

MS52

Optimisation

Recueil d'exercices corrigés et aide-mémoire.

Gloria Faccanoni

<http://faccanoni.univ-tln.fr/enseignements.html>

Année 2016 – 2017

Table des matières

1 Fonctions de plusieurs variables	3
1.1 Introduction	3
1.2 Représentations de fonctions de deux variables	4
2 Limites et continuité	15
2.1 Normes	15
2.2 Limites	16
2.3 Continuité	19
3 Dérivabilité et différentiabilité, fonctions implicites	27
3.1 Dérivées partielles du premier ordre et gradient	27
3.2 Différentiabilité	34
3.3 Dérivées partielles de deuxième ordre et matrice hessienne	41
3.4 Fonctions implicites	45
4 Extrema	89
4.1 Extrema libres	90
4.2 Extrema liés	97
A Approximations : polynômes de Taylor & développements limités	177

Dernière mise-à-jour
Jeudi 6 octobre 2016

Ce cours s'adresse à des étudiants de la troisième année d'une Licence MIASHS. Il a pour objectif de donner les bases en calcul différentiel pour des fonctions de plusieurs variables indispensables à toute formation en mathématiques appliquées. Les notions supposées connues correspondent au programme de la première année de licence.

L'objet de ce aide-mémoire est de proposer une explication succincte des concepts vu en cours. De nombreux livres, parfois très fournis, existent. Ici on a cherché, compte tenu des contraintes de volume horaire, des acquis des étudiants à la première année et des exigences pour la suite du cursus, à dégager les points clés permettant de structurer le travail personnel de l'étudiant voire de faciliter la lecture d'autres ouvrages. Ce photocopié ne dispense pas des séances de cours et de TD ni de prendre des notes complémentaires. Il est d'ailleurs important de comprendre et apprendre le cours au fur et à mesure. Ce photocopié est là pour éviter un travail de copie qui empêche parfois de se concentrer sur les explications données oralement mais **ce n'est pas un livre auto-suffisant (il est loin d'être exhaustif) !** De plus, ne vous étonnez pas si vous découvrez des erreurs. Malgré de très nombreuses relectures, il restera toujours des fautes, ce photocopié est donc fourni sans garanties ! N'hésitez pas à me signaler les erreurs que vous remarquez.

On a inclus dans ce texte nombreux exercices corrigés. Ceux-ci, de difficulté variée, répondent à une double nécessité. Il est important de jongler avec les différents concepts introduits en cours et même de faire certaines erreurs une fois pour bien identifier les pièges. Les exercices permettent d'orienter les raisonnements vers d'autres domaines (physique, économie, etc.), cela afin d'exhiber l'intérêt et l'omniprésence des fonctions de plusieurs variables et de l'optimisation. Cependant, veuillez noter que vous n'obtiendrez pas grande chose si vous vous limitez à choisir un exercice, y réfléchir une minute et aller vite voir le début de la correction en passant tout le temps à essayer de comprendre la correction qui va paraître incompréhensible. Pour que la méthode d'étude soit vraiment efficace, il faut d'abord vraiment essayer de chercher la solution. En particulier, il faut avoir un papier brouillon à coté de soi et un crayon. La première étape consiste alors à traduire l'énoncé (pas le recopier), en particulier s'il est constitué de beaucoup de jargon mathématique. Ensuite il faut essayer de rapprocher les hypothèses de la conclusion souhaitée, et pour cela faire quelques calculs ou transformer les hypothèses pour appliquer un théorème dont on aura vérifié que les hypothèses sont bien satisfaites. C'est ici que l'intuition joue un grand rôle et il ne faut pas hésiter à remplir des pages pour s'apercevoir que l'idée qu'on a eu n'est pas la bonne. Elle pourra toujours resservir dans une autre situation. Quand finalement on pense tenir le bon bout, il faut rédiger soigneusement en s'interrogeant à chaque pas sur la validité (logique, mathématique) de ce qu'on a écrit. Si l'étape précédente ne donne rien, il faut chercher de l'aide (voir le début de la correction, en parler à un autre étudiant, interroger les tuteurs).

MS52		
CM	18h	9 séances de 2h
TD	24h	12 séances de 2h
TP	3h	1 séance de 3h

Gloria FACCANONI

IMATH Bâtiment M-117
 Université de Toulon
 Avenue de l'université
 83957 LA GARDE - FRANCE

☎ 0033 (0)4 83 16 66 72

✉ gloria.faccanoni@univ-tln.fr

🌐 <http://faccanoni.univ-tln.fr>

Chapitre 1.

Fonctions de plusieurs variables

Qu'il s'agisse de traiter des questions relatives à la biologie, la chimie, la physique, la production, la consommation ou encore l'environnement, etc. une modélisation adéquate s'exprime le plus souvent à l'aide de fonctions de plusieurs variables. Ce chapitre introduit les fonctions de plusieurs variables réelles en élargissant les définitions énoncées dans le module M11 pour les fonctions d'une variable réelle. Nous prenons le parti de privilégier les thèmes qui s'écartent des notions vues pour les fonctions d'une seule variable. À l'opposé, les définitions et les propriétés qui apparaissent comme des généralisations évidentes sont évoquées ou présentées brièvement.

1.1. Introduction

Les fonctions de plusieurs variables sont naturelles, par exemple

- ▷ la température dépend de la latitude, de la longitude et du temps :

$$T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$
$$(x, y, t) \mapsto T(x, y, t)$$

- ▷ le coût d'une brochure publicitaire dépend de son format (A4, A5), du nombre de pages, du nombre de couleurs utilisées...

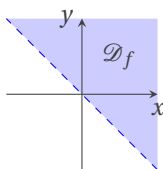
1.1 Définition (Fonction de plusieurs variables)

- ▷ Une *fonction* f de \mathbb{R}^n et à valeurs réelles fait correspondre à tout point $\mathbf{x} \equiv (x_1, x_2, \dots, x_n)$ de \mathbb{R}^n au plus un réel $f(\mathbf{x})$.
- ▷ Le *domaine de définition* de f est l'ensemble $\mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}^n$ des points $\mathbf{x} \equiv (x_1, x_2, \dots, x_n)$ qui ont une image par f .
- ▷ L'*image* par f de \mathcal{D} est l'ensemble $\text{Im}_f(\mathcal{D}_f) = \{r \in \mathbb{R} \mid r = f(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\} \subset \mathbb{R}$.
- ▷ L'ensemble des points $S = \{\mathbf{x}, f(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in \mathcal{D}_f\}$ de \mathbb{R}^{n+1} est la *surface représentative* de f ; c'est l'analogue de la courbe représentative d'une fonction d'une variable.

$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ se note aussi \mathbf{x} ou \underline{x} . Si $n = 2$, on utilise souvent la notation (x, y) , si $n = 3$ la notation (x, y, z) .

EXEMPLE

Le domaine de définition de la fonction $f(x, y) = \sqrt{x+y}$ est donné par $\mathcal{D}_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y \geq 0\}$. Il se représente donc naturellement comme une portion du plan \mathbb{R}^2 . En outre, les valeurs prises par la fonction parcourent tout l'ensemble des réels positifs ou nuls : $\text{Im}_f(\mathcal{D}_f) = \mathbb{R}^+$.



EXEMPLE (D'APPLICATIONS À LA GESTION)

1. La production P d'une entreprise est souvent exprimée en fonction de deux facteurs synthétiques, le capital, noté K , et le travail, noté W : $P = f(K, W)$.
2. L'utilité U d'un consommateur dépend de ses quantités consommées. En présence de n biens, la fonction d'utilité s'exprime sous la forme $U = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, où x_i désigne la quantité consommée du i -ème bien disponible ($i = 1, \dots, n$).

Évidemment, la représentation géométrique devient plus lourde que pour les fonctions d'une seule variable : une fonction de n variables se visualise à priori dans un espace à $n + 1$ dimensions (n pour les variables, 1 pour le résultat de la fonction), alors que les pages d'un livre sont, par nature, bidimensionnelles. Pour contourner cette impossibilité technique, nous nous limiterons aux représentations des fonctions de deux variables, soit sous forme de dessins en perspective, soit sous forme de coupes par des plans horizontaux ou verticaux qui donnent des informations souvent utiles, quoique parcellaires. Ce problème de visualisation introduit une rupture nette par rapport aux fonctions d'une variable étudiées antérieurement.

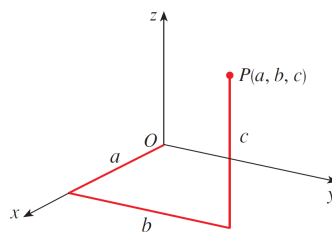
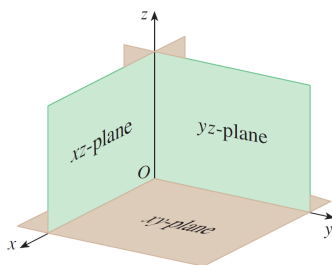
1.2. Représentations de fonctions de deux variables

Lorsque $n = 2$, le graphe

$$\mathcal{G}_f \equiv \{ (x, y, z = f(x, y)) \mid (x, y) \in \mathcal{D} \}$$

est tridimensionnel. On peut considérer le graphe d'une fonction de deux variables comme étant le relief d'une région (par exemple, l'altitude en fonction de la longitude et de la latitude).

Les axes relatifs aux variables, x et y , sont conventionnellement situés dans un plan horizontal (le domaine \mathcal{D} apparaît alors comme un sous-ensemble de ce plan), tandis que la dimension verticale est réservée aux valeurs de z . Ainsi, à tout $(x, y) \in \mathcal{D}$, dont l'image est $f(x, y) \in \mathbb{R}$, correspond le point suivant du graphe : $(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3$. Une mise en perspective permet la visualisation des surfaces à trois dimensions. Dans ce cas, l'axe z est toujours placé verticalement. Toutefois, pour des raisons de lisibilité, les axes x et y ne sont pas toujours présentés selon la même orientation.



- ▷ Équation du plane $xy : z = 0$;
- ▷ Équation du plane $xz : y = 0$;
- ▷ Équation du plane $yz : x = 0$.

