L1PC - M131 Fonctions d'une variable réelle. Contrôles avec correction

Chaque contrôle comporte trois sujets correspondant aux trois groupes de TD

Gloria Faccanoni

Université du Sud Toulon-Var, A.A. 2009/2010

⋆ Durée de chaque épreuve: 1 heure.
⋆ Les sujets comportent 2 ou 3 exercices indépendants.
⋆ Rendre l'énoncé avec la copie.
▷ Portables, calculatrices, polycopiés, notes personnelles et livres strictement interdits.
▶ *Le barême est donné à titre indicatif et est susceptible de varier.*
▶ *Aucun raisonnement vague ou insuffisant ne sera pris en compte.*
▶ *Toute question où les notations de l'énoncé ne seraient pas respectées se verra attribuer la note zéro.*
▶ *Il sera tenu compte de la présentation et de la rédaction dans l'évaluation de la copie.*

Contrôle I

- Groupe 1 : 13 octobre 2009
- Groupe 2 : 14 octobre 2009
- Groupe 3 : 13 octobre 2009

MODULE M131 - L1PC(1) – CONTRÔLE I

13 octobre 2009 – durée : 1 heure

On attachera le plus grand soin à la rédaction et à la présentation claire et lisible des résultats dont il sera tenu compte lors de la correction.

Exercice I

Soit E un ensemble non vide.

1. Soit $A \subset E$. Donner la définition de l'ensemble complémentaire $C_E(A)$ de A dans E.
2. Soit $A_i \subset E$, $i \in \mathbb{N}^*$. Montrer que
$$C_E\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \bigcup_{i=1}^{\infty} C_E(A_i)$$
3. Soit $E=\mathbb{R}$, $A_i = \left[0, 1+\frac{1}{i}\right]$, $i \in \mathbb{N}^*$. Trouver les ensembles :
   a) $C_E(A_i)$,
   b) $\bigcup_{i=1}^{\infty} C_E(A_i)$,
   c) $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$,
   d) $C_E\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right)$.

Solution de l'exercice I

1. $C_E(A) = E \setminus A$
2. $x \in C_E\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) \Leftrightarrow x \notin \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \Leftrightarrow \exists i \in \mathbb{N}^*$ tel que $x \notin A_i \Leftrightarrow \exists i \in \mathbb{N}^*$ tel que $x \in C_E(A_i) \Leftrightarrow x \in \bigcup_{i=1}^{\infty} C_E(A_i)$
3. On a
   a) $C_E(A_i) = \mathbb{R} \setminus A_i =]-\infty, 0[\cup]1+\frac{1}{i}, +\infty[$,
   b) $\bigcup_{i=1}^{\infty} C_E(A_i) =]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$,
   c) $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = [0,1]$,
   d) $C_E\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \mathbb{R} \setminus [0,1] =]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[= \bigcup_{i=1}^{\infty} C_E(A_i)$.

=

Exercice II

Soient $E \subset \mathbb{R}$, $F \subset \mathbb{R}$ deux ensembles et
$$\begin{aligned} f : E &\to F \\ x &\mapsto 2+x^2 \end{aligned}$$
une fonction.

1. Supposons que $E = F = \mathbb{R}$.
   a) Montrer que f est une application.
   b) Montrer que f n'est pas une application injective.
   c) Montrer que f n'est pas une application surjective.
2. Supposons que $E =]-\infty, 0]$ et $F = [2, +\infty[$.
   a) Montrer que f est une application bijective.
   b) Trouver l'application f^{-1} réciproque (inverse) pour f.

Solution de l'exercice II

1. Supposons que $E = F = \mathbb{R}$.
   a) Puisque $\mathscr{D}_f = E$, la fonction f est une application.
   b) Une application $f : E \to F$ est injective si $\forall (x_1, x_2) \in E^2$, $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$. Puisque $f(\pm 1) = 3$, f n'est pas une application injective.
   c) Une application $f : E \to F$ est surjective si $\forall y \in F\ \exists x \in E$ tel que $y = f(x)$. Puisque $1 \in F$ mais l'équation $1 = f(x)$ n'admet pas de solution $x \in E$, f n'est pas une application surjective.
2. Supposons que $E =]-\infty, 0]$ et $F = [2, +\infty[$.
   a) La restriction de f à ces nouveaux ensembles la rend injective et surjective car pour tout $y \in F$, il existe un et un seul $x \in E$ tel que $y = f(x)$:
$$y = 2 + x^2 \Leftrightarrow x^2 = y - 2 \overset{x\in E}{\Leftrightarrow} x = -\sqrt{y-2}$$
   donc f est bijective.
   b) Étant f une application bijective, l'application f^{-1} réciproque (inverse) pour f est
$$\begin{aligned} f^{-1} : F &\to E \\ y &\mapsto -\sqrt{y-2}. \end{aligned}$$

MODULE M131 - L1PC(3) – CONTRÔLE I

13 octobre 2009 – durée : 1 heure

On attachera le plus grand soin à la rédaction et à la présentation claire et lisible des résultats dont il sera tenu compte lors de la correction.

Exercice I

Soit E un ensemble non vide.

1. Soit $A_i \subset E$, $i \in \mathbb{N}^*$. Donner la définition de l'ensemble $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$.
2. Soit $A_i \subset E$, $i \in \mathbb{N}^*$. Montrer que
$$C_E\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \bigcap_{i=1}^{\infty} C_E(A_i)$$
3. Soit $E=\mathbb{R}$, $A_i = \left[0, 1-\frac{1}{i}\right]$, $i \in \mathbb{N}^*$. Trouver les ensembles :
   a) $C_E(A_i)$,
   b) $\bigcap_{i=1}^{\infty} C_E(A_i)$,
   c) $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$,
   d) $C_E\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)$.

Solution de l'exercice I

1. $x \in \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \Leftrightarrow \exists i \in \mathbb{N}^*$ tel que $x \in A_i$.
2. $x \in C_E\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \Leftrightarrow x \notin \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \Leftrightarrow \forall i \in \mathbb{N}^*\ x \notin A_i \Leftrightarrow \forall i \in \mathbb{N}^*\ x \in C_E(A_i) \Leftrightarrow x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} C_E(A_i)$
3. On a
   a) $C_E(A_i) = \mathbb{R} \setminus A_i =]-\infty, 0[\cup]1-\frac{1}{i}, +\infty[$,
   b) $\bigcap_{i=1}^{\infty} C_E(A_i) =]-\infty, 0[\cup[1, +\infty[$,
   c) $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = [0,1[$,
   d) $C_E\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \mathbb{R} \setminus [0,1[=]-\infty, 0[\cup[1, +\infty[= \bigcap_{i=1}^{\infty} C_E(A_i)$.

=

Exercice II

Soient $E\subset\mathbb{R}$, $F\subset\mathbb{R}$ deux ensembles et

$$\begin{aligned} f\colon E &\to F\\ x&\mapsto -x^2\end{aligned}$$

une fonction.

1. Supposons que $E=F=\mathbb{R}$.
   a) Montrer que f est une application.
   b) Montrer que f n'est pas une application injective.
   c) Montrer que f n'est pas une application surjective.
2. Supposons que $E=]-\infty,0]$ et $F=]-\infty,0]$.
   a) Montrer que f est une application bijective.
   b) Trouver l'application f^{-1} réciproque (inverse) pour f.

Solution de l'exercice II

1. Supposons que $E=F=\mathbb{R}$.
   a) Puisque $\mathscr{D}_f=E$, la fonction f est une application.
   b) Une application $f\colon E\to F$ est injective si $\forall(x_1,x_2)\in E^2$, $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2$. Puisque $f(\pm1)=-1$, f n'est pas une application injective.
   c) Une application $f\colon E\to F$ est surjective si $\forall y\in F\ \exists x\in E$ tel que $y=f(x)$. Puisque $1\in F$ mais l'équation $1=f(x)$ n'admet pas de solution $x\in E$, f n'est pas une application surjective.
2. Supposons que $E=]-\infty,0]$ et $F=]-\infty,0]$.
   a) La restriction de f à ces nouveaux ensembles la rend injective et surjective car pour tout $y\in F$, il existe un et un seul $x\in E$ tel que $y=f(x)$:
   $$y=-x^2\Leftrightarrow x^2=-y\overset{x\in E}{\Leftrightarrow}x=-\sqrt{-y}$$
   donc f est bijective.
   b) Étant f une application bijective, l'application f^{-1} réciproque (inverse) pour f est
   $$\begin{aligned} f^{-1}\colon F&\to E\\ y&\mapsto -\sqrt{-y}.\end{aligned}$$

....

MODULE M131 - L1PC(2) – CONTRÔLE I

14 octobre 2009 – durée : 1 heure

On attachera le plus grand soin à la rédaction et à la présentation claire et lisible des résultats dont il sera tenu compte lors de la correction.

Exercice I

Soit E un ensemble non vide.

1. Soit $A_i\subset E$, $i\in\mathbb{N}^*$. Donner la définition de l'ensemble $\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i$.
2. Soit $A_i\subset E$, $i\in\mathbb{N}^*$. Montrer que
   $$\bigcap_{i=1}^{\infty}C_E(A_i)=C_E\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)$$
3. Soit $E=\mathbb{R}$, $A_i=\left[-1-\dfrac1i,1+\dfrac1i\right]$, $i\in\mathbb{N}^*$. Trouver les ensembles :
   a) $C_E(A_i)$,
   b) $\bigcap_{i=1}^{\infty}C_E(A_i)$,
   c) $\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i$,
   d) $C_E\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)$.

