}{e}$	0	$\frac{4}{e}$	$\frac{16}{e^2}$	c'est un MIN

Exercice ❷ : extrema liés. [6 points]

Trouver le parallélepipède (*i.e.* une boîte **fermée**) de volume 64 dont la surface est minimale …



1. [3 points]…avec la méthode des multiplicateurs de Lagrange (i.e. maximisation d'une fonction $f(x, y, z)$ sous une contrainte $g(x, y, z) = 0$) ;
2. [3 points] …avec la méthode des extrema libres en éliminant une variable de la contrainte (par exemple en minimisant une fonction $h(x, y) = f(x, y, z(x, y))$).

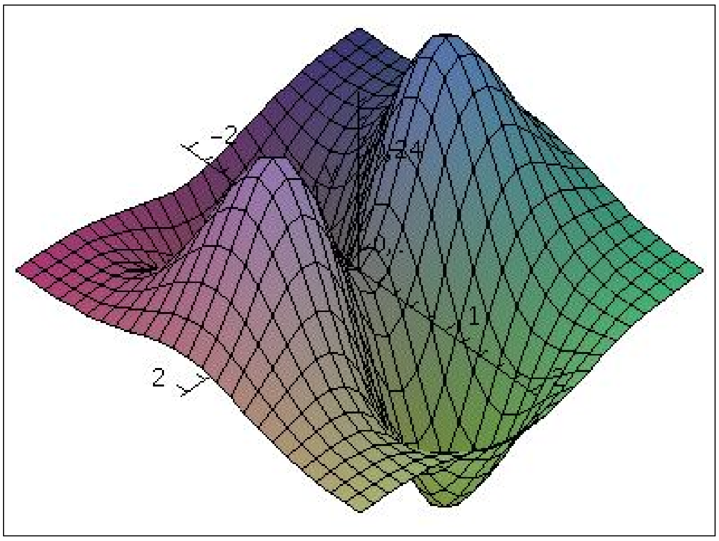


Figure 10: Contrôle ②, thème D, exercice ❶ : $f(x, y) = (x^2 - y^2)e^{(-x^2-y^2)}$

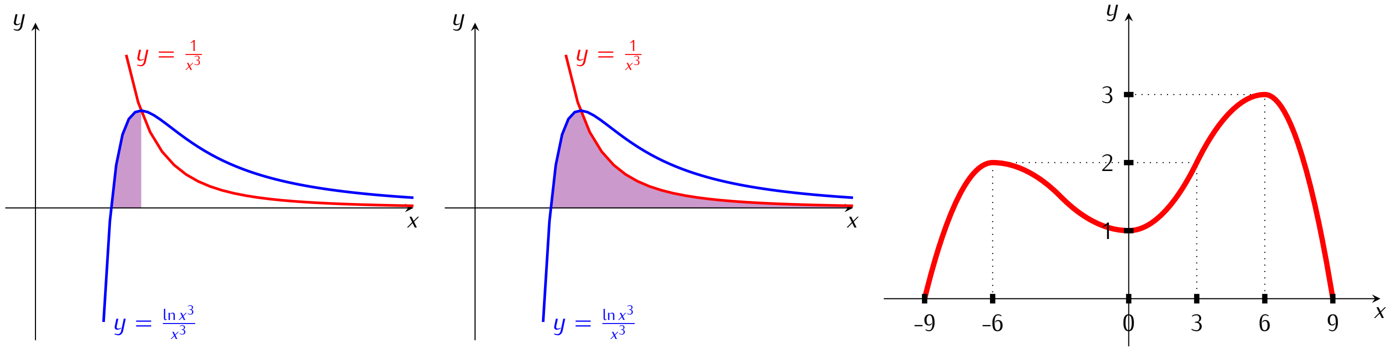
Solution de l'exercice ❷.

1. On doit minimiser la fonction $f\colon (\mathbb{R}_*^+)^3 \to \mathbb{R}_*^+$ définie par
$$f(x, y, z) = 2(xy + xz + yz)$$
sous la contrainte $g(x, y, z) = 0$ où $g\colon (\mathbb{R}_*^+)^3 \to \mathbb{R}_*^+$ est définie par
$$g(x, y, z) = xyz - 64.$$
En introduisant le système de Lagrange, il s'agit de chercher les solutions $(x, y, z, \lambda) \in (\mathbb{R}_*^+)^3 \times \mathbb{R}$ de
$$\begin{cases} 2y + 2z - \lambda yz = 0, & (8a)\\ 2x + 2z - \lambda xz = 0, & (8b)\\ 2x + 2y - \lambda xy = 0, & (8c)\\ xyz - 64 = 0. & (8d)\end{cases}$$
On obtient[4] que le seul point critique est $(4, 4, 4)$.
2. La contrainte se réécrit $z = \frac{64}{xy}$ donc il d'agit de chercher les extrema de la fonction de deux variables $h\colon (\mathbb{R}_+^*)^2 \to \mathbb{R}^+$ définie par
$$h(x, y) = f\left(x, y, \frac{64}{xy}\right) = 2\left(xy + \frac{64}{y} + \frac{64}{x}\right).$$
Cherchons d'abord les points critiques :
$$\nabla h(x, y) = \begin{pmatrix} 2\left(y - \frac{64}{x^2}\right) \\ 2\left(x - \frac{64}{y^2}\right)\end{pmatrix}$$
et $\nabla h(x, y) = (0, 0)$ ssi $(x, y) = (4, 4)$. Étudions maintenant ce point en calculant le déterminant de la matrice hessienne de la fonction h :
$$h_{xx}(x, y) = \frac{256}{x^3} \qquad h_{xx}(4, 4) = 4 > 0,$$
$$h_{xy}(x, y) = 2 \qquad h_{xy}(4, 4) = 2,$$
$$h_{yy}(x, y) = \frac{256}{y^3} \qquad h_{yy}(4, 4) = 4,$$
$$D(4, 4) = h_{xx}(4, 4)h_{yy}(4, 4) - (h_{xy}(4, 4))^2 = 12 > 0.$$
On a donc que $(4, 4)$ est bien un minimum.

Exercice ❸ : integrales, fonctions intégrales. [10 points]

1. [3 points] Calculer la surface de la régione plane coloriée en figure 11a.
2. [3 points] Calculer la surface de la régione plane infinie coloriée en figure 11b.
3. [4 points] Celui en figure 11c est le graphe de la fonction f continue sur l'intervalle $]-9, 9[$. Tracer un graphe plausible de la fonction $F(x) = \int_{-6}^{x} f(t)\,dt$ en surlignant notamment les eventuels points de changement de concavité. Preciser ensuite, en fournissant une adequate explication, combien de solutions a l'équation $F(x) = 15$.

4. Avec les trois sustractions (8b)-(8a), (8c)-(8a) et (8c)-(8b) on obtient $x = y = z$, on insère ce resultat dans (8d) et on trouve la solution.



(a) (b) (c)

Figure 11: Exercice ❸ : integrales, fonctions intégrales.

Solution de l'exercice ❸.

1. On a $\frac{\ln x^3}{x^3} = 0$ ssi $x = 1$ et $\frac{\ln x^3}{x^3} = \frac{1}{x^3}$ ssi $x = \sqrt[3]{e}$. Donc

$$\text{Surface} = \int_1^{\sqrt[3]{e}} \frac{\ln x^3}{x^3} dx = \left[-\frac{\ln x^3}{2x^2} \right]_1^{\sqrt[3]{e}} + \int_1^{\sqrt[3]{e}} \frac{3}{2x^3} dx = \left[-\frac{\ln x^3}{2x^2} - \frac{3}{4x^2} \right]_1^{\sqrt[3]{e}} = \frac{3}{4} - \frac{5}{4\sqrt[3]{e^2}}.$$

2. Il suffit de rajouter à la surface calculée au point précédent l'intégrale généralisé suivant

$$\int_{\sqrt[3]{e}}^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx = \lim_{a \to +\infty} \left[-\frac{1}{2x^2} \right]_{\sqrt[3]{e}}^{a} = \frac{1}{2\sqrt[3]{e^2}}.$$

Donc la surface plane infinie mesure $\frac{3}{4} - \frac{3}{4\sqrt[3]{e^2}}$.

3. F est clairement continue. De plus $f(x) > 0$ donc F est croissante et $\begin{cases} F(x) < 0 & \text{si } x < -6, \\ F(x) = 0 & \text{si } x = -6,. \\ F(x) > 0 & \text{si } x > -2, \end{cases}$ Enfin, f est croissante pour $x \in [-9, -6) \cup (0, 6)$ et décroissante pour $x \in (-6, 0) \cup (6, 9)$ donc F est convexe sur $[-9, -6)$ et sur $(0, 6)$, concave sur $(-6, 0)$ et sur $(6, 9)$; $x = -6$ et $x = 6$ sont points de max et $x = 0$ est point de min pour f donc ils sont des points de changement de concavité pour F. Puisque $F(6) > 15$, l'équation $F(x) = 15$ a exactement une solution.

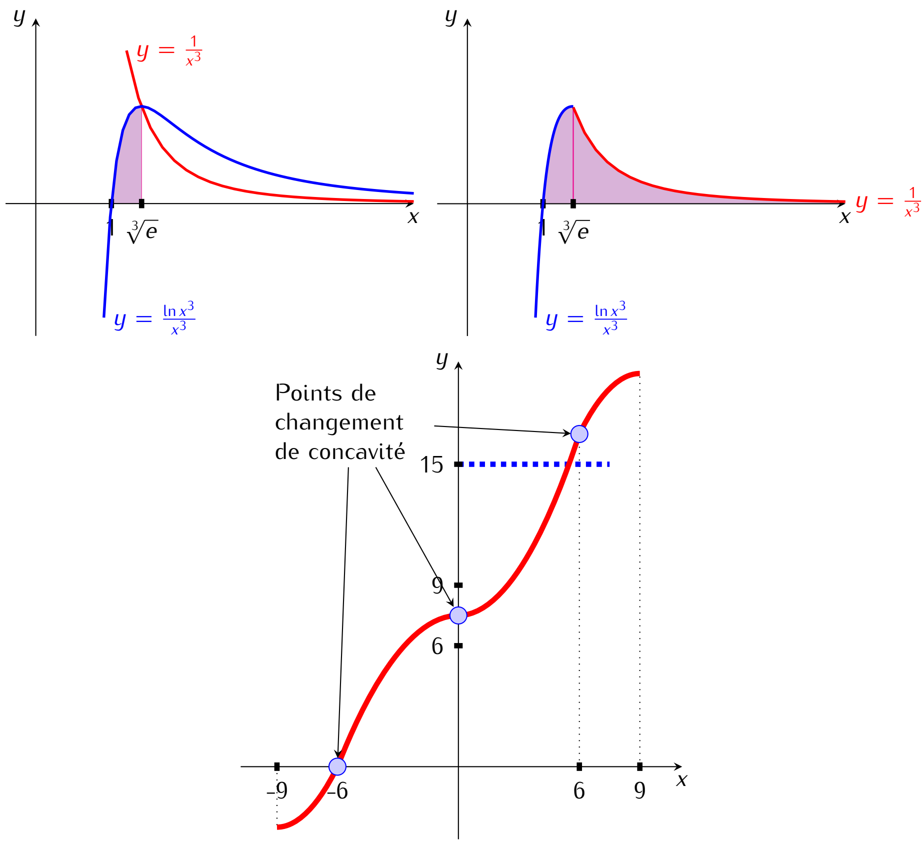


FIGURE 12: Solution de l'exercice ❸.

Contrôle ③

Contrôle ③ - thème A

Nome : ______	Prénom : ______	Note : ______

Exercice ❶ : champs de vecteurs et formes différentielles. [6 points]

Considérons le champ de vecteurs

$$\vec{V}(x,y,z) = (2xy\sin z)\,\vec{\imath} + (x^2\sin z)\,\vec{\jmath} + (x^2 y\cos z)\,\vec{k}.$$

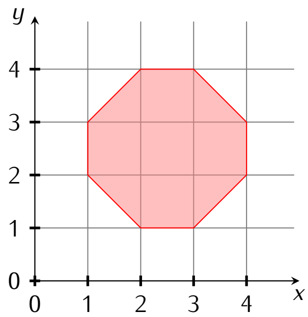
1. [3 points] Montrer que $\vec{V}$ est conservatif.[5]
2. [3 points] Calculer un potentiel de $\vec{V}$.

Exercice ❷ : intégrales doubles et triples. [17 points]

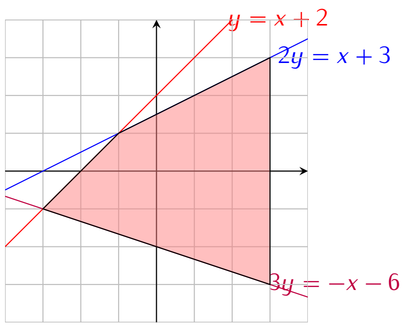
1. [2 points] Soit $\mathcal{D}$ la plaque homogène représentée dans la figure 13a. **Sans** faire de calculs d'intégrales, en déduire les valeurs de

$$\iint_{\mathcal{D}} 1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \qquad \iint_{\mathcal{D}} x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \qquad \iint_{\mathcal{D}} y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

2. [4 points] Calculer l'aire de la région coloriée en figure 13b.



(a)



(b)

FIGURE 13: Plaques homogènes

3. [6 points] Après avoir représenté graphiquement la région

$$\mathcal{D} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y\geq 0, 1\leq x^2+y^2\leq 4\},$$

calculer les coordonnées de son centre de gravité en supposant la région $\mathcal{D}$ homogène ; calculer ensuite

$$\iint_{\mathcal{D}} (3x+4y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

4. [5 points] Calculer l'intégrale triple

$$\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-z^2}}^{\sqrt{1-z^2}}\int_{x^2+z^2}^{2-x^2-z^2} (x^2+z^2)^{3/2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z.$$

[⋆] Calculer l'aire de la région définie en coordonnées polaires par[6]

$$\mathcal{D} = \{(r,\phi)\in\mathbb{R}^+\times[0,2\pi] \;:\; r\leq 1+\cos(6\phi)+\sin^2(6\phi)\}.$$

Suggestion : utiliser les formules de duplication $\cos(2\theta) = 2\cos^2(\theta)-1 = 1-2\sin^2(\theta)$ et calculer au préalable les intégrales suivantes

$$\int_0^{12\pi} 1\,\mathrm{d}\alpha, \quad \int_0^{12\pi}\cos(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha, \quad \int_0^{12\pi}\cos^2(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha, \quad \int_0^{12\pi}\cos(\alpha)\sin^2(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha, \quad \int_0^{12\pi}\sin^2(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha, \quad \int_0^{12\pi}\sin^4(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha.$$

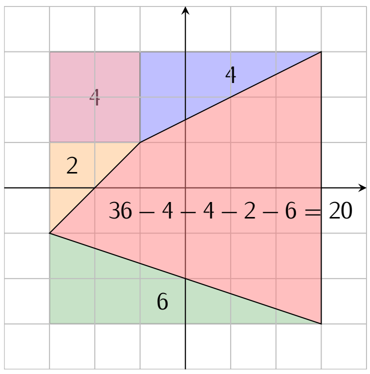
5. Rappel : $\operatorname{rot}\vec{V} = (\partial_y V_3 - \partial_z V_2, \partial_z V_1 - \partial_x V_3, \partial_x V_2 - \partial_y V_1)$
6. Trèfle de HABENICHT

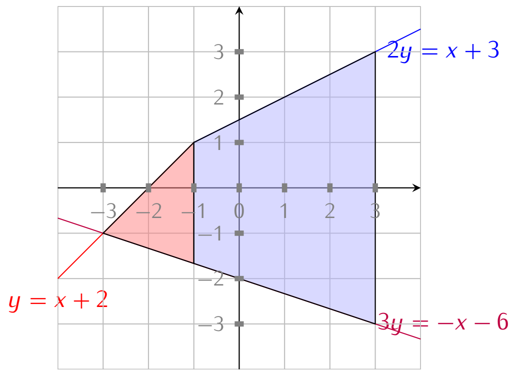
Solution de l'exercice ❶.

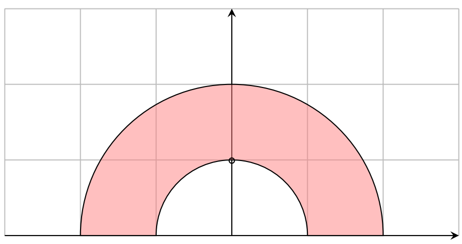
On a $V_1(x,y,z) = 2xy\sin z$, $V_2(x,y,z) = x^2\sin z$ et $V_3(x,y,z) = x^2y\cos z$.

1. On vérifie que $\operatorname{rot}\vec{V} = \vec{0}$:
$$\begin{cases} \frac{\partial V_3}{\partial y} - \frac{\partial V_2}{\partial z} = x^2\cos z - x^2\cos z = 0, \\ \frac{\partial V_1}{\partial z} - \frac{\partial V_3}{\partial x} = 2xy\cos z - 2xy\cos z = 0, \\ \frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial y} = 2x\sin z - 2x\sin z = 0. \end{cases}$$
$\vec{V}$ est définit sur $\mathbb{R}^3$ (simplement connexe) et est irrotationnel donc il est conservatif.
2. On cherche $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ telle que $\vec{\nabla} f = \vec{V}$.
$$\begin{array}{llllll} \frac{\partial f}{\partial x} = 2xy\sin z & \text{donc} & f(x,y,z) = x^2y\sin z + g(y,z) & \text{donc} & \frac{\partial f}{\partial y} = x^2\sin z + \frac{\partial g}{\partial y} = x^2\sin z \\ & \text{donc} & g(y,z) = h(z) & \text{donc} & f(x,y,z) = x^2y\sin z + h(z) \\ & \text{donc} & \frac{\partial f}{\partial z} = x^2y\cos z + h' = x^2y\cos z & \text{donc} & h(z) = c \\ & \text{donc} & f(x,y,z) = x^2y\sin z + c. \end{array}$$

Solution de l'exercice ❷.