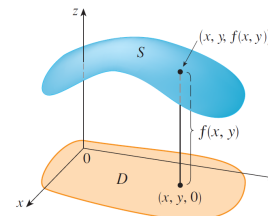
1.2.1. Représentation surfacique

On visualise le graphe d'une fonction

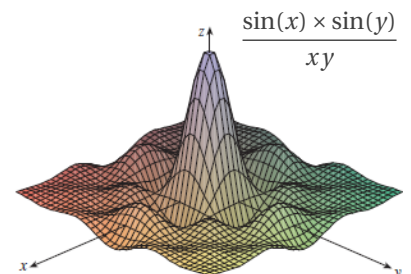
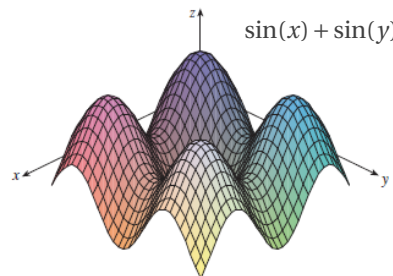
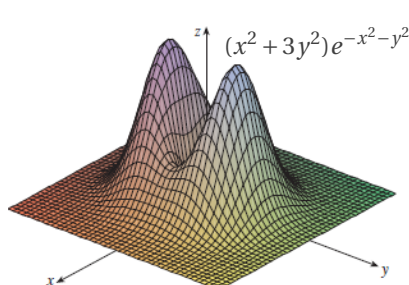
$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto f(x, y)$$

par l'altitude $z = f(x, y)$.

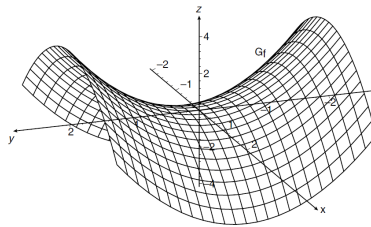


EXEMPLE



EXEMPLE (SELLE DE CHEVAL)

Le graphe de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^2 - y^2$ est une surface de \mathbb{R}^3 qui a la forme d'une selle de cheval, comme l'indique la représentation en perspective de la figure ci-dessous.



1.2.2. Fonctions partielles

Les fonctions partielles associées à $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} données par l'intersection de la surface représentative de f avec des plans «verticaux parallèles aux axes».

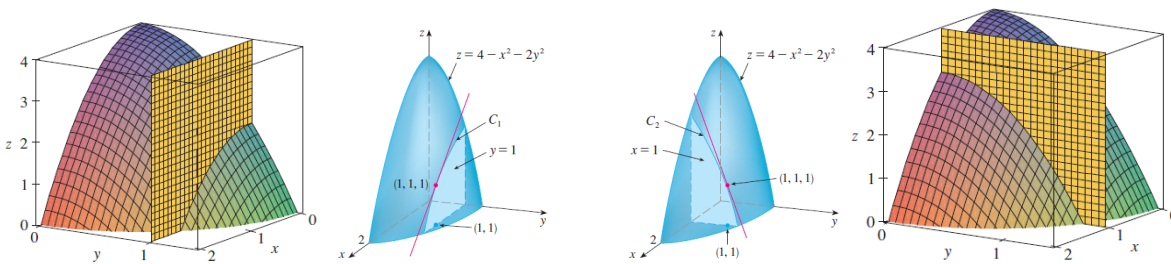
1.2 Définition (Fonctions partielles)

Soit f une fonction de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} et $(a, b) \in \mathcal{D}$ le domaine de définition de f . Les fonctions

$$f_{y=b}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x, b)$$

$$f_{x=a}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ y \mapsto f(a, y)$$

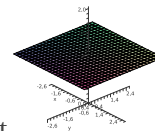
définies sur un intervalle ouvert contenant respectivement a et b , sont appelées les *fonctions partielles* associées à f au point (a, b) .



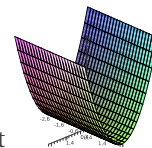
EXEMPLE

Grâce aux fonctions partielles on peut deviner la représentation surfacique des fonctions $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ suivantes :

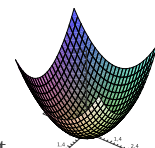
1. si $f(x, y) = 1$ alors $\begin{cases} f_b(x) = 1 & \text{pour tout } b \in \mathbb{R} \\ f_a(y) = 1 & \text{pour tout } a \in \mathbb{R} \end{cases}$ donc la représentation surfacique de f est



2. si $f(x, y) = x^2$ alors $\begin{cases} f_b(x) = x^2 & \text{pour tout } b \in \mathbb{R} \\ f_a(y) = a^2 & \text{pour tout } a \in \mathbb{R} \end{cases}$ donc la représentation surfacique de f est



3. si $f(x, y) = x^2 + y^2$ alors $\begin{cases} f_b(x) = x^2 + b^2 & \text{pour tout } b \in \mathbb{R} \\ f_a(y) = y^2 + a^2 & \text{pour tout } a \in \mathbb{R} \end{cases}$ donc la représentation surfacique de f est



1.2.3. Représentation planaire

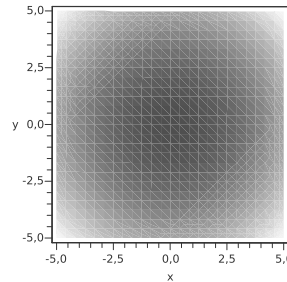
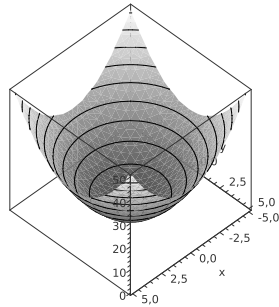
Les nuances de gris d'une photo noir et blanc sont la représentation d'une fonction définie sur un rectangle à valeurs dans l'intervalle $[0;1]$: 0 noir, 1 blanc. On parle de *représentation planaire*.

🔍 EXEMPLE

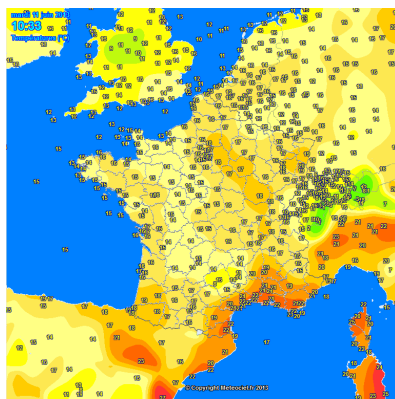
Représentation planaire et surfacique de la fonction

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto x^2 + y^2$$



🔍 EXEMPLE (CARTES MÉTÉOROLOGIQUES)



Sur une carte météorologique, les nuances de couleur sont la représentation de la température : ici on va du vert ($\approx 7^\circ\text{C}$) au rouge ($\approx 25^\circ\text{C}$).



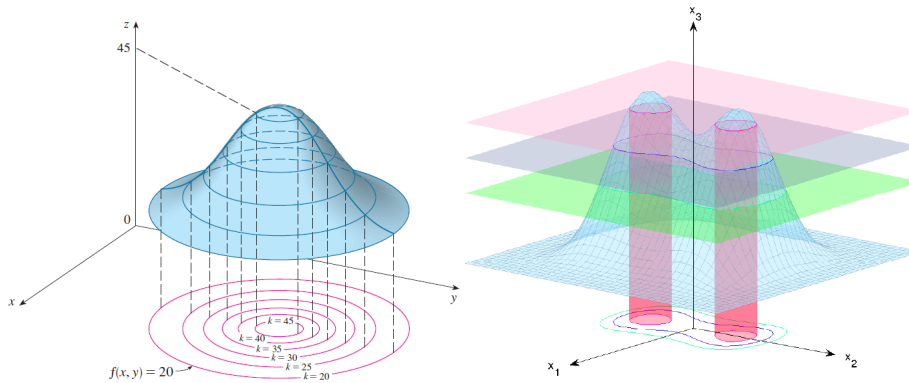
1.2.4. Représentation par lignes de niveau

Pour obtenir les fonctions partielles, on a considéré des coupes verticales du graphe d'une fonction de deux variables. De la même manière, on peut considérer des coupes horizontales et on obtient, de façon générale, des courbes planes, dites *courbes ou lignes de niveau*.

1.3 📖 **Définition (Lignes de niveau)**

Soit $k \in \mathbb{R}$ et f une fonction de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} ; la *courbe de niveau k* de la fonction f est la projection sur le plan d'équation $z = 0$ de l'intersection de la surface représentative de f avec le plan horizontal $z = k$, i.e. l'ensemble $\{(x, y) \in \mathcal{D} \mid f(x, y) = k\}$.

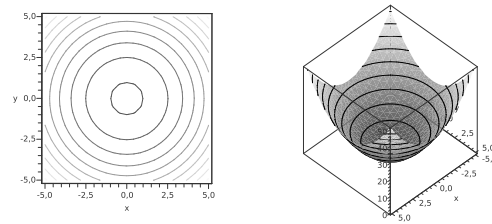
En pratique, on représente simultanément différentes courbes de niveau pour visualiser la progression du graphe. Cette représentation s'apparente aux cartes géographiques où le niveau correspond à l'altitude. Les courbes de niveau d'une fonction $f(x, y)$ fournissent une représentation géométrique de f sur le plan, alors que son graphe en donne une dans l'espace.



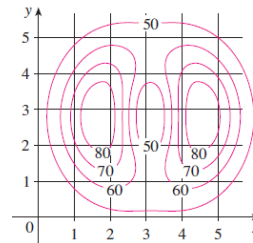
EXEMPLE
Représentation par lignes de niveau et surfacique de la fonction

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto x^2 + y^2$$

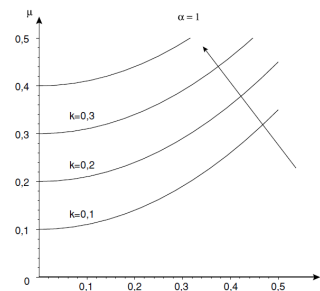


EXEMPLE
L'image ci-contre montre les courbes de niveaux d'une fonction f . On peut alors se faire une idée de l'allure de la fonction supposée continue. Par exemple $f(1;3) \approx 72$, $f(4;5) \approx 56$, soit $40 < f(3;3) < 50$ soit $50 < f(3;3) < 60$, etc.