Solution de l'exercice I

1. $x\in\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i\Leftrightarrow\forall i\in\mathbb{N}^*\ x\in A_i$
2. $x\in\bigcap_{i=1}^{\infty}C_E(A_i)\Leftrightarrow\forall i\in\mathbb{N}^*\ x\in C_E(A_i)\Leftrightarrow\forall i\in\mathbb{N}^*\ x\not\in A_i\Leftrightarrow x\not\in\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\Leftrightarrow x\in C_E\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)$
3. On a
   a) $C_E(A_i)=\mathbb{R}\setminus A_i=]-\infty,-1-\frac1i[\cup]1+\frac1i,+\infty[$,
   b) $\bigcap_{i=1}^{\infty}C_E(A_i)=]-\infty,-2[\cup]2,+\infty[$,
   c) $\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i=[-2,2]$,
   d) $C_E\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\mathbb{R}\setminus[-2,2]=]-\infty,-2[\cup]2,+\infty[=\bigcap_{i=1}^{\infty}C_E(A_i)$.

   $=$

Exercice II

Soient $E\subset\mathbb{R}$, $F\subset\mathbb{R}$ deux ensembles et

$$\begin{aligned} f\colon E &\to F\\ x&\mapsto 1-x^2\end{aligned}$$

une fonction.

1. Supposons que $E=F=\mathbb{R}$.
   a) Montrer que f est une application.
   b) Montrer que f n'est pas une application injective.
   c) Montrer que f n'est pas une application surjective.
2. Supposons que $E=[0,+\infty[$ et $F=]-\infty,1]$.
   a) Montrer que f est une application bijective.
   b) Trouver l'application f^{-1} réciproque (inverse) pour f.

Solution de l'exercice II

1. Supposons que $E=F=\mathbb{R}$.
   a) Puisque $\mathscr{D}_f=E$, la fonction f est une application.
   b) Une application $f\colon E\to F$ est injective si $\forall(x_1,x_2)\in E^2$, $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2$. Puisque $f(\pm1)=0$, f n'est pas une application injective.
   c) Une application $f\colon E\to F$ est surjective si $\forall y\in F\ \exists x\in E$ tel que $y=f(x)$. Puisque $2\in F$ mais l'équation $2=f(x)$ n'admet pas de solution $x\in E$, f n'est pas une application surjective.
2. Supposons que $E=[0,+\infty[$ et $F=]-\infty,1]$.
   a) La restriction de f à ces nouveaux ensembles la rend injective et surjective car pour tout $y\in F$, il existe un et un seul $x\in E$ tel que $y=f(x)$:
   $$y=1-x^2\Leftrightarrow x^2=1-y\overset{x\in E}{\Leftrightarrow}x=\sqrt{1-y}$$
   donc f est bijective.
   b) Étant f une application bijective, l'application f^{-1} réciproque (inverse) pour f est
   $$\begin{aligned} f^{-1}\colon F&\to E\\ y&\mapsto +\sqrt{1-y}.\end{aligned}$$

Contrôle II

- Groupe 1 : 2 novembre 2009
- Groupe 2 : 4 novembre 2009
- Groupe 3 : 3 novembre 2009

Module M131 - L1PC(1) – Contrôle II

Exercice I

Soient E, F deux ensembles non vides et f une application de E dans F.

1. Rappeler la définition de l'image
   a) directe $f(A)$ de $A \subset E$ par f
   b) inverse (réciproque) $f^{-1}(B)$ de $B \subset F$ par f.
2. Montrer que $\forall A \subset E$, $A \subset f^{-1}\big(f(A)\big)$.
3. Soient $E = F = \mathbb{R}$ et f l'application définie par $f(x) = 2x^2 + 1$. Soit $A = [-2, 1]$. Trouver
   a) $f(A)$,
   b) $f^{-1}\big(f(A)\big)$,
   c) $\sup_A f$ (est-il maximum ?),
   d) $\inf_A f$ (est-il minimum ?).

Solution de l'exercice I

1. Image
   a) directe $f(A) = \{y \in F \mid \exists x \in \mathscr{D}_f,\ y = f(x)\}$, *i.e.* l'ensemble des $f(x) \in F$ pour x parcourant A ;
   b) inverse (réciproque) $f^{-1}(B) = \{x \in \mathscr{D}_f \mid f(x) \in B\}$.[1]
2. Soit $x_0 \in A$. Alors il existe un et un seul $y_0 \in F$ tel que $y_0 = f(x_0)$ et, par définition de $f(A)$, ce $y_0 \in f(A)$. De plus, il existe au moins un antécédent de ce y_0 par f, à savoir x_0. Donc $x_0 \in f^{-1}\big(f(A)\big)$, ce qui prouve que $A \subset f^{-1}\big(f(A)\big)$.[2]
3. Soient $E = F = \mathbb{R}$ et f l'application définie par $f(x) = 2x^2 + 1$. Soit $A = [-2, 1]$. Alors
   a) $f(A) = [1; 9]$,
   b) $f^{-1}\big(f(A)\big) = [-2; 2]$ et on remarque que $[-2, 1] \subset [-2; 2]$,
   c) $\sup_A f = 9 = \max_A f$,
   d) $\inf_A f = 1 = \min_A f$.

Exercice II

On considère le polynôme

$$P(x) = x^5 - x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 5x + 2.$$

1. Écrire la formule de Taylor de P en 1 ; montrer que 1 est une racine de P et déterminer son ordre de multiplicité.
2. Factoriser P sur $\mathbb{R}$ en sachant qu'il possède une autre racine réelle évidente (*i.e.* elle est un diviseur du terme de degré 0).
3. Factoriser P sur $\mathbb{C}$.

Solution de l'exercice II

1. Pour un polynôme P de degré 5, la formule de Taylor en 1 s'écrit

$$P(x) = \sum_{k=0}^{k=5} P^{(k)}(1) \frac{(x-1)^k}{k!}.$$

On calcul alors les dérivées $P^{(k)}(x)$ pour $k = 0, \dots, 5$ et on les évalue en 1 :

$$\begin{aligned}
P(x) &= x^5 - x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 5x + 2 & P(1) &= 0\\
P'(x) &= 5x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 10x - 5 & P'(1) &= 0\\
P''(x) &= 20x^3 - 12x^2 - 12x + 10 & P''(1) &= 6\\
P'''(x) &= 60x^2 - 24x - 12 & P'''(1) &= 24\\
P^{IV}(x) &= 120x - 24 & P^{IV}(1) &= 96\\
P^{V}(x) &= 120 & P^{V}(1) &= 120
\end{aligned}$$

La formule de Taylor en 1 s'écrit alors

$$\begin{aligned}
P(x) &= 6\frac{(x-1)^2}{2} + 24\frac{(x-1)^3}{6} + 96\frac{(x-1)^4}{24} + 120\frac{(x-1)^5}{120}\\
&= 3(x-1)^2 + 4(x-1)^3 + 4(x-1)^4 + (x-1)^5\\
&= (x-1)^2\Big(x^3 + x^2 - x + 2\Big)
\end{aligned}$$

Ceci implique que 1 est une racine de P de multiplicité 2.

2. On pose $Q(x) = x^3 + x^2 - x + 2$. Une racine réelle évidente de Q est -2. En effectuant la division euclidienne de Q par $(x+2)$ on obtient

$$Q(x) = (x+2)(x^2 - x + 1).$$

Étant donné que $x^2 - x + 1$ ne se factorise pas sur $\mathbb{R}$, on conclut que la factorisation de P sur $\mathbb{R}$ est

$$P(x) = (x-1)^2(x+2)(x^2 - x + 1).$$

3. Pour factoriser P sur $\mathbb{C}$ il ne reste que factoriser le polynôme $x^2 - x + 1$ sur $\mathbb{C}$. Avec les notations usuelles du cours, on a $\Delta = -3$ et une racine carrée de Δ est $\delta = i\sqrt{3}$ d'où les deux racines complexes conjuguées $x_1 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $x_2 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{5\pi}{3}}$. On conclut que la factorisation de P sur $\mathbb{C}$ est

$$P(x) = (x-1)^2(x+2)(x - e^{i\frac{\pi}{3}})(x - e^{i\frac{5\pi}{3}}).$$

1. L'image réciproque se note $f^{-1}(B)$ bien que f^{-1} ne soit pas définie en générale. Cependant, si f est bijective, le symbole f^{-1} a deux sens : il représente d'abord l'image réciproque I de B par f et aussi l'image directe I' de B par f^{-1}. Heureusement, $I = I'$.
2. Si f est injective y_0 a comme unique antécédent x_0 et on a $A = f^{-1}\big(f(A)\big)$.

Module M131 - L1PC(3) – Contrôle II

Exercice I

Soient E, F deux ensembles non vides et f une application de E dans F.