1. L'aire mesure 7 et le centre de gravité a coordonnées $(5/2, 5/2)$ donc
$$\iint_{\mathcal{D}} 1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 7, \qquad \iint_{\mathcal{D}} x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 35/2, \qquad \iint_{\mathcal{D}} y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 35/2.$$
2. Soit $\mathcal{D}$ le domaine. Pour calculer l'aire on peut soit utiliser un simplissime calcul géométrique soit se rappeler que l'aire est donnée par l'intégrale double
$$\iint_{\mathcal{D}} 1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$




Pour ce calcul on décompose la région en deux parties et on obtient
$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{D}} 1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_{-3}^{-1}\int_{-\frac{1}{3}x-2}^{x+2} 1\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \int_{-1}^{3}\int_{-\frac{1}{3}x-2}^{\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}} 1\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{-3}^{-1} x+2+\frac{1}{3}x+2\,\mathrm{d}x + \int_{-1}^{3}\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}+\frac{1}{3}x+2\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{-3}^{-1}\frac{4}{3}x+4\,\mathrm{d}x + \int_{-1}^{3}\frac{5}{6}x+\frac{7}{2}\,\mathrm{d}x = 20. \end{aligned}$$
3. La région $\mathcal{D}$ est la zone coloriée suivante

Le centre de gravité a coordonnées (x_G, y_G) données par
$$x_G = \frac{\iint_{\mathcal{D}} x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\iint_{\mathcal{D}} 1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}, \qquad y_G = \frac{\iint_{\mathcal{D}} y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\iint_{\mathcal{D}} 1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}.$$

Il convient de passer au coordonnées polaires et on obtient

$$\iint_{\mathcal{D}} 1 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \int_0^{\pi}\int_1^2 r \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\theta = \left(\int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta\right)\left(\int_1^2 r \,\mathrm{d}r\right) = \frac{3}{2}\pi,$$

$$\iint_{\mathcal{D}} x \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \int_0^{\pi}\int_1^2 r^2\cos\theta \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\theta = \left(\int_0^{\pi} \cos\theta \,\mathrm{d}\theta\right)\left(\int_1^2 r^2 \,\mathrm{d}r\right) = 0,$$

$$\iint_{\mathcal{D}} y \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \int_0^{\pi}\int_1^2 r^2\sin\theta \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\theta = \left(\int_0^{\pi} \sin\theta \,\mathrm{d}\theta\right)\left(\int_1^2 r^2 \,\mathrm{d}r\right) = \frac{14}{3}.$$

Donc

$$x_G = 0, \qquad y_G = \frac{14}{3}\frac{2}{3\pi} = \frac{28}{9\pi} < 1.$$

On calcul maintenant l'intégrale donnée

$$\begin{aligned}\iint_{\mathcal{D}} (3x+4y^2) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y &= \int_0^{\pi}\int_1^2 (3r\cos\theta + 4r^2\sin^2\theta)\, r \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{\pi} \left[r^3\cos\theta + r^4\sin^2\theta\right]_1^2 \mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{\pi} 7\cos\theta + 15\sin^2\theta \,\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{\pi} 7\cos\theta + 15\frac{1-\cos(2\theta)}{2} \,\mathrm{d}\theta = \frac{15}{2}\pi.\end{aligned}$$

4. En coordonnées cartésiennes on doit intégrer sur le solide défini par les inégalités

$$-\sqrt{1-z^2} \le x \le \sqrt{1-z^2}, \qquad x^2+z^2 \le y \le 2-x^2-z^2 \qquad -1 \le z \le 1.$$

Il est naturel de passer en coordonnées cylindriques

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = t, \\ z = r\sin\theta, \end{cases}$$

et on obtient l'intégrale triple

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-z^2}}^{\sqrt{1-z^2}}\int_{x^2+z^2}^{2-x^2-z^2} (x^2+z^2)^{3/2} \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}z &= \int_0^1\int_0^{2\pi}\int_{r^2}^{2-r^2} r^4 \,\mathrm{d}t \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}r \\ &= \left(\int_0^{2\pi} 1 \,\mathrm{d}\theta\right)\int_0^1 r^4 \left[t\right]_{r^2}^{2-r^2} \mathrm{d}r = 4\pi\int_0^1 r^4(r^2-1) \,\mathrm{d}r \\ &= 4\pi\left[\frac{r^7}{7} - \frac{r^5}{5}\right]_0^1 = \frac{8}{35}\pi.\end{aligned}$$

[⋆] On a

$$\int_0^{12\pi} 1 \,\mathrm{d}\alpha = \Big[\alpha\Big]_0^{12\pi} = 12\pi, \qquad \int_0^{12\pi} \cos(\alpha) \,\mathrm{d}\alpha = \Big[\sin(\alpha)\Big]_0^{12\pi} = 0,$$

$$\int_0^{12\pi} \cos^2(\alpha) \,\mathrm{d}\alpha = \frac{1}{4}\Big[\sin(2\alpha) + 2\alpha\Big]_0^{12\pi} = 6\pi, \qquad \int_0^{12\pi} \cos(\alpha)\sin^2(\alpha) \,\mathrm{d}\alpha = \Big[\frac{\sin^3(\alpha)}{3}\Big]_0^{12\pi} = 0,$$

$$\int_0^{12\pi} \sin^2(\alpha) \,\mathrm{d}\alpha = \frac{1}{4}\Big[2\alpha - \sin(2\alpha)\Big]_0^{12\pi} = 6\pi, \qquad \int_0^{12\pi} \sin^4(\alpha) \,\mathrm{d}\alpha = \frac{1}{32}\pi\Big[12\alpha - 8\sin(2\alpha) + \sin(4\alpha)\Big]_0^{12\pi} = \frac{9}{2}\pi.$$

L'aire est donnée, en coordonnées polaires, par

$$\begin{aligned}\iint_{\mathcal{D}} r \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\theta &= \int_0^{2\pi}\int_0^{1+\cos(3\phi)+\sin^2(3\phi)} r \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\phi \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{1+\cos(3\phi)+\sin^2(3\phi)} \mathrm{d}\phi \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (1+\cos(3\phi)+\sin^2(3\phi))^2 \,\mathrm{d}\phi \\ &= \frac{1}{12}\int_0^{12\pi} (1+\cos(\alpha)+\sin^2(\alpha))^2 \,\mathrm{d}\alpha \\ &= \frac{1}{12}\int_0^{12\pi} 1 + \cos^2(\alpha) + \sin^4(\alpha) + 2\cos(\alpha) + 2\sin^2(\alpha) + 2\cos(\alpha)\sin^2(\alpha) \,\mathrm{d}\alpha \\ &= \frac{1}{12}\left[\int_0^{12\pi} 1 \,\mathrm{d}\alpha + \int_0^{12\pi} \cos^2(\alpha) \,\mathrm{d}\alpha + \int_0^{12\pi} \sin^4(\alpha) \,\mathrm{d}\alpha + 2\int_0^{12\pi} \cos(\alpha) \,\mathrm{d}\alpha + 2\int_0^{12\pi} \sin^2(\alpha) \,\mathrm{d}\alpha + 2\int_0^{12\pi} \cos(\alpha)\sin^2(\alpha) \,\mathrm{d}\alpha\right] \\ &= \frac{1}{12}\left[12\pi + 6\pi + \frac{9}{2}\pi + 0 + 12\pi + 0\right] = \frac{23}{8}\pi.\end{aligned}$$

Contrôle ③ - thème B

Nome : ______________________	Prénom : ______________________	Note : ______________________

Exercice ❶ : champs de vecteurs et formes différentielles. [6 points]

Considérons le champ de vecteurs

$$\vec{V}(x,y,z) = (y^2 \sin z)\,\vec{\imath} + (2xy\sin z)\,\vec{\jmath} + (xy^2\cos z)\,\vec{k}.$$

☐ 1. [3 points] Montrer que $\vec{V}$ est conservatif.[7]

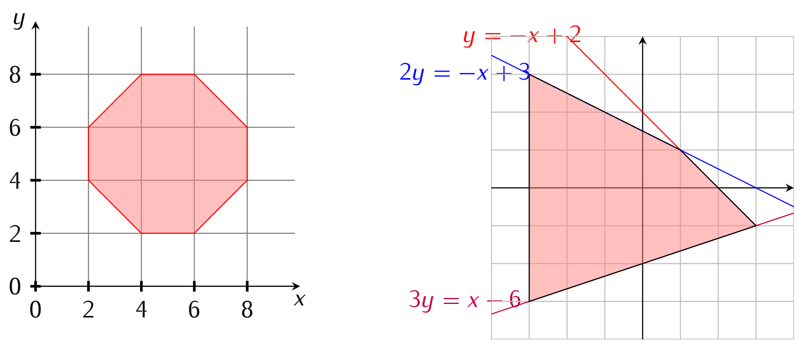
☐ 2. [3 points] Calculer un potentiel de $\vec{V}$.

Exercice ❷ : intégrales doubles et triples. [17 points]

☐ 1. [2 points] Soit $\mathcal{D}$ la plaque homogène représentée dans la figure 14a. **Sans** faire de calculs d'intégrales, en déduire les valeurs de

$$\iint_{\mathcal{D}} 1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \qquad \iint_{\mathcal{D}} x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \qquad \iint_{\mathcal{D}} y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

☐ 2. [4 points] Calculer l'aire de la région coloriée en figure 14b.



(a) (b)

Figure 14: Plaques homogènes

☐ 3. [6 points] Après avoir représenté graphiquement la région

$$\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\},$$

calculer les coordonnées de son centre de gravité en supposant la région $\mathcal{D}$ homogène ; calculer ensuite

$$\iint_{\mathcal{D}} (3x + 4y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

☐ 4. [5 points] Calculer l'intégrale triple

$$\int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-z^2}}^{\sqrt{1-z^2}} \int_{x^2+z^2}^{2-x^2-z^2} (x^2+z^2)^{3/2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z.$$

[⋆] Calculer l'aire de la région définie en coordonnées polaires par[8]

$$\mathcal{D} = \{(r,\phi) \in \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi] \ : \ r \leq 1 + \cos(3\phi) + \sin^2(3\phi)\}.$$

Suggestion : utiliser les formules de duplication $\cos(2\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1 = 1 - 2\sin^2(\theta)$ et calculer au préalable les intégrales suivantes

$$\int_0^{6\pi} 1\,\mathrm{d}\alpha, \quad \int_0^{6\pi} \cos(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha, \quad \int_0^{6\pi} \cos^2(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha, \quad \int_0^{6\pi} \cos(\alpha)\sin^2(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha, \quad \int_0^{6\pi} \sin^2(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha, \quad \int_0^{2\pi} \sin^4(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha.$$

---

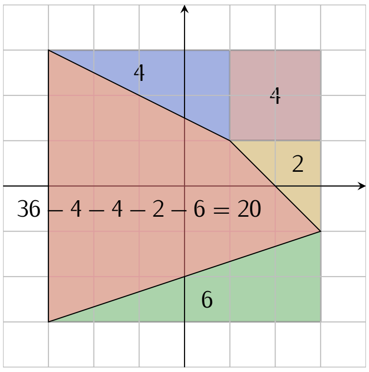
7. Rappel : $\operatorname{rot}\vec{V} = (\partial_y V_3 - \partial_z V_2, \partial_z V_1 - \partial_x V_3, \partial_x V_2 - \partial_y V_1)$
8. Trèfle de Habenicht

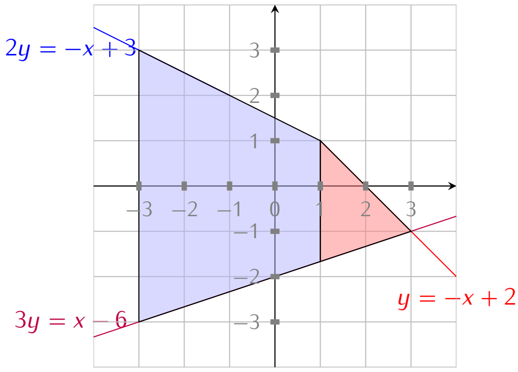
Solution de l'exercice ❶.

On a $V_1(x,y,z)=y^2\sin z$, $V_2(x,y,z)=2xy\sin z$ et $V_3(x,y,z)=xy^2\cos z$.

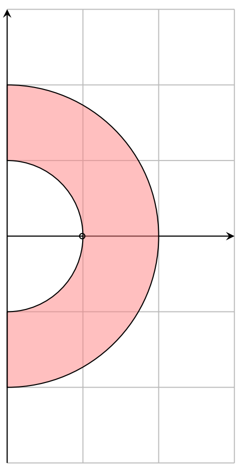
1. On vérifie que $\operatorname{rot}\vec{V}=\vec{0}$:
$$\begin{cases}\frac{\partial V_3}{\partial y}-\frac{\partial V_2}{\partial z}=2xy\cos z-2xy\cos z=0,\\ \frac{\partial V_1}{\partial z}-\frac{\partial V_3}{\partial x}=y^2\cos z-y^2\cos z=0,\\ \frac{\partial V_2}{\partial x}-\frac{\partial V_1}{\partial y}=2y\sin z-2y\sin z=0.\end{cases}$$
$\vec{V}$ est définit sur $\mathbb{R}^3$ (simplement connexe) et est irrotationnel donc il est conservatif.
2. On cherche $f\colon\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ telle que $\vec{\nabla}f=\vec{V}$.
$$\begin{array}{lclclc}\frac{\partial f}{\partial x}=y^2\sin z & \text{donc} & f(x,y,z)=xy^2\sin z+g(y,z) & \text{donc} & \frac{\partial f}{\partial y}=2xy\sin z+\frac{\partial g}{\partial y}=2xy\sin z\\ & \text{donc} & g(y,z)=h(z) & \text{donc} & f(x,y,z)=xy^2\sin z+h(z)\\ & \text{donc} & \frac{\partial f}{\partial z}=xy^2\cos z+h'=xy^2\cos z & \text{donc} & h(z)=c\\ & \text{donc} & f(x,y,z)=xy^2\sin z+c. & & \end{array}$$

Solution de l'exercice ❷.

1. L'aire mesure 14 et le centre de gravité a coordonnées $(5,5)$ donc
$$\iint_{\mathcal{D}}1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=14,\qquad \iint_{\mathcal{D}}x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=70,\qquad \iint_{\mathcal{D}}y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=70.$$
2. Soit $\mathcal{D}$ le domaine. Pour calculer l'aire on peut soit utiliser un simplissime calcul géométrique soit se rappeler que l'aire est donnée par l'intégrale double
$$\iint_{\mathcal{D}}1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$




Pour la calculer on décompose la région en deux parties et on obtient
$$\begin{aligned}\iint_{\mathcal{D}}1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y&=\int_{-3}^{1}\int_{\frac13x-2}^{-\frac12x+\frac32}1\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x+\int_{1}^{3}\int_{\frac13x-2}^{-x+2}1\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\\&=\int_{-3}^{1}-\frac12x+\frac32-\frac13x+2\,\mathrm{d}x+\int_1^3-x+2-\frac13x+2\,\mathrm{d}x\\&=\int_{-3}^{1}-\frac56x+\frac72\,\mathrm{d}x+\int_1^3-\frac43x+4\,\mathrm{d}x=20.\end{aligned}$$
3. La région $\mathcal{D}$ est la zone coloriée suivante



Le centre de gravité a coordonnées (x_G, y_G) données par

$$x_G = \frac{\iint_{\mathcal{D}} x \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y}{\iint_{\mathcal{D}} 1 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y}, \qquad y_G = \frac{\iint_{\mathcal{D}} y \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y}{\iint_{\mathcal{D}} 1 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y}.$$

Il convient de passer au coordonnées polaires et on obtient

$$\iint_{\mathcal{D}} 1 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_1^2 r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta = \left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \mathrm{d}\theta \right) \left(\int_1^2 r \, \mathrm{d}r \right) = \frac{3}{2}\pi,$$
$$\iint_{\mathcal{D}} x \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_1^2 r^2 \cos\theta \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta = \left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta \, \mathrm{d}\theta \right) \left(\int_1^2 r^2 \, \mathrm{d}r \right) = \frac{14}{3},$$
$$\iint_{\mathcal{D}} y \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_1^2 r^2 \sin\theta \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta = \left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin\theta \, \mathrm{d}\theta \right) \left(\int_1^2 r^2 \, \mathrm{d}r \right) = 0.$$

Donc

$$x_G = \frac{14}{3} \frac{2}{3\pi} = \frac{28}{9\pi} < 1, \qquad y_G = 0.$$

On calcul maintenant l'intégrale donnée

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathcal{D}} (3x + 4y^2) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_1^2 (3r\cos\theta + 4r^2 \sin^2\theta) \, r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[r^3 \cos\theta + r^4 \sin^2\theta \right]_1^2 \, \mathrm{d}\theta \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 7\cos\theta + 15\sin^2\theta \, \mathrm{d}\theta \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 7\cos\theta + 15\frac{1 - \cos(2\theta)}{2} \, \mathrm{d}\theta = 14 + \frac{15}{2}\pi.
\end{aligned}$$

4. En coordonnées cartésiennes on doit intégrer sur le solide défini par les inégalités

$$-\sqrt{1 - z^2} \le x \le \sqrt{1 - z^2}, \qquad x^2 + z^2 \le y \le 2 - x^2 - z^2 \qquad -1 \le z \le 1.$$

Il est naturel de passer en coordonnées cylindriques

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = t, \\ z = r\sin\theta, \end{cases}$$

et on obtient l'intégrale triple

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-z^2}}^{\sqrt{1-z^2}} \int_{x^2+z^2}^{2-x^2-z^2} (x^2 + z^2)^{3/2} \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}z &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_{r^2}^{2-r^2} r^4 \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}r \\
= \left(\int_0^{2\pi} 1 \, \mathrm{d}\theta \right) \int_0^1 r^4 \left[t \right]_{r^2}^{2-r^2} \, \mathrm{d}r &= 4\pi \int_0^1 r^4 (r^2 - 1) \, \mathrm{d}r \\
&= 4\pi \left[\frac{r^7}{7} - \frac{r^5}{5} \right]_0^1 = \frac{8}{35}\pi.
\end{aligned}$$