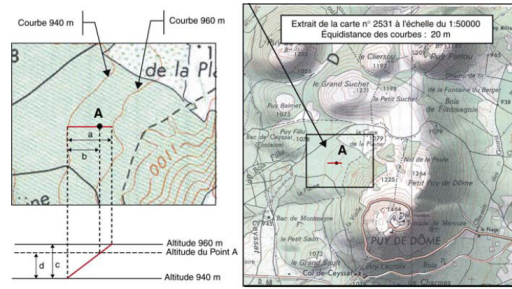


EXEMPLE
Soit $\alpha > 0$ et considérons la fonction $f(\sigma, \mu) = \mu - \alpha\sigma^2$. Cette fonction est souvent utilisée en gestion de portefeuille : μ désigne la rentabilité attendue du portefeuille et σ sa volatilité (écart-type de la rentabilité).

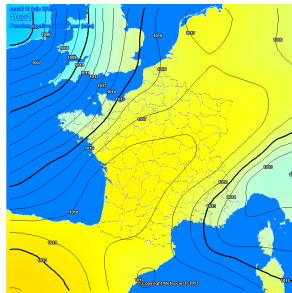
La fonction f représente l'utilité attendue d'un investisseur qui présente de l'aversion vis-à-vis du risque (σ^2 est affecté d'un coefficient négatif). Les courbes de niveau pour α fixé sont ici appelées courbes d'indifférence ou courbes d'iso-utilité puisqu'elles caractérisent les rentabilités attendues et les volatilités des portefeuilles qui atteignent, pour l'investisseur considéré, un niveau fixé d'utilité attendue.



EXEMPLE (CARTES TOPOGRAPHIQUES)
On peut considérer le relief d'une région comme étant le graphe d'une fonction de deux variables (par exemple, l'altitude en fonction de la longitude et de la latitude). Une courbe de niveau nous indique les points de même altitude (ici, l'altitude du point A est $940 + d = 940 + cb/a$). En dessinant les courbes de niveau avec leur altitude correspondante, on obtient la *carte topographique du relief*. La lecture d'une carte topographique permet non seulement d'obtenir des mesures quantitatives du relief, mais aussi de faire rapidement des observations qualitatives sur sa nature. Par exemple, localiser les points de plus haute et de plus basse altitude ; les crêtes, les fonds, les vallées, les cols, etc. ; les endroits du relief où les pentes sont plus escarpées ou plus douces, puisqu'ils correspondent respectivement aux courbes de niveau très rapprochées ou très distantes.
Attention : dans cette représentation les couleurs ne correspondent pas à la représentation planaire mais servent à reproduire les ombres.



EXEMPLE (CARTES MÉTÉOROLOGIQUES)



Sur une carte météorologique, les courbes de niveau sont les isothermes (lignes reliant les points d'égal température) ou les isobares (lignes reliant les points d'égal pression).

EXEMPLE

Alice se rend chez son épicier pour y acheter des grappes de raisin et du fromage à la coupe. Le prix du raisin est fixé à 5 euros le Kg, celui du fromage considéré est de 18 euros le Kg. Si Alice décide d'acheter x Kg de raisin et y Kg de fromage, sa dépense en euros est de

$$D(x, y) = 5x + 18y.$$

Cette dépense constitue donc une fonction linéaire $D: \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ des variables x et y . Le graphe obtenu est une portion de plan.

Si Alice décide de payer en liquide et dispose de L euros seulement, elle ne peut envisager que des budgets (x, y) tels que $D(x, y) \leq L$. Graphiquement, ceci revient essentiellement à envisager une intersection de la surface S avec des plans horizontaux d'équation $z = k \in [0; L]$.

EXEMPLE

Le nombre N de voitures produites annuellement par une usine dépend du nombre x d'heures de travail et du capital y à disposition de la manière suivante :

$$N(x, y) = 2x^{2/3}y^{1/3}.$$

On suppose par ailleurs que le coût de production de q voitures s'élève à

$$C(q) = 1 + 3q + q^2$$

et l'on définit aussi une fonction bénéfice $B: \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$B(q, p) = qp - C(q).$$

où p est le prix. N et B sont des fonctions définies sur \mathbb{R}_+^2 , à valeurs réelles, non linéaires donc les surfaces ne sont pas des portions de plan. On peut envisager d'étudier le comportement de la fonction B à prix fixé, c'est-à-dire lorsque p est fixé à une certaine valeur p_0 . Graphiquement cela correspond à considérer l'intersection de la surface avec le plan vertical d'équation $p = p_0$. On peut aussi s'intéresser à l'ensemble des couples (q, p) permettant de réaliser le bénéfice B_0 . Graphiquement cela correspond à considérer l'intersection de la surface avec le plan horizontal d'équation $z = B_0$. On peut de plus envisager la fonction $\tilde{B}: \mathbb{R}_+^3 \rightarrow \mathbb{R}$ donnant le bénéfice annuel réalisé en fonction du nombre d'heures de travail, du capital et du prix unitaire fixé : $\tilde{B}(x, y, p) = B(N(x, y), p)$. \tilde{B} est une fonction de 3 variables, son graphe se situe donc dans \mathbb{R}^4 . Cependant les surfaces de niveaux peuvent être visualisées, ainsi que les variations de \tilde{B} en fonction de x lorsque les variables y et p sont fixées.

 **Exercices** 

 **Exercice 1.1**

Dans chaque cas, déterminez et représentez le domaine de définition des fonctions données.

1. $f(x, y) = \frac{\sqrt{-y + x^2}}{\sqrt{y}}$

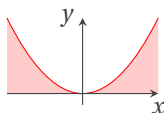
2. $f(x, y) = \frac{\ln(y)}{\sqrt{x-y}}$

3. $f(x, y) = \ln(x + y)$

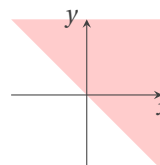
4. $f(x, y, z) = \frac{\ln(x^2 + 1)}{yz}$

Correction

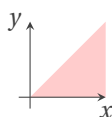
1. $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq x^2 \text{ et } y > 0\}$



3. $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > -x\}$



2. $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0 \text{ et } x > y\}$



4. $\mathcal{D} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y \neq 0 \text{ et } z \neq 0\}$

 **Exercice 1.2**

Déterminer les courbes de niveau des fonctions suivantes :

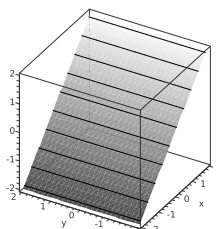
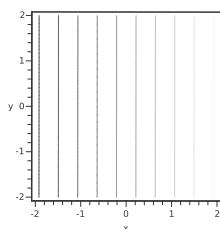
$f(x, y) = x, \quad f(x, y) = y + 1, \quad f(x, y) = x + y - 1, \quad f(x, y) = e^{y-x^2}, \quad f(x, y) = y - \cos(x).$

Esquissez ensuite leurs graphes (le graphe peut être vu comme un empilement de courbes de niveau qui forment une surface dans \mathbb{R}^3).

Correction

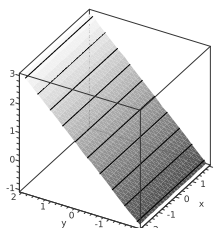
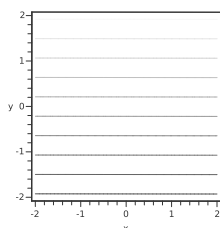
▷ $f(x, y) = x$:

$f(x, y) = \kappa$ ssi $x = \kappa$, les courbes de niveau sont donc des droites verticales et la surface représentative de f est un plan.



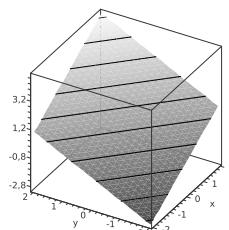
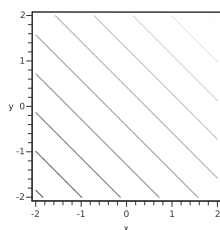
▷ $f(x, y) = y + 1$:

$f(x, y) = \kappa$ ssi $y = \kappa - 1$, les courbes de niveau sont donc des droites horizontales et la surface représentative de f est un plan.



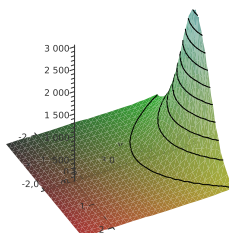
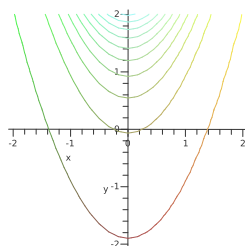
▷ $f(x, y) = x + y - 1$:

$f(x, y) = \kappa$ ssi $y = -x + (\kappa + 1)$, les courbes de niveau sont donc des droites de pente -1 et la surface représentative de f est un plan.



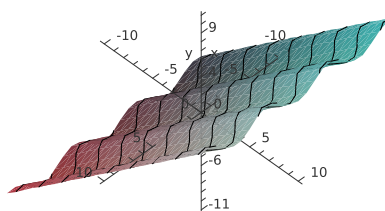
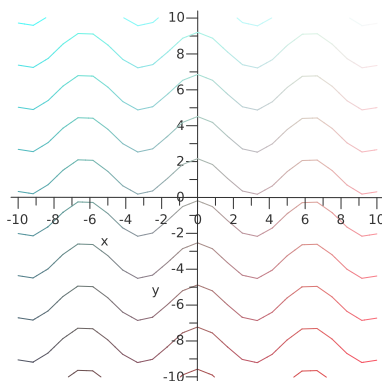
▷ $f(x, y) = e^{y-x^2}$:

$f(x, y) = \kappa$ ssi $y = x^2 + \ln(\kappa)$, les courbes de niveau sont donc des paraboles. On observe notamment la croissance exponentielle marquée lorsque les valeurs prises par y sont grandes et celles prises par $|x|$ sont petites.