1. Rappeler la définition de l'image
   a) directe $f(A)$ de $A \subset E$ par f
   b) inverse (réciproque) $f^{-1}(B)$ de $B \subset F$ par f.
2. Montrer que $\forall A \subset E$, $A \subset f^{-1}\big(f(A)\big)$.
3. Soient $E = F = \mathbb{R}$ et f l'application définie par $f(x) = 1 - 2x^2$. Soit $A = [-2, 1]$. Trouver
   a) $f(A)$,
   b) $f^{-1}\big(f(A)\big)$,
   c) $\sup_A f$ (est-il maximum ?),
   d) $\inf_A f$ (est-il minimum ?).

Solution de l'exercice I

1. Image
   a) directe $f(A) = \{y \in F \mid \exists x \in \mathscr{D}_f,\ y = f(x)\}$, *i.e.* l'ensemble des $f(x) \in F$ pour x parcourant A ; ,
   b) inverse (réciproque) $f^{-1}(B) = \{x \in \mathscr{D}_f \mid f(x) \in B\}$.[3]
2. Soit $x_0 \in A$. Alors il existe un et un seul $y_0 \in F$ tel que $y_0 = f(x_0)$ et, par définition de $f(A)$, ce $y_0 \in f(A)$. De plus, il existe au moins un antécédent de ce y_0 par f, à savoir x_0. Donc $x_0 \in f^{-1}\big(f(A)\big)$, ce qui prouve que $A \subset f^{-1}\big(f(A)\big)$.[4]
3. Soient $E = F = \mathbb{R}$ et f l'application définie par $f(x) = 1 - 2x^2$. Soit $A = [-2, 1]$. Alors
   a) $f(A) = [-7; 1]$,
   b) $f^{-1}\big(f(A)\big) = [-2; 2]$ et on remarque que $[-2, 1] \subset [-2; 2]$,
   c) $\sup_A f = 1 = \max_A f$,
   d) $\inf_A f = -7 = \min_A f$.

Exercice II

On considère le polynôme

$$P(x) = x^5 - x^4 - 2x^3 + x^2 - x - 2.$$

1. Écrire la formule de Taylor de P en -1 ; montrer que -1 est une racine de P et déterminer son ordre de multiplicité.
2. Factoriser P sur $\mathbb{R}$ en sachant qu'il possède une autre racine réelle évidente (*i.e.* elle est un diviseur du terme de degré 0).
3. Factoriser P sur $\mathbb{C}$.

3. L'image réciproque se note $f^{-1}(B)$ bien que f^{-1} ne soit pas définie en générale. Cependant, si f est bijective, le symbole f^{-1} a deux sens : il représente d'abord l'image réciproque I de B par f et aussi l'image directe I' de B par f^{-1}. Heureusement, $I = I'$.
4. Si f est injective y_0 a comme unique antécédent x_0 et on a $A = f^{-1}\big(f(A)\big)$.

Solution de l'exercice II

1. Pour un polynôme P de degré 5, la formule de Taylor en -1 s'écrit
$$P(x)=\sum_{k=0}^{k=5} P^{(k)}(-1)\frac{(x+1)^k}{k!}.$$
On calcul alors les dérivées $P^{(k)}(x)$ pour $k=0,\dots,5$ et on les évalue en -1 :
$$\begin{aligned}
P(x)&=x^5-x^4-2x^3+x^2-x-2 & P(-1)&=0\\
P'(x)&=5x^4-4x^3-6x^2+2x-1 & P'(-1)&=0\\
P''(x)&=20x^3-12x^2-12x+2 & P''(-1)&=-18\\
P'''(x)&=60x^2-24x-12 & P'''(-1)&=72\\
P^{IV}(x)&=120x-24 & P^{IV}(-1)&=-144\\
P^{V}(x)&=120 & P^{V}(-1)&=120
\end{aligned}$$
La formule de Taylor en -1 s'écrit alors
$$\begin{aligned}
P(x)&=-18\frac{(x+1)^2}{2}+72\frac{(x+1)^3}{6}-144\frac{(x+1)^4}{24}+120\frac{(x+1)^5}{120}\\
&=-9(x+1)^2+12(x+1)^3-6(x+1)^4+(x+1)^5\\
&=(x+1)^2\left(x^3-3x^2+3x-2\right)
\end{aligned}$$
Ceci implique que -1 est une racine de P de multiplicité 2.
2. On pose $Q(x)=x^3-3x^2+3x-2$. Une racine réelle évidente de Q est 2. En effectuant la division euclidienne de Q par $(x-2)$ on obtient
$$Q(x)=(x-2)(x^2-x+1).$$
Étant donné que x^2-x+1 ne se factorise pas sur $\mathbb{R}$, on conclut que la factorisation de P sur $\mathbb{R}$ est
$$P(x)=(x+1)^2(x-2)(x^2-x+1).$$
3. Pour factoriser P sur $\mathbb{C}$ il ne reste que factoriser le polynôme x^2-x+1 sur $\mathbb{C}$. Avec les notations usuelles du cours, on a $\Delta=-3$ et une racine carrée de Δ est $\delta=i\sqrt{3}$ d'où les deux racines complexes conjuguées $x_1=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}=e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $x_2=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=e^{i\frac{5\pi}{3}}$. On conclut que la factorisation de P sur $\mathbb{C}$ est
$$P(x)=(x+1)^2(x-2)(x-e^{i\frac{\pi}{3}})(x-e^{i\frac{5\pi}{3}}).$$

....

MODULE M131 - L1PC(2) – CONTRÔLE II

? Exercice I

Soient E, F deux ensembles non vides et f une application de E dans F.

1. Rappeler la définition de l'image
   a) directe $f(A)$ de $A\subset E$ par f
   b) inverse (réciproque) $f^{-1}(B)$ de $B\subset F$ par f.
2. Montrer que $\forall B\subset F$, $f\left(f^{-1}(B)\right)\subset B$.
3. Soient $E=F=\mathbb{R}$ et f l'application définie par $f(x)=1-x^2$. Soit $B=[-3,1]$. Trouver
   a) $f^{-1}(B)$,
   b) $f\left(f^{-1}(B)\right)$,
   c) $\sup_B f^{-1}$ (est-il maximum ?),
   d) $\inf_B f^{-1}$ (est-il minimum ?).

Solution de l'exercice I

1. Image
   a) directe $f(A)=\{y\in F \mid \exists x\in\mathscr{D}_f,\ y=f(x)\}$, *i.e.* l'ensemble des $f(x)\in F$ pour x parcourant A ;
   b) inverse (réciproque) $f^{-1}(B)=\{x\in\mathscr{D}_f \mid f(x)\in B\}$.[5]
2. On a $x_0\in f\left(f^{-1}(B)\right)$ ssi $\exists z\in f^{-1}(B)$ tel que $x_0=f(z)$ et $z\in f^{-1}(B)$ ssi $f(z)\in B$. Ceci prouve que $f\left(f^{-1}(B)\right)\subset B$.[6]
3. Soient $E=F=\mathbb{R}$ et f l'application définie par $f(x)=1-x^2$. Soit $B=[-3,1]$. Alors
   a) $f^{-1}(B)=[-2;2]$,
   b) $f\left(f^{-1}(B)\right)=[-3;1]$ et on remarque que $[-3,1]\subset[-3;1]$,
   c) $\sup_B f^{-1}=2=\max_B f^{-1}$,
   d) $\inf_B f^{-1}=-2=\min_B f^{-1}$.

? Exercice II

On considère le polynôme
$$P(x)=x^5-5x^4+10x^3-11x^2+7x-2.$$

1. Écrire la formule de Taylor de P en 1 ; montrer que 1 est une racine de P et déterminer son ordre de multiplicité.
2. Factoriser P sur $\mathbb{R}$ en sachant qu'il possède une autre racine réelle évidente (*i.e.* elle est un diviseur du terme de degré 0).
3. Factoriser P sur $\mathbb{C}$.

Solution de l'exercice II

1. Pour un polynôme P de degré 5, la formule de Taylor en 1 s'écrit
$$P(x)=\sum_{k=0}^{k=5} P^{(k)}(1)\frac{(x-1)^k}{k!}.$$
On calcul alors les dérivées $P^{(k)}(x)$ pour $k=0,\dots,5$ et on les évalue en 1 :
$$\begin{aligned}
P(x)&=x^5-5x^4+10x^3-11x^2+7x-2 & P(1)&=0\\
P'(x)&=5x^4-20x^3+30x^2-22x+7 & P'(1)&=0\\
P''(x)&=20x^3-60x^2+60x-22 & P''(1)&=-2\\
P'''(x)&=60x^2-120x+60 & P'''(1)&=0\\
P^{IV}(x)&=120x-120 & P^{IV}(1)&=0\\
P^{V}(x)&=120 & P^{V}(1)&=120
\end{aligned}$$
La formule de Taylor en 1 s'écrit alors
$$\begin{aligned}
P(x)&=-2\frac{(x-1)^2}{2}+120\frac{(x-1)^5}{120}\\
&=(x-1)^2\left(x^3-3x^2+3x-2\right)
\end{aligned}$$
Ceci implique que 1 est une racine de P de multiplicité 2.
2. On pose $Q(x)=x^3-3x^2+3x-2$. Une racine réelle évidente de Q est 2. En effectuant la division euclidienne de Q par $(x-2)$ on obtient
$$Q(x)=(x-2)(x^2-x+1).$$
Étant donné que x^2-x+1 ne se factorise pas sur $\mathbb{R}$, on conclut que la factorisation de P sur $\mathbb{R}$ est
$$P(x)=(x-1)^2(x-2)(x^2-x+1).$$
3. Pour factoriser P sur $\mathbb{C}$ il ne reste que factoriser le polynôme x^2-x+1 sur $\mathbb{C}$. Avec les notations usuelles du cours, on a $\Delta=-3$ et une racine carrée de Δ est $\delta=i\sqrt{3}$ d'où les deux racines complexes conjuguées $x_1=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}=e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $x_2=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=e^{i\frac{5\pi}{3}}$. On conclut que la factorisation de P sur $\mathbb{C}$ est
$$P(x)=(x-1)^2(x-2)(x-e^{i\frac{\pi}{3}})(x-e^{i\frac{5\pi}{3}}).$$

---

5. L'image réciproque se note $f^{-1}(B)$ bien que f^{-1} ne soit pas définie en générale. Cependant, si f est bijective, le symbole f^{-1} a deux sens : il représente d'abord l'image réciproque I de B par f et aussi l'image directe I' de B par f^{-1}. Heureusement, $I=I'$.
6. Si f est surjective on a $B=f\left(f^{-1}(B)\right)$.