[⋆] On a

$$\int_0^{6\pi} 1 \, \mathrm{d}\alpha = \left[\alpha \right]_0^{6\pi} = 6\pi, \qquad \int_0^{6\pi} \cos(\alpha) \, \mathrm{d}\alpha = \left[\sin(\alpha) \right]_0^{6\pi} = 0,$$
$$\int_0^{6\pi} \cos^2(\alpha) \, \mathrm{d}\alpha = \frac{1}{4}\Big[\sin(2\alpha) + 2\alpha \Big]_0^{6\pi} = 3\pi, \qquad \int_0^{6\pi} \cos(\alpha)\sin^2(\alpha) \, \mathrm{d}\alpha = \left[\frac{\sin^3(\alpha)}{3} \right]_0^{6\pi} = 0,$$
$$\int_0^{6\pi} \sin^2(\alpha) \, \mathrm{d}\alpha = \frac{1}{4}\Big[2\alpha - \sin(2\alpha) \Big]_0^{6\pi} = 3\pi, \qquad \int_0^{6\pi} \sin^4(\alpha) \, \mathrm{d}\alpha = \frac{1}{32}\pi\Big[12\alpha - 8\sin(2\alpha) + \sin(4\alpha) \Big]_0^{6\pi} = \frac{9}{4}\pi.$$

L'aire est donnée, en coordonnées polaires, par

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathcal{D}} r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta &= \int_0^{2\pi} \int_0^{1+\cos(3\phi)+\sin^2(3\phi)} r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\phi \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^{1+\cos(3\phi)+\sin^2(3\phi)} \mathrm{d}\phi \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 + \cos(3\phi) + \sin^2(3\phi))^2 \, \mathrm{d}\phi \\
&= \frac{1}{6} \int_0^{6\pi} (1 + \cos(\alpha) + \sin^2(\alpha))^2 \, \mathrm{d}\alpha
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{6}\int_0^{6\pi} 1+\cos^2(\alpha)+\sin^4(\alpha)+2\cos(\alpha)+2\sin^2(\alpha)+2\cos(\alpha)\sin^2(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha\\
&= \frac{1}{6}\left[\int_0^{6\pi} 1\,\mathrm{d}\alpha+\int_0^{6\pi}\cos^2(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha+\int_0^{6\pi}\sin^4(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha+2\int_0^{6\pi}\cos(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha+2\int_0^{6\pi}\sin^2(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha+2\int_0^{6\pi}\cos(\alpha)\sin^2(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha\right]\\
&= \frac{1}{6}\left[6\pi+3\pi+\frac{9}{4}\pi+0+6\pi+0\right]=\frac{23}{8}\pi.
\end{aligned}
$$

Contrôle ③ - thème C

Nome : ______________________	Prénom : ______________________	Note : ______________________

Exercice ❶ : champs de vecteurs et formes différentielles. [6 points]

Considérons le champ de vecteurs

$$\vec{V}(x,y,z) = (2xz\sin y)\,\vec{\imath} + (x^2 z\cos y)\,\vec{\jmath} + (x^2\sin y)\,\vec{k}.$$

☐ 1. [3 points] Montrer que $\vec{V}$ est conservatif.[9]

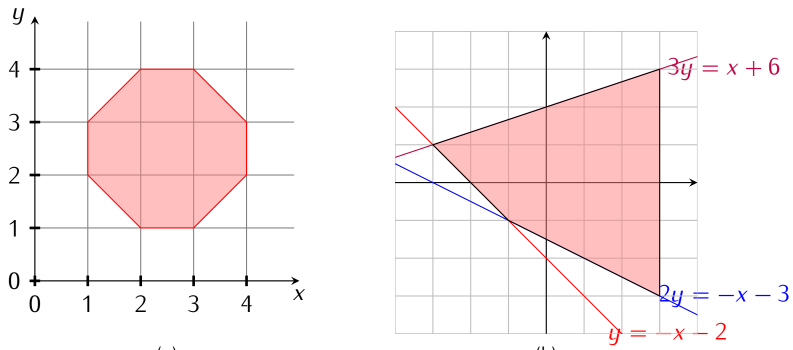
☐ 2. [3 points] Calculer un potentiel de $\vec{V}$.

Exercice ❷ : intégrales doubles et triples. [17 points]

☐ 1. [2 points] Soit $\mathcal{D}$ la plaque homogène représentée dans la figure 15a. **Sans** faire de calculs d'intégrales, en déduire les valeurs de

$$\iint_{\mathcal{D}} 1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \qquad \iint_{\mathcal{D}} x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \qquad \iint_{\mathcal{D}} y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

☐ 2. [4 points] Calculer l'aire de la région coloriée en figure 15b.



(a) (b)

FIGURE 15: Plaques homogènes

☐ 3. [6 points] Après avoir représenté graphiquement la région

$$\mathcal{D} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y\le 0, 1\le x^2+y^2\le 4\},$$

calculer les coordonnées de son centre de gravité en supposant la région $\mathcal{D}$ homogène ; calculer ensuite

$$\iint_{\mathcal{D}} (3x+4y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

☐ 4. [5 points] Calculer l'intégrale triple

$$\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-z^2}}^{\sqrt{1-z^2}}\int_{x^2+z^2}^{2-x^2-z^2} (x^2+z^2)^{3/2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z.$$

[⋆] Calculer l'aire de la région définie en coordonnées polaires par[10]

$$\mathcal{D} = \{(r,\phi)\in\mathbb{R}^+\times[0,2\pi] \;:\; r\le 1+\cos(5\phi)+\sin^2(5\phi)\}.$$

Suggestion : utiliser les formules de duplication $\cos(2\theta) = 2\cos^2(\theta)-1 = 1-2\sin^2(\theta)$ et calculer au préalable les intégrales suivantes

$$\int_0^{10\pi} 1\,\mathrm{d}\alpha, \quad \int_0^{10\pi}\cos(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha, \quad \int_0^{10\pi}\cos^2(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha, \quad \int_0^{10\pi}\cos(\alpha)\sin^2(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha, \quad \int_0^{10\pi}\sin^2(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha, \quad \int_0^{10\pi}\sin^4(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha.$$

---

9. Rappel : $\operatorname{rot}\vec{V} = (\partial_y V_3 - \partial_z V_2, \partial_z V_1 - \partial_x V_3, \partial_x V_2 - \partial_y V_1)$
10. Trèfle de HABENICHT

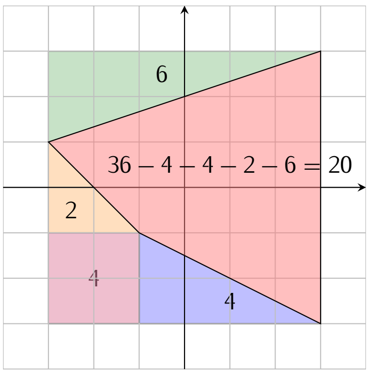
Solution de l'exercice ❶.

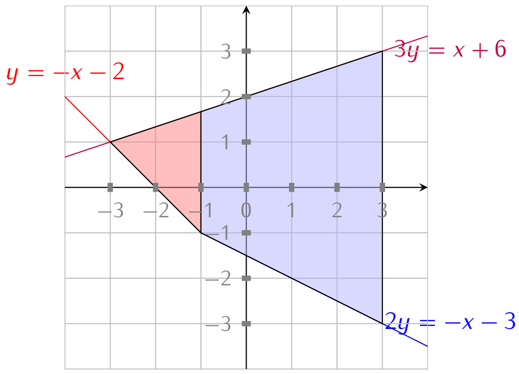
On a $V_1(x,y,z) = 2xz\sin y$, $V_2(x,y,z) = x^2z\cos y$ et $V_3(x,y,z) = x^2\sin y$.

1. On vérifie que $\operatorname{rot}\vec{V} = \vec{0}$:
$$\begin{cases} \frac{\partial V_3}{\partial y} - \frac{\partial V_2}{\partial z} = x^2\cos y - x^2\cos y = 0,\\ \frac{\partial V_1}{\partial z} - \frac{\partial V_3}{\partial x} = 2x\sin y - 2x\sin y = 0,\\ \frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial y} = 2xz\cos y - 2xz\cos y = 0.\end{cases}$$
$\vec{V}$ est définit sur $\mathbb{R}^3$ (simplement connexe) et est irrotationnel donc il est conservatif.
2. On cherche $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ telle que $\vec{\nabla}f = \vec{V}$.
$$\begin{array}{llllll} \frac{\partial f}{\partial x} = 2xz\sin y & \text{donc} & f(x,y,z) = x^2z\sin y + g(y,z) & \text{donc} & \frac{\partial f}{\partial y} = x^2z\cos y + \frac{\partial g}{\partial y} = x^2z\cos y\\ & \text{donc} & g(y,z) = h(z) & \text{donc} & f(x,y,z) = x^2z\sin y + h(z)\\ & \text{donc} & \frac{\partial f}{\partial z} = x^2\sin y + h' = x^2\sin y & \text{donc} & h(z) = c\\ & \text{donc} & f(x,y,z) = x^2z\sin y + c. & & \end{array}$$

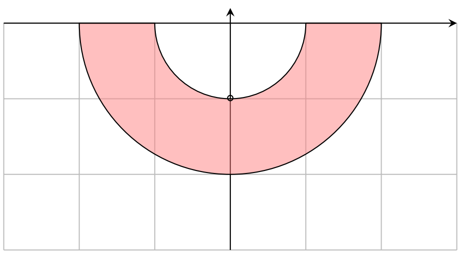
Solution de l'exercice ❷.

1. L'aire mesure 7 et le centre de gravité a coordonnées $(5/2, 5/2)$ donc
$$\iint_{\mathcal{D}} 1\,dx\,dy = 7, \qquad \iint_{\mathcal{D}} x\,dx\,dy = 35/2, \qquad \iint_{\mathcal{D}} y\,dx\,dy = 35/2.$$
2. Soit $\mathcal{D}$ le domaine. Pour calculer l'aire on peut soit utiliser un simplissime calcul géométrique soit se rappeler que l'aire est donnée par l'intégrale double
$$\iint_{\mathcal{D}} 1\,dx\,dy.$$





Pour la calculer on décompose la région en deux parties et on obtient
$$\begin{aligned}\iint_{\mathcal{D}} 1\,dx\,dy &= \int_{-3}^{-1}\int_{-x-2}^{\frac{1}{3}x+2} 1\,dy\,dx + \int_{-1}^{3}\int_{-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}}^{\frac{1}{3}x+2} 1\,dy\,dx\\ &= \int_{-3}^{-1} \frac{1}{3}x + 2 + x + 2\,dx + \int_{-1}^{3} \frac{1}{3}x + 2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}\,dx\\ &= \int_{-3}^{-1} \frac{4}{3}x + 4\,dx + \int_{-1}^{3} \frac{5}{6}x + \frac{7}{2}\,dx = 20.\end{aligned}$$
3. La région $\mathcal{D}$ est la zone coloriée suivante



Le centre de gravité a coordonnées (x_G, y_G) données par
$$x_G = \frac{\iint_{\mathcal{D}} x\,dx\,dy}{\iint_{\mathcal{D}} 1\,dx\,dy}, \qquad y_G = \frac{\iint_{\mathcal{D}} y\,dx\,dy}{\iint_{\mathcal{D}} 1\,dx\,dy}.$$

Il convient de passer au coordonnées polaires et on obtient

$$\iint_{\mathcal{D}} 1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-\pi}^{0}\int_{1}^{2} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \left(\int_{-\pi}^{0}\mathrm{d}\theta\right)\left(\int_{1}^{2} r\,\mathrm{d}r\right) = \frac{3}{2}\pi,$$

$$\iint_{\mathcal{D}} x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-\pi}^{0}\int_{1}^{2} r^2\cos\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \left(\int_{-\pi}^{0}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta\right)\left(\int_{1}^{2} r^2\,\mathrm{d}r\right) = 0,$$

$$\iint_{\mathcal{D}} y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-\pi}^{0}\int_{1}^{2} r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \left(\int_{-\pi}^{0}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\right)\left(\int_{1}^{2} r^2\,\mathrm{d}r\right) = -\frac{14}{3}.$$

Donc

$$x_G = 0, \qquad y_G = -\frac{14}{3}\frac{2}{3\pi} = -\frac{28}{9\pi} > -1.$$

On calcul maintenant l'intégrale donnée

$$\begin{aligned}\iint_{\mathcal{D}} (3x+4y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_{-\pi}^{0}\int_{1}^{2}(3r\cos\theta + 4r^2\sin^2\theta)\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta \\ &= \int_{-\pi}^{0}\left[r^3\cos\theta + r^4\sin^2\theta\right]_1^2\,\mathrm{d}\theta \\ &= \int_{-\pi}^{0} 7\cos\theta + 15\sin^2\theta\,\mathrm{d}\theta \\ &= \int_{-\pi}^{0} 7\cos\theta + 15\frac{1-\cos(2\theta)}{2}\,\mathrm{d}\theta = \frac{15}{2}\pi.\end{aligned}$$

4. En coordonnées cartésiennes on doit intégrer sur le solide défini par les inégalités

$$-\sqrt{1-z^2} \le x \le \sqrt{1-z^2}, \qquad x^2+z^2 \le y \le 2-x^2-z^2 \qquad -1 \le z \le 1.$$

Il est naturel de passer en coordonnées cylindriques

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = t, \\ z = r\sin\theta,\end{cases}$$

et on obtient l'intégrale triple

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-z^2}}^{\sqrt{1-z^2}}\int_{x^2+z^2}^{2-x^2-z^2}(x^2+z^2)^{3/2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z &= \int_0^1\int_0^{2\pi}\int_{r^2}^{2-r^2} r^4\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r \\ &= \left(\int_0^{2\pi}1\,\mathrm{d}\theta\right)\int_0^1 r^4\,[t]_{r^2}^{2-r^2}\,\mathrm{d}r = 4\pi\int_0^1 r^4(r^2-1)\,\mathrm{d}r \\ &= 4\pi\left[\frac{r^7}{7}-\frac{r^5}{5}\right]_0^1 = \frac{8}{35}\pi.\end{aligned}$$

[$\star$] On a

$$\int_0^{10\pi} 1\,\mathrm{d}\alpha = \Big[\alpha\Big]_0^{10\pi} = 10\pi, \qquad \int_0^{10\pi}\cos(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha = \Big[\sin(\alpha)\Big]_0^{10\pi} = 0,$$

$$\int_0^{10\pi}\cos^2(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha = \frac{1}{4}\Big[\sin(2\alpha)+2\alpha\Big]_0^{10\pi} = 5\pi, \qquad \int_0^{10\pi}\cos(\alpha)\sin^2(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha = \Big[\frac{\sin^3(\alpha)}{3}\Big]_0^{10\pi} = 0,$$

$$\int_0^{10\pi}\sin^2(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha = \frac{1}{4}\Big[2\alpha-\sin(2\alpha)\Big]_0^{10\pi} = 5\pi, \qquad \int_0^{10\pi}\sin^4(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha = \frac{1}{32}\pi\Big[12\alpha-8\sin(2\alpha)+\sin(4\alpha)\Big]_0^{10\pi} = \frac{15}{4}\pi.$$

L'aire est donnée, en coordonnées polaires, par

$$\begin{aligned}\iint_{\mathcal{D}} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta &= \int_0^{2\pi}\int_0^{1+\cos(3\phi)+\sin^2(3\phi)} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{1+\cos(3\phi)+\sin^2(3\phi)}\mathrm{d}\phi \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1+\cos(3\phi)+\sin^2(3\phi))^2\,\mathrm{d}\phi \\ &= \frac{1}{10}\int_0^{10\pi}(1+\cos(\alpha)+\sin^2(\alpha))^2\,\mathrm{d}\alpha \\ &= \frac{1}{10}\int_0^{10\pi} 1+\cos^2(\alpha)+\sin^4(\alpha)+2\cos(\alpha)+2\sin^2(\alpha)+2\cos(\alpha)\sin^2(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha \\ &= \frac{1}{10}\left[\int_0^{10\pi}1\,\mathrm{d}\alpha + \int_0^{10\pi}\cos^2(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha + \int_0^{10\pi}\sin^4(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha + 2\int_0^{10\pi}\cos(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha + 2\int_0^{10\pi}\sin^2(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha + 2\int_0^{10\pi}\cos(\alpha)\sin^2(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha\right] \\ &= \frac{1}{10}\left[10\pi+5\pi+\frac{15}{4}\pi+0+10\pi+0\right] = \frac{23}{8}\pi.\end{aligned}$$

Contrôle ③ - thème D

Nome : ______________	Prénom : ______________	Note : ______________

Exercice ❶ : champs de vecteurs et formes différentielles. [6 points]

Considérons le champ de vecteurs

$$\vec{V}(x,y,z) = (z^2 \sin y)\,\vec{\imath} + (xz^2 \cos y)\,\vec{\jmath} + (2xz \sin y)\,\vec{k}.$$

☐ 1. [3 points] Montrer que $\vec{V}$ est conservatif. [11]

☐ 2. [3 points] Calculer un potentiel de $\vec{V}$.

Exercice ❷ : intégrales doubles et triples. [17 points]

☐ 1. [2 points] Soit $\mathcal{D}$ la plaque homogène représentée dans la figure 16a. **Sans** faire de calculs d'intégrales, en déduire les valeurs de

$$\iint_{\mathcal{D}} 1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \qquad \iint_{\mathcal{D}} x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \qquad \iint_{\mathcal{D}} y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

☐ 2. [4 points] Calculer l'aire de la région coloriée en figure 16b.