▷ $f(x, y) = y - \cos(x)$:

$f(x, y) = \kappa$ ssi $y = \cos(x) + \kappa$

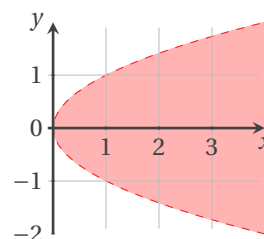


🔗 Exercice 1.3 (Domaine de définition, courbes de niveau)

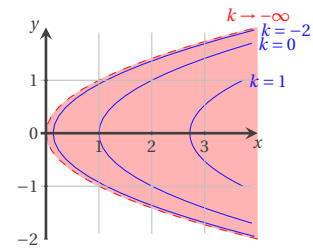
1. Déterminer et représenter le domaine de définition de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = \ln(x - y^2)$.
2. Déterminer et représenter ses courbes de niveau.

Correction

$$\mathcal{D}_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y^2 > 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 < x\}$$

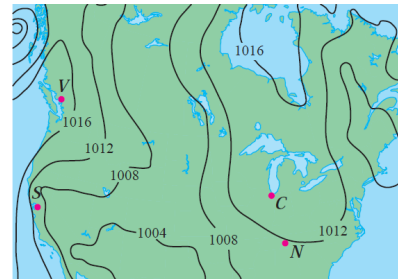


$$f(x, y) = k \iff x - y^2 = e^k \iff x = y^2 + e^k$$



Exercice 1.4

Dans la figure ci-contre on a tracé les isobares de l'Amérique du Nord au 12 août 2008. La pression indiquée est mesurée en millibars (mbar).



1. Donner une estimation de la pression
 - ▷ à Nashville (point N),
 - ▷ à Chicago (point C),
 - ▷ à San Francisco (point S)
 - ▷ et à Vancouver (point V).
2. Dans quelle ville le vent est le plus fort ?

Correction

1.
 - ▷ Au point N la pression est de 1012 mbar environ,
 - ▷ au point C la pression est de 1013 mbar environ,
 - ▷ au point S la pression est de 1010 mbar environ,
 - ▷ au point V la pression est comprise entre 1016 mbar et 1020 mbar ou entre 1012 mbar et 1016 mbar.
2. Le vent est plus fort à San Francisco car les lignes de pression sont le plus rapprochées.

Exercice 1.5

Associer chaque fonction (1-6) à sa surface (A-F) et à ses courbes de niveau (I-VI) :

(1) $f(x, y) = \sin(xy)$

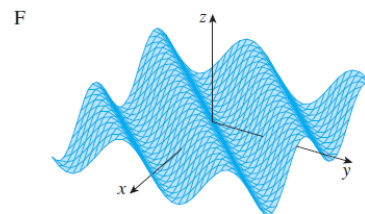
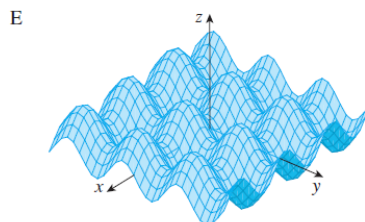
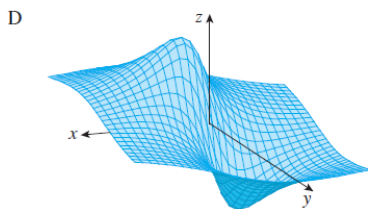
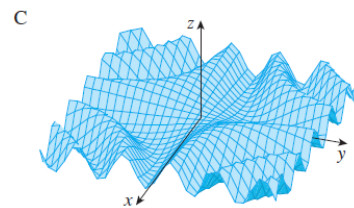
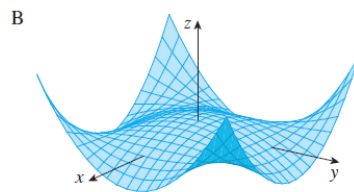
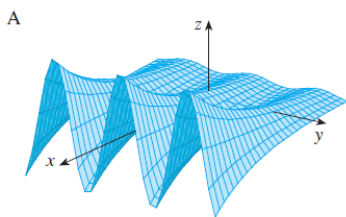
(2) $f(x, y) = \sin(x - y)$

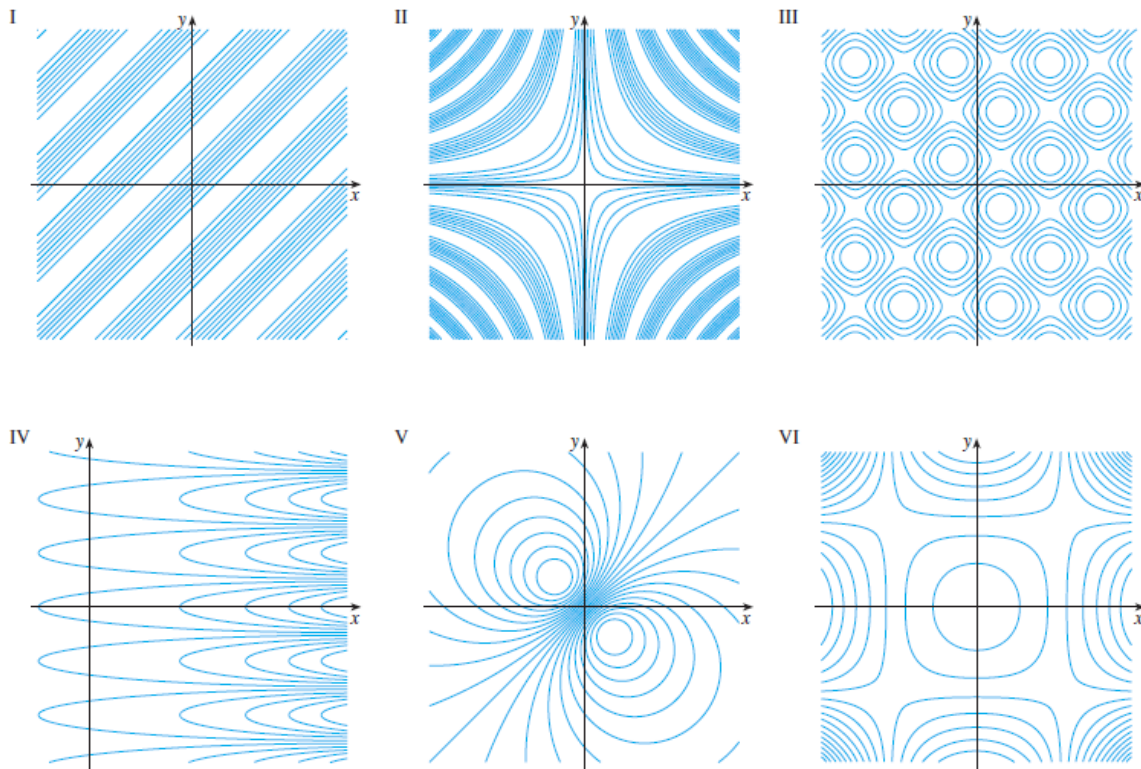
(3) $f(x, y) = (1 - x^2)(1 - y^2)$

(4) $f(x, y) = \frac{x - y}{1 + x^2 + y^2}$

(5) $f(x, y) = e^x \cos(y)$

(6) $f(x, y) = \sin(x) - \sin(y)$





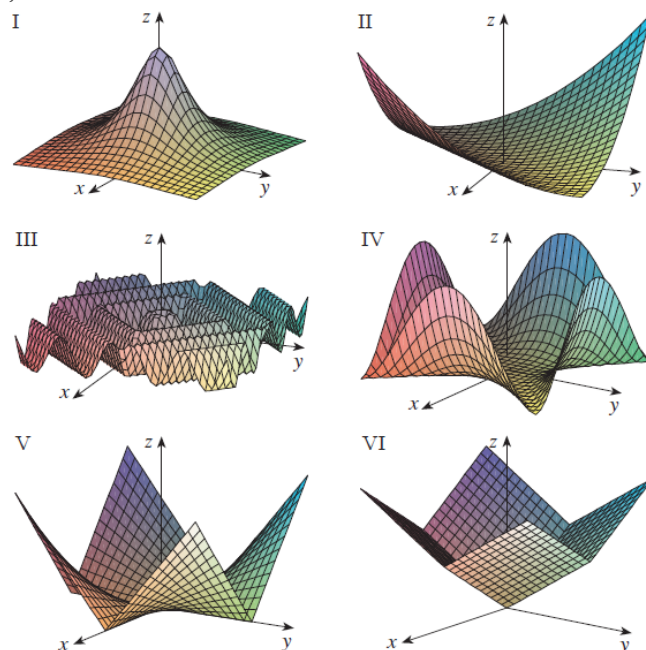
Correction

1. C-II : la fonction est périodique en x et en y ; f ne change pas quand on échange x et y , i.e. le graphe est symétrique par rapport au plan d'équation $y = x$; $f(0, y) = f(x, 0) = 0$.
2. F-I : la fonction est périodique en x et en y ; f est constante si $y = x + \kappa$.
3. B-VI : $f(\pm 1, y) = f(x, \pm 1) = 0$; la trace dans le plan xz est $z = 1 - x^2$ et dans le plan yz est $z = 1 - y^2$.
4. D-V : $f(x, x) = 0$; $f(x, y) > 0$ si $x > y$; $f(x, y) < 0$ si $x < y$.
5. A-IV : la fonction est périodique en y ;
6. E-III : la fonction est périodique en x et en y .

Exercice 1.6

Associer chaque fonction (1-6) à sa surface (I-VI).

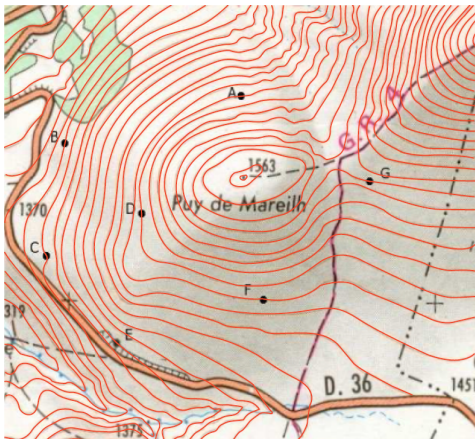
1. $f(x, y) = |x| + |y|$
2. $f(x, y) = |xy|$
3. $f(x, y) = \frac{1}{1 + x^2 + y^2}$
4. $f(x, y) = (x^2 - y^2)^2$
5. $f(x, y) = (x - y)^2$
6. $f(x, y) = \sin(|x| + |y|)$



Correction

1-VI, 2-V, 3-I, 4-IV, 5-II, 6-III.