Contrôle III

- Groupe 1 : 23 novembre 2009
- Groupe 2 : 25 novembre 2009
- Groupe 3 : 24 novembre 2009

CONTRÔLE III
23 novembre 2009 – durée : 1 heure

▷ Les documents, portables et calculatrices sont strictement interdits.
▷ On attachera le plus grand soin à la rédaction et à la présentation claire et lisible des résultats dont il sera tenu compte lors de la correction.

Exercice I

1. Donner la définition et un exemple d'une suite de Cauchy. Quel lien existe-t-il entre «suite de Cauchy» et «suite convergente» ?
2. Soit (u_n) une suite telle que
$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n^2 - \frac{3}{4}, \\ u_0 > \frac{3}{2}. \end{cases}$$
   a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > \frac{3}{2}$.
   b) En supposant que la limite de u_n existe, la calculer.
   c) Montrer que (u_n) est une suite monotone et en étudier sa convergence.
3. Calculer, si elles existent, les limites suivantes :
$$a)\ \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n, \qquad b)\ \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{2}{\sqrt{n}}\right)^n,$$
$$c)\ \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{\sqrt{n}}, \qquad d)\ \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)^n.$$

Solution de l'exercice I

1. Une suite u_n est de Cauchy si
$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^* \ \exists M \in \mathbb{N} \text{ tel que } |u_p - u_q| < \varepsilon \ \ \forall p,q \in \mathbb{N},\ p,q \geq M.$$
Une suite est de Cauchy si et seulement si elle est convergente.
Un exemple de suite de Cauchy est donc la suite $\frac{1}{n}$ qui converge vers 0.
2. a) Par récurrence :
   – $u_0 > \frac{3}{2}$;
   – soit $u_n > \frac{3}{2}$, alors $u_{n+1} = u_n^2 - \frac{3}{4} > \frac{9}{4} - \frac{3}{4} = \frac{3}{2}$.
   b) Soit $\ell = \lim u_n$ avec $\ell \in \mathbb{R}$. Alors, en passant à la limite dans la définition, on a $\ell = \ell^2 - \frac{3}{4}$ d'où $\ell = -\frac{1}{2}$ ou $\ell = \frac{3}{2}$. Puisque $u_n > \frac{3}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, seul $\ell = \frac{3}{2}$ est une limite finie acceptable.
   c) Puisque $u_n > \frac{3}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} - u_n = u_n^2 - u_n - \frac{3}{4} > 0$, autrement dit la suite u_n est monotone croissante. Étant une suite monotone croissante vérifiant $u_n > \frac{3}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et puisque l'unique limite réelle possible est $\ell = \frac{3}{2}$, on conclut que $\lim u_n = +\infty$.
3. *a)* $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n = \lim_{n\to+\infty}\left(\left(1+\frac{2}{n}\right)^{\frac{n}{2}}\right)^2 = e^2,$

   b) $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{2}{\sqrt{n}}\right)^n = \lim_{n\to+\infty}\left(\left(1+\frac{2}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}} = +\infty,$

   c) $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{\sqrt{n}} = \lim_{n\to+\infty}\left(\left(1+\frac{2}{n}\right)^n\right)^{\frac{1}{\sqrt{n}}} = 1,$

   d) $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)^n$ n'existe pas car la suite extraite constituée par les termes d'indices paire converge vers e et la suite extraite constituée par les termes d'indices impaire converge vers e^{-1}.

Exercice II

Soit f l'application définie par
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x) = \begin{cases} x^2 \cos\frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1. f est-elle continue en 0 ? (justifier la réponse)
2. Énoncer le théorème des valeurs intermédiaires. En déduire le nombre de solutions de l'équation $x^2 - 16 = 0$ sur l'intervalle $]0,+\infty[$ sans resoudre l'équation.

Solution de l'exercice II

1. À partir des inégalités $-x^2 \leq x^2 \cos\frac{1}{x} \leq x^2$ et en utilisant le théorème de l'encadrement on déduit que $\lim_{x\to 0} x^2 \cos\frac{1}{x} = f(0) = 0$ donc f est continue en 0.
2. Les énoncés suivants sont équivalents :
   – Si f est définie et continue en tout point d'un intervalle I alors pour tout sous-intervalle J de I, l'image $f(J)$ est un intervalle.
   – L'image d'un intervalle de $\mathbb{R}$ par une fonction continue est un intervalle de $\mathbb{R}$.
   – Soient f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et $a,b \in I$ avec $f(a) \leq f(b)$. Alors f atteint toutes les valeurs intermédiaires entre $f(a)$ et $f(b)$; plus précisément :
$$\forall d \in [f(a), f(b)] \quad \exists c \text{ compris entre } a \text{ et } b \text{ tel que } f(c) = d.$$
   On considère la fonction $f : x \mapsto x^2 - 16$. f est une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$. Étant une parabole convexe de sommet $(0,-16)$, la fonction f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$. De plus $f(0) = -16$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Par conséquent, la fonction f, strictement croissante sur $]0;+\infty[$, est négative en $x = 0$ et positive pour $x \to +\infty$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation associée à la fonction f admet une unique solution sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

CONTRÔLE III
24 novembre 2009 – durée : 1 heure

▷ Les documents, portables et calculatrices sont strictement interdits.
▷ On attachera le plus grand soin à la rédaction et à la présentation claire et lisible des résultats dont il sera tenu compte lors de la correction.

Exercice I

1. Énoncer le théorème de la limite par encadrement (ou *des deux gendarmes*). En déduire le comportement de la suite u_n qui vérifie
$$\frac{2}{n+3} < u_n < \frac{4}{n}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ n > 100.$$
2. Soit (u_n) une suite telle que
$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n^2 - 1, \\ u_0 > 2. \end{cases}$$
   a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 2$.
   b) En supposant que la limite de u_n existe, la calculer.
   c) Montrer que (u_n) est une suite monotone et en étudier sa convergence.
3. Calculer, si elles existent, les limites suivantes :
$$a)\ \lim_{n\to+\infty}\left(n \sin\frac{2}{n}\right), \qquad b)\ \lim_{n\to+\infty}\left(n \sin\frac{2}{\sqrt{n}}\right),$$
$$c)\ \lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n} \sin\frac{2}{n}\right), \qquad d)\ \lim_{n\to+\infty}\left(n \sin\frac{(-1)^n}{n}\right).$$

Solution de l'exercice I

1. Soit u_n une suite. S'il existe deux suites v_n et w_n ayant une même limite $\ell \in \mathbb{R}$ et satisfaisant
$$\exists M \in \mathbb{N} \text{ tel que } v_n \leq u_n \leq w_n \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq M.$$
Alors $\lim u_n = \ell$.
Puique $\lim_n \frac{2}{n+3} = \lim_n \frac{4}{n} = 0$, d'après le théorème d'encadrement on a que $\lim_n u_n = 0$.
2. a) Par récurrence :
   – $u_0 > 2$;
   – soit $u_n > 2$, alors $u_{n+1} = u_n^2 - 1 > 4 - 1 = 3 > 2$.
   b) Soit $\ell = \lim u_n$ avec $\ell \in \mathbb{R}$. Alors, en passant à la limite dans la définition, on a $\ell = \ell^2 - 1$ d'où $\ell = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ ou $\ell = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Puisque $u_n > 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, aucune limite finie n'est acceptable.
   c) Puisque $u_n > 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} - u_n = u_n^2 - u_n - 1 > 0$, autrement dit la suite u_n est monotone croissante. Étant une suite monotone croissante tel que $u_n > 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et puisque il n'y a pas de limite finie réelle possible, on conclut que $\lim u_n = +\infty$.
3. *a)* $\lim_{n\to+\infty}\left(n \sin\frac{2}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} 2\left(\frac{n}{2}\sin\frac{2}{n}\right) = 2,$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n\sin\frac{2}{\sqrt{n}}\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}2\sqrt{n}\left(\frac{\sqrt{n}}{2}\sin\frac{2}{\sqrt{n}}\right)=+\infty$,

c) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n}\sin\frac{2}{n}\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{n}}\left(\frac{n}{2}\sin\frac{2}{n}\right)=0$,

d) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n\sin\frac{(-1)^n}{n}\right)$ n'existe pas car la suite extraite constituée par les termes d'indices paire converge vers 1 et la suite extraite constituée par les termes d'indices impaire converge vers -1.