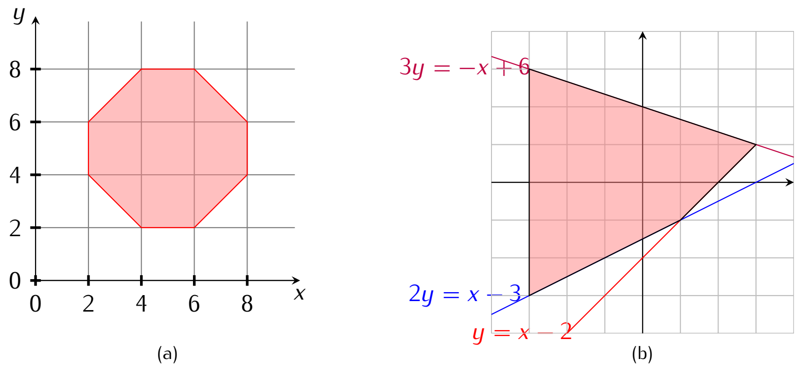


Figure 16: Plaques homogènes

☐ 3. [6 points] Après avoir représenté graphiquement la région

$$\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \le 0, 1 \le x^2 + y^2 \le 4\},$$

calculer les coordonnées de son centre de gravité en supposant la région $\mathcal{D}$ homogène ; calculer ensuite

$$\iint_{\mathcal{D}} (3x + 4y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

☐ 4. [5 points] Calculer l'intégrale triple

$$\int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-z^2}}^{\sqrt{1-z^2}} \int_{x^2+z^2}^{2-x^2-z^2} (x^2+z^2)^{3/2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z.$$

[⋆] Calculer l'aire de la région définie en coordonnées polaires par [12]

$$\mathcal{D} = \{(r,\phi) \in \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi] \;:\; r \le 1 + \cos(4\phi) + \sin^2(4\phi)\}.$$

Suggestion : utiliser les formules de duplication $\cos(2\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1 = 1 - 2\sin^2(\theta)$ et calculer au préalable les intégrales suivantes

$$\int_0^{8\pi} 1\,\mathrm{d}\alpha, \quad \int_0^{8\pi} \cos(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha, \quad \int_0^{8\pi} \cos^2(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha, \quad \int_0^{8\pi} \cos(\alpha)\sin^2(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha, \quad \int_0^{8\pi} \sin^2(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha, \quad \int_0^{8\pi} \sin^4(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha.$$

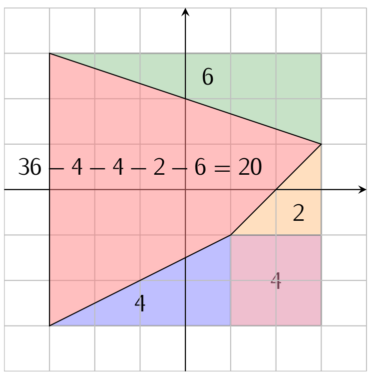
11. Rappel : $\operatorname{rot}\vec{V} = (\partial_y V_3 - \partial_z V_2, \partial_z V_1 - \partial_x V_3, \partial_x V_2 - \partial_y V_1)$
12. Trèfle de Habenicht

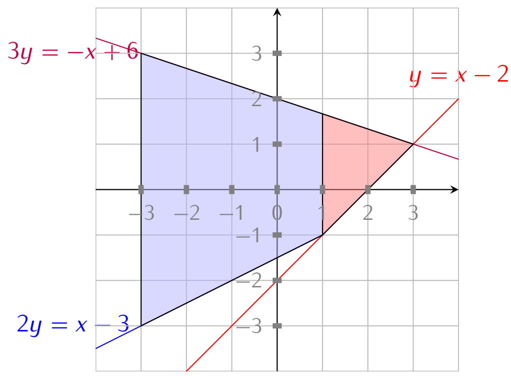
Solution de l'exercice ❶.

On a $V_1(x,y,z)=z^2\sin y$, $V_2(x,y,z)=xz^2\cos y$ et $V_3(x,y,z)=2xz\sin y$.

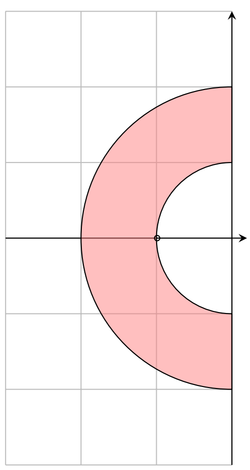
1. On vérifie que $\operatorname{rot}\vec{V}=\vec{0}$:
$$\begin{cases}\frac{\partial V_3}{\partial y}-\frac{\partial V_2}{\partial z}=2xz\sin y-2xz\sin y=0,\\ \frac{\partial V_1}{\partial z}-\frac{\partial V_3}{\partial x}=2z\sin y-2z\sin y=0,\\ \frac{\partial V_2}{\partial x}-\frac{\partial V_1}{\partial y}=z^2\cos y-z^2\cos y=0.\end{cases}$$
$\vec{V}$ est définit sur $\mathbb{R}^3$ (simplement connexe) et est irrotationnel donc il est conservatif.
2. On cherche $f\colon\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ telle que $\vec{\nabla}f=\vec{V}$.
$$\begin{array}{lcclcc} \frac{\partial f}{\partial x}=z^2\sin y & \text{donc} & f(x,y,z)=xz^2\sin y+g(y,z) & \text{donc} & \frac{\partial f}{\partial y}=xz^2\cos y+\frac{\partial g}{\partial y}=xz^2\cos y\\ & \text{donc} & g(y,z)=h(z) & \text{donc} & f(x,y,z)=xz^2\sin y+h(z)\\ & \text{donc} & \frac{\partial f}{\partial z}=2xz\sin y+h'=2xz\sin y & \text{donc} & h(z)=c\\ & \text{donc} & f(x,y,z)=xz^2\sin y+c. & & \end{array}$$

Solution de l'exercice ❷.

1. L'aire mesure 14 et le centre de gravité a coordonnées $(5,5)$ donc
$$\iint_{\mathcal{D}}1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=28,\qquad \iint_{\mathcal{D}}x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=140,\qquad \iint_{\mathcal{D}}y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=140.$$
2. Soit $\mathcal{D}$ le domaine. Pour calculer l'aire on peut soit utiliser un simplissime calcul géométrique soit se rappeler que l'aire est donnée par l'intégrale double
$$\iint_{\mathcal{D}}1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$




Pour la calculer on décompose la région en deux parties et on obtient
$$\begin{aligned}\iint_{\mathcal{D}}1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y&=\int_{-3}^{-1}\int_{\frac12x-\frac32}^{-\frac13x+2}1\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x+\int_{-1}^{3}\int_{x-2}^{-\frac13x+2}1\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\\&=\int_{-3}^{-1}-\frac13x+2-\frac12x+\frac32\,\mathrm{d}x+\int_{-1}^{3}-\frac13x+2-\frac12x+\frac32\,\mathrm{d}x\\&=\int_{-3}^{-1}-\frac56x+\frac72\,\mathrm{d}x+\int_{-1}^{3}-\frac43x+4\,\mathrm{d}x=20.\end{aligned}$$
3. La région $\mathcal{D}$ est la zone coloriée suivante



Le centre de gravité a coordonnées (x_G, y_G) données par

$$x_G = \frac{\iint_{\mathcal{D}} x \, dx \, dy}{\iint_{\mathcal{D}} 1 \, dx \, dy}, \qquad y_G = \frac{\iint_{\mathcal{D}} y \, dx \, dy}{\iint_{\mathcal{D}} 1 \, dx \, dy}.$$

Il convient de passer au coordonnées polaires et on obtient

$$\iint_{\mathcal{D}} 1 \, dx \, dy = \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \int_1^2 r \, dr \, d\theta = \left(\int_{\pi/2}^{3\pi/2} d\theta \right) \left(\int_1^2 r \, dr \right) = \frac{3}{2}\pi,$$

$$\iint_{\mathcal{D}} x \, dx \, dy = \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \int_1^2 r^2 \cos\theta \, dr \, d\theta = \left(\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \cos\theta \, d\theta \right) \left(\int_1^2 r^2 \, dr \right) = -\frac{14}{3},$$

$$\iint_{\mathcal{D}} y \, dx \, dy = \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \int_1^2 r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta = \left(\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \sin\theta \, d\theta \right) \left(\int_1^2 r^2 \, dr \right) = 0.$$

Donc

$$x_G = -\frac{14}{3}\frac{2}{3\pi} = -\frac{28}{9\pi} > -1, \qquad y_G = 0.$$

On calcul maintenant l'intégrale donnée

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathcal{D}} (3x + 4y^2) \, dx \, dy &= \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \int_1^2 (3r\cos\theta + 4r^2\sin^2\theta) \, r \, dr \, d\theta \\
&= \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \left[r^3\cos\theta + r^4\sin^2\theta \right]_1^2 d\theta \\
&= \int_{\pi/2}^{3\pi/2} 7\cos\theta + 15\sin^2\theta \, d\theta \\
&= \int_{\pi/2}^{3\pi/2} 7\cos\theta + 15\frac{1-\cos(2\theta)}{2} \, d\theta = -14 + \frac{15}{2}\pi.
\end{aligned}$$

4. En coordonnées cartésiennes on doit intégrer sur le solide défini par les inégalités

$$-\sqrt{1-z^2} \le x \le \sqrt{1-z^2}, \qquad x^2 + z^2 \le y \le 2 - x^2 - z^2 \qquad -1 \le z \le 1.$$

Il est naturel de passer en coordonnées cylindriques

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = t, \\ z = r\sin\theta, \end{cases}$$

et on obtient l'intégrale triple

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-z^2}}^{\sqrt{1-z^2}} \int_{x^2+z^2}^{2-x^2-z^2} (x^2+z^2)^{3/2} \, dy \, dx \, dz &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_{r^2}^{2-r^2} r^4 \, dt \, d\theta \, dr \\
&= \left(\int_0^{2\pi} 1 \, d\theta \right) \int_0^1 r^4 \left[t\right]_{r^2}^{2-r^2} dr = 4\pi \int_0^1 r^4(r^2-1) \, dr \\
&= 4\pi \left[\frac{r^7}{7} - \frac{r^5}{5} \right]_0^1 = \frac{8}{35}\pi.
\end{aligned}$$

[⋆] On a

$$\int_0^{8\pi} 1 \, d\alpha = \Big[\alpha\Big]_0^{8\pi} = 8\pi, \qquad \int_0^{8\pi} \cos(\alpha) \, d\alpha = \Big[\sin(\alpha)\Big]_0^{8\pi} = 0,$$

$$\int_0^{8\pi} \cos^2(\alpha) \, d\alpha = \frac{1}{4}\Big[\sin(2\alpha) + 2\alpha\Big]_0^{8\pi} = 4\pi, \qquad \int_0^{8\pi} \cos(\alpha)\sin^2(\alpha) \, d\alpha = \Big[\frac{\sin^3(\alpha)}{3}\Big]_0^{8\pi} = 0,$$

$$\int_0^{8\pi} \sin^2(\alpha) \, d\alpha = \frac{1}{4}\Big[2\alpha - \sin(2\alpha)\Big]_0^{8\pi} = 4\pi, \qquad \int_0^{8\pi} \sin^4(\alpha) \, d\alpha = \frac{1}{32}\pi\Big[12\alpha - 8\sin(2\alpha) + \sin(4\alpha)\Big]_0^{8\pi} = 3\pi.$$

L'aire est donnée, en coordonnées polaires, par

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathcal{D}} r \, dr \, d\theta &= \int_0^{2\pi} \int_0^{1+\cos(4\phi)+\sin^2(4\phi)} r \, dr \, d\phi \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^{1+\cos(4\phi)+\sin^2(4\phi)} d\phi \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 + \cos(4\phi) + \sin^2(4\phi))^2 \, d\phi \\
&= \frac{1}{8} \int_0^{8\pi} (1 + \cos(\alpha) + \sin^2(\alpha))^2 \, d\alpha
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{8}\int_0^{8\pi} 1+\cos^2(\alpha)+\sin^4(\alpha)+2\cos(\alpha)+2\sin^2(\alpha)+2\cos(\alpha)\sin^2(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha \\
&= \frac{1}{8}\left[\int_0^{8\pi} 1\,\mathrm{d}\alpha+\int_0^{8\pi}\cos^2(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha+\int_0^{8\pi}\sin^4(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha+2\int_0^{8\pi}\cos(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha+2\int_0^{8\pi}\sin^2(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha+2\int_0^{8\pi}\cos(\alpha)\sin^2(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha\right] \\
&= \frac{1}{8}\left[8\pi+4\pi+3\pi+0+8\pi+0\right]=\frac{23}{8}\pi.
\end{aligned}
$$

Contrôle ③ - thème E

Nome :	Prénom :	Note :

Exercice ❶ : champs de vecteurs et formes différentielles. [6 points]

Considérons le champ de vecteurs

$$\vec{V}(x,y,z) = (8z^4\cos(2x)\cos y)\,\vec{\imath} + (-4z^4\sin(2x)\sin y)\,\vec{\jmath} + (16z^3\sin(2x)\cos y)\,\vec{k}.$$

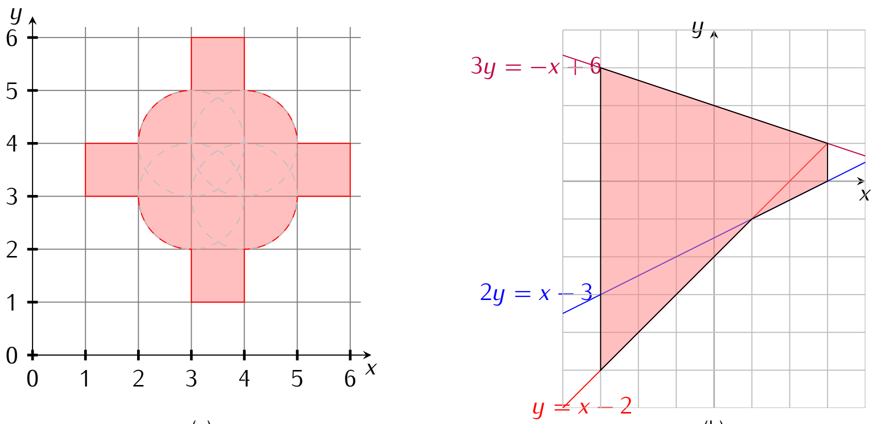
1. [3 points] Montrer que $\vec{V}$ est conservatif.[13]
2. [3 points] Calculer un potentiel de $\vec{V}$.

Exercice ❷ : intégrales doubles et triples. [17 points]

1. [2 points] Soit $\mathcal{D}$ la plaque homogène représentée dans la figure 17a. **Sans** faire de calculs d'intégrales, en déduire les valeurs de

$$\iint_{\mathcal{D}} 1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \qquad \iint_{\mathcal{D}} x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \qquad \iint_{\mathcal{D}} y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

2. [4 points] Calculer l'aire de la région coloriée en figure 17b.



(a) (b)

Figure 17: Plaques homogènes

3. [6 points] Après avoir représenté graphiquement la région

$$\mathcal{D} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y \le x, 1 \le x^2+y^2 \le 9\},$$

calculer les coordonnées de son centre de gravité en supposant la région $\mathcal{D}$ homogène ; calculer ensuite

$$\iint_{\mathcal{D}} (3x+4y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

4. [5 points] Calculer l'intégrale triple

$$\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-z^2}}^{\sqrt{1-z^2}}\int_{y^2+z^2}^{2-y^2-z^2} (y^2+z^2)^{3/2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

[$\star$] Calculer l'aire de la région définie en coordonnées polaires par[14]

$$\mathcal{D} = \{(r,\phi)\in\mathbb{R}^+\times[0,2\pi] \;:\; r \le 1+\cos(k\phi)+\sin^2(k\phi),\; k\in\mathbb{N}^*\}.$$

Suggestion : utiliser les formules de duplication $\cos(2\theta) = 2\cos^2(\theta)-1 = 1-2\sin^2(\theta)$ et calculer au préalable les intégrales suivantes

$$\int_0^{2k\pi} 1\,\mathrm{d}\alpha, \quad \int_0^{2k\pi} \cos(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha, \quad \int_0^{2k\pi} \cos^2(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha, \quad \int_0^{2k\pi} \cos(\alpha)\sin^2(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha, \quad \int_0^{2k\pi} \sin^2(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha, \quad \int_0^{2k\pi} \sin^4(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha.$$

13. Rappel : $\operatorname{rot}\vec{V} = (\partial_y V_3 - \partial_z V_2, \partial_z V_1 - \partial_x V_3, \partial_x V_2 - \partial_y V_1)$
14. Trèfle de Habenicht

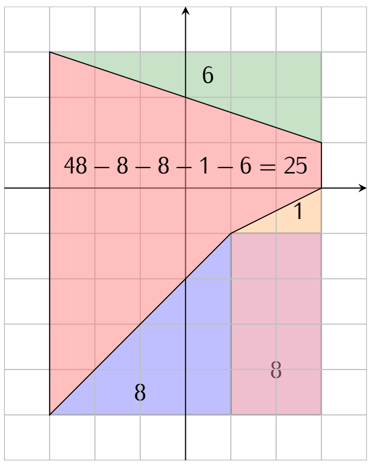
Solution de l'exercice ❶.

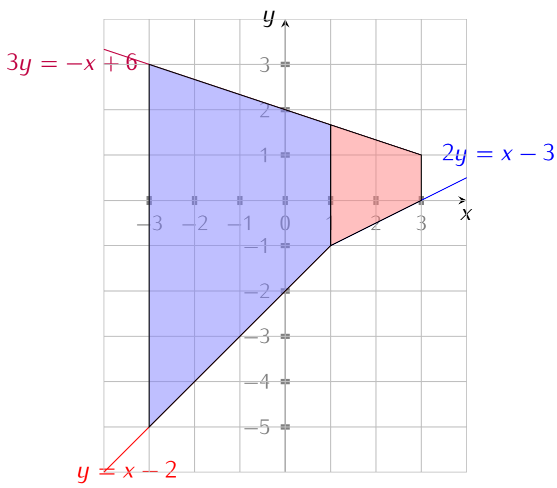
On a $V_1(x,y,z) = 8z^4\cos(2x)\cos y$, $V_2(x,y,z) = -4z^4\sin(2x)\sin y$ et $V_3(x,y,z) = 16z^3\sin(2x)\cos y$.

