EXAMEN — lundi 4 janvier 2010, salle A400
Durée de l'épreuve : 3 heures
Ce sujet, de 3 exercices indépendants, comporte 1 page.

▷ Portables et calculatrices strictement interdits.
▷ Polycopiés, notes personnelles et livres autorisés.
► *Le barême est donné à titre indicatif et est susceptible de varier.*
► *Aucun raisonnement vague ou insuffisant ne sera pris en compte par le correcteur. Toute question où les notations de l'énoncé ne seraient pas respectées se verra attribuer la note zéro. Enfin, il sera tenu compte de la présentation et de la rédaction dans l'évaluation de la copie.*

Exercice I [7 points]

Étudier les variations et donner une représentation graphique de la fonction

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = \frac{x^2}{\ln(x^2)-1} \end{aligned}$$

en répondant aux questions suivantes :

1. [1 point] domaine de définition
2. [1 point] comportement aux extrémités du domaine de définition
3. [3 point] extrema locaux, sens de variation et tableaux des variations
4. [1 point] comportement en $\pm\infty$ (recherche d'asymptôtes)
5. [1 point] graphe

Exercice II [8 points]

Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \cos\frac{1}{x}, & \text{si } x > 0, \\ 0, & \text{si } x = 0, \\ x^3 \sin\frac{1}{x}, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

1. [2 points] f est-elle continue en $x = 0$?
2. [2 points] Calculer $f'(x)$ pour $x \neq 0$. En déduire l'équation de la droite tangente à f en $x = \frac{1}{\pi}$.
3. [2 points] f est-elle dérivable en $x = 0$?
4. [2 points] f est-elle de classe $\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$?

Exercice III [10 points]

1. [1 points] Déterminer le développement limité de la fonction $f(x) = e^x - 1 + \sin x - 2x - \frac{x^2}{2}$ en 0 à l'ordre 4.
2. [3 points] Déterminer le développement limité de la fonction $g(x) = (1+\sin x)^{\frac{1}{x}}$ en 0 à l'ordre 2.
3. [2 points] Déterminer le développement limité asymtotique en $-\infty$ et en $+\infty$ de la fonction $\ell(x) = \dfrac{x}{x-1}\sqrt{x^2+1}$ à l'ordre 1.
4. [1 point] Déterminer le développement limité de la fonction $h(x) = \frac{\ln x}{(1+x)^2}$ en 1 à l'ordre 2.
5. [2 point] Calculer la limite $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)}\right)$.
6. [1 points] Calculer la limite $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x(\tanh x - x)}{\ln(1+x)}$. (Rappel : $\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.)

Vous avez tout fini bien avant les 3h ? Tant mieux ! Vous allez donc avoir le temps de vérifier la cohérence de vos résultats, d'améliorer certains rédactions, d'entourer vos conclusions. . .et surtout vous avez le temps de revenir sur une éventuelle question que vous avez abandonnée et y réfléchir jusqu'à ce que vous trouviez. . .car un demi-point de plus ou de moins, cela vous donne l'examen ou pas.

Solution de l'exercice I

La fonction est paire, *i.e.* $f(-x) = f(x)$: on étudie donc seul la fonction f^+ restriction de f à $\mathbb{R}^+$.

1. *Domaine de définition de f^+ :* il faut $\begin{cases} \ln(x^2) - 1 \neq 0 \\ x^2 > 0 \end{cases}$ donc
$$\mathscr{D}_{f^+} =]0, \sqrt{e}[\cup]\sqrt{e}, +\infty[.$$

2. *Comportement de f^+ aux extrémités du domaine de définition :*
$$\lim_{x\to 0^+} f^+(x) = 0^-, \qquad \lim_{x\to(\sqrt{e})^-} f^+(x) = -\infty,$$
$$\lim_{x\to(\sqrt{e})^+} f^+(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} f^+(x) = +\infty.$$

