Étude d'une fonction: quelques exemples

Gloria FACCANONI

10 décembre 2009

Étude I

Étudier les variations et donner une représentation graphique de la fonction

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = x + \ln(x^2-1) \end{aligned}$$

en répondant aux questions suivantes :

1. domaine de définition
2. comportement aux extrémités du domaine de définition
3. extrema locaux, sens de variation et tableaux des variations
4. convexité, concavité
5. comportement en $\pm\infty$ (recherche d'asymptôtes)
6. graphe

1. *Domaine de définition :* il faut $x^2-1>0$ donc
$$\mathscr{D}_f =]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[.$$
2. *Comportement aux extrémités du domaine de définition :*
$$\begin{aligned} \lim_{x\to-\infty} f(x) &= \lim_{x\to-\infty} x\left(1+\frac{\ln(x^2-1)}{x}\right) = -\infty, \\ \lim_{x\to-1^-} f(x) &= -\infty \\ \lim_{x\to1^+} f(x) &= -\infty \\ \lim_{x\to+\infty} f(x) &= +\infty \end{aligned}$$
3. *Extrema locaux, sens de variation et tableaux des variations :* la dérivée de f est l'application
$$\begin{aligned} f'\colon \mathscr{D}_f &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f'(x) = 1+\frac{2x}{x^2-1} = \frac{x^2+2x-1}{x^2-1} = \frac{(x+1+\sqrt{2})(x+1-\sqrt{2})}{x^2-1} \end{aligned}$$
Dans $\mathscr{D}_f$ on a
$$\begin{aligned} &f'(x) > 0 \text{ ssi } x \in]-\infty;-1-\sqrt{2}[\cup]1;+\infty[, \\ &f'(x) = 0 \text{ ssi } x = -1-\sqrt{2}, \\ &f'(x) < 0 \text{ ssi } x \in]-1-\sqrt{2};-1[. \end{aligned}$$
On conclut que
– f est strictement croissante sur $]-\infty;-1-\sqrt{2}[$ et sur $]1;+\infty[$,
– f est strictement décroissante sur $]-1-\sqrt{2};-1[$,
– $x=-1-\sqrt{2}$ est un point de maximum local et on a $f(-1-\sqrt{2}) = -1-\sqrt{2}+\ln(2+2\sqrt{2})$.
Le tableau des variations est alors le suivant :

x	$-\infty$		$-1-\sqrt{2}$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$				$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-1-\sqrt{2}+\ln(2+2\sqrt{2})$	$\searrow$	$-\infty$		$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

4. *Convexité, concavité :* la dérivée seconde de f est l'application

$$f'' : \mathscr{D}_f \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f''(x) = \frac{2(x^2-1)-4x^2}{(x^2-1)^2} = -1-2x^2$$

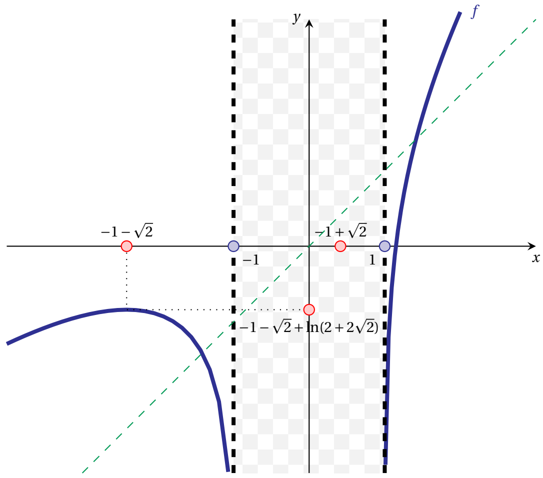
Dans $\mathscr{D}_f$ on a $f''(x) < 0$. On conclut que la fonction est concave séparemment sur $]-\infty;-1[$ et sur $]1;+\infty[$.

5. *Comportement en $\pm\infty$ (recherche d'asymptôtes)*

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} 1 + \frac{\ln(x^2-1)}{x} = 1,$$
$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) - x = \lim_{x\to\pm\infty} \ln(x^2-1) = +\infty.$$

Il n'y a pas d'asymptôtes en $\pm\infty$.
f possède une branche parabolique dans la direction asymptôtique x en $+\infty$ et en $-\infty$.