1. On vérifie que $\operatorname{rot}\vec{V} = \vec{0}$:
$$\begin{cases} \frac{\partial V_3}{\partial y} - \frac{\partial V_2}{\partial z} = -16z^3\sin(2x)\sin y - 16z^3\sin(2x)\sin y = 0,\\ \frac{\partial V_1}{\partial z} - \frac{\partial V_3}{\partial x} = 32z^3\cos(2x)\cos y - 32z^3\cos(2x)\cos y = 0,\\ \frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial y} = -8z^4\cos(2x)\sin y + 8z^4\cos(2x)\sin y = 0.\end{cases}$$
$\vec{V}$ est définit sur $\mathbb{R}^3$ (simplement connexe) et est irrotationnel donc il est conservatif.
2. On cherche $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ telle que $\vec{\nabla} f = \vec{V}$.
$$\begin{array}{lll} \frac{\partial f}{\partial x} = 8z^4\cos(2x)\cos y & \text{donc} & f(x,y,z) = 4z^4\sin(2x)\cos y + g(y,z)\\ & \text{donc} & \frac{\partial f}{\partial y} = -4z^4\sin(2x)\sin y + \frac{\partial g}{\partial y} = -4z^4\sin(2x)\sin y\\ & \text{donc} & g(y,z) = h(z)\\ & \text{donc} & f(x,y,z) = 4z^4\sin(2x)\cos y + h(z)\\ & \text{donc} & \frac{\partial f}{\partial z} = 16z^3\sin(2x)\cos y + h' = 16z^3\sin(2x)\cos y\\ & \text{donc} & h(z) = c\\ & \text{donc} & f(x,y,z) = 4z^4\sin(2x)\cos y + c.\end{array}$$

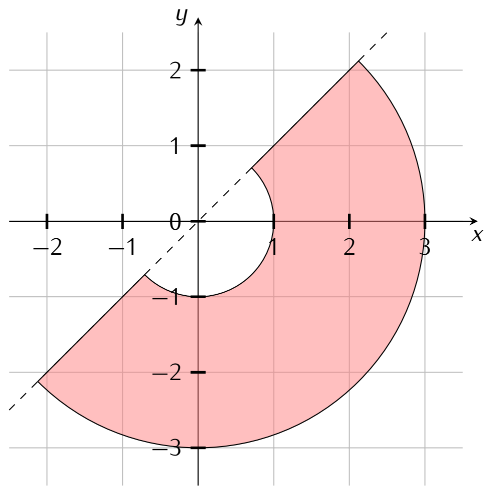
Solution de l'exercice ❷.

1. L'aire mesure $9+\pi$ et le centre de gravité a coordonnées $(7/2, 7/2)$ donc
$$\iint_{\mathcal{D}} 1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 9+\pi, \qquad \iint_{\mathcal{D}} x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = (9+\pi)7/2, \qquad \iint_{\mathcal{D}} y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = (9+\pi)7/2.$$
2. Soit $\mathcal{D}$ le domaine. Pour calculer l'aire on peut soit utiliser un simplissime calcul géométrique soit se rappeler que l'aire est donnée par l'intégrale double
$$\iint_{\mathcal{D}} 1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$





Pour la calculer on décompose la région en deux parties et on obtient
$$\begin{aligned}\iint_{\mathcal{D}} 1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_{-3}^{-1}\int_{x-2}^{-\frac{1}{3}x+2} 1\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \int_{-1}^{3}\int_{\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}}^{-\frac{1}{3}x+2} 1\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\\ &= \int_{-3}^{-1} -\frac{1}{3}x + 2 - x + 2\,\mathrm{d}x + \int_{-1}^{3} -\frac{1}{3}x + 2 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}\,\mathrm{d}x\\ &= \int_{-3}^{-1} -\frac{4}{3}x + 4\,\mathrm{d}x + \int_{-1}^{3} -\frac{5}{6}x + \frac{7}{2}\,\mathrm{d}x = 25.\end{aligned}$$
3. La région $\mathcal{D}$ est la zone coloriée suivante



Le centre de gravité a coordonnées (x_G, y_G) données par

$$x_G = \frac{\iint_{\mathcal{D}} x \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\iint_{\mathcal{D}} 1 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}, \qquad y_G = \frac{\iint_{\mathcal{D}} y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\iint_{\mathcal{D}} 1 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}.$$

Il convient de passer au coordonnées polaires et on obtient

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathcal{D}} 1 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_{-3\pi/4}^{\pi/4}\int_1^3 r \,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \left(\int_{-3\pi/4}^{\pi/4} \mathrm{d}\theta\right)\left(\int_1^3 r\,\mathrm{d}r\right) = 4\pi,\\
\iint_{\mathcal{D}} x \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_{-3\pi/4}^{\pi/4}\int_1^3 r^2\cos\theta \,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \left(\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \cos\theta\,\mathrm{d}\theta\right)\left(\int_1^3 r^2\,\mathrm{d}r\right) = \frac{26}{3}\sqrt{2},\\
\iint_{\mathcal{D}} y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_{-3\pi/4}^{\pi/4}\int_1^3 r^2\sin\theta \,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \left(\int_{-3\pi/4}^{\pi/4} \sin\theta\,\mathrm{d}\theta\right)\left(\int_1^3 r^2\,\mathrm{d}r\right) = -x_G.
\end{aligned}$$

Donc

$$x_G = \frac{26}{3}\sqrt{2}\frac{1}{4\pi} = \frac{13}{6\pi}\sqrt{2} < 1, \qquad y_G = -x_G.$$

On calcul maintenant l'intégrale donnée

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathcal{D}} (3x + 4y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_{-3\pi/4}^{\pi/4}\int_1^3 (3r\cos\theta + 4r^2\sin^2\theta)\, r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\\
&= \int_{-3\pi/4}^{\pi/4} \left[r^3\cos\theta + r^4\sin^2\theta\right]_1^3 \mathrm{d}\theta\\
&= \int_{-3\pi/4}^{\pi/4} 26\cos\theta + 80\sin^2\theta\,\mathrm{d}\theta\\
&= \int_{-3\pi/4}^{\pi/4} 26\cos\theta + 80\frac{1-\cos(2\theta)}{2}\,\mathrm{d}\theta = 26\sqrt{2} + 40\pi.
\end{aligned}$$

4. En coordonnées cartésiennes on doit intégrer sur le solide défini par les inégalités

$$y^2 + z^2 \le x \le 2 - y^2 - z^2, \qquad -\sqrt{1-z^2} \le y \le \sqrt{1-z^2}, \qquad -1 \le z \le 1.$$

Il est naturel de passer en coordonnées cylindriques

$$\begin{cases} x = t,\\ y = r\cos\theta,\\ z = r\sin\theta, \end{cases}$$

et on obtient l'intégrale triple

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-z^2}}^{\sqrt{1-z^2}} \int_{y^2+z^2}^{2-y^2-z^2} (y^2+z^2)^{3/2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z &= \int_0^1\int_0^{2\pi}\int_{r^2}^{2-r^2} r^4\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r\\
&= \left(\int_0^{2\pi} 1\,\mathrm{d}\theta\right)\int_0^1 r^4\,[t]_{r^2}^{2-r^2}\,\mathrm{d}r = 4\pi\int_0^1 r^4(r^2-1)\,\mathrm{d}r\\
&= 4\pi\left[\frac{r^7}{7} - \frac{r^5}{5}\right]_0^1 = \frac{8}{35}\pi.
\end{aligned}$$

[⋆] On a

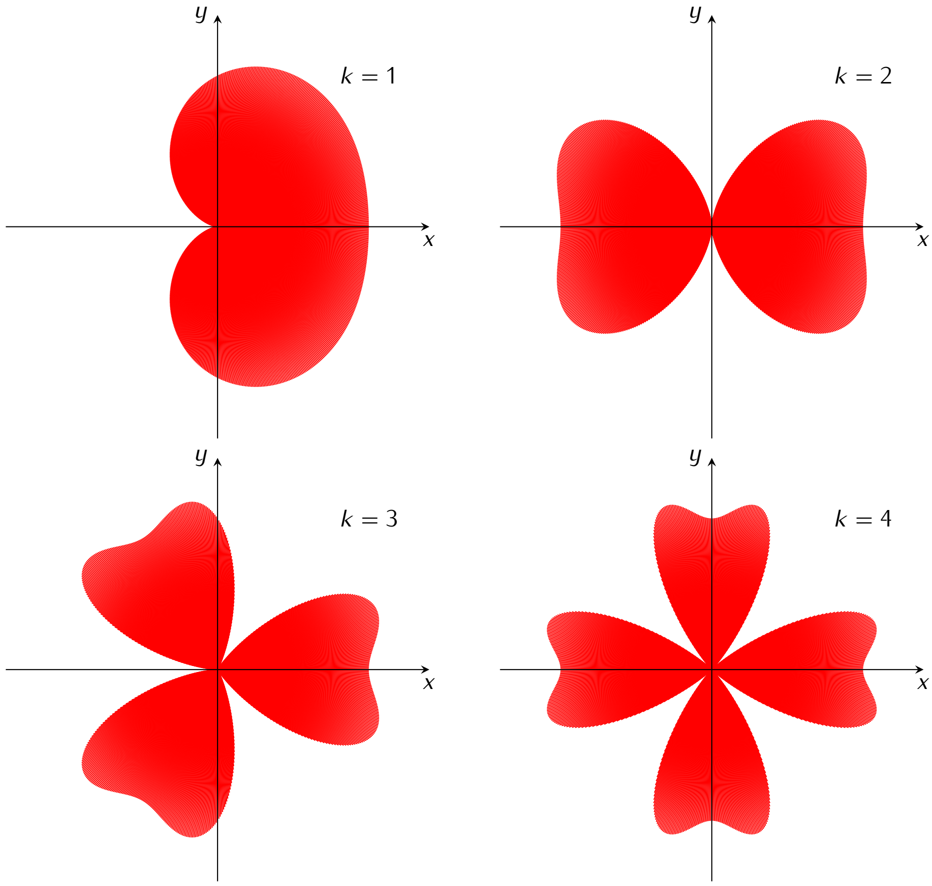
$$\int_0^{2k\pi} 1\,\mathrm{d}\alpha = \Big[\alpha\Big]_0^{2k\pi} = 2k\pi, \qquad \int_0^{2k\pi} \cos(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha = \Big[\sin(\alpha)\Big]_0^{2k\pi} = 0,$$

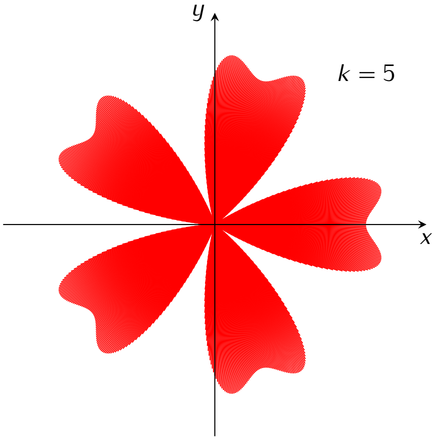
$$\int_0^{2k\pi} \cos^2(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha = \frac{1}{4}\Big[\sin(2\alpha) + 2\alpha\Big]_0^{2k\pi} = k\pi, \qquad \int_0^{2k\pi} \cos(\alpha)\sin^2(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha = \left[\frac{\sin^3(\alpha)}{3}\right]_0^{2k\pi} = 0,$$

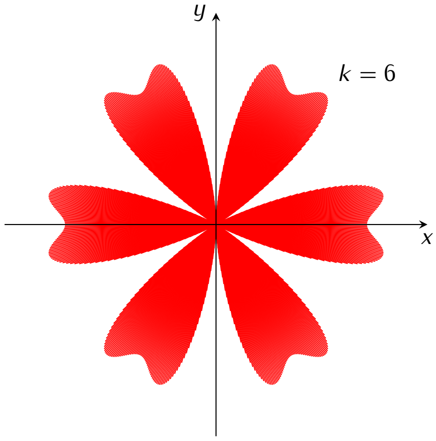
$$\int_0^{8\pi} \sin^2(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha = \frac{1}{4}\Big[2\alpha - \sin(2\alpha)\Big]_0^{2k\pi} = k\pi, \qquad \int_0^{2k\pi} \sin^4(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha = \frac{1}{32}\Big[24\alpha - 8\sin(2\alpha) + \sin(4\alpha)\Big]_0^{2k\pi} = \frac{3}{4}k\pi.$$

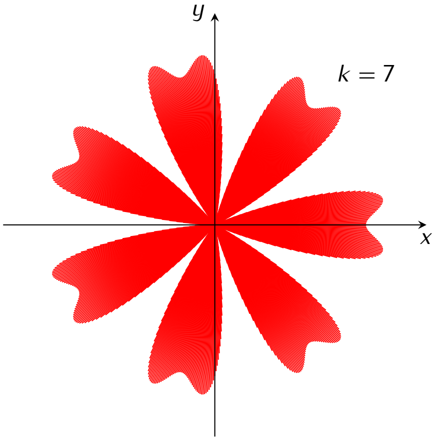
L'aire est donnée, en coordonnées polaires, par

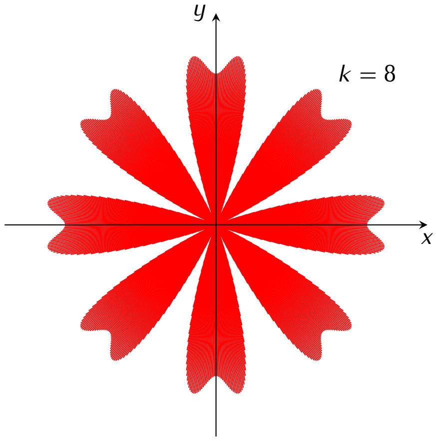
$$\begin{aligned}
\iint_{\mathcal{D}} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta &= \int_0^{2\pi}\int_0^{1+\cos(k\phi)+\sin^2(k\phi)} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{1+\cos(k\phi)+\sin^2(k\phi)}\mathrm{d}\phi \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1+\cos(k\phi)+\sin^2(k\phi))^2\,\mathrm{d}\phi \\
&= \frac{1}{2k}\int_0^{2k\pi}(1+\cos(\alpha)+\sin^2(\alpha))^2\,\mathrm{d}\alpha \\
&= \frac{1}{2k}\int_0^{2k\pi} 1+\cos^2(\alpha)+\sin^4(\alpha)+2\cos(\alpha)+2\sin^2(\alpha)+2\cos(\alpha)\sin^2(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha \\
&= \frac{1}{2k}\left[\int_0^{2k\pi} 1\,\mathrm{d}\alpha + \int_0^{2k\pi}\cos^2(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha + \int_0^{2k\pi}\sin^4(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha + 2\int_0^{2k\pi}\cos(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha + 2\int_0^{2k\pi}\sin^2(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha + 2\int_0^{2k\pi}\cos(\alpha)\sin^2(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha\right] \\
&= \frac{1}{2k}\left[2k\pi + k\pi + \frac{3}{4}k\pi + 0 + 2k\pi + 0\right] = \frac{23}{8}\pi.
\end{aligned}$$

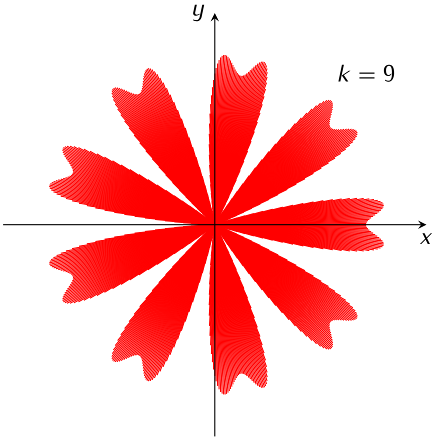


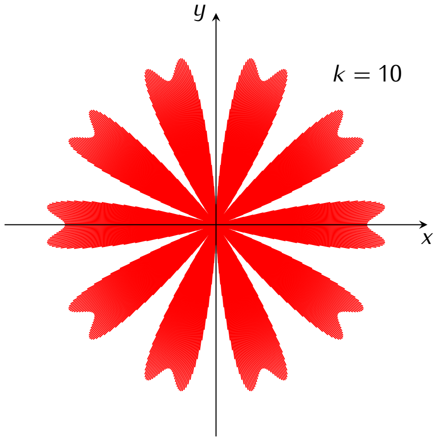

y
x
$k = 5$

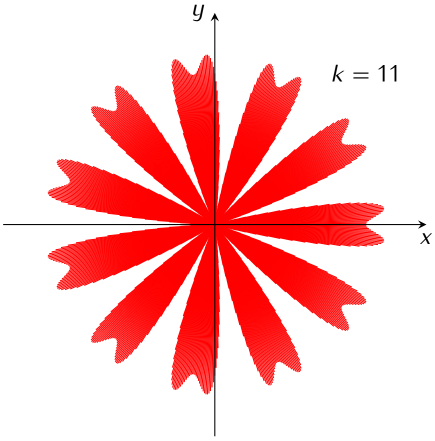

y
x
$k = 6$

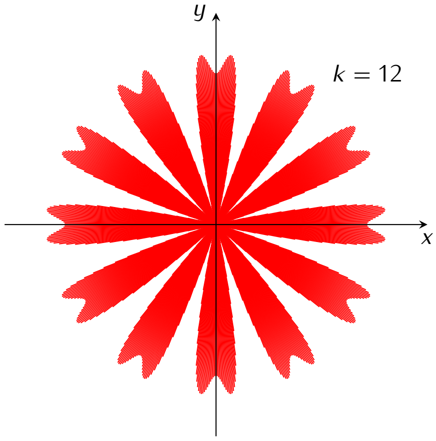

y
x
$k = 7$


y
x
$k = 8$


y
x
$k = 9$


y
x
$k = 10$


y
x
$k = 11$

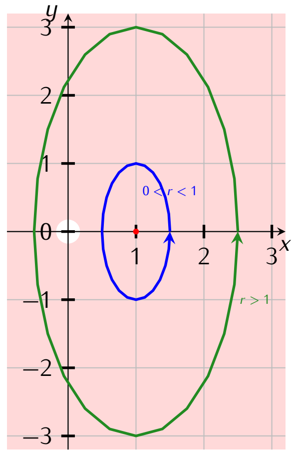

y
x
$k = 12$

Contrôle ④

Contrôle ④ - thème A

Nome :	Prénom :	Note : /30

Exercice ❶ : champs de vecteurs et formes différentielles. [7 points]



Considérons la forme différentielle

$$\omega(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x + \frac{-x}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y.$$

1. [1 points] Montrer que ω est fermée.
2. [4 points] Montrer que ω n'est pas exacte.
3. [2 points] Soit γ_r la famille de courbes

$$\gamma_r(t) = (1 + r\cos(\phi), 2r\sin(\phi)), \qquad \phi \in [0, 2\pi], \quad r > 0,\ r \neq 1.$$

Calculer $\oint_{\gamma_r} \vec{V}(t)dt$ en fonction de r.