Exercice II

Soit f l'application définie par

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$
$$x\mapsto f(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x} & \text{si } x\neq 0,\\ 0 & \text{si } x=0.\end{cases}$$

1. f est-elle continue en 0 ? (justifier la réponse)
2. Énoncer le théorème des valeurs intermédiaires. En déduire le nombre de solutions de l'équation $x^2-16=0$ sur l'intervalle $]-\infty,0[$ sans resoudre l'équation.

Solution de l'exercice II

1. À partir des inégalités $-x^2\le x^2\sin\frac{1}{x}\le x^2$ et en utilisant le théorème de l'encadrement on déduit que $\lim\limits_{x\to0}x^2\sin\frac{1}{x}=f(0)=0$ donc f est continue en 0.
2. Les énoncés suivants sont équivalents :
   – Si f est définie et continue en tout point d'un intervalle I alors pour tout sous-intervalle J de I, l'image $f(J)$ est un intervalle.
   – L'image d'un intervalle de $\mathbb{R}$ par une fonction continue est un intervalle de $\mathbb{R}$.
   – Soient f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et $a,b\in I$ avec $f(a)\le f(b)$. Alors f atteint toutes les valeurs intermédiaires entre $f(a)$ et $f(b)$; plus précisément :

   $$\forall d\in[f(a),f(b)]\quad \exists c \text{ compris entre } a \text{ et } b \text{ tel que } f(c)=d.$$

   On considère la fonction $f: x\mapsto x^2-16$. f est une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$. Étant une parabole convexe de sommet $(0,-16)$, la fonction f est strictement décroissante sur $]-\infty;0[$. De plus $f(0)=-16$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$. Par conséquent, la fonction f, strictement décroissante sur $]-\infty;0[$, est négative en $x=0$ et positive pour $x\to-\infty$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation associée à la fonction f admet une unique solution sur l'intervalle $]-\infty;0[$.

CONTRÔLE III
25 novembre 2009 – durée : 1 heure

▷ Les documents, portables et calculatrices sont strictement interdits.
▷ On attachera le plus grand soin à la rédaction et à la présentation claire et lisible des résultats dont il sera tenu compte lors de la correction.

Exercice I

1. Donner la définition de suites adjacentes. Quel lien existe-t-il entre «suites adjacentes» et «suites convergentes» ?
2. Soit (u_n) une suite telle que

   $$\begin{cases}u_{n+1}=u_n^2-\frac{15}{4},\\ u_0>\frac{15}{2}.\end{cases}$$

   a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n>\frac{15}{2}$.
   b) En supposant que la limite de u_n existe, la calculer.
   c) Montrer que (u_n) est une suite monotone et en étudier sa convergence.
3. Calculer, si elles existent, les limites suivantes :

$$a)\ \lim_{n\to+\infty}n^2\left(1-\cos\frac{2}{n}\right),\qquad b)\ \lim_{n\to+\infty}n^2\left(1-\cos\frac{2}{\sqrt{n}}\right),$$
$$c)\ \lim_{n\to+\infty}n\left(1-\cos\frac{2}{n}\right),\qquad d)\ \lim_{n\to+\infty}n^2\left((-1)^n-\cos\frac{1}{n}\right).$$

Solution de l'exercice I

1. Deux suites réelles u_n et v_n sont dites adjacentes lorsque l'une est croissante, l'autre est décroissante et $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n-v_n)=0$.
   Si deux suites réelles u_n et v_n sont adjacentes alors elles sont convergentes et elles convergent vers une même limite.
2. a) Par récurrence :
   – $u_0>\frac{15}{2}$;
   – soit $u_n>\frac{15}{2}$, alors $u_{n+1}=u_n^2-\frac{15}{4}>7\frac{15}{2}>\frac{15}{2}$.

   b) Soit $\ell=\lim u_n$ avec $\ell\in\mathbb{R}$. Alors, en passant à la limite dans la définition, on a $\ell=\ell^2-\frac{15}{4}$ d'où $\ell=-\frac{3}{2}$ ou $\ell=\frac{5}{2}$. Puisque $u_n>\frac{15}{2}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, aucune limite finie n'est acceptable.

   c) Puisque $u_n>\frac{15}{2}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $u_{n+1}-u_n=u_n^2-u_n-\frac{15}{4}>0$, autrement dit la suite u_n est monotone croissante. Étant une suite monotone croissante tel que $u_n>\frac{15}{2}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ et puisque aucune limite réelle finie n'est possible, on conclut que $\lim u_n=+\infty$.
3. *a)* $\lim\limits_{n\to+\infty}n^2\left(1-\cos\frac{2}{n}\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}4\frac{n^2}{4}\left(1-\cos\frac{2}{n}\right)=2$,

   b) $\lim\limits_{n\to+\infty}n^2\left(1-\cos\frac{2}{\sqrt{n}}\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}(4n)n\left(1-\cos\frac{2}{\sqrt{n}}\right)=+\infty$,

   c) $\lim\limits_{n\to+\infty}n\left(1-\cos\frac{2}{n}\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{4}{n}n^2\left(1-\cos\frac{2}{n}\right)=0$,

   d) $\lim\limits_{n\to+\infty}(-1)^n n^2\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)$ n'existe pas car la suite extraite constituée par les termes d'indices paire converge vers $\frac{1}{2}$ et la suite extraite constituée par les termes d'indices impaire diverge vers $-\infty$.

Exercice II

Soit f l'application définie par

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$
$$x\mapsto f(x)=\begin{cases}-x\sin\frac{1}{x} & \text{si } x\neq 0,\\ 0 & \text{si } x=0.\end{cases}$$

1. f est-elle continue en 0 ? (justifier la réponse)
2. Énoncer le théorème des valeurs intermédiaires. En déduire le nombre de solutions de l'équation $x^2-\sqrt{2}=0$ sur l'intervalle $]-\infty,0[$ sans resoudre l'équation.

Solution de l'exercice II

1. À partir des inégalités $-x\le x\sin\frac{1}{x}\le x$ et en utilisant le théorème de l'encadrement on déduit que $\lim\limits_{x\to0}-x\sin\frac{1}{x}=f(0)=0$ donc f est continue en 0.
2. Les énoncés suivants sont équivalents :
   – Si f est définie et continue en tout point d'un intervalle I alors pour tout sous-intervalle J de I, l'image $f(J)$ est un intervalle.
   – L'image d'un intervalle de $\mathbb{R}$ par une fonction continue est un intervalle de $\mathbb{R}$.
   – Soient f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et $a,b\in I$ avec $f(a)\le f(b)$. Alors f atteint toutes les valeurs intermédiaires entre $f(a)$ et $f(b)$; plus précisément :

   $$\forall d\in[f(a),f(b)]\quad \exists c \text{ compris entre } a \text{ et } b \text{ tel que } f(c)=d.$$

   On considère la fonction $f: x\mapsto x^2-\sqrt{2}$. f est une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$. Étant une parabole convexe de sommet $(0,-\sqrt{2})$, la fonction f est strictement décroissante sur $]-\infty,0[$. De plus $f(0)=-\sqrt{2}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$. Par conséquent, la fonction f, strictement décroissante sur $]-\infty,0[$, est négative en $x=0$ et positive pour $x\to-\infty$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation associée à la fonction f admet une unique solution sur l'intervalle $]-\infty,0[$.

Contrôle IV

- Groupe 1 : 15 décembre 2009
- Groupe 2 : 15 décembre 2009
- Groupe 3 : 15 décembre 2009

DLs usuels en 0

$$\ln(1+x)=\sum_{k=1}^{k=n}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k}+o\left(x^n\right)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+o\left(x^n\right)$$

$$\ln(1-x)=-\sum_{k=1}^{k=n}\frac{x^k}{k}+o\left(x^n\right)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots-\frac{x^n}{n}+o\left(x^n\right)$$

$$e^x=\sum_{k=0}^{k=n}\frac{x^k}{k!}+o\left(x^n\right)=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+o\left(x^n\right)$$

$$\sin(x)=\sum_{k=0}^{k=n}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}+o\left(x^{2n+2}\right)=x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o\left(x^{2n+2}\right)$$

$$\cos(x)=\sum_{k=0}^{k=n}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}+o\left(x^{2n+1}\right)=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o\left(x^{2n+1}\right)$$

$$\tan(x)=x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\frac{17x^7}{315}+o\left(x^8\right)$$

$$\arcsin(x)=x+\frac{x^3}{6}+\frac{3x^5}{40}+\cdots+\left|\binom{-\frac{1}{2}}{n}\right|\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+o\left(x^{2n+2}\right)$$

$$\arccos(x)=\frac{\pi}{2}-\arcsin(x)$$

$$\arctan(x)=\sum_{k=0}^{k=n}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{2k+1}+o\left(x^{2n+1}\right)=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+o\left(x^{2n+2}\right)$$

$$\sinh(x)=\sum_{k=0}^{k=n}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}+o\left(x^{2n+2}\right)=x+\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+\cdots+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o\left(x^{2n+2}\right)$$

$$\cosh(x)=\sum_{k=0}^{k=n}\frac{x^{2k}}{(2k)!}+o\left(x^{2n+1}\right)=1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+\cdots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o\left(x^{2n+1}\right)$$

$$\tanh(x)=x-\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}-\frac{17x^7}{315}+o\left(x^8\right)$$

$$(1+x)^\alpha=\sum_{k=0}^{k=n}\binom{\alpha}{k}x^k+o\left(x^n\right)=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6}x^3+\cdots+\binom{\alpha}{n}x^n+o\left(x^n\right)$$