6. *Graphe*



Étude II

Étudier les variations et donner une représentation graphique de la fonction

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = 2x + \sqrt{x^2-1} \end{aligned}$$

en répondant aux questions suivantes :

1. domaine de définition et régularité
2. comportement aux extrémités du domaine de définition
3. extrema locaux, sens de variation et tableaux des variations
4. convexité, concavité
5. comportement en $\pm\infty$ (recherche d'asymptôtes)
6. graphe

1. *Domaine de définition et régularité :* il faut $x^2 - 1 \geq 0$ donc

$$\mathscr{D}_f =]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[\qquad \text{et } f \in \mathscr{C}^\infty(\mathscr{D}_f).$$

2. *Comportement aux extrémités du domaine de définition :*

$$\begin{aligned} \lim_{x\to-\infty} f(x) &= \lim_{x\to-\infty} x\left(2 + \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\right) = -\infty, \\ \lim_{x\to-1^-} f(x) &= f(-1) = -2, \\ \lim_{x\to1^+} f(x) &= f(1) = 2, \\ \lim_{x\to+\infty} f(x) &= +\infty. \end{aligned}$$

3. *Extrema locaux, sens de variation et tableaux des variations :* la dérivée de f est la fonction

$$\begin{aligned} f'\colon \mathscr{D}_f &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f'(x) = 2 + \frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{2\sqrt{x^2-1}+x}{\sqrt{x^2-1}} \end{aligned}$$

Dans $\mathscr{D}_f \setminus \{\pm1\}$ on a

$$\begin{aligned} f'(x) > 0 &\text{ ssi } x \in]-\infty; -\frac{2}{\sqrt{3}}[\cup]1; +\infty[, \\ f'(x) = 0 &\text{ ssi } x = -\frac{2}{\sqrt{3}}, \\ f'(x) < 0 &\text{ ssi } x \in]-\frac{2}{\sqrt{3}}; -1[\end{aligned}$$

et $\lim_{x\to\pm1^\pm} f'(x) = +\infty$. On conclut que
– f est strictement croissante sur $]-\infty; -\frac{2}{\sqrt{3}}[$ et sur $]1; +\infty[$,
– f est strictement décroissante sur $]-\frac{2}{\sqrt{3}}; -1[$,
– $x = -\frac{2}{\sqrt{3}}$ est un point de minimum local et on a $f(-\frac{2}{\sqrt{3}}) = -\sqrt{3}$.

Le tableau des variations est alors le suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{2}{\sqrt{3}}$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$				$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-\sqrt{3}$	$\searrow$	-2		2	$\nearrow$	$+\infty$

4. *Convexité, concavité :* la dérivée seconde de f est la fonction

$$\begin{aligned} f''\colon \mathscr{D}_f &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f''(x) = \frac{\sqrt{x^2-1} - x\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{x^2-1} = \frac{-1}{x^2-1} \end{aligned}$$

Dans $\mathscr{D}_f \setminus \{\pm1\}$ on a $f''(x) < 0$. On conclut que f est concave sur $\mathscr{D}_f$.

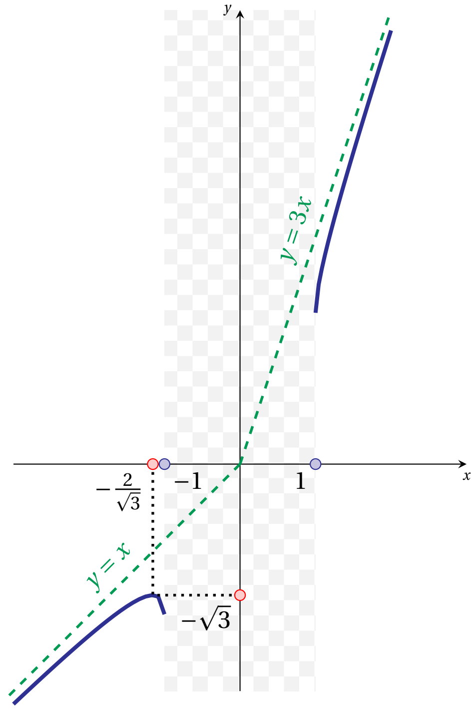
5. *Comportement en* $\pm\infty$ *(recherche d'un asymptôte)*
   – Si $x > 0$, en calculant le développement asymptotyque à l'ordre 2 en $+\infty$ on a

$$\frac{f(x)}{x} = 2 + \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} = 2 + \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} = 3 - \frac{1}{2}\frac{1}{x^2} + o(x^{-2}).$$