Exercice ❷ : EDO du premier ordre. [23 points]

1. [4 points] Calculer toutes les solutions de l'EDO

$$y''(x) + y(x) = 3\cos x.$$

2. [6 points] Calculer, en fonction du paramètre α, la solution $y = y(x)$ de l'EDO

$$y'(t) = (2+\alpha)y(t) - 2e^{\alpha t}$$

telle que $y(0) = 3$. Établir ensuite pour quels valeurs de α l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} y(t)\,\mathrm{d}t$$

est convergente.

3. [6 points] Le carbone 14 est un isotope présent dans tout organisme vivant. Le nombre d'atomes de carbone 14 est constant tant que l'organisme est en vie. À la mort de l'organisme, le nombre d'atomes décroît avec une vitesse proportionnelle au nombre d'atomes. On note $n(t) > 0$ le nombre d'atomes au temps t, exprimé en années, après la mort de l'organisme. Ce mécanisme se traduit par l'équation

$$n'(t) = -kn(t)$$

où k est une constante positive.

3.1. Trouver toutes les solutions de l'EDO.

3.2. Sachant qu'il faut 5700 ans pour que la quantité de carbone 14 diminue de moitié dans un organisme mort, calculer k.

3.3. Des ossements anciens récemment exhumés contiennent 9 fois moins de carbone 14 que des ossements similaires d'aujourd'hui. Déterminer l'âge des ossements exhumés.

4. [7 points] Deux produits chimiques présents dans une cuve avec une concentration de 1g/l à l'instant $t = 0$ interagissent et produisent une substance dont la concentration est notée $y(t)$ à l'instant $t \geq 0$. On suppose que $y(t)$ est régie par l'équation différentielle

$$y'(t) = (1 - y(t))^2 \qquad \text{pour tout } t \geq 0.$$

4.1. Montrer que toute solution de l'EDO est une fonction croissante.

4.2. Chercher les solutions constantes de l'EDO.

4.3. Considérons la solution y telle que $y(0) = 0$. Montrer que l'on a $0 < y(t) < 1$ pour tout $t > 0$. (On admettra que les graphes de deux solutions distinctes ne se coupent pas et on pourra s'aider d'un dessin.)

4.4. Considérons la solution y telle que $y(0) = 0$. Montrer que $\lim_{t\to+\infty} y(t) = \ell$ existe. Puis, en admettant que $\lim_{t\to+\infty} y'(t) = 0$, déterminer ℓ.

4.5. Calculer la solution lorsque $y(0) = 0$, lorsque $y(0) = 1$ et lorsque $y(0) = 2$. Dans chaqun de ces cas établir l'intervalle maximale d'existence.

Solution de l'exercice ❶.

Posons $\omega_1 = \frac{y}{x^2+y^2}$ et $\omega_2 = -\frac{x}{x^2+y^2}$.

1. La forme différentielle est fermée car
$$\frac{\partial \omega_1}{\partial y} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial \omega_2}{\partial x}.$$
2. Puisque ω est définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, la forme **peut** ne pas être exacte. On a deux possibilité pour démontrer qu'elle n'est pas exacte : soit on prouve qu'elle n'admet pas de potentiel (difficile), soit qu'il existe une courbe fermée le longue de laquelle la circulation de ω est non nulle. Puisque ω est fermée, l'unique possibilité pour trouver une courbe fermée le longue de laquelle la circulation de ω est non nulle est de considérer une courbe qui tourne autour du point $(0,0)$ (car si elle ne tourne pas autour de ce point, alors il existe toujours un sous-ensemble simplement connexe du domaine de définition de ω qui contient la courbe et dans ce sous-ensemble la forme est exacte donc la circulation sera nulle). Soit γ le cercle de centre l'origine et rayon unitaire
$$\gamma(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta), \qquad \gamma'(\theta) = (-\sin\theta, \cos\theta), \qquad \theta \in [0, 2\pi]$$
et calculons la circulation de ω sur γ :
$$\oint_\gamma \omega = \int_0^{2\pi} \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta + \sin^2\theta}(-\sin\theta) + \frac{-\cos\theta}{\cos^2\theta + \sin^2\theta}(\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} -1\,\mathrm{d}\theta = -2\pi \neq 0.$$
3. On en déduit que
   - si $r > 1$ alors $\oint_{\gamma_r} \vec{V}(t)dt = -2\pi$ (car la circulation le longue de courbes homotopes est la même et γ_r est homotope à la courbe γ du point précédent si $r > 1$),
   - si $0 < r < 1$ alors $\oint_{\gamma_r} \vec{V}(t)dt = 0$ car γ_r est contenue dans un sous-ensemble simplement connexe de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et ω est fermée donc exacte dans ce sous-ensemble.

Solution de l'exercice ❷.

1. Il s'agit d'une «EDO linéaire du second ordre à coefficients constants» :
$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = g(x).$$
Il faut calculer d'abord l'intégrale générale de l'équation homogène et ensuite un intégrale particulier de l'équation complète.
   - Intégrale générale de l'équation homogène : $y_H(x, C_1, C_2)$.
   Soit $\Delta = a^2 - 4b$, alors
     - si $\Delta > 0$ on a
     $$y_H(x, C_1, C_2) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}, \qquad \lambda_1 = \frac{-a-\sqrt{\Delta}}{2}, \qquad \lambda_2 = \frac{-a+\sqrt{\Delta}}{2};$$
     - si $\Delta = 0$ on a
     $$y_H(x, C_1, C_2) = (C_1 + C_2 x)e^{\lambda x}, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}, \qquad \lambda = -\frac{a}{2};$$
     - si $\Delta < 0$ on a
     $$y_H(x, C_1, C_2) = e^{\sigma x}(C_1 \cos(\omega x) + C_2 \sin(\omega x)), \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}, \qquad \sigma = -\frac{a}{2}, \qquad \omega = \frac{\sqrt{|\Delta|}}{2}.$$
   - Intégrale particulier de l'équation complète : $y_P(x)$.
   Si $g(x) = p_n(x)e^{\mu x}\cos(\theta x)$ ou $g(x) = p_n(x)e^{\mu x}\sin(\theta x)$ alors
   $$y_P(x) = x^m e^{\mu x}(q_{1,n}(x)\cos(\theta x) + q_{2,n}(x)\sin(\theta x))$$
   où p_n, $q_{1,n}$ et $q_{2,n}$ sono des polynômes de degré n et on a
     - si $\Delta > 0$ et $\theta = 0$ et $\mu = \lambda_1$ ou $\mu = \lambda_2$ alors $m = 1$;
     - si $\Delta = 0$ et $\theta = 0$ et $\mu = \lambda$ alors $m = 2$;
     - si $\Delta < 0$ et $\theta = \omega$ et $\mu = \sigma$ alors $m = 1$;
     - sinon $m = 0$.

   L'intégrale générale de l'EDO assignée est donc
   $$y(x, C_1, C_2) = y_H(x, C_1, C_2) + y_P(x).$$
   Suivons cette démarche pour l'EDO donnée.
   - Recherche de l'intégrale générale de l'équation homogène.
   L'équation caractéristique $\lambda^2 + 1 = 0$ a discriminant $\Delta = -4$. On a $\sigma = 0$ et $\omega = 1$. Donc l'intégrale générale de l'équation homogène est
   $$y_H(x, c_1, c_2) = c_1 \cos x + c_2 \sin x, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

– Recherche d'un intégrale particulier de l'équation complète.
Puisque $\mu = \sigma = 0$, on cherche l'intégrale particulier sous la forme

$$y_P(x) = x(\alpha \cos x + \beta \sin x).$$

On a alors

$$\begin{aligned} y'_P(x) &= (\alpha + \beta x)\cos x + (\beta - \alpha x)\sin x, \\ y''_P(x) &= (2\beta - \alpha x)\cos x - (2\alpha - \beta x)\sin x. \end{aligned}$$

On les remplace dans l'équation :

$$y''_P(x) + y_P(x) = 3\cos x \qquad \Longrightarrow \qquad (2\beta - \alpha x)\cos x - (2\alpha - \beta x)\sin x + x(\alpha\cos x + \beta \sin x) = 3\cos x$$

d'où $\alpha = 0$ et $\beta = \frac{3}{2}$.

L'intégrale générale de l'EDO assignée est donc

$$y(x, c_1, c_2) = y_H(x, c_1, c_2) + y_P(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \frac{3}{2} x \cos x, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

2. Il s'agit d'un problème de Cauchy avec une CI $y(t_0) = y_0$ et une «EDO linéaire du premier ordre» :

$$y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$$

qui a comme solution

$$y(t) = \left(e^{-\int_{t_0}^t a(v)\,\mathrm{d}v}\right)\left(y_0 + \int_{t_0}^t e^{\int_{w_0}^v a(u)\,\mathrm{d}u} b(v)\,\mathrm{d}v\right)$$

On calcul les deux intégrales :

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t a(v)\,\mathrm{d}v &= \int_0^t -(2+\alpha)\,\mathrm{d}v = [-(2+\alpha)v]_0^t = -(2+\alpha)t, \\ \int_{t_0}^t e^{-\int_{w_0}^w a(w)\,\mathrm{d}w} b(v)\,\mathrm{d}v &= \int_0^t -2e^{-(2+\alpha)v+\alpha v}\,\mathrm{d}v = \int_0^t -2e^{-2v}\,\mathrm{d}v = \left[e^{-2v}\right]_0^t = e^{-2t} - 1. \end{aligned}$$

La solution du problème de Cauchy est donc la fonction

$$y(t) = e^{(2+\alpha)t}(3 + e^{-2t} - 1) = e^{\alpha t} + 2e^{(2+\alpha)t} = e^{\alpha t}(1 + 2e^{2t}).$$

L'intégrale

$$\int_0^{+\infty} e^{\alpha t}(1 + 2e^{2t})\,\mathrm{d}t$$

converge ssi $\alpha < -2$.

3. 3.1. Il s'agit d'une «EDO du premier ordre à variables séparables». Si $n(t) \equiv c$ est solution alors $0 = -kc$ d'où $c = 0$: l'unique solution constante est la solution $n(t) = 0$ quelque soit $t \in \mathbb{R}^+$.
Si $n(t) \neq 0$, on peut écrire

$$\frac{n'(t)}{n(t)} = -k$$

d'où la famille de solutions

$$n(t) = De^{-kt}, \qquad D \in \mathbb{R}^+.$$

On conclut que, quelque soit la condition initiale $n(0) = n_0 \geq 0$, l'unique solution est $n(t) = n_0 e^{-kt}$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$.

3.2. Puisque $n_0/2 = n(5700) = n_0 e^{-5700t}$, on obtient $k = \ln 2^{-5700} \approx 1.216\ 10^{-4}$.

3.3. Puisque $n_0/9 = n(\hat{t}) = n_0 e^{-k\hat{t}}$, on obtient $\hat{t} = 5700 \frac{\ln 9}{\ln 2} \approx 18000$ ans.

4. 4.1. Pour montrer qu'une fonction est croissante il suffit de montrer que sa dérivée est de signe positif. Si y est solution de l'EDO on a

$$y'(t) = (1 - y(t))^2 \geq 0 \qquad \text{pour tout } t \geq 0$$

car un carré est toujours positif. y est donc une fonction croissante.

4.2. On cherche les fonctions constantes solution de l'EDO. Si $f(t) = c$ est solution de l'EDO alors puisque $f'(t) = 0$ on obtient

$$0 = (1 - c)^2$$

soit $c = 1$. La seule fonction constante solution de l'EDO est la fonction constante egale a 1.

4.3. Considérons la solution y telle que $y(0) = 0$. Tout d'abord on a montré que la fonction y était croissante donc $y(0) \leq y(t)$ pout tout $t \geq 0$, par conséquent, puisque $0 \leq y(0)$, $y(t) \geq 0$ pour tout $t \geq 0$. Supposons qu'il existe un t_0 tel que $y(t_0) \geq 1$, alors le graphe de y qui relie continument les points $(0, y(0))$ et $(t_0, y(t_0))$ coupe nécessairement le graphe de f, i.e. la droite d'équation $y = 1$. Ceci est impossible, car les graphes de deux solutions distinctes ne se coupent jamais. Il n'existe donc pas de t_0 tel que $y(t_0) \geq 1$, c'est-à-dire pour tout $t \geq 0$, $y(t) < 1$.

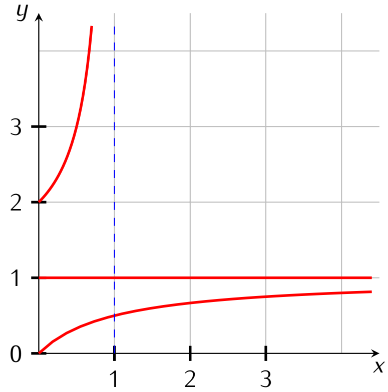
4.4. Considérons la solution y telle que $y(0) = 0$.

La fonction y est croissante et majorée par 1, elle admet donc une limite pour $t \to +\infty$. On note $\lim_{t\to+\infty} y(t) = \ell$. On suppose que $\lim_{t\to+\infty} y'(t) = \ell$. En passant à la limite dans l'EDO on obtient :

$$0 = (1-\ell)^2$$

soit $\ell = 1$.

4.5.
- Si $y(0) = 1$ on sait que $y(t) = 1$ pour tout $t > 0$.
- Si $y(0) = 0$ on sait que la fonction y est croissante et $\lim_{t\to+\infty} y'(t) = 1$. En effet, il s'agit d'une EDO à variables séparables et on peut écrire
$$\int (1-y)^{-2}\,\mathrm{d}y = t, \quad \text{i.e.} \quad y(t) = \frac{t+c-1}{t+c}$$
qui existe sur $]-\infty; -c[\cup]-c; +\infty[$, d'où, en imposant $y(0) = 0$, la solution
$$y(t) = \frac{t}{1+t}, \qquad \forall t \geq 0.$$
- Si $y(0) = 2$ on sait que la fonction y est croissante mais elle n'existe que pour $0 < t < 1$ et on a
$$y(t) = \frac{t-2}{t-1}.$$



M231 - L1 PC - Examen du 21 mai 2010

- ▷ Durée de l'épreuve : 3 heures.
- ▷ Ce sujet comporte 5 exercices indépendants.
- ▷ **Documents et calculatrices autorisés.**

⋆ Rendre l'énoncé avec la copie.

- ▶ *On attachera le plus grand soin à la rédaction et à la présentation claire et lisible des résultats dont il sera tenu compte lors de la correction. Aucun raisonnement vague ou insuffisant ne sera pris en compte.* ***Une grande valeur sera attribuée à la rigueur des raisonnements.***
- ▶ ***Le texte est long, mais il n'est pas nécessaire de tout faire pour obtenir la note maximale.*** *(Le barème est donné à titre indicatif et est susceptible de varier.)*
- ▶ *Toute question où les notations de l'énoncé ne seraient pas respectées se verra attribuer la note zéro.*

ℹ La solution sera publiée à 14H sur ma page web : `http://faccanoni.univ-tln.fr`

Exercice ❶ : /4	Exercice ❷ : /6	Exercice ❸ : /7	Exercice ❹ : /5	Exercice ❺ : /6
1. /1	1. /3	1. /6	1. /3	1. /2
2. /2	2. /3	2. /1	2. /2	2. /4
3. /1				

Examen du 21 mai 2010

Exercice ❶ : continuité, dérivabilité, différentiabilité. [4 points]

Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction ainsi définie

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{y^4}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

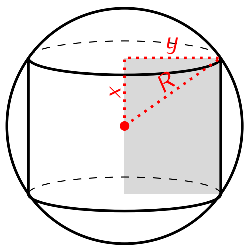
1. [1 point] La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$? Justifier la réponse.
2. [2 points] Calculer $\nabla f(x,y)$ pour $(x,y)\neq(0,0)$; calculer ensuite $\nabla f(0,0)$. La fonction f est-elle de classe $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2)$? Justifier la réponse.
3. [1 point] La fonction f est-elle différentiable sur $\mathbb{R}^2$? Justifier la réponse.

Exercice ❷ : extrema libres, extrema liés. [6 points]

Trouver le cylindre de volume maximal inscrit dans une sphère de rayon $R>0$ fixé…

1. [3 points]…avec la méthode des multiplicateurs de Lagrange (i.e. minimisation d'une fonction $f(x,y)$ sous une contrainte $g(x,y)=0$) [NB : on se contentera de trouver le point critique] ;
2. [3 points] …avec la méthode des extrema libres en éliminant une variable de la contrainte (par exemple en minimisant une fonction $h(x)=f(x,y(x))$) [NB : après avoir trouvé le point critique, établir sa nature].

Suggestion : voir la figure ci-contre pour déduire la contrainte.



Exercice ❸ : «Les experts - Toulon» et «Un gâteau presque parfait». [7 points]

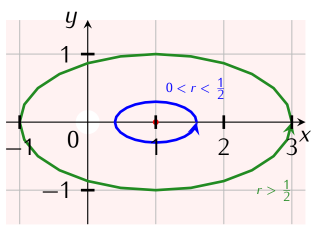
1. [6 points] Le corps de la victime a été trouvé sur le lieu du crime à 2H20 de nuit. Après une demi-heure la température du corps est de 15. Quand a eu lieu l'homicide si à l'heure de la découverte la température du corps est de 20 et si la température externe est de -5 ?
2. [1 point] Un gâteau est sorti du four à 17H00 quand il est brûlant (100). Après 10 minutes sa température est de 80 et de 65 à 17H20. Déterminer la température de la cuisine.