Exercice 1.7 (Cartes topographiques du relief)



Sur une *carte topographique*, les courbes de niveau désignent les points de même altitude. On observe sur l'extrait de carte ci-contre de l'institut Géographique National (IGN), des courbes qui donnent une idée du relief (Massif du Sancy). Elles représentent des coupes horizontales successives du terrain à des altitudes qui varient de 10 mètres en 10 mètres. Tous les points de même altitude sont situés sur la même courbe de niveau.

1. Compléter le tableau

Point	A	B	C	D	E	F	G
Altitude		1370					

- Lorsque les courbes de niveau se resserrent, que peut-on dire du relief?
- La rivière coule-t-elle d'est en ouest ou vice-versa?

Correction

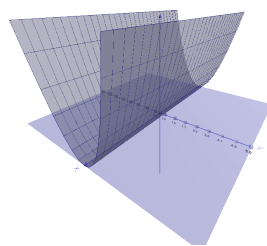
1. On a

Point	A	B	C	D	E	F	G
Altitude	1470	1370	1380	1470	1400	1460	1520

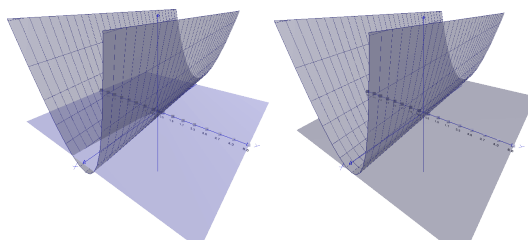
- Les endroits du relief où les pentes sont plus escarpées ou plus douces correspondent respectivement aux courbes de niveau très rapprochées ou très distantes.
- La rivière coule de l'est à l'ouest.

Exercice 1.8

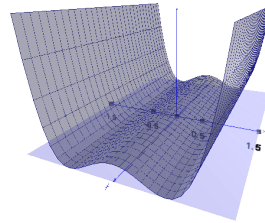
1. Deviner l'expression d'une fonction dont l'iso-0 (c'est-à-dire la ligne de niveau 0) représente la berge d'un fleuve rectiligne :



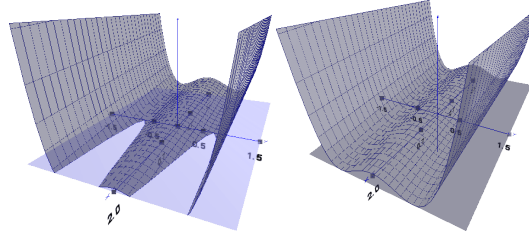
2. Modifier la fonction précédente pour que l'eau coule dans la direction des x positifs :



3. Deviner l'expression d'une fonction dont l'iso-0 représente la berge d'un fleuve rectiligne qui s'est séparé en deux affluents.



4. Modifier ensuite la fonction pour que l'eau coule dans la direction des x positifs :



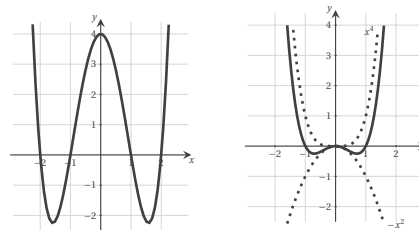
Correction

$$\begin{array}{llll}
 f_1: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} & f_2: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} & f_3: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} & f_4: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\
 (x, y) \mapsto f_1(x, y) = y^2 & (x, y) \mapsto f_2(x, y) = y^2 - \frac{x}{10} & (x, y) \mapsto f_3(x, y) = y^4 - y^2 & (x, y) \mapsto f_4(x, y) = y^4 - y^2 - \frac{x}{10}
 \end{array}$$

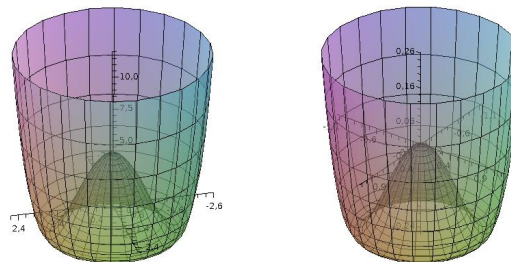
Exercice 1.9 (Fonctions radiales)

On pose $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ (distance à l'origine). On s'intéresse au cas particulier $f(x, y) = g(r)$.

1. Donner les équations des fonctions polynomiales en double puits dont les graphes sont les suivants :



2. En déduire l'expression des fonction qui présentent un «canyon» circulaire dont les surfaces sont les suivantes :



Correction

1.

$$\begin{array}{l}
 f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\
 x \mapsto (x^2 - 1)(x^2 - 4)
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\
 x \mapsto x^4 - x^2
 \end{array}$$

2.

$$\begin{array}{l}
 g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\
 r \mapsto (r^2 - 1)(r^2 - 4)
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\
 r \mapsto r^4 - r^2
 \end{array}$$

Chapitre 2.

Limites et continuité des fonctions de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}

La notion de limite pour une fonction de plusieurs variables généralise naturellement la notion correspondante dans le cas des fonctions d'une seule variable. Toutefois, un nouvel élément entre en jeu : les limites unilatérales (*i.e.* de la gauche et de la droite) perdent leur sens et sont remplacées par les nombreuses limites directionnelles possibles. En effet, dès que le domaine se situe dans un espace à deux dimensions au moins, les chemins qui mènent à un point donné peuvent suivre divers axes. Ainsi, l'ensemble des points en lesquels une limite peut être considérée, doit être défini en tenant compte de toutes les possibilités d'accès (voir par exemple la figure 2.1).

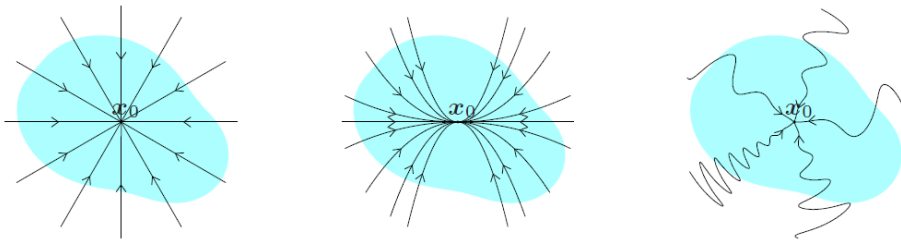


FIGURE 2.1. – Différents façons de s'approcher du point x_0 .

Une façon commode de procéder s'appuie sur la **notion de boule ouverte dans \mathbb{R}^n** qui **généralise celle d'intervalle ouvert dans \mathbb{R}** . Pour cela il faut d'abord introduire la **notion de norme dans \mathbb{R}^n** qui **généralise la notion de distance (*i.e.* valeur absolue) dans \mathbb{R}** .

2.1. Normes

2.1 Définition (Norme)

On appelle norme sur \mathbb{R}^n toute application $N: \mathbb{R}^n \rightarrow [0; +\infty[$ possédant les propriétés suivantes :

$N(\mathbf{x}) = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{0}$	pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$	(séparation),
$N(\lambda \mathbf{x}) = \lambda N(\mathbf{x})$	pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$	(homogénéité),
$N(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \leq N(\mathbf{x}) + N(\mathbf{y})$	pour tout $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$	(inégalité triangulaire).

On emploie généralement la notation $\|\mathbf{x}\|$ pour $N(\mathbf{x})$, qui rappelle l'analogie avec la valeur absolue dans \mathbb{R} ou le module dans \mathbb{C} .

EXEMPLE

La fonction $N: \mathbb{R} \rightarrow [0; +\infty[$ définie par $N(x) = |x|$ est une norme sur \mathbb{R} .

Normes classiques Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Dans \mathbb{R}^n , on utilise les normes classiques suivantes définies pour $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ par :

$$\|\mathbf{x}\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |x_i|^p}, \quad \|\mathbf{x}\|_\infty = \sup\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\}.$$

Si $p = 2$, on parle de *norme euclidienne*.

EXEMPLE

Considérons le point $(5, 2)$ dans \mathbb{R}^2 , alors

$$\begin{aligned} \|(5, 2)\|_1 &= |5| + |2| = 7, & \|(5, 2)\|_2 &= \sqrt{|5|^2 + |2|^2} = \sqrt{29} \approx 5.39, \\ \|(5, 2)\|_3 &= \sqrt[3]{|5|^3 + |2|^3} = \sqrt[3]{133} \approx 5.10, & \|(5, 2)\|_\infty &= \sup\{|5|, |2|\} = 5. \end{aligned}$$

2.2 **Propriété**

Pour tout $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ muni d'une norme $\|\cdot\|$ on a

$$\left| \|\mathbf{x}\| - \|\mathbf{y}\| \right| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|.$$

2.3 **Définition (Boules)**

Dans \mathbb{R}^n muni d'une norme $\|\cdot\|$, on appelle

- ▷ *boule ouverte* de centre $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^n$ et de rayon $r > 0$ l'ensemble $\mathcal{B}(\mathbf{A}, r) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } \|\mathbf{x} - \mathbf{A}\| < r\}$;
- ▷ *boule fermée* de centre $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^n$ et de rayon $r > 0$ l'ensemble $\mathcal{B}(\mathbf{A}, r) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } \|\mathbf{x} - \mathbf{A}\| \leq r\}$.

EXEMPLE

La boule fermée de centre $(0, 0)$ et de rayon $r > 0$ relative à la norme classique de \mathbb{R} (*i.e.* la valeur absolue) est l'ensemble de points

$$\mathcal{B}(0, r) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 0| \leq r\} = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq r\} = [x - r, x + r].$$

EXEMPLE

On veut dessiner les boules fermées de centre $(0, 0)$ et de rayon $r > 0$ relatives aux trois normes classiques de \mathbb{R}^2 : $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$.