   On en déduit que la droite d'équation $y = 3x$ est l'asymptôte de f en $+\infty$ (le graphe de f se trouve au dessous de cet asymptôte).
   – Si $x < 0$, en calculant le développement asymptotyque à l'ordre 2 en $-\infty$ on a

$$\frac{f(x)}{x} = 2 + \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} = 2 - \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} = 1 + \frac{1}{2}\frac{1}{x^2} + o(x^{-2}).$$

   On en déduit que la droite d'équation $y = x$ est l'asymptôte de f en $-\infty$ (le graphe de f se trouve au dessous de cet asymptôte).
6. *Graphe*



Étude III

Étudier les variations et donner une représentation graphique de la fonction

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = \frac{\ln^2 x}{x^2} \end{aligned}$$

en répondant aux questions suivantes :

1. domaine de définition et régularité
2. comportement aux extrémités du domaine de définition
3. extrema locaux, sens de variation et tableaux des variations
4. convexité, concavité
5. comportement en $+\infty$ (recherche d'asymptôtes)
6. graphe

1. *Domaine de définition et régularité :* il faut $\begin{cases} x \neq 0 \\ x > 0 \end{cases}$ donc

$$\mathscr{D}_f =]0; +\infty[\qquad \text{et } f \in \mathscr{C}^\infty(\mathscr{D}_f).$$

2. *Comportement aux extrémités du domaine de définition :*

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty,$$
$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0^+.$$

3. *Extrema locaux, sens de variation et tableaux des variations :* la dérivée de f est la fonction

$$\begin{aligned} f'\colon \mathscr{D}_f &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f'(x) = 2\frac{\ln x(1-\ln x)}{x^3} \end{aligned}$$

Dans $\mathscr{D}_f$ on a

$$f'(x) > 0 \text{ ssi } x \in]1; e[,$$
$$f'(x) = 0 \text{ ssi } x = e,$$
$$f'(x) < 0 \text{ ssi } x \in]0; 1[\cup]e; +\infty[.$$

On conclut que
– f est strictement croissante sur $]1; e[[$,
– f est strictement décroissante sur $]0; 1[$ et sur $]e; +\infty[$,
– $x = 1$ est un point de minimum absolu, $x = e$ est un point de maximum local et on a $f(1) = 0$, $f(e) = \frac{1}{e^2}$.
Le tableau des variations est alors le suivant :

x	0		1		e		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$		$+$		$-$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	0	↗	e^{-2}	↘	0

4. *Convexité, concavité :* la dérivée seconde de f est la fonction

$$\begin{aligned} f''\colon \mathscr{D}_f &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f''(x) = 2\frac{3\ln^2 x - 5\ln x + 1}{x^4} \end{aligned}$$

Dans $\mathscr{D}_f$ on a

$$f''(x) > 0 \text{ ssi } x \in]0; e^{\frac{5-\sqrt{13}}{6}}[\cup]e^{\frac{5+\sqrt{13}}{6}}; +\infty[,$$
$$f''(x) = 0 \text{ ssi } x = e^{\frac{5\pm\sqrt{13}}{6}},$$
$$f''(x) < 0 \text{ ssi } x \in]e^{\frac{5-\sqrt{13}}{6}}; e^{\frac{5+\sqrt{13}}{6}}[.$$

On conclut que

- f est convexe sur $]0; e^{\frac{5-\sqrt{13}}{6}}[$ et sur $]e^{\frac{5+\sqrt{13}}{6}}; +\infty[$,
- f est concave sur $]e^{\frac{5-\sqrt{13}}{6}}; e^{\frac{5+\sqrt{13}}{6}}[$,
- $x = e^{\frac{5\pm\sqrt{13}}{6}}$ sont des flexes.

5. *Comportement en* $+\infty$ *(recherche d'un asymptôte) :* $y = 0$ est asymptôte pour $x \to +\infty$.
6. *Graphe*