Suggestion : se rappeler la loi de Newton qui dit que la vitesse de refroidissement est proportionnelle à la différence des températures.

Exercice ❹ : champs de vecteurs. [5 points]

1. [3 points] Établir si le champ de vecteurs suivant est conservatif sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$:

$$\vec{V}=\frac{x^3+xy^2+y}{x^2+y^2}\vec{\imath}-\frac{x+3x^2y+3y^3}{x^2+y^2}\vec{\jmath}.$$



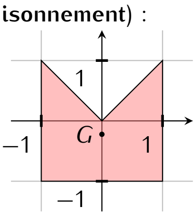
2. [2 points] Soit γ_r la famille de courbes

$$\gamma_r(t)=(1+2r\cos(t),r\sin(t)),\qquad t\in[0,2\pi],\quad r>0,\ r\neq\frac{1}{2}.$$

Calculer $\displaystyle\oint_{\gamma_r}\vec{V}(t)dt$ en fonction de r. Suggestion : voir la figure ci-contre.

Exercice ❺ : intégrales doubles et triples, intégrales généralisées. [6 points]

1. [2 points] Calculer les coordonnées du centre de gravité G de la plaque en figure supposée homogène (éviter le calcul d'intégrales lorsqu'il est possible, mais **justifier le raisonnement**) :



2. [4 points] Calculer

$$\iiint_{\mathcal{D}}\frac{1}{(4-z)^2\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\qquad\text{où}\qquad \mathcal{D}=\{(x,y,z)\ :\ 1<x^2+y^2<5-z\}.$$

Solution de l'exercice ❶

1. [1 point] La fonction est clairement continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. De plus

$$\frac{y^4}{x^2+y^2} = \frac{(r\sin\theta)^4}{(r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2} = r^2\sin^4\theta \le r^2 \xrightarrow[r\to 0]{} 0$$

d'où

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0).$$

f est donc continue sur $\mathbb{R}^2$.

2. [2 points] $\vec{\nabla} f(x,y)$ est le vecteur de composantes $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ et on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{-2xy^4}{(x^2+y^2)^2}, & \text{si } (x,y)\neq(0,0),\\ \displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = 0, & \text{sinon;}\end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} 2y^3\dfrac{2x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}, & \text{si } (x,y)\neq(0,0),\\ \displaystyle\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = 0, & \text{sinon.}\end{cases}$$

Étant donné que

$$\left|\frac{-2xy^4}{(x^2+y^2)^2}\right| = 2\left|\frac{(r\cos\theta)(r\sin\theta)^4}{((r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2)^2}\right| \le 2r \xrightarrow[r\to 0]{} 0$$

et

$$\left|\frac{2y^3(2x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}\right| = 2\left|\frac{(r\sin\theta)^3(2(r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2)^2}{((r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2)^2}\right| \le 18r^3 \xrightarrow[r\to 0]{} 0$$

on a

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0),$$
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0).$$

La fonction f est donc de classe $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2)$.

3. [1 point] Étant de classe $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2)$, f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$. Si on ne se rappelle pas du théorème on peut le vérifier directement par la définition : une application $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est différentiable en $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ ssi

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y)-f(x_0,y_0)-f'_x(x_0,y_0)(x-x_0)-f'_y(x_0,y_0)(y-y_0)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$

On a bien

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y)-f(x_0,y_0)-f'_x(x_0,y_0)(x-x_0)-f'_y(x_0,y_0)(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^4}{(x^2+y^2)^{3/2}} = 0$$

car

$$\frac{y^4}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \frac{(r\sin\theta)^4}{((r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2)^{3/2}} \le r \xrightarrow[r\to 0]{} 0.$$

Solution de l'exercice ❷

Notons $y>0$ le rayon de base du cylindre et $x>0$ la demi-hauteur du cylindre.

1. [3 points] Avec la méthode des multiplicateurs de Lagrange il s'agit de maximiser la fonction $f(x,y)=2\pi xy^2$ sous la contrainte $g(x,y)=R^2-x^2-y^2=0$. On écrit la fonction de Lagrange

$$F(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x,y) = 2\pi xy^2 - \lambda(R^2-x^2-y^2)$$

et on cherche les points critiques de F :

$$\vec{\nabla}F(x,y,\lambda) = \begin{pmatrix} 2\pi y^2 + 2\lambda x\\ 4\pi xy + 2\lambda y\\ x^2+y^2-R^2\end{pmatrix}.$$

On a $\vec{\nabla}F(x,y,\lambda)=\vec{0}$ ssi $(x,y,\lambda) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}R, \sqrt{\frac{2}{3}}R, -\pi\frac{2}{\sqrt{3}}R\right)$.

2. [3 points] Avec la méthode des extrema libres il s'agit d'éliminer une variable de la contrainte, par exemple en posant $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ et on minimise la fonction $h(x) = f(x, y(x))$:

$$h(x) = f(x, \sqrt{R^2 - x^2}) = 2\pi x(R^2 - x^2).$$

On cherche d'abord les points critiques :

$$h'(x) = 2\pi(R^2 - 3x^2)$$

et $h'(x) = 0$ ssi $x = \frac{R}{\sqrt{3}}$. On étudie la nature du point critique en étudiant la dérivée seconde :

$$h''(x) = -12\pi x, \qquad h''\left(\frac{R}{\sqrt{3}}\right) < 0$$

donc $x = \frac{R}{\sqrt{3}}$ est un maximum.

Solution de l'exercice ❸

La loi de Newton affirme qu'il existe une constante $K < 0$ telle que la température du corps suit l'EDO

$$T'(t) = K(T(t) - T_{\text{externe}}).$$

On commence par calculer toutes les solutions de l'EDO. Étant une équation différentielle du premier ordre, la famille de solutions dépendra d'une constante D qu'on fixera en utilisant la CI.

– On cherche d'abord les solutions constantes, i.e. les solutions du type $T(t) \equiv c \in \mathbb{R}$ quelque soit t. On a

$$0 = K(c - T_{\text{externe}})$$

d'où l'unique solution constante $T(t) \equiv T_{\text{externe}}$.

– Soit $T(t) \not\equiv T_{\text{externe}}$ quelque soit t. Puisqu'il s'agit d'une EDO à variables séparables on peut calculer la solution comme suit :

$$\begin{aligned}
T'(t) &= K(T(t) - T_{\text{externe}}) \\
\frac{T'(t)}{T(t) - T_{\text{externe}}} &= K \\
\frac{\mathrm{d}\,T}{T - T_{\text{externe}}} &= K\mathrm{d}\,t \\
\int \frac{1}{T - T_{\text{externe}}}\mathrm{d}\,T &= K \int \mathrm{d}\,t \\
\ln(T - T_{\text{externe}}) &= Kt + c \\
T - T_{\text{externe}} &= De^{Kt} \\
T(t) &= T_{\text{externe}} + De^{Kt}
\end{aligned}$$

La valeur numérique de la constante d'intégration D est obtenue grâce à la CI :

$$\begin{aligned}
T_0 = T(0) &= T_{\text{externe}} + De^{K\cdot 0} \\
D &= T_0 - T_{\text{externe}} \\
T(t) &= T_{\text{externe}} + (T_0 - T_{\text{externe}})e^{Kt}
\end{aligned}$$

Utilisons cette fonction pour répondre aux deux questions de l'exercice.

1. [6 points] Ici $T_{\text{externe}} = -5$ et $T_0 = 20$ donc la température du cadavre suit la loi

$$T(t) = -5 + 25e^{Kt}.$$

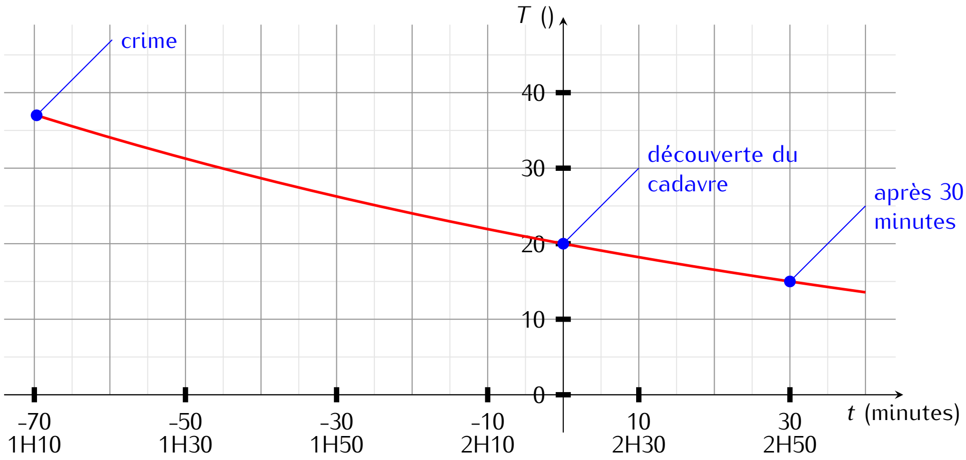
De plus, on sait que $15 = T(30) = -5 + 25e^{30K}$ d'où $K = \frac{\ln(4/5)}{30}$. La température du corps suit donc la loi

$$T(t) = -5 + 25e^{\frac{\ln(4/5)}{30}t}.$$

Pour déterminer l'heure du meurtre il faut donc résoudre l'équation

$$37 = -5 + 25e^{\frac{\ln(4/5)}{30}t}$$

d'où $t = 30\frac{\ln(42/25)}{\ln(4/5)} \sim -69{,}7$ minutes, c'est-à-dire à 1H10 de nuit.

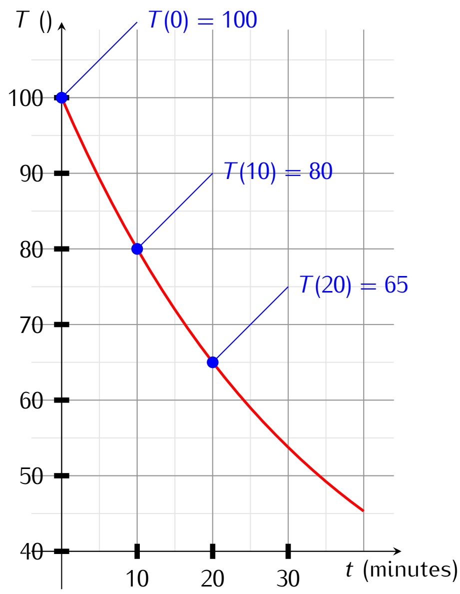


2. [1 point] Ici l'inconnue est T_{externe}. On sait que $T(t=0)=100$ et $T(t=10)=80$ et $T(t=20)=65$. Il s'agit donc de résoudre le système de trois équations en les trois inconnues K, D, T_{externe} :

$$\begin{cases} 100 &= T_{\text{externe}} + D, \\ 80 &= T_{\text{externe}} + De^{10K}, \\ 65 &= T_{\text{externe}} + De^{20K}. \end{cases}$$

La cuisine est donc à 20 et, plus en générale, la température du gâteau évolue selon la loi

$$T(t) = 20 + 80e^{\frac{\ln(3/4)}{10}t}.$$



Solution de l'exercice ❹

Remarquons que le champ de vecteurs peut être mis sous la forme

$$\vec{V} = \left[x + \frac{y}{x^2+y^2}\right]\vec{\imath} + \left[3y - \frac{x}{x^2+y^2}\right]\vec{\jmath}.$$

1. [3 points] Commençons d'abord par vérifier si les deux conditions pour la conservativité sont vérifiées.
   – CN1 : irrotationalité du champ de vecteurs
   $$\frac{\partial V_1}{\partial y} = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \frac{\partial V_2}{\partial x}.$$
   Le champ de vecteurs $\vec{V}$ est bien irrotationnel.
   – CN2 : circulation de $\vec{V}$ sur une courbe fermée quelconque. Considérons la courbe fermée $\ell(t) = (\cos t, \sin t)$ pour $t \in [0, 2\pi]$, alors
   $$\oint_\ell \vec{V}(t)dt = \int_0^{2\pi} (\cos t + \sin t)(-\sin t) - (3\sin t - \cos t)(\cos t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} 2\cos t \sin t - 1\,\mathrm{d}t = -2\pi \neq 0.$$
   La circulation sur au moins une courbe fermée qui tourne autour du point $(0,0)$ est non nulle.

   On conclut que $\vec{V}$ est irrotationnel (et donc conservatif sur tous sous ensemble simplement connexe de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$) mais non conservatif sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

2. [2 points] On en déduit que
   - si $r > 1/2$ alors $\oint_{\gamma_r} \vec{V}(t)dt = -2\pi$ (car la circulation le long de courbes homotopes est la même et γ_r est homotope à la courbe γ du point précédent si $r > 1/2$),
   - si $0 < r < 1/2$ alors $\oint_{\gamma_r} \vec{V}(t)dt = 0$ car γ_r est contenue dans un sous-ensemble simplement connexe de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et $\vec{V}$ est irrotationnel donc conservatif dans ce sous-ensemble.

Solution de l'exercice ❺

1. [2 points] Pour calculer les coordonnées (x_G, y_G) du centre de gravité on doit calculer d'abord les trois intégrales doubles suivantes :

$$\iint_{\mathcal{D}} 1 \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0}\int_{-1}^{-x} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{1}\int_{-1}^{x} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0}(-x+1)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{1}(x+1)\,\mathrm{d}x = 3,$$

$$\iint_{\mathcal{D}} x \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0}\int_{-1}^{-x} x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{1}\int_{-1}^{x} x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0}(-x^2+x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{1}(x^2+x)\,\mathrm{d}x = 0,$$

$$\iint_{\mathcal{D}} y \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0}\int_{-1}^{-x} y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{1}\int_{-1}^{x} y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-1}^{0}(x^2-1)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_{0}^{1}(x^2-1)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(x^2-1)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3}-x\right]_{-1}^{1} = -\frac{2}{3}$$

   et on en déduit que

$$x_G = \frac{\iint_{\mathcal{D}} x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x}{\iint_{\mathcal{D}} 1\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x} = 0, \quad y_G = \frac{\iint_{\mathcal{D}} y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x}{\iint_{\mathcal{D}} 1\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x} = -\frac{2}{9}.$$

   En fait, seul la dernière des trois intégrales est nécessaire car la première correspond à l'aire de la figure qu'on peut calculer géométriquement et la deuxième est forcément nulle car le centre de gravité appartient à l'axe des y par symétrie.

2. [4 points] On doit calculer l'intégrale triple

$$\iiint_{\mathcal{D}} \frac{1}{(4-z)^2\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

   où le domaine $\mathcal{D}$ est décrit, en coordonnées cartésiennes, par

$$\mathcal{D} = \{(x,y,z) \;:\; 1 < x^2+y^2 < 5-z\}.$$

   On passe en coordonnées cylindriques :

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta, \\ z = t, \end{cases}$$

   et le jacobien du changement de variables est r. Alors

$$\mathcal{D} = \{(r,\theta,t) \in \mathbb{R}^+ \times [0,2\pi] \times \mathbb{R} \;:\; 1 < r^2 < 5-t\}$$

   i.e.

$$\mathcal{D} = \{(r,\theta,t) \in \mathbb{R}^+ \times [0,2\pi] \times \mathbb{R} \;:\; r > 1 \text{ et } t < 5-r^2\}$$

   et on a

$$\begin{aligned}\iiint_{\mathcal{D}} \frac{1}{(4-z)^2\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z &= \int_{0}^{2\pi}\int_{1}^{+\infty}\int_{-\infty}^{5-r^2} \frac{1}{(4-t)^2 r} r\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta \\ &= 2\pi\int_{1}^{+\infty}\left[-\frac{1}{4-t}\right]_{t\to-\infty}^{t=5-r^2}\mathrm{d}r \\ &= -2\pi\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{r^2-1}\,\mathrm{d}r \\ &= \infty.\end{aligned}$$

M231 - L1 PC - Rattrapage du 28 juin 2010

▷ Durée de l'épreuve : 2 heures.
▷ Ce sujet comporte 5 exercices indépendants.
▷ **Documents et calculatrices autorisés.**
⋆ Rendre l'énoncé avec la copie.
▶ *On attachera le plus grand soin à la rédaction et à la présentation claire et lisible des résultats dont il sera tenu compte lors de la correction. Aucun raisonnement vague ou insuffisant ne sera pris en compte.* ***Une grande valeur sera attribuée à la rigueur des raisonnements.***
▶ ***Le texte est long, mais il n'est pas nécessaire de tout faire pour obtenir la note maximale.*** *(Le barème est donné à titre indicatif et est susceptible de varier.)*
▶ *Toute question où les notations de l'énoncé ne seraient pas respectées se verra attribuer la note zéro.*
ℹ La solution sera publiée ce soir sur ma page web : `http://faccanoni.univ-tln.fr`

Exercice ❶ : ___/4	Exercice ❷ : ___/6	Exercice ❸ : ___/5	Exercice ❹ : ___/6	Exercice ❺ : ___/10
1. ___/1	1. ___/3	1. ___/1	1. ___/1	1. ___/2
2. ___/2	2. ___/3	2. ___/2	2. ___/1	2. ___/4
3. ___/1		3. ___/2	3. ___/1	3. ___/4
			4. ___/1	
			5. ___/1	
			6. ___/1	

Rattrapage du 28 juin 2010

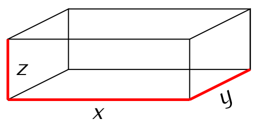
Exercice ❶ : continuité, dérivabilité, différentiabilité. [4 pt]

Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction ainsi définie

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1. [1 pt] La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$? Justifier la réponse.
2. [2 pt] Calculer $\nabla f(x,y)$ pour $(x,y) \neq (0,0)$; calculer ensuite $\nabla f(0,0)$.
3. [1 pt] La fonction f est-elle différentiable sur $\mathbb{R}^2$? Justifier la réponse.