La boule fermée de centre $(0, 0)$ et rayon $r > 0$ est l'ensemble de points

$$\mathcal{B}((0, 0), r) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x, y) - (0, 0)\| \leq r\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x, y)\| \leq r\}.$$

- ▷ Pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ on a

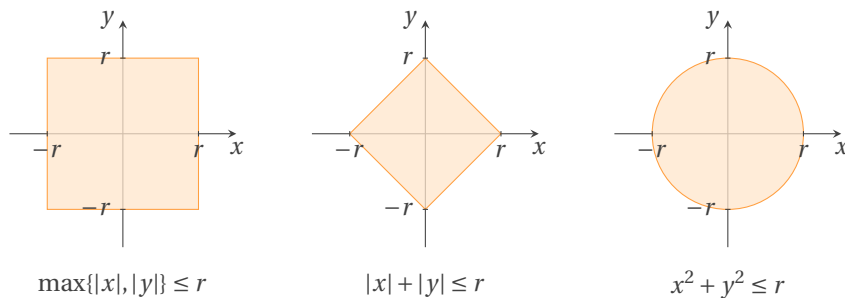
$$\|(x, y)\|_\infty < r \iff \sup\{|x|, |y|\} \leq r.$$

- ▷ Pour la norme $\|\cdot\|_1$ on a

$$\|(x, y)\|_1 < r \iff |x| + |y| \leq r.$$

- ▷ Pour la norme $\|\cdot\|_2$ on a

$$\|(x, y)\|_2 < r \iff |x|^2 + |y|^2 \leq r^2.$$



La mot «boule» a donc ici un sens plus générale que dans la vie courante!

2.2. Limites

2.4 **Définition (Limite en un point)**

Soit \mathcal{D} un ouvert de \mathbb{R}^n , $\mathbf{A} \in \mathcal{D}$ et f une fonction définie sur \mathcal{D} , éventuellement non définie en \mathbf{A} , à valeurs réelles.

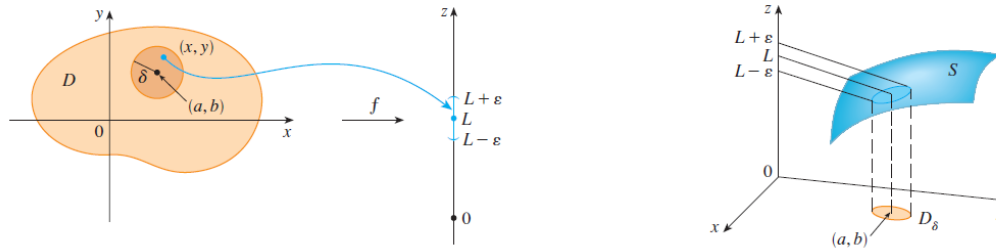


FIGURE 2.2. – $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = L$

▷ On dit que f a pour limite $\ell \in \mathbb{R}$ au point \mathbf{A} , ce que l'on écrit $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{A}} f(\mathbf{x}) = \ell$, si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que

$$\mathbf{x} \in \mathcal{D} \setminus \{\mathbf{A}\} \text{ et } \|\mathbf{x} - \mathbf{A}\| < \delta \implies |f(\mathbf{x}) - \ell| < \varepsilon,$$

autrement dit

$$\mathbf{x} \in \mathcal{D} \cap \mathcal{B}(\mathbf{A}, \delta) \implies \ell \in]f(\mathbf{x}) - \varepsilon, f(\mathbf{x}) + \varepsilon[.$$

Voir la figure 2.2 pour un exemple avec une fonction de deux variables et la norme euclidienne.

▷ On dit que f tend vers $+\infty$ quand \mathbf{x} tend vers \mathbf{A} , ce que l'on écrit $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{A}} f(\mathbf{x}) = +\infty$, si pour tout $M > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que

$$\mathbf{x} \in \mathcal{D} \setminus \{\mathbf{A}\} \text{ et } \|\mathbf{x} - \mathbf{A}\| < \delta \implies f(\mathbf{x}) > M,$$

autrement dit

$$\mathbf{x} \in \mathcal{D} \cap \mathcal{B}(\mathbf{A}, \delta) \implies f(\mathbf{x}) > M.$$

▷ On dit que f tend vers $-\infty$ quand \mathbf{x} tend vers \mathbf{A} , ce que l'on écrit $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{A}} f(\mathbf{x}) = -\infty$, si pour tout $M < 0$ il existe $\delta > 0$ tel que

$$\mathbf{x} \in \mathcal{D} \setminus \{\mathbf{A}\} \text{ et } \|\mathbf{x} - \mathbf{A}\| < \delta \implies f(\mathbf{x}) < M,$$

autrement dit

$$\mathbf{x} \in \mathcal{D} \cap \mathcal{B}(\mathbf{A}, \delta) \implies f(\mathbf{x}) < M.$$

2.5 Propriété

L'existence et la valeur éventuelle de la limite sont indépendantes de la norme choisie dans \mathbb{R}^n . Lorsqu'elle existe, la limite est unique.

Les théorèmes sur les opérations pour les fonctions de n variables admettant des limites en \mathbf{A} sont les mêmes que pour les fonctions d'une variable réelle à valeur réelle.

2.6 Propriété

Si f a pour limite ℓ en \mathbf{A} , la restriction de f à toute courbe continue (non seulement les droites!) passant par \mathbf{A} admet la même limite ℓ .

ATTENTION

Pour prouver qu'une fonction de plusieurs variables

- **n'admet pas de limite en \mathbf{A}** , il suffit d'explicitier une restriction à une courbe continue dans $\mathcal{D} \cup \{\mathbf{A}\}$ passant par \mathbf{A} et montrer que cette restriction n'admet pas de limite, ou deux restrictions qui conduisent à des limites différentes;
- **admet ℓ comme limite en \mathbf{A}** , il faut considérer le cas général : si on prouve juste que la restriction à toute droite passant par \mathbf{A} admet la même limite, on ne peut pas conclure que la limite existe!

EXEMPLE

Soit $\mathbf{A} = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Des courbes continues passant par \mathbf{A} sont par exemple

- ▷ les droites :
 - ▷ la droite verticale qui a équation $x = x_0$,
 - ▷ les droites qui ont équation $y = m(x - x_0) + y_0$ pour tout $m \in \mathbb{R}$;

- ▷ quelques paraboles, par exemple :
 - ▷ les paraboles d'équation $y = m(x - x_0)^2 + y_0$ pour tout $m \in \mathbb{R}$
 - ▷ les paraboles d'équation $x = m(y - y_0)^2 + x_0$ pour tout $m \in \mathbb{R}$

EXEMPLE

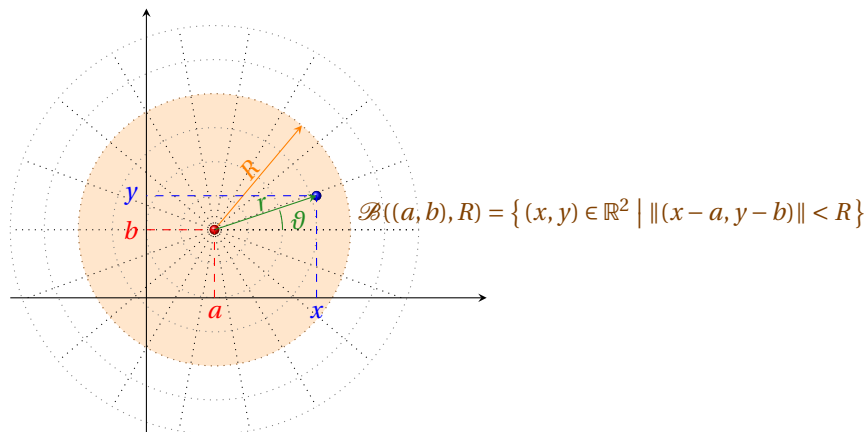
On veut calculer $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$.

- ▷ La fonction $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ est définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.
- ▷ On cherche des courbes continues définies sur \mathbb{R}^2 , qui passent par $(0, 0)$, et on calcule la restriction de f à ces courbes :
 - ▷ la droite d'équation $y = 0$ donne la restriction $g(x) = f(x, 0) = \frac{x^2}{x^2} = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$,
 - ▷ la droite d'équation $x = 0$ donne la restriction $g(y) = f(0, y) = \frac{-y^2}{y^2} = -1$ pour tout $y \in \mathbb{R}$,
 - ▷ la parabole d'équation $y = x^2$ donne la restriction $g(x) = f(x, x^2) = \frac{x^2 - x^4}{x^2 + x^4} = \frac{1 - x^2}{1 + x^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$,
 - ▷ etc.
- ▷ On calcule les limites (d'une seule variable!) de ces restrictions et si on trouve deux limites différentes on s'arrête :
 - ▷ la restriction de f à la droite d'équation $y = 0$ donne $g(x) = f(x, 0) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 1$;
 - ▷ la restriction de f à la droite d'équation $x = 0$ donne $g(y) = f(0, y) = -1$ pour tout $y \in \mathbb{R}$ et $\lim_{y \rightarrow 0} g(y) = -1$.

Comme les restrictions de f à deux courbes continues passant par $(0, 0)$ donnent deux limites différents, on conclut que la $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ n'existe pas.

2.2.1. \mathbb{R}^2 : coordonnées polaires pour le calcul de limites

Lorsque $n = 2$, il est souvent utile de passer aux coordonnées polaires pour ramener le calcul de la limite d'une fonction de deux variables à celui de la limite d'une fonction d'une seule variable. En effet, tout point (x, y) de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(a, b)\}$ peut être représenté par ses coordonnées polaires centrées autour d'un point (a, b) grâce aux relations : $x = a + r \cos(\vartheta)$, $y = b + r \sin(\vartheta)$ avec $r > 0$ et $\vartheta \in [0; 2\pi[$.



Dans cette écriture, r représente la distance entre (a, b) et (x, y) de sorte que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ \forall \vartheta}} f(a + r \cos(\vartheta), b + r \sin(\vartheta))$$

On peut alors utiliser la condition suffisante suivante :

2.7 Proposition

Soit $\ell \in \mathbb{R}$ une candidate limite pour f .