3. *Extrema locaux, sens de variation et tableaux des variations de f^+ :* la dérivée de f^+ est l'application
$$\begin{aligned}(f^+)' \colon \mathscr{D}_{f^+} &\to \mathbb{R}\\ x &\mapsto (f^+)'(x) = \frac{2x(2\ln x - 1) - x^2\frac{2}{x}}{(2\ln x - 1)^2} = 4\frac{x(\ln x - 1)}{(2\ln x - 1)^2}\end{aligned}$$
Dans $\mathscr{D}_{f^+}$ on a
$$\begin{aligned}&(f^+)'(x) > 0 \text{ ssi } x \in]e; +\infty[,\\ &(f^+)'(x) = 0 \text{ ssi } x = e,\\ &(f^+)'(x) < 0 \text{ ssi } x \in]0; \sqrt{e}[\cup]\sqrt{e}; e[\end{aligned}$$
et $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = 0$. On conclut que
▷ f^+ est strictement croissante sur $]e; +\infty[$,
▷ f^+ est strictement décroissante sur $]0; \sqrt{e}[$ et sur $]\sqrt{e}; e[$,
▷ $x = e$ est un point de minimum local et on a $f^+(e) = e^2$.
Le tableau des variations est alors le suivant :

x	0		$\sqrt{e}$		e		$+\infty$
$(f^+)'(x)$		$-$	||	$-$	0	$+$	
$f^+(x)$	0	↘ $-\infty$	|| $+\infty$	↘	e^2	↗	$+\infty$

4. *Comportement de f^+ en $+\infty$ (recherche d'un asymptôte) :*
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f^+(x)}{x} = +\infty.$$
Il n'y a pas d'asymptôtes en $+\infty$.

5. *Graphe de f :* voir la figure 1.

Solution de l'exercice II

1. La fonction est clairement continue pour $x \neq 0$. Pour $x = 0$ on a
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x^3 \cos\frac{1}{x} = 0,$$
$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} x^3 \sin\frac{1}{x} = 0,$$
donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$: f est continue en 0.