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}-\frac{5x^4}{128}+o\left(x^4\right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}==1-\frac{x}{2}+\frac{3x^2}{8}-\frac{5x^3}{16}+\frac{5x^4}{128}+o\left(x^4\right)$$

$$\sqrt{1-x}=1-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}-\frac{x^3}{16}-\frac{5x^4}{128}+o\left(x^4\right)$$

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{k=0}^{k=n}(-1)^kx^k+o\left(x^n\right)=1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^nx^n+o\left(x^n\right)$$

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{k=0}^{k=n}x^k+o\left(x^n\right)=1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+o\left(x^n\right)$$

Contrôle IV - thème A

Exercice I [10 points]

1. Énoncer le théorème de Rolle. Soit $h\colon [-1;1]\to\mathbb{R}$ la fonction définie par $h(x)=1-\sqrt[3]{x^2}$. Peut-on appliquer à h le théorème de Rolle ? (justifier la réponse)
2. «Toute fonction continue est dérivable». Démontrer cette affirmation si elle est vraie, donner un exemple si elle est fausse.
3. Soit $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une application définie par

$$f(x)=\begin{cases}x^2\ln x, & \text{si } x>0,\\ 0, & \text{si } x=0,\\ x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } x<0.\end{cases}$$

   a) f est-elle continue en $x=0$?
   b) Calculer $f'(x)$ pour $x\neq 0$. En déduire l'équation de la droite tangente à f en $x=1$.
   c) f est-elle dérivable en $x=0$?
   d) f est-elle de classe $\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$?

Solution de l'exercice I

1. [2 points] **Théorème de Rolle** *Soit f une fonction continue sur l'intervalle fermé $[a;b]$, dérivable sur l'intervalle ouvert $]a;b[$, telle que $f(a)=f(b)$. Alors il existe $c\in\,]a;b[$ tel que $f'(c)=0$.*
   h est continue sur l'intervalle fermé $[-1;1]$. On a bien $h(1)=h(-1)$ avec $h'(x)=-\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ si $x\neq0$ mais $h'(0)$ n'existe pas car $\lim_{x\to0^\pm}\frac{h(x)-h(0)}{x-0}=\mp\infty$.
2. [1 point] L'affirmation est bien évidemment fausse. Il suffit de considerer la fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ telle que $f(x)=|x|$: elle est continue mais elle n'est pas dérivable en $x=0$ car $\lim_{x\to0}\frac{|x|}{x}$ n'existe pas.
3. a) [1 point] $\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}f(x)=\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}x^2\ln x=0$, $\lim_{\substack{x\to0\\x<0}}f(x)=\lim_{\substack{x\to0\\x<0}}x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)=0$, donc $\lim_{x\to0}f(x)=f(0)$: f est continue en 0.
   b) [2 point] $f'(x)=\begin{cases}x(2\ln x+1), & \text{si } x>0,\\ 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right)-\cos\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } x<0.\end{cases}$
   La droite tangente à f en $x=x_0$ a équation $y=f'(x_0)x+(f(x_0)-f'(x_0)x_0)$ donc pour $x_0=1$ on a $y=x-1$.
   c) [2 points] La fonction est dérivable en $x=0$ ssi existe finie la limite $\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$.
   On a $\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{x^2\ln x-0}{x-0}=0$, $\lim_{\substack{x\to0\\x<0}}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{\substack{x\to0\\x<0}}\frac{x^2\sin(1/x)-0}{x-0}=0$, donc $\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=0=f'(0)$: f est dérivable en 0.
   d) [2 points] $\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}f'(x)=\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}x(2\ln x+1)=0$, $\lim_{\substack{x\to0\\x<0}}f'(x)=\lim_{\substack{x\to0\\x<0}}2x\sin\left(\frac{1}{x}\right)-\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ n'existe pas, donc f' n'est pas continue en 0. Par conséquent f n'est pas de classe $\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$.

Exercice II [6 points]

Soit $g\colon\,]0;\frac{\pi}{2}[\to]0,1[$ une application telle que $g(x)=\sin(x)$.

1. Montrer que g est strictement croissante sur $]0;\frac{\pi}{2}[$.
2. En utilisant le théorème de la bijection (qu'on énoncera) démontrer que l'équation $g(x)=\frac{1}{2}$ admet une unique solution.
3. Déterminer la fonction inverse g^{-1}. Que sait-on de la continuité de g^{-1} ?
4. Calculer la dérivée de g^{-1} sur $]0;1[$.

Solution de l'exercice II

1. [1 point] $g(x)=\sin(x)$, $g'(x)=\cos(x)$, $g'(x)>0$ pour tout $x\in\,]0;\frac{\pi}{2}[$ donc g est strictement croissante sur $]0;\frac{\pi}{2}[$.
2. [2 points] **Théorème de la bijection** *Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I. Alors f induit une bijection de I dans $f(I)$. De plus, sa bijection réciproque est continue sur $f(I)$, est monotone sur $f(I)$ et a le même sens de variation que f.*[1]
   g est définie, continue, dérivable, strictement croissante sur $]0;\frac{\pi}{2}[$, ce qui prouve que g réalise une bijection de $]0;\frac{\pi}{2}[$ dans
   $$g\left(]0;\tfrac{\pi}{2}[\right)=]\lim_{x\to0}g(x);\lim_{x\to\frac{1}{\pi}}g(x)[=]0;1[.$$
   Comme $\frac{1}{2}\in g(]0;\frac{\pi}{2}[)$, on en déduit qu'il existe un unique réel $\alpha\in\,]0;\frac{\pi}{2}[$ tel que $g(\alpha)=\frac{1}{2}$.
3. [2 points] $g^{-1}\colon\,]0;1[\to]0;\frac{\pi}{2}[$ avec $g^{-1}(y)=\arcsin(x)$. Comme g réalise une bijection de $]0;\frac{\pi}{2}[$ dans $]0;1[$, la bijection réciproque g^{-1} est une bijection de $]0;1[$ dans $]0;\frac{\pi}{2}[$. Sachant que g est continue sur $]0;\frac{\pi}{2}[$, on peut en déduire que g^{-1} est continue sur $]0;1[$.
4. [1 point] La dérivée de g^{-1} sur $]0;1[$ est $\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$.

1. Dans un repère orthonormé, les graphes de f et de sa bijection réciproque sont symétriques par rapport à la première bisectrice des axes

Exercice III [10 points]

1. Déterminer le développement limité de la fonction $g(x)=\dfrac{e^x}{\cos x}$ en 0 à l'ordre 3.
2. Déterminer le développement limité asymtotique en $+\infty$ de la fonction $\ell(x)=\dfrac{x^2-x}{1+x}$ à l'ordre 2.
3. Calculer la limite $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sinh(x)+\sin(x)-2x}{x(\cosh(x)+\cos(x)-2)}$ en utilisant les developpemets limités du tableau.
4. Calculer la limite $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x\ln x}{x^2-1}$ en utilisant les developpemets limités du tableau (attention : $x\to 1$ et non 0).
5. Calculer la limite $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3x+1}+\sqrt{2-x}-\sqrt{2x+7}}{x^2+x-2}$ en utilisant la règle de L'Hopital.

Solution de l'exercice III

1. [2 points] À partir du DL donné dans le tableau $\cos(x)=1-\frac{1}{2}x^2+o(x^3)$, on trouve le DL en zéro de $\frac{1}{\cos(x)}$ (en utilisant le DL en zéro de $\frac{1}{1-x}$) :
$$\frac{1}{\cos(x)}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}x^2+o(x^3)}\overbrace{=}^{u=\frac{1}{2}x^2+o(x^3)}1+u+o(u^2)=1+\frac{1}{2}x^2+o(x^3).$$
En multipliant ce résultat par le DL donné dans le tableau $e^x=1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+o(x^3)$ on obtient finalement
$$g(x)=1+x+x^2+\frac{2}{3}x^3+o(x^3).$$
2. [2 points] On pose $y=\frac{1}{x}$. Il s'agit de calculer le développement limité en zéro à l'ordre 3 de la fonction $r(y)=\frac{1-y}{y(1+y)}$.
Or, $\frac{1-y}{1+y}=(1-y)(1-y+y^2-y^3+o(y^3))$ donc $r(y)=\frac{1}{y}-2y+2y^2-2y^3+o(y^3)$ et finalement $\ell(x)=x-2+\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}+o(x^{-2})$.
3. [2 points] $\sinh(x)+\sin(x)-2x=x+\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}-2x+o(x^5)$
$\cosh(x)+\cos(x)-2=1+\frac{x^2}{3}+\frac{x^4}{24}+1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-2+o(x^4)$
Donc $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sinh(x)+\sin(x)-2x}{x(\cosh(x)+\cos(x)-2)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{60}+o(1)}{\frac{1}{12}+o(1)}=\frac{1}{5}$.
4. [2 points] On pose $y=x-1$ Alors $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x\ln x}{x^2-1}=\lim\limits_{y\to 0}\frac{(1+y)\ln(1+y)}{y(2+y)}=\lim\limits_{y\to 0}\frac{(1+y)\left(y-\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3}+o(y^3)\right)}{y(2+y)}=\lim\limits_{y\to 0}\frac{1+\frac{y}{2}-\frac{y^2}{6}+o(y^2)}{2(1+\frac{y}{2})}=\frac{1}{2}$.
5. [2 points] Soit $f(x)=\sqrt{3x+1}+\sqrt{2-x}-\sqrt{2x+7}$ et $g(x)=x^2+x-2$. f et g sont continues sur $[0;2]$, dérivables sur $]0;2[$ et $f(1)=g(1)=0$. On a
$$f'(x)=\frac{3}{2\sqrt{3x+1}}-\frac{1}{2\sqrt{2-x}}-\frac{1}{\sqrt{2x+7}},\qquad g'(x)=2x+1$$
d'où $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f'(x)}{g'(x)}=-\frac{1}{36}$. On en déduit que $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)}{g(x)}=-\frac{1}{36}$.

....

CONTRÔLE IV - THÈME B

Exercice I [10 points]

1. Enoncer le théorème des acroissements finis. Soit $h\colon[-1;1]\to\mathbb{R}$ la fonction définie par $h(x)=1-\sqrt[3]{x^2}$. Peut-on appliquer à h le théorème des acroissements finis ? (justifier la réponse)
2. «Toute fonction continue est dérivable». Démontrer cette affirmation si elle est vraie, donner un exemple si elle est fausse.
3. Soit $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une application définie par
$$f(x)=\begin{cases}x^2\cos\frac{1}{x}, & \text{si } x>0,\\ 0, & \text{si } x=0,\\ x^2\sin\frac{1}{x}, & \text{si } x<0.\end{cases}$$
   a) f est-elle continue en $x=0$?
   b) Calculer $f'(x)$ pour $x\neq 0$. En déduire l'équation de la droite tangente à f en $x=\frac{1}{\pi}$.
   c) f est-elle dérivable en $x=0$?
   d) f est-elle de classe $\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$?

Solution de l'exercice I

1. [2 points] **Théorème des acroissements finis** *Soit f une fonction continue sur l'intervalle fermé $[a;b]$ et dérivable sur l'intervalle ouvert $]a;b[$. Alors il existe $c\in\,]a;b[$ tel que $f(b)-f(a)=(b-a)f'(c)$.*
h est continue sur $[-1,1]$ et $h'(x)=-\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ si $x\neq 0$ mais $h'(0)$ n'existe pas car $\lim\limits_{x\to}\frac{h(x)-h(0)}{x-0}=\mp\infty$.
2. [1 point] L'affirmation est bien évidemment fausse. Il suffit de considerer la fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ telle que $f(x)=|x|$: elle est continue mais elle n'est pas dérivable en $x=0$ car $\lim\limits_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$ n'existe pas.
3. a) [1 points] $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}x^2\cos\frac{1}{x}=0$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}x^2\sin\frac{1}{x}=0$, donc $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)$: f est continue en 0.
   b) [2 points] $f'(x)=\begin{cases}2x\cos\frac{1}{x}+\sin\frac{1}{x}, & \text{si } x>0,\\ 2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}, & \text{si } x<0.\end{cases}$
   La droite tangente à f en $x=x_0$ a équation $y=f'(x_0)x+(f(x_0)-f'(x_0)x_0)$ donc pour $x_0=\frac{1}{\pi}$ on a $y=-\frac{2}{\pi}x+\frac{1}{\pi^2}$.
   c) [2 points] La fonction est dérivable en $x=0$ ssi il existe fini la limite $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$.
   On a $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{x^2\cos\frac{1}{x}-0}{x-0}=0$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}-0}{x-0}=0$, donc $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=0=f'(0)$: f est dérivable en 0.
   d) [2 points] $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}f'(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\left(2x\cos\frac{1}{x}+\sin\frac{1}{x}\right)$ n'existe pas, donc f' n'est pas continue en 0. Par conséquent f n'est pas de classe $\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$.

Exercice II [6 points]

Soit $g\colon\,]-1,0[\to\mathbb{R}$ une application telle que $g(x)=\ln(1+x)$.

1. Montrer que g est strictement croissante sur $]-1,0[$.
2. En utilisant le théorème de la bijection (qu'on énoncera) démontrer que l'équation $g(x)=-2$ admet une unique solution.
3. Déterminer la fonction inverse g^{-1}. Que sait-on de la continuité de g^{-1} ?
4. Calculer la dérivée de g^{-1} sur $]-\infty;0[$.

Solution de l'exercice II

1. [1 point] $g(x)=\ln(1+x)$, $g'(x)=\frac{1}{1+x}$, $g'(x)>0$ pour tout $x\in\,]-1;0[$ donc g est strictement croissante sur $]-1;0[$.
2. [2 points] **Théorème de la bijection** *Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I. Alors f induit une bijection de I dans $f(I)$. De plus, sa bijection réciproque est continue sur $f(I)$, est monotone sur $f(I)$ et a le même sens de variation que f.*[2]
g est définie, continue, dérivable, strictement croissante sur $]-1;0[$, ce qui prouve que g réalise une bijection de $]-1;0[$ dans
$$g(]-1;0[)=]\lim_{x\to -1}g(x);\lim_{x\to 0}g(x)[=]-\infty;0[.$$
Comme $-2\in g(]-1;0[)$, on en déduit qu'il existe un unique réel $\alpha\in\,]-1;0[$ tel que $g(\alpha)=-2$.
3. [2 points] $g^{-1}:\mathbb{R}^*_-\to]-1;0[$ avec $g^{-1}(y)=e^y-1$. Comme g réalise une bijection de $]-1;0[$ dans $\mathbb{R}^*_-$, la bijection réciproque g^{-1} est une bijection de $\mathbb{R}^*_-$ dans $]-1;0[$. Sachant que g est continue sur $]-1;0[$, on peut en déduire que g^{-1} est continue sur $\mathbb{R}^*_-$.
4. [1 point] La dérivée de g^{-1} sur $]-\infty,0[$ est e^y.

Exercice III [10 points]

1. Déterminer le développement limité de la fonction $g(x)=\dfrac{e^x}{(\sin x)/x}$ en 0 à l'ordre 3.
2. Déterminer le développement limité asymtotique en $+\infty$ de la fonction $\ell(x)=\dfrac{x^2-x}{1+x}$ à l'ordre 2.
3. Calculer la limite $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x(\cosh(x)+\cos(x)-2)}{\sinh(x)+\sin(x)-2x}$ en utilisant les developpemets limités du tableau.
4. Calculer la limite $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x\ln x}{x^2-1}$ en utilisant les developpemets limités du tableau (attention : $x\to 1$ et non 0).
5. Calculer la limite $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{1-3x}+\sqrt{x+2}-\sqrt{7-2x}}{x^2-x-2}$ en utilisant la règle de L'Hopital.

Solution de l'exercice III

1. [2 points] À partir du DL donné dans le tableau $\cos(x)=1-\frac{1}{2}x^2+o(x^3)$, on trouve le DL en zéro de $\frac{1}{\cos(x)}$ (en utilisant le DL en zéro de $\frac{1}{1-x}$) :
$$\frac{1}{\cos(x)}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}x^2+o(x^3)}\overbrace{=}^{u=\frac{1}{2}x^2+o(x^3)}1+u+o(u^2)=1+\frac{1}{2}x^2+o(x^3).$$

2. Dans un repère orthonormé, les graphes de f et de sa bijection réciproque sont symétriques par rapport à la première bisectrice des axes

En multipliant ce résultat par le DL donné dans le tableau $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$ on obtient finalement

$$g(x) = 1 + x + x^2 + \frac{2}{3}x^3 + o(x^3).$$

2. [2 points] On pose $y = \frac{1}{x}$. Il s'agit de calculer le développement limité en zéro à l'ordre 3 de la fonction $r(y) = \frac{1-y}{y(1+y)}$.
   Or, $\frac{1-y}{1+y} = (1-y)(1-y+y^2-y^3+o(y^3))$ donc $r(y) = \frac{1}{y} - 2y + 2y^2 - 2y^3 + o(y^3)$ et finalement $\ell(x) = x - 2 + \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2} + o(x^{-2})$.
3. [2 points] $\cosh(x) + \cos(x) - 2 = 1 + \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{24} + 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - 2 + o(x^4)$
   $\sinh(x) + \sin(x) - 2x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - 2x + o(x^5)$
   Donc $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x(\cosh(x)+\cos(x)-2)}{\sinh(x)+\sin(x)-2x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{1}{12}+o(1)}{\frac{1}{60}+o(1)} = 5.$
4. [2 points] On pose $y = x - 1$ Alors $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x\ln x}{x^2-1} = \lim\limits_{y\to 0} \frac{(1+y)\ln(1+y)}{y(2+y)} = \lim\limits_{y\to 0} \frac{(1+y)\left(y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + o(y^3)\right)}{y(2+y)} = \lim\limits_{y\to 0} \frac{1+\frac{y}{2}-\frac{y^2}{6}+o(y^2)}{2(1+\frac{y}{2})} = \frac{1}{2}$.
5. [2 points] Soit $f(x) = \sqrt{1-3x} + \sqrt{x+2} - \sqrt{7-2x}$ et $g(x) = x^2 - x - 2$. f et g sont continues sur $[-2;0]$, dérivables sur $]-2;0[$ et $f(-1) = g(-1) = 0$. On a

$$f'(x) = -\frac{3}{2\sqrt{1-3x}} + \frac{1}{2\sqrt{x+2}} + \frac{1}{\sqrt{7-2x}}, \qquad g'(x) = 2x - 1$$

   d'où $\lim\limits_{x\to 1} \frac{f'(x)}{g'(x)} = -\frac{1}{36}$. On en déduit que $\lim\limits_{x\to 1} \frac{f(x)}{g(x)} = -\frac{1}{36}$.

....

CONTRÔLE IV - THÈME C

Exercice I [10 points]

1. Enoncer le théorème des acroissements finis. Soit $h\colon [-2;1] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $h(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$. Peut-on appliquer à h le théorème des acroissements finis ? (justifier la réponse)
2. «Toute fonction continue est dérivable». Démontrer cette affirmation si elle est vraie, donner un exemple si elle est fausse.
3. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x}, & \text{si } x > 0, \\ 0, & \text{si } x = 0, \\ x^3 \sin\frac{1}{x}, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

   a) f est-elle continue en $x = 0$?
   b) Calculer $f'(x)$ pour $x \neq 0$. En déduire l'équation de la droite tangente à f en $x = \frac{1}{\pi}$.
   c) f est-elle dérivable en $x = 0$?
   d) f est-elle de classe $\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$?

Solution de l'exercice I

1. [2 points] **Théorème des acroissements finis** *Soit f une fonction continue sur l'intervalle fermé $[a;b]$ et dérivable sur l'intervalle ouvert $]a;b[$. Alors il existe $c \in]a;b[$ tel que $f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$.*
   h est continue sur $[-2,1]$ et $h'(x) = -\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ si $x \neq 0$ mais $h'(0)$ n'existe pas car $\lim\limits_{x\to} \frac{h(x)-h(0)}{x-0} = \mp\infty$.
2. [1 point] L'affirmation est bien évidemment fausse. Il suffit de considerer la fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = |x|$: elle est continue mais elle n'est pas dérivable en $x = 0$ car $\lim\limits_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$ n'existe pas.
3. a) [1 points] $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} x^2 \sin\frac{1}{x} = 0$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}} x^3 \sin\frac{1}{x} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$: f est continue en 0.
   b) [1 points] $f'(x) = \begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}, & \text{si } x > 0, \\ 3x^2 \sin\frac{1}{x} - x\cos\frac{1}{x} & \text{si } x < 0. \end{cases}$
   La droite tangente à f en $x = x_0$ a équation $y = f'(x_0)x + (f(x_0) - f'(x_0)x_0)$ donc pour $x_0 = \frac{1}{\pi}$ on a $y = x - \frac{1}{\pi^2}$.
   c) [2 points] La fonction est dérivable en $x = 0$ ssi il existe fini la limite $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$.
   On a $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \frac{x^2\sin\frac{1}{x}-0}{x-0} = 0$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}} \frac{x^3\sin\frac{1}{x}-0}{x-0} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0 = f'(0)$: f est dérivable en 0.
   d) [2 points] $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} f'(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \left(2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}\right)$ n'existe pas, donc f' n'est pas continue en 0. Par conséquent f n'est pas de classe $\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$.

Exercice II [6 points]

Soit $g\colon]-\infty,0[\to \mathbb{R}$ une application telle que $g(x) = e^x - 1$.

1. Montrer que g est strictement croissante sur $\mathbb{R}_-^*$.
2. En utilisant le théorème de la bijection (qu'on énoncera) démontrer que l'équation $g(x) = -\frac{1}{2}$ admet une unique solution.
3. Déterminer la fonction inverse g^{-1}. Que sait-on de la continuité de g^{-1} ?
4. Calculer la dérivée de g^{-1} sur $]-1;0[$.

Solution de l'exercice II

1. [1 point] $g(x) = e^x - 1$, $g'(x) = e^x$, $g'(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_-^*$ donc g est strictement croissante sur $\mathbb{R}_-^*$.
2. [2 points] **Théorème de la bijection** *Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I. Alors f induit une bijection de I dans $f(I)$. De plus, sa bijection réciproque est continue sur $f(I)$, est monotone sur $f(I)$ et a le même sens de variation que f.*[3]
   g est définie, continue, dérivable, strictement croissante sur $\mathbb{R}_-^*$, ce qui prouve que g réalise une bijection de $\mathbb{R}_-^*$ dans

$$g(\mathbb{R}_-^*) =]\lim_{x\to -\infty} g(x); \lim_{x\to 0} g(x)[=]-1;0[.$$

   Comme $-\frac{1}{2} \in g(\mathbb{R}_-^*)$, on en déduit qu'il existe un unique réel $\alpha \in \mathbb{R}_-^*$ tel que $g(\alpha) = -\frac{1}{2}$.
3. [2 points] $g^{-1}\colon]-1;0[\to \mathbb{R}_-^*$ avec $g^{-1}(y) = \ln(y+1)$. Comme g réalise une bijection de $\mathbb{R}_-^*$ dans $]-1;0[$, la bijection réciproque g^{-1} est une bijection de $]-1;0[$ dans $\mathbb{R}_-^*$. Sachant que g est continue sur $\mathbb{R}_-^*$, on peut en déduire que g^{-1} est continue sur $]-1;0[$.
4. [1 point] La dérivée de g^{-1} sur $]-1,0[$ est $\frac{1}{1+y}$.

Exercice III [10 points]

1. Déterminer le développement limité de la fonction $g(x) = \dfrac{\cos x}{e^x}$ en 0 à l'ordre 3.
2. Déterminer le développement limité asymtotique en $+\infty$ de la fonction $\ell(x) = \dfrac{x^2 - x}{1 + x}$ à l'ordre 2.
3. Calculer la limite $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x(\cosh(x)+\cos(x)-2)}{\tanh(x)+\tan(x)-2x}$ en utilisant les developpemets limités du tableau.
4. Calculer la limite $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x\ln x}{x^2-1}$ en utilisant les developpemets limités du tableau (attention : $x \to 1$ et non 0).
5. Calculer la limite $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{3x+1} + \sqrt{2-x} - \sqrt{2x+7}}{x^2 + x - 2}$ en utilisant la règle de L'Hopital.

Solution de l'exercice III

1. [2 points] À partir du DL donné dans le tableau $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$, on trouve le DL en zéro de $\frac{1}{e^x}$ (en utilisant le DL en zéro de $\frac{1}{1+x}$) :

$$\frac{1}{e^x} = \frac{1}{1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)} \overbrace{=}^{u = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)} 1 - u + u^2 + o(u^3) = 1 - x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3).$$

   En multipliant ce résultat par le DL donné dans le tableau $\cos(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)$ on obtient finalement

$$g(x) = 1 - x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3).$$

2. [2 points] On pose $y = \frac{1}{x}$. Il s'agit de calculer le développement limité en zéro à l'ordre 3 de la fonction $r(y) = \frac{1-y}{y(1+y)}$.
   Or, $\frac{1-y}{1+y} = (1-y)(1-y+y^2-y^3+o(y^3))$ donc $r(y) = \frac{1}{y} - 2y + 2y^2 - 2y^3 + o(y^3)$ et finalement $\ell(x) = x - 2 + \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2} + o(x^{-2})$.
3. [2 points] $\cosh(x) + \cos(x) - 2 = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - 2 + o(x^4) = \frac{x^4}{12} + o(x^4)$,
   $\tanh(x) + \tan(x) - 2x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} - 2x + o(x^5) = \frac{4x^5}{15} + o(x^5)$,
   Donc $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x(\cosh(x)+\cos(x)-2)}{\tanh(x)+\tan(x)-2x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{1}{12}+o(1)}{\frac{4}{15}+o(1)} = \frac{5}{16}$.
4. [2 points] On pose $y = x - 1$ Alors $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x\ln x}{x^2-1} = \lim\limits_{y\to 0} \frac{(1+y)\ln(1+y)}{y(2+y)} = \lim\limits_{y\to 0} \frac{(1+y)\left(y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + o(y^3)\right)}{y(2+y)} = \lim\limits_{y\to 0} \frac{1+\frac{y}{2}-\frac{y^2}{6}+o(y^2)}{2(1+\frac{y}{2})} = \frac{1}{2}$.
5. [2 points] Soit $f(x) = \sqrt{3x+1} + \sqrt{2-x} - \sqrt{2x+7}$ et $g(x) = x^2 + x - 2$. f et g sont continues sur $[0;2]$, dérivables sur $]0;2[$ et $f(1) = g(1) = 0$. On a

$$f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x+1}} - \frac{1}{2\sqrt{2-x}} - \frac{1}{\sqrt{2x+7}}, \qquad g'(x) = 2x + 1$$

   d'où $\lim\limits_{x\to 1} \frac{f'(x)}{g'(x)} = -\frac{1}{36}$. On en déduit que $\lim\limits_{x\to 1} \frac{f(x)}{g(x)} = -\frac{1}{36}$.

3. Dans un repère orthonormé, les graphes de f et de sa bijection réciproque sont symétriques par rapport à la première bisectrice des axes