▷ S'il existe une fonction $r \mapsto s = s(r)$ telle que au voisinage de (a, b) on a

$$|f(a + r \cos(\vartheta), b + r \sin(\vartheta)) - \ell| \stackrel{\forall \vartheta}{\underset{r \rightarrow 0}{\leq}} s(r) \longrightarrow 0,$$

alors

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = \ell.$$

▷ S'il existe une fonction $r \mapsto M = M(r)$ telle que au voisinage de (a, b) on a

$$|f(a + r \cos(\vartheta), b + r \sin(\vartheta)) - \ell| \stackrel{\forall \vartheta}{\underset{r \rightarrow 0}{\geq}} M(r) \longrightarrow +\infty,$$

alors la limite $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y)$ n'existe pas.

2.8 Corollaire

S'il existe une fonction $r \mapsto s = s(r)$ telle que au voisinage de (a, b) on a

$$f(a + r \cos(\vartheta), b + r \sin(\vartheta)) \stackrel{\forall \vartheta}{\underset{r \rightarrow 0}{\longrightarrow}} \ell \in \mathbb{R},$$

alors

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = \ell.$$

EXEMPLE

Montrons d'une autre manière que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ avec $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ n'existe pas en utilisant les coordonnées polaires.

En posant $x = r \cos(\vartheta)$ et $y = r \sin(\vartheta)$, on a

$$f(r \cos(\vartheta), r \sin(\vartheta)) = \frac{r^2(\cos^2(\vartheta) - \sin^2(\vartheta))}{r^2(\cos^2(\vartheta) + \sin^2(\vartheta))} = (\cos^2(\vartheta) - \sin^2(\vartheta)) = \cos(2\vartheta).$$

Le résultat varie selon la direction ϑ , donc $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ n'existe pas.

2.3. Continuité

2.9 Définition (Continuité)

Soit f une fonction de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} et soit $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ son domaine de définition. On dit que f est continue en $\mathbf{A} \in \mathcal{D}$ si f possède en \mathbf{A} une limite égale à $f(\mathbf{A})$. Si f est continue en tout point de \mathcal{D} , on dit que f est continue sur \mathcal{D} .

2.10 Définition (Prolongement par continuité)

Soit f une fonction de $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{A}\}$ dans \mathbb{R} . Si $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{A}} f(\mathbf{x}) = \ell$, la fonction \tilde{f} définie sur $\mathcal{D} \cup \{\mathbf{A}\}$ par $\tilde{f}(\mathbf{A}) = \ell$ et $\tilde{f}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$ pour $\mathbf{x} \in \mathcal{D}$ est la seule fonction continue en \mathbf{A} dont la restriction à \mathcal{D} soit f . On l'appelle le prolongement par continuité de f à \mathbf{A} .

2.11 Propriété (Opérations algébriques)

Les fonctions continues de plusieurs variables jouissent des mêmes propriétés que les fonctions continues d'une seule variable. Les fonctions élémentaires telles que les polynômes, les fonctions exponentielles, logarithmiques et trigonométriques sont continues dans leurs domaines de définition respectifs. La continuité des autres fonctions s'établit, le cas échéant, en tant que somme, produit, composée, le quotient (lorsque le dénominateur ne s'annule pas) etc., de fonctions continues.

EXEMPLE

1. $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy + y$ est continue dans \mathbb{R}^2 (polynôme du second degré à deux variables).
2. $f(x, y, z) = e^y + xy^2 - z$ est continue dans \mathbb{R}^3 (somme d'une exponentielle et d'un polynôme).

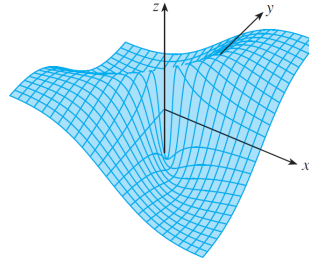
3. $f(x, y) = \ln(x + y^2) - 3$ est continue dans $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y^2 > 0\}$ comme somme du logarithme d'un polynôme (fonction composée) et d'une constante.

◉ EXEMPLE

- ▷ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ par

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}.$$

Comme $f(0, t) = 0$ et $f(t, t) = \frac{1}{2}$ alors f ne peut pas être prolongée par continuité en $(0, 0)$.



- ▷ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ par

$$f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Pour trouver la valeur de la limite, si elle existe, il suffit de calculer la limite d'une restriction à une courbe continue passant par $(0, 0)$: comme $f(0, t) = 0$ pour tout t , si la limite existe elle est 0. Pour vérifier que c'est bien la limite on passe en coordonnées polaires : on pose $x = r \cos(\vartheta)$ et $y = r \sin(\vartheta)$ pour $r > 0$ et $\vartheta \in [0, 2\pi]$; on obtient

$$f(x(r, \vartheta), y(r, \vartheta)) = \frac{r^2 \cos(\vartheta) \sin(\vartheta)}{\sqrt{r^2(\cos^2(\vartheta) + \sin^2(\vartheta))}} = r \cos(\vartheta) \sin(\vartheta) = \frac{r}{2} \sin(2\vartheta).$$

Comme $|\sin(2\vartheta)| \leq 1$, alors $|f(x, y)| \leq \frac{r}{2} \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0$ indépendamment de ϑ , donc

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = 0.$$

f peut donc être prolongée par continuité en $(0, 0)$ par la valeur 0.



Exercice 2.1

Ces limites existent-elles dans \mathbb{R} ?

$$1. \lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{1}{x-y};$$

$$2. \lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{y^3}{(x-1)^2 + y^2};$$

Correction

1. La limite $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{1}{x-y}$ n'existe pas car $f(1, y) = \frac{1}{1-y} \xrightarrow{y \rightarrow 1^+} -\infty$ et $f(1, y) = \frac{1}{1-y} \xrightarrow{y \rightarrow 1^-} +\infty$.

2. En polaire $x = 1 + r \cos(\vartheta)$, $y = r \sin(\vartheta)$: $f(r, \vartheta) = r \sin^3 \vartheta$ et $|r \sin^3 \vartheta| \leq r$ ainsi $\lim_{r \rightarrow 0} f(r, \vartheta) = 0$ et finalement

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{y^3}{(x-1)^2 + y^2} = 0.$$

On peut également utiliser le théorème du pincement sans passer par les coordonnées polaires, grâce aux inégalités suivantes :

$$x^2 + y^2 \geq y^2 \implies \left| \frac{y^3}{x^2 + y^2} \right| \leq \frac{|y|^3}{y^2} = |y| \quad \forall y \neq 0.$$

Exercice 2.2

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}^2 par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 - 2x^2 y + 3y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que la restriction de f à toute droite passant par l'origine est continue mais que f n'est pas continue à l'origine.

Correction

Remarquons tout d'abord que la fonction est bien définie dans \mathbb{R}^2 puisque

$$x^4 - 2x^2 y + 3y^2 = (x^2 - y)^2 + 2y^2$$

ne s'annule qu'en $(0, 0)$.

La restriction de f aux droites $x = 0$ et $y = 0$ est la fonction nulle. De plus, la restriction de f à la droite $y = mx$, avec $m \neq 0$, donne

$$f(x, mx) = \frac{mx}{x^2 - 2mx + 3m^2}$$

et tend vers 0 quand x tend vers 0. Comme $f(0, 0) = 0$, la restriction de f à toute droite passant par l'origine est donc continue.

Considérons la restriction de f à la parabole $y = x^2$. On a

$$f(x, x^2) = \frac{x^4}{2x^4} = \frac{1}{2}.$$

Par conséquent, $f(x, x^2)$ ne tend pas vers 0 quand x tend vers 0.

Exercice 2.3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ par

$$f(x, y) = \frac{x \ln(1 + x^3)}{y(x^2 + y^2)}.$$

Calculer, si elle existe, la limite de f pour (x, y) qui tend vers $(0, 0)$.

Correction

Pour $m \neq 0$ on a $f(x, mx) = \frac{\ln(1 + x^3)}{m(1 + m^2)x^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ mais $f(x, x^2) = \frac{\ln(1 + x^3)}{x^3} \frac{1}{1 + x^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$. La limite n'existe donc pas.

Exercice 2.4

Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction ainsi définie

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Est-elle continue sur \mathbb{R}^2 ?

Correction

On utilise les coordonnées polaires : $x = r \cos(\vartheta)$, $y = r \sin(\vartheta)$; alors $f(r, \vartheta) = r(\cos^3 \vartheta + \sin^3 \vartheta)$ et comme $|f(r, \vartheta)| \leq |2r| \xrightarrow[r \rightarrow 0]{} 0$, on en déduit que $\lim_{r \rightarrow 0} f(r, \vartheta) = 0$ indépendamment de ϑ , ce qui prouve que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$, *i.e.* que f est continue en $(0, 0)$. De plus elle est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas. Nous pouvons donc conclure que f est continue sur \mathbb{R}^2 .

Exercice 2.5

Montrer que la fonction $f: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$$

n'est pas prolongeable par continuité en $(0, 0)$.

Correction

Pour que f soit prolongeable par continuité en $(0, 0)$ il faut que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \ell \in \mathbb{R}$. Pour prouver que cette limite n'existe pas il suffit d'explicitier deux restrictions à deux courbes continues passant par $(0, 0)$ qui conduisent à des limites différentes. La restriction de f à la courbe continue $y = x$ qui passe par le point $(0, 0)$ est la fonction $f(x, x) = \frac{x^3}{x^2 + x^4} = \frac{x}{1 + x^2}$. La restriction de f à la courbe continue $x = y^2$ qui passe par le point $(0, 0)$ est la fonction $f(y^2, y) = \frac{y^4}{y^4 + y^4} = \frac{1}{2}$. Comme $f(x, x) \xrightarrow[x \rightarrow 0]{} 0$ mais $f(y^2, y) = \frac{1}{2}$, la fonction n'est pas prolongeable par continuité en $(0, 0)$.

Exercice 2.6

Montrer que la fonction $f: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \frac{\sin(x^2) - \sin(y^2)}{x^2 + y^2}$$

n'est pas prolongeable par continuité en $(0, 0)$.

Correction

Pour que f soit prolongeable par continuité en $(0, 0)$ il faut que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \ell \in \mathbb{R}$. Pour prouver que cette limite n'existe pas il suffit d'explicitier deux restrictions à deux courbes continues passant par $(0, 0)$ qui conduisent à des limites différentes. La restriction de f à la courbe continue $y = 0$ qui passe par le point $(0, 0)$ est la fonction $f(x, 0) = \frac{\sin(x^2)}{x^2}$. La restriction de f à la courbe continue $x = 0$ qui passe par le point $(0, 0)$ est la fonction $f(0, y) = -\frac{\sin(y^2)}{y^2}$. Comme $f(x, 0) \xrightarrow[x \rightarrow 0]{} 1$ mais $f(0, y) = -1$, la fonction n'est pas prolongeable par continuité en $(0, 0)$.