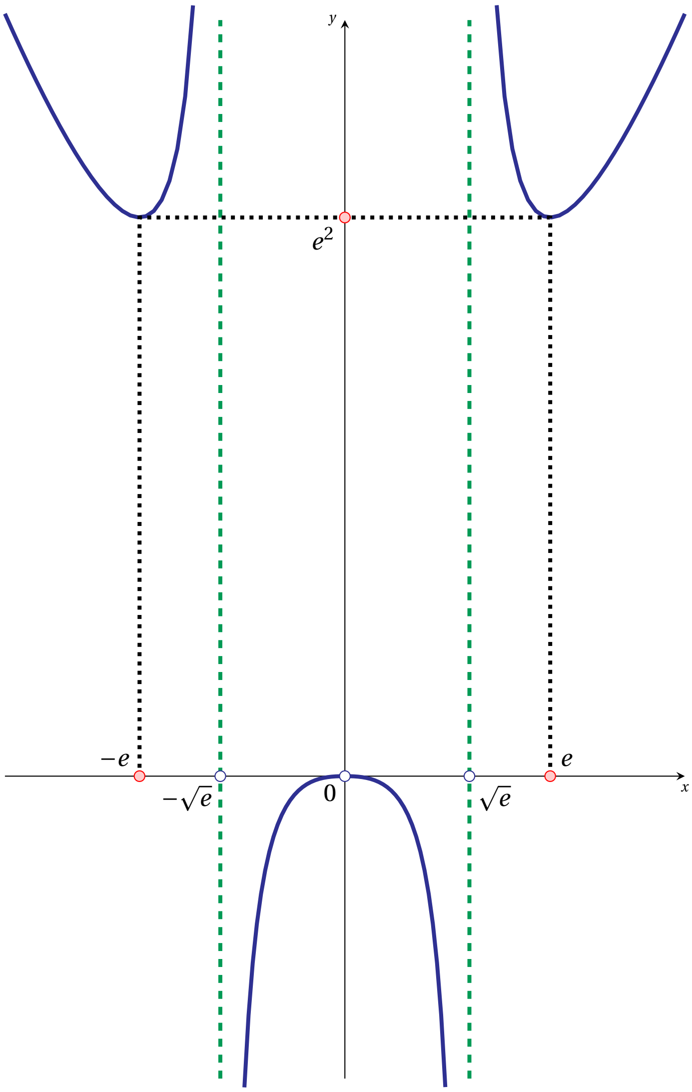

FIGURE 1: $f(x) = \frac{x^2}{\ln(x^2)-1}$

2. Pour $x \neq 0$ la fonction est clairement dérivable et on a

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2\cos\frac{1}{x} + x\sin\frac{1}{x}, & \text{si } x > 0, \\ 3x^2\sin\frac{1}{x} - x\cos\frac{1}{x}, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

   La droite tangente à f en $x = x_0$ a équation $y = f'(x_0)x + (f(x_0) - f'(x_0)x_0)$ donc pour $x_0 = \frac{1}{\pi}$ on a $y = -\frac{3}{\pi^2}x + \frac{2}{\pi^3}$.

3. La fonction est dérivable en $x = 0$ ssi existe finie la limite $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$.
   On a

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+}\frac{x^3\cos\frac{1}{x} - 0}{x-0} = 0,$$
$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-}\frac{x^3\sin\frac{1}{x} - 0}{x-0} = 0,$$

   donc $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0$: f est dérivable en 0 et on a

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2\cos\frac{1}{x} + x\sin\frac{1}{x}, & \text{si } x > 0, \\ 0, & \text{si } x = 0, \\ 3x^2\sin\frac{1}{x} - x\cos\frac{1}{x}, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

4. f' est clairement continue pour $x \neq 0$. Pour $x = 0$ on a

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} \left(3x^2 \cos\frac{1}{x} + x \sin\frac{1}{x}\right) = 0,$$
$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} \left(3x^2 \sin\frac{1}{x} - x \cos\frac{1}{x}\right) = 0,$$

donc f' est continue en 0. Par conséquent f est de classe $\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$.

Solution de l'exercice III

1. À partir des développements limités des fonctions e^x et $\sin x$ en 0 à l'ordre 4

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4),$$
$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4),$$

on conclut que $f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} - 1 + x - \frac{x^3}{6} - 2x - \frac{x^2}{2} + o(x^4) = \frac{x^4}{24} + o(x^4)$.

2. On réécrit d'abord la fonction $g(x)$ sous forme exponentielle :

$$(1+\sin x)^{\frac{1}{x}} = e^{x^{-1}\ln(1+\sin x)}.$$

On commence par déterminer le développement limité en 0 à l'ordre 2 de $x \mapsto x^{-1}\ln(1+\sin x)$. Comme on divise par x, il faut déterminer le développement limité à l'ordre 3 de $x \mapsto \ln(1+\sin x)$. Or,

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4),$$

donc

$$\ln(1+\sin x) = \ln\left(1 + x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right).$$

On pose $u = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$. Comme $\lim_{x\to 0} u = 0$ et

$$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + o(u^3),$$

on en déduit que

$$\ln(1+\sin x) = \left(x - \frac{x^3}{6}\right) - \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^3 + o(x^3) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

d'où

$$x^{-1}\ln(1+\sin x) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + o(x^2).$$

On a donc

$$e^{x^{-1}\ln(1+\sin x)} = e e^{-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + o(x^2)}.$$

On pose $v = -\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + o(x^2)$. Comme $\lim_{x\to 0} v = 0$ et

$$e^v = 1 + v + \frac{v^2}{2} + o(v^2),$$

on en déduit que

$$(1+\sin x)^{\frac{1}{x}} = e^{x^{-1}\ln(1+\sin x)} = e\left[1 + \left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6}\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6}\right)^2 + o(x^2)\right] = e - \frac{e}{2}x + \frac{7e}{24}x^2 + o(x^2).$$