Exercice ❷ : extrema libres, extrema liés. [6 pt]



Trouver le parallélépipède de volume 1 dont la somme des longueurs des arrêtes est minimale ...

1. [3 pt] ...avec la méthode des multiplicateurs de Lagrange (i.e. minimisation d'une fonction $f(x,y,z)$ sous une contrainte $g(x,y,z) = 0$; on se contentera de trouver le point critique) ;
2. [3 pt] ...avec la méthode des extrema libres en éliminant une variable de la contrainte (par exemple en minimisant une fonction $h(x,y) = f(x,y,z(x,y))$) [*NB : après avoir trouvé le point critique, établir sa nature*].

Exercice ❸ : formes différentielles. [5 pt]

Considérons la forme différentielle

$$\omega(x,y) = -\frac{1}{(x-y)^2}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{(x-y)^2}\,\mathrm{d}y.$$

1. [1 pt] Trouver le domaine de définition de ω (qu'on notera $\mathcal{D}_\omega$).
2. [2 pt] Établir si ω est exacte sur son domaine de définition.
3. [2 pt] Soit γ_r la famille de courbes

$$\gamma_r(\phi) = (2 + r\cos(\phi), -2 + r\sin(\phi)), \qquad \phi \in [0, 2\pi], \; r > 0.$$

Pour quels valeurs de r on a $\gamma_r \subset \mathcal{D}_\omega$? Pour ces valeurs calculer $\displaystyle\oint_{\gamma_r} \omega(\phi)\,\mathrm{d}\phi$.

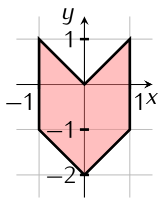
Exercice ❹ : problèmes de Cauchy. [6 pt]

Un modèle pour la diffusion d'une épidémie se base sur l'hypothèse que sa vitesse de propagation est proportionnelle au nombre d'individus infectés et au nombre d'individus sains. Si la ville est isolée et compte 5 000 individus dont 160 sont malades et 1 200 le sont 7 jours après, à partir de quel jour l'infection touchera 80% de la population ? Et 100% ?

Suggestion : si on note $I(t)$ le nombre d'individus infectés à l'instant t et I_T le nombre d'individus total, il existe une constante $k \in \mathbb{R}$ telle que $I'(t) = kI(t)(I_T - I(t))$.

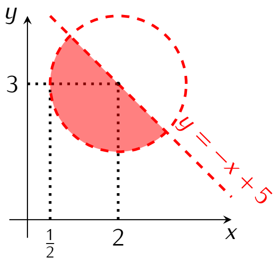
Exercice ❺ : intégrales doubles et triples, intégrales généralisées. [10 pt]

1. [2 pt]



Calculer les coordonnées du centre de gravité de la plaque en figure supposée homogène (vous pouvez éviter le calcul d'intégrales, mais **justifiez votre raisonnement**).

2.



Soit $\mathcal{D}$ la partie coloriée en figure.
– [1 pt] Décrire $\mathcal{D}$ en coordonnées cartésiennes.
– [1 pt] Trouver un changement de variables adéquat pour décrire $\mathcal{D}$ en coordonnées polaires.
– [2 pt] Calculer $\displaystyle\iint_{\mathcal{D}} \frac{x-y}{(x-2)^2+(y-3)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

3. [4 pt] Calculer $\displaystyle\iiint_{\mathcal{D}} \frac{1}{(4-y)^4\sqrt{x^2+z^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ où $\mathcal{D} = \{(x,y,z) \;:\; 5 - y < x^2 + z^2 < 1\}$.

Solution de l'exercice ❶

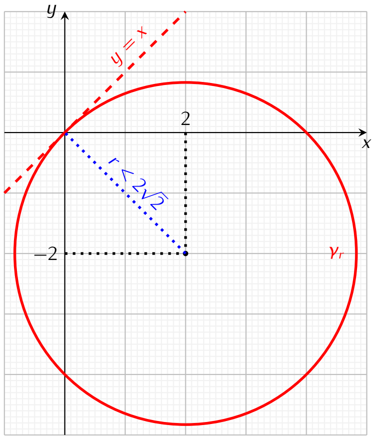
1. La fonction est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ mais elle n'est pas continue sur $\mathbb{R}^2$ car si on considère la restriction de f à la courbe $y = x$, qui passe par $(0,0)$, on a
$$\lim_{x\to 0} f(x,x) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2x} \neq f(0,0).$$
2. $\vec{\nabla} f(x,y)$ est le vecteur de composantes $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ et on a :
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{cases} \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ \lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = 0, & \text{sinon;} \end{cases} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ \nexists, & \text{sinon} \end{cases}$$
car $\lim\limits_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = \infty$.
3. N'étant pas continue, f n'est pas différentiable sur $\mathbb{R}^2$.

Solution de l'exercice ❷

1. Avec la méthode des multiplicateurs de Lagrange il s'agit de minimiser la fonction $f(x,y,z) = 4x + 4y + 4z$ sous la contrainte $g(x,y,z) = xyz - 1 = 0$. On écrit la fonction de Lagrange
$$F(x,y,z,\lambda) = f(x,y,z) - \lambda g(x,y,z) = 4(x+y+z) - \lambda(xyz-1)$$
et on cherche le(s) point(s) critique(s) de F :
$$\vec{\nabla} F(x,y,z,\lambda) = \begin{pmatrix} 4-\lambda yz \\ 4-\lambda xz \\ 4-\lambda xy \\ 1-xyz \end{pmatrix}.$$
On a $\vec{\nabla} F(x,y,z,\lambda) = \vec{0}$ ssi $(x,y,z,\lambda) = (1,1,1,4)$.
2. Avec la méthode des extrema libres il s'agit d'éliminer une variable de la contrainte, par exemple en posant $z = \frac{1}{xy}$, et de minimiser ensuite la fonction $h(x,y) = f(x,y,z(x,y))$:
$$h(x,y) = f\left(x, y, \frac{1}{xy}\right) = 4\left(x + y + \frac{1}{xy}\right).$$
On cherche d'abord le(s) point(s) critique(s) :
$$\vec{\nabla} h(x,y) = \begin{pmatrix} 4 - \frac{4}{x^2y} \\ 4 - \frac{4}{xy^2} \end{pmatrix}$$
et $\vec{\nabla} h(x,y) = \vec{0}$ ssi $(x,y) = (1,1)$. On établie la nature du point critique en étudiant le déterminant de la matrice hessienne :
$$f_{xx}(x,y) = \frac{8}{x^3y}, \qquad f_{yy}(x,y) = \frac{8}{xy^3}, \qquad f_{xy}(x,y) = \frac{4}{x^2y^2},$$
$$f_{xx}(1,1) = 8 > 0, \qquad f_{yy}(1,1) = 8, \qquad f_{xy}(1,1) = 4$$
et $f_{xx}(1,1)f_{yy}(1,1) - (f_{xy}(1,1))^2 = 48 > 0$ donc $(1,1)$ est un minimum.

Solution de l'exercice ❸

1. $\mathcal{D}_\omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq x\}$.
2. On remarque que $\mathcal{D}_\omega$ n'est pas simplement connexe. On commence alors par vérifier si la forme différentielle est fermée :
$$\frac{\partial \omega_1}{\partial y} = 2\frac{1}{(x-y)^3} = \frac{\partial \omega_2}{\partial x},$$
donc la forme différentielle ω est fermée. On va alors en chercher un potentiel, i.e. une fonction f telle que $\nabla f = \omega$:
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\frac{1}{(x-y)^2} \quad \text{donc} \quad f(x,y) = \frac{1}{x-y} + g(y) \quad \text{donc} \frac{1}{(x-y)^2} = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{(x-y)^2} + g'(y) \quad \text{donc}$$
$$g'(y) = 0 \quad \text{donc} \quad f(x,y) = \frac{1}{x-y} + c.$$
La forme différentielle est exacte sur $\mathcal{D}_\omega$ et un potentiel est $f(x,y) = \frac{1}{x-y}$.
3. Les courbes γ_r sont les cercles de centre $(2,-2)$ et rayon r. Pour que γ_r soit contenue dans $\mathcal{D}_\omega$ il faut alors que $r < \text{dist}\Big((2,-2); y = x\Big) = 2\sqrt{2}$. Puisque toute γ_r est contenue dans un sous-ensemble simplement connexe de $\mathcal{D}_\omega$ et puisque ω est fermée, elle est exacte dans ce sous-ensemble. On en déduit que $\oint_{\gamma_r} \omega(t)dt = 0$.



Solution de l'exercice ❹

On a le problème de Cauchy

$$\begin{cases} I'(t) = kI(t)(5000 - I(t)), & \text{(EDO)} \\ I(0) = 160. & \text{(CI)} \end{cases}$$

Vu la nature de la question on ne s'intéresse qu'aux solutions positive et que pour $t > 0$.

1. Tout d'abord on observe qu'il y a deux solutions constantes de l'EDO : la fonction $I(t) \equiv 0$ et la fonction $I(t) \equiv 5000$.
2. Pour chercher toutes les solutions non constantes on remarque qu'il s'agit d'une EDO à variables séparables donc on a

$$\begin{aligned}
I'(t) &= kI(t)(5000 - I(t)) \\
\frac{I'(t)}{I(t)(5000 - I(t))} &= k \\
\frac{\mathrm{d}\, I}{I(5000 - I)} &= k \mathrm{d}\, t \\
\int \frac{1}{I(5000 - I)} \mathrm{d}\, I &= k \int \mathrm{d}\, t \\
\int \frac{1}{I} \mathrm{d}\, I - \int \frac{1}{5000 - I} \mathrm{d}\, I &= 5000k \int \mathrm{d}\, t \\
\ln(I) + \ln(5000 - I) &= 5000kt + c \\
\ln \frac{I}{5000 - I} &= 5000kt + c \\
\frac{I}{5000 - I} &= De^{5000kt} \\
I(t) &= \frac{5000De^{5000kt}}{1 + De^{5000kt}} \\
I(t) &= \frac{5000}{De^{-5000kt} + 1}
\end{aligned}$$

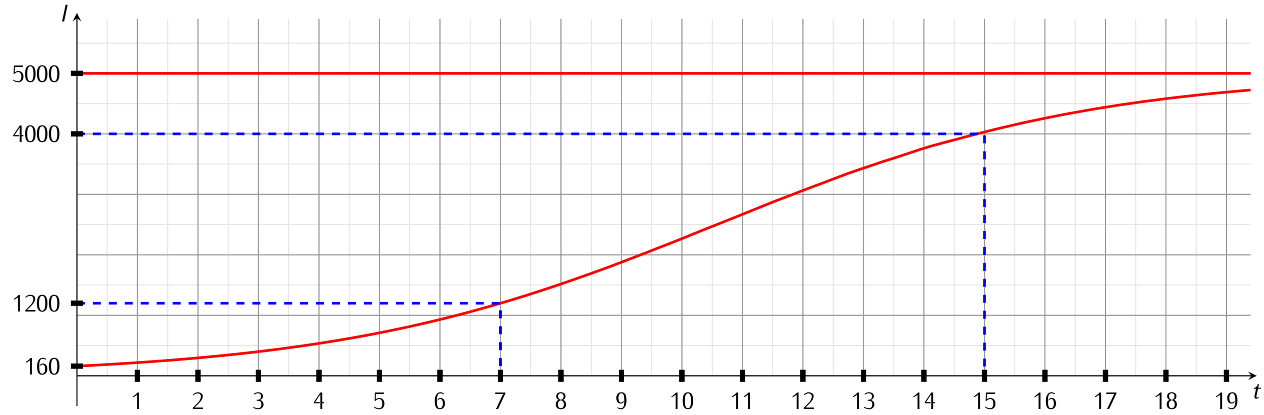
3. La valeur numérique de la constante d'intégration D est obtenue grâce à la CI :

$$\begin{aligned}
160 = I(0) &= \frac{5000}{De^0 + 1} \\
160 &= \frac{5000}{1 + D} \\
D &= \frac{4}{121} \\
I(t) &= \frac{20000}{4 + 121e^{-5000kt}}
\end{aligned}$$

4. Il ne reste qu'à établir la valeur numérique de la constante k grâce à l'information sur le nombre d'individus infectés après 7 jours :

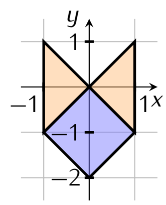
$$\begin{aligned}
1200 = I(7) &= \frac{20000}{4 + 121e^{-35000k}} \\
k &= \frac{1}{35000} \ln \frac{363}{38} \\
I(t) &= \frac{20000}{4 + 121e^{-\frac{t}{7} \ln \frac{363}{38}}}
\end{aligned}$$

5. On cherche $\bar{t}$ tel que $I(\bar{t}) = 80\% I_T = \frac{80\times 5000}{100} = 4000$:
$$4000 = \frac{20000}{4 + 121 e^{-\frac{\bar{t}}{7}\ln\frac{363}{38}}}$$
d'où $\bar{t} = \frac{1}{5000}\ln(121) \approx 15$ jours.
6. Avec ce modèle $\lim_{t\to+\infty} I(t) = 5000$ mais I ne peut jamais atteindre exactement 100% de la population en un temps fini (deux solution ne s'intersectent jamais).



Solution de l'exercice ❺

1. Pour calculer les coordonnées (x_G, y_G) du centre de gravité on doit calculer d'abord les trois intégrales doubles suivantes :
$$\iint_{\mathcal{D}} 1 \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0}\int_{-x-2}^{-x} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{1}\int_{x-2}^{x} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} 2\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} 2\,\mathrm{d}x = 4,$$
$$\iint_{\mathcal{D}} x \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0}\int_{-x-2}^{-x} x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{1}\int_{x-2}^{x} x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} 2x\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} 2x\,\mathrm{d}x = 0,$$
$$\iint_{\mathcal{D}} y \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0}\int_{-x-2}^{-x} y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{1}\int_{x-2}^{x} y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-1}^{0}(-4x-4)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_{0}^{1}(4x-4)\,\mathrm{d}x$$
$$= -2\int_{-1}^{0}(x+1)\,\mathrm{d}x + 2\int_{0}^{1}(x-1)\,\mathrm{d}x = -2$$
et on en déduit que
$$x_G = \frac{\iint_{\mathcal{D}} x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x}{\iint_{\mathcal{D}} 1\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x} = 0, \qquad y_G = \frac{\iint_{\mathcal{D}} y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x}{\iint_{\mathcal{D}} 1\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x} = -\frac{1}{2}.$$
En fait, aucune intégrale n'est nécessaire car
   - la première intégrale correspond à l'aire de la figure qu'on peut calculer géométriquement,
   - la deuxième intégrale est forcément nulle car le centre de gravité appartient à l'axe des y par symétrie donc $x_G = 0$,
   - la troisième intégrale n'est pas nécessaire car pour calculer y_G. Il suffit en effet de découper la plaque comme dans la figure ci-contre : la plaque supérieure a centre de gravité en $(0,0)$, la plaque inférieure a centre de gravité en $(-1,0)$ et les deux plaques ont la même aire donc la plaque totale a centre de gravité en $(0,-0{,}5)$ (ce raisonnement permet en effet de calculer directement x_G et y_G).



2. Le domaine d'intégration est le demi cercle de centre $(2,3)$ et rayon $r = \frac{3}{2}$ qui se trouve sous la droite d'équation $y = -x+5$, autrement dit
$$\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; (x-2)^2 + (y-3)^2 < \frac{9}{4},\; y < -x+5\}.$$
Avec le changement de variables
$$\begin{cases} x = 2 + r\cos\phi, \\ y = 3 + r\sin\phi, \end{cases}$$
on obtient
$$\iint_{\mathcal{D}} \frac{x-y}{(x-2)^2+(y-3)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{\mathcal{D}} \frac{2+r\cos\phi-3-r\sin\phi}{r^2}\,r\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi$$
où
$$\mathcal{D} = \{(r,\phi) \in \mathbb{R}\times[0,2\pi] \;:\; 0 < r < \frac{3}{2},\; \frac{3}{4}\pi < \phi < \frac{7}{4}\pi\}.$$
Donc
$$\iint_{\mathcal{D}} \frac{2+r\cos\phi-3-r\sin\phi}{r^2}\,r\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi = -\left(\int_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{7}{4}\pi} \cos\phi - \sin\phi\,\mathrm{d}\phi\right)\left(\int_0^{\frac{3}{2}} \frac{1}{r}\,\mathrm{d}r\right) = \infty.$$

3. On doit calculer l'intégrale triple

$$\iiint_{\mathcal{D}} \frac{1}{(4-y)^4\sqrt{x^2+z^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

où le domaine $\mathcal{D}$ est décrit, en coordonnées cartésiennes, par

$$\mathcal{D} = \{(x,y,z)\ :\ 5-y < x^2+z^2 < 1\}.$$

On passe en coordonnées cylindriques :

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = t, \\ z = r\sin\theta, \end{cases}$$

et le jacobien du changement de variables est r. Alors

$$\mathcal{D} = \{(r,\theta,t) \in \mathbb{R}^+ \times [0,2\pi] \times \mathbb{R}\ :\ 5-t < r^2 < 1\}$$

i.e.

$$\mathcal{D} = \{(r,\theta,t) \in \mathbb{R}^+ \times [0,2\pi] \times \mathbb{R}\ :\ 0 < r < 1 \text{ et } t > 5-r^2\}$$

et on a

$$\begin{aligned}
\iiint_{\mathcal{D}} \frac{1}{(4-y)^4\sqrt{x^2+z^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z &= \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{5-r^2}^{+\infty} \frac{1}{(4-t)^4 r} r\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta \\
&= 2\pi \int_0^1 \int_{5-r^2}^{+\infty} \frac{1}{(4-t)^4}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}r \\
&= 2\pi \int_0^1 \left[-\frac{1}{3(4-t)^3}\right]_{t=5-r^2}^{t\to+\infty} \mathrm{d}r \\
&= 2\pi \int_0^1 -\frac{1}{3(r^2-1)^3}\,\mathrm{d}r = \infty.
\end{aligned}$$