Exercice 2.7

Soit $f: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x, y) = \frac{6x^2y}{x^2 + y^2}$. Montrer que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$ de trois façons :

1. d'après la définition (utiliser la norme euclidienne),
2. d'après le théorème de pincement,
3. en utilisant les coordonnées polaires.

Correction

1. Soit $\varepsilon > 0$. Il faut trouver $r > 0$ tel que

$$\left| \sqrt{x^2 + y^2} - 0 \right| < r \implies \left| \frac{6x^2y}{x^2 + y^2} - 0 \right| < \varepsilon.$$

Puisque $x^2 + y^2 \geq x^2$ et $\sqrt{x^2 + y^2} \geq \sqrt{y^2} = |y|$, alors

$$\left| \frac{6x^2y}{x^2 + y^2} \right| \leq \frac{6x^2|y|}{x^2} = 6|y| \leq 6\sqrt{x^2 + y^2} \quad \forall (x, y) \neq (0, 0).$$

Il suffit donc de choisir $r = \varepsilon/6$.

2. Pour tout $(x, y) \neq (0, 0)$ on a

$$0 \leq \left| \frac{6x^2y}{x^2 + y^2} \right| \leq 6|y| \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0$$

3. Posons $x = r \cos(\vartheta)$ et $y = r \sin(\vartheta)$. On obtient

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{6x^2y}{x^2 + y^2} = \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ \forall \vartheta}} (6r \cos^2(\vartheta) \sin(\vartheta)).$$

Or, $0 \leq |6r \cos^2(\vartheta) \sin(\vartheta)| \leq 6r \xrightarrow[r \rightarrow 0]{\forall \vartheta} 0$, donc $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$.

Exercice 2.8

Calculer la limite si elle existe finie ou montrer qu'elle n'existe pas :

- | | | |
|---|---|--|
| 1. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2}$; | 2. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^{-x^2 - y^2} - 1}{x^2 + y^2}$; | 3. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 - 4y^2}{x^2 + 2y^2}$; |
| 4. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y e^y}{x^4 + 4y^2}$; | 5. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1}$; | 6. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x + y}{x^2 + y^2}$; |
| 7. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{ x + y }{x^2 + y^2}$; | 8. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3}{x^2 + y^2}$; | 9. $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,0)} \frac{xy - 2y}{x^2 + y^2 - 4x + 4}$; |
| 10. $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{y \sin(x+1)}{x^2 - 2x + 1}$; | 11. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1}$; | 12. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2x^2 + 3xy + y^2}{x^2 + 5y^2}$; |
| 13. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x+y)^2}{x^2 + y^2}$; | 14. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 \sin^2(y)}{x^2 + 3y^2}$; | 15. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\arctan((x+y)^2)}{x^2}$; |
| 16. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^3}{2x^2 + y^2}$; | 17. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$; | 18. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 + y^2}{x^2 + y^2}$; |
| 19. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x e^{x/y}$; | 20. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{x \ln y}{\sqrt{x^2 + (y-1)^2}}$; | 21. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x^2 y}{x^2 + y^2}$; |
| 22. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$; | 23. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$; | 24. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - x^3 + y^2 + y^3}{x^2 + y^2}$; |
| 25. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x-y}{x+y}$; | 26. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2) \ln(x^2 + y^2) + 5$; | 27. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y^2 \sin^2(x)}{x^4 + y^4}$; |

Correction

- Comme $|f(x, y)| \leq \frac{(x^2 + y^2)^2}{x^2 + y^2} = x^2 + y^2$ et en polaire $x^2 + y^2 \stackrel{\forall \vartheta}{=} r^2 \xrightarrow[r \rightarrow 0]{} 0$ alors $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2} = 0$.
- On utilise les coordonnées polaires : $x = r \cos(\vartheta)$, $y = r \sin(\vartheta)$; alors $f(r, \vartheta) \stackrel{\forall \vartheta}{=} \frac{e^{-r^2} - 1}{r^2} \xrightarrow[r \rightarrow 0]{} -1$, ce qui prouve que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^{-x^2 - y^2} - 1}{x^2 + y^2} = -1$.
- Comme $f(x, 0) = x^2 \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ mais $f(0, y) = -2 \xrightarrow{y \rightarrow 0} -2$ la limite $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 - 4y^2}{x^2 + 2y^2}$ n'existe pas.
- Comme $f(x, 0) = 0 \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ mais $f(x, x^2) = \frac{e^{x^2}}{5} \xrightarrow{y \rightarrow 0} \frac{1}{5}$ la limite $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y e^y}{x^4 + 4y^2}$ n'existe pas.
- $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \sqrt{x^2 + y^2 + 1} + 1 = 2$.
- Comme $f(x, x) = \frac{x}{x^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} +\infty$ alors la limite $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x+y}{x^2 + y^2}$ n'existe pas.

7. Comme $f(x, x) = \frac{|x|}{x^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} +\infty$ alors la limite $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|x|+|y|}{x^2+y^2}$ n'existe pas.
8. En polaire : $f(r, \vartheta) = r \cos^3 \vartheta$ et $|r \cos^3 \vartheta| \leq r \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0$ ainsi $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3}{x^2+y^2} = 0$.
9. Comme $f(x, 0) = 0$ et $f(x, x-2) = \frac{1}{2}$ la limite $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,0)} \frac{xy-2y}{x^2+y^2-4x+4}$ n'existe pas.
10. Comme $f(x, 2) = \frac{2}{x-1} \frac{\sin(x+1)}{x+1} \xrightarrow{x \rightarrow 1} \infty$ alors $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{y \sin(x+1)}{x^2-2x+1}$ n'existe pas.
11. En polaires : $f(r, \vartheta) = \frac{r^2}{\sqrt{r^2+1}-1} \xrightarrow{r \rightarrow 0} 2$ alors $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1} = 2$.
12. Comme $f(x, 0) = 2$ et $f(0, y) = \frac{1}{5}$ alors $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2x^2+3xy+y^2}{x^2+5y^2}$ n'existe pas.
13. Comme $f(x, x) = 2$ et $f(x, -x) = 0$ alors $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2}$ n'existe pas.
14. En polaires : $f(r, \vartheta) = \frac{\cos^2(\vartheta) \sin^2(r \sin(\vartheta))}{1+2 \sin^2(\vartheta)}$ et $|f(r, \vartheta)| \leq \sin^2(r \sin(\vartheta))$. Comme $\lim_{r \rightarrow 0} f(r, \vartheta) = 0$ alors $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 \sin^2(y)}{x^2+3y^2} = 0$.
15. Comme $f(x, x) = \frac{\arctan((2x^2))}{x^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 4$ et $f(x, 0) = \frac{\arctan(x^2)}{x^2} \xrightarrow{y \rightarrow 0} 1$ alors $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\arctan((x+y)^2)}{x^2}$ n'existe pas.
16. En polaires : $f(r, \vartheta) = r^3 \frac{\cos^2(\vartheta) \sin^3 \vartheta}{1+\cos^2(\vartheta)}$ et $|f(r, \vartheta)| \leq \frac{r^3}{1+\cos^2(\vartheta)}$ car $|\cos^2(\vartheta) \sin^3 \vartheta| \leq 1$.
Comme $\lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ \forall \vartheta}} f(r, \vartheta) = 0$ alors $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^3}{2x^2+y^2} = 0$.
17. En polaires : $f(r, \vartheta) = \frac{\sin(r^2)}{r^2}$. Comme $\lim_{r \rightarrow 0} f(r, \vartheta) = 1$ alors $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = 1$.
18. Comme $f(x, 0) = x \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ mais $f(0, y) = 1 \xrightarrow{y \rightarrow 0} 1$ alors $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3+y^2}{x^2+y^2} = 0$ n'existe pas.
19. Comme $f(x, x) = xe \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ mais $f(x, x^2) = xe^{1/x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty$ alors $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} xe^{x/y}$ n'existe pas.
20. En polaire : $f(r, \vartheta) = \cos(\vartheta) \ln(1+r \sin(\vartheta))$ et $|\cos(\vartheta) \ln(1+r \sin(\vartheta))| \leq |\ln(1+r \sin(\vartheta))|$. Comme on calcule la limite pour $r \rightarrow 0$, on peut supposer $r < \frac{1}{2}$; dans ce cas $|\ln(1+r \sin(\vartheta))| < |\ln(1+r)| \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0$ et comme $\lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ \forall \vartheta}} f(r, \vartheta) = 0$ alors
$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{x \ln y}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}} = 0.$$
21. En polaire : $f(r, \vartheta) = 3r \cos^2(\vartheta) \sin(\vartheta)$ et $|3r \cos^2(\vartheta) \sin(\vartheta)| \leq 3r$. Comme $\lim_{r \rightarrow 0} f(r, \vartheta) = 0$ alors $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x^2 y}{x^2+y^2} = 0$.
22. Comme $f(x, x) = \frac{x^3}{x^4+x^2} = \frac{x}{x^2+1} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ mais $f(x, x^2) = \frac{x^4}{x^4+x^4} = \frac{1}{2}$ alors $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^4+y^2}$ n'existe pas.
23. En polaire : $f(r, \vartheta) = r \cos^2(\vartheta)$ et $|r \cos^2(\vartheta)| \leq r$. Comme $\lim_{r \rightarrow 0} f(r, \vartheta) = 0$ alors $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$.
24. $\frac{x^2-x^3+y^2+y^3}{x^2+y^2} = 1 + \frac{y^3-x^3}{x^2+y^2}$. Si on définit $g(x, y) = \frac{y^3-x^3}{x^2+y^2}$, en polaire $g(r, \vartheta) = r(\sin^3 \vartheta - \cos^3 \vartheta)$ et $|r(\sin^3 \vartheta - \cos^3 \vartheta)| \leq 2r$.
Comme $\lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ \forall \