3. ▷ Développement limité asymtotique en $+\infty$: on pose $y = \frac{1}{x}$ et on remarque que $\lim_{x\to+\infty} y = 0^+$. Alors

$$\begin{aligned}\ell^+(y) &= \frac{1}{y}\frac{y}{1-y}\sqrt{\frac{1+y^2}{y^2}} \overset{(y>0)}{=} \frac{1}{y(1-y)}\sqrt{1+y^2}\\ &= \frac{1}{y}\left(1+y+y^2+o(y^2)\right)\left(1+\frac{y^2}{2}+o(y^2)\right) = \frac{1}{y}+1+\frac{3}{2}y+o(y^2)\end{aligned}$$

d'où

$$\ell(x) = x+1+\frac{3}{2}\frac{1}{x}+o(x^{-1}).$$

On en déduit que le graphe de la fonction ℓ admet la droite d'équation $y = x+1$ comme asymptôte en $+\infty$.

▷ Développement limité asymtotique en $-\infty$: on pose encore $y = \frac{1}{x}$ et on remarque que $\lim_{x\to-\infty} y = 0^-$. Alors

$$\begin{aligned}\ell^-(y) &= \frac{1}{y}\frac{y}{1-y}\sqrt{\frac{1+y^2}{y^2}} \overset{(y<0)}{=} -\frac{1}{y(1-y)}\sqrt{1+y^2}\\ &= -\frac{1}{y}\left(1+y+y^2+o(y^2)\right)\left(1+\frac{y^2}{2}+o(y^2)\right) = \frac{1}{y}+1+\frac{3}{2}y+o(y^2)\end{aligned}$$

d'où

$$\ell(x) = -x-1-\frac{3}{2}\frac{1}{x}+o(x^{-1}).$$

On en déduit que le graphe de la fonction ℓ admet la droite d'équation $y = -x-1$ comme asymptôte en $-\infty$.

4. On pose $y = x-1$. Alors $g(x) = \frac{\ln x}{(1+x)^2} = \frac{\ln(1+y)}{(2+y)^2}$. Comme $\lim_{x\to1} y = 0$, on calcul le développement limité de $\frac{\ln(1+y)}{(2+y)^2}$ en zéro. Or,

$$\begin{aligned}&\ln(1+y) = y-\frac{1}{2}y^2+o(y^2),\\ &(2+y)^{-2} = \frac{1}{4}\left(1+\frac{y}{2}\right)^{-2} = \frac{1}{4}\left(1-2\frac{y}{2}+\frac{(-2)(-2-1)}{2}\frac{y^2}{2^2}+o(y^2)\right) = \frac{1}{4}\left(1-y+\frac{3}{2}y^2+o(y^2)\right),\end{aligned}$$

d'où

$$g(x) = \frac{1}{4}\left(1-(x-1)+\frac{3}{2}(x-1)^2+o((x-1)^2)\right).$$

5. On remarque que

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{\ln(1+x)} = \frac{\ln(1+x)-x}{x\ln(1+x)} = \frac{x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)-x}{x^2+o(x^2)}$$

d'où

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\ln(1+x)}\right) = -\frac{1}{2}.$$

6. En déterminant les développements limité en 0 à l'ordre 3 des fonctions $x\mapsto\sin x$, $x\mapsto\ln(1+x)$ et $x\mapsto\tanh x$ on obtient

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x(\tanh x-x)}{\ln(1+x)} = \lim_{x\to0}\frac{(x+o(x))(-\frac{x^3}{3}+o(x^3))}{x+o(x)} = \lim_{x\to0}\frac{(1+o(1))(-\frac{x^3}{3}+o(x^3))}{1+o(1)} = 0.$$