EXAMEN — jeudi 18 février 2010, Amphi 400
Durée de l'épreuve : 2 heures
Ce sujet, de 2 exercices indépendants, comporte 1 page.

▷ Portables et calculatrices strictement interdits.
▷ Polycopiés, notes personnelles et livres autorisés.
► *Le barême est donné à titre indicatif et est susceptible de varier.*
► *Aucun raisonnement vague ou insuffisant ne sera pris en compte par le correcteur. Toute question où les notations de l'énoncé ne seraient pas respectées se verra attribuer la note zéro. Enfin, il sera tenu compte de la présentation et de la rédaction dans l'évaluation de la copie.*

Exercice I [12 points]

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \ln|x|, & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1. [2 points] Montrer que f est continue en 0.
2. [2 points] Calculer $f'(x)$ pour $x \neq 0$, puis $f'(0)$.
3. [2 points] Étudier la continuité de f' en 0.
4. [1 point] Est-ce que $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$? Justifier la réponse.
5. [1 point] Calculer les limites de f aux extrémités du domaine de définition.
6. [2 points] Trouver les extrema locaux, sens de variation et tableau des variations.
7. [1 point] Étudier le comportement de f en $\pm\infty$ (recherche d'asymptotes).
8. [1 point] Dresser le graphe de f.

Exercice II [12 points]

a) Écrire
▷ [1 point] le développement limité de $\sin x$ en 0 à l'ordre 3 ;
▷ [1,5 point] le développement limité de e^{2x} en 0 à l'ordre 3.
Puis calculer
▷ [1,5 point] le développement limité de $f(x) = \sin x \times e^{2x}$ en 0 à l'ordre 3.
▷ [2 point] le développement limité de $g(x) = \frac{\sin x}{e^{2x}}$ en 0 à l'ordre 3.

b) [4 points] Trouver le développement limité de $\cos x$ en $\frac{\pi}{6}$ à l'ordre 3.

c) [2 points] Calculer

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(2x)}{e^x - 1 - x}.$$

Vous avez tout fini bien avant les 2h ? Tant mieux ! Vous allez donc avoir le temps de vérifier la cohérence de vos résultats, d'améliorer certains rédactions, d'entourer vos conclusions ...et surtout vous avez le temps de revenir sur une éventuelle question que vous avez abandonnée et y réfléchir jusqu'à ce que vous trouviez ...car un demi-point de plus ou de moins, cela vous donne l'examen ou pas !

Solution de l'exercice I

L'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se réécrit

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \ln x, & \text{si } x > 0, \\ 0, & \text{si } x = 0, \\ x^2 \ln(-x), & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

1. f est continue en 0 car
$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x^2 \ln|x| = 0 = f(0).$$
2. La dérivée de f est l'application $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par
$$f'(x) = \begin{cases} 2x\ln x + x, & \text{si } x > 0, \\ \lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} x\ln|x| = 0, & \text{si } x = 0, \\ 2x\ln(-x) + x, & \text{si } x < 0, \end{cases}$$
c'est-à-dire
$$f'(x) = \begin{cases} 2x\ln|x| + x, & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$
3. f' est continue en 0 car
$$\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0} 2x\ln|x| + x = 0 = f'(0).$$
4. $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$ car elle est clairement continue dans $\mathbb{R}$ (l'unique point délicat était 0 mais on a vu qu'elle y est continue) et de même pour sa dérivée première.
5. Limites de f aux extrémités du domaine de définition :
$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty,$$
$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty.$$
6. On a
   - ▷ $f'(x) = 0$ ssi $x \in \left\{0, \pm\frac{1}{\sqrt{e}}\right\}$,
   - ▷ $f'(x) > 0$ ssi $x \in \left]-\frac{1}{\sqrt{e}}; 0\right[\cup \left]\frac{1}{\sqrt{e}}; +\infty\right[$,
   - ▷ $f'(x) < 0$ ssi $x \in \left]-\infty; -\frac{1}{\sqrt{e}}\right[\cup \left]0; \frac{1}{\sqrt{e}}\right[$;

   donc
   - ▷ f est croissante pour $x \in \left]-\frac{1}{\sqrt{e}}; 0\right[$ et pour $x \in \left]\frac{1}{\sqrt{e}}; +\infty\right[$,
   - ▷ f est décroissante pour $x \in \left]-\infty; -\frac{1}{\sqrt{e}}\right[$ et pour $x \in \left]0; \frac{1}{\sqrt{e}}\right[$,
   - ▷ f a un maximun (locale) en $x = 0$ et $f(0) = 0$,
   - ▷ f a un minimum (absolue) en $x = \pm\frac{1}{\sqrt{e}}$ et $f(\pm\frac{1}{\sqrt{e}}) = -\frac{1}{2e}$.

   Le tableau des variations est alors le suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{\sqrt{x}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{x}}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$+$		$-$		$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{1}{2e}$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{2e}$	$\nearrow$	$+\infty$

7. Comportement de f en $\pm\infty$ (recherche d'asymptotes).
$$\lim_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty,$$
$$\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty.$$
Il n'y a pas d'asymptotes en $\pm\infty$.
8. Graphe de f : voir la figure 1.

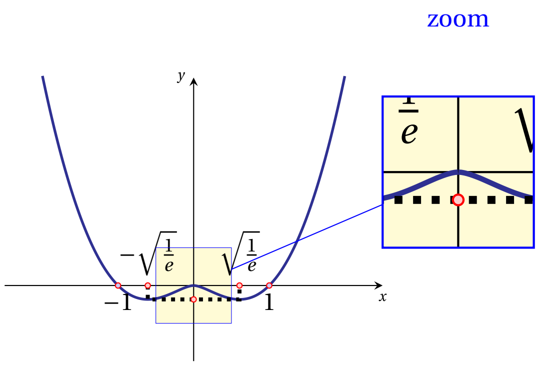

FIGURE 1: Graphe de f.

Solution de l'exercice II

a) On commence par écrire

▷ le développement limité de $\sin x$ en 0 à l'ordre 3 :

$$\sin x \underset{0}{=} x - \frac{x^3}{6} + o(x^3);$$

▷ le développement limité de e^{2x} en 0 à l'ordre 3 :

$$e^{2x} \underset{0}{=} 1 + (2x) + \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^3}{6} + o(x^3) = 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + o(x^3);$$

On peut alors facilement calculer

▷ le développement limité de $f(x) = e^{2x}\sin x$ en 0 à l'ordre 3 :

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{0}{=} \left[x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right] \times \left[1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + o(x^3)\right] = \\ &= x - \frac{x^3}{6} + 2x^2 + 2x^3 + o(x^3) = \\ &= x + 2x^2 + \frac{11}{6}x^3 + o(x^3); \end{aligned}$$

▷ le développement limité de $g(x) = \frac{\sin x}{e^{2x}}$ en 0 à l'ordre 3 :

$$\begin{aligned} g(x) &\underset{0}{=} \frac{x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)}{1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + o(x^3)} \overbrace{=}^{u = 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + o(x^3)} \\ &= \frac{x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)}{1+u} = \\ &= \left[x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right]\left[1 - u + u^2 - u^3 + o(u^3)\right] = \\ &= \left[x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right]\left[1 - (2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3) + (2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3)^2 - (2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3)^3 + o(x^3)\right] = \\ &= \left[x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right]\left[1 - 2x - 2x^2 - \frac{4}{3}x^3 + 4x^2 + x^3 - 8x^3 + o(x^3)\right] = \\ &= \left[x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right]\left[1 - 2x + 2x^2 - 8x^3 + o(x^3)\right] = \\ &= x - 2x^2 + \frac{11}{6}x^3 + o(x^3). \end{aligned}$$

b) Pour calculer le développement limité de $\cos x$ en $\frac{\pi}{6}$ à l'ordre 3 on utilise la formule de Taylor-Young :

$$f(x) \underset{a}{=} \sum_{k=0}^{k=n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o((x-a)^k).$$

Ici $n=3$, $a=\frac{\pi}{6}$ et $f(x)=\cos x$ d'où

$$\begin{aligned}
f(x)&=\cos x, & f(a)&=\frac{\sqrt{3}}{2};\\
f'(x)&=-\sin x, & f'(a)&=-\frac{1}{2};\\
f''(x)&=-\cos x, & f''(a)&=-\frac{\sqrt{3}}{2};\\
f'''(x)&=\sin x, & f'''(a)&=\frac{1}{2};
\end{aligned}$$

donc

$$\cos x \underset{\pi/6}{=} \frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)-\frac{\sqrt{3}}{4}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^2+\frac{1}{12}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^3+o\left(\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^3\right).$$

c) Pour calculer la limite donnée on peut utiliser les développements limités :

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(2x)}{e^x-1-x}&=\lim_{x\to 0}\frac{1-1+\frac{(2x)^2}{2}+o(x^2)}{1+x+\frac{x^2}{2}-1-x+o(x^2)}=\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{2x^2+o(x^2)}{\frac{x^2}{2}+o(x^2)}=4.
\end{aligned}$$

Sinon on peut utiliser la règle de L'Hôpital car

$$\begin{aligned}
n(x)&=1-\cos(2x), & \lim_{x\to 0}n(x)&=0;\\
d(x)&=e^x-1-x, & \lim_{x\to 0}d(x)&=0.
\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}
n'(x)&=2\sin(2x), & \lim_{x\to 0}n'(x)&=0;\\
d'(x)&=e^x-1, & \lim_{x\to 0}d'(x)&=0;\\
n''(x)&=4\cos(2x), & \lim_{x\to 0}n''(x)&=4;\\
d''(x)&=e^x, & \lim_{x\to 0}d''(x)&=1;
\end{aligned}$$

donc

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(2x)}{e^x-1-x}=\lim_{x\to 0}\frac{n''(x)}{d''(x)}=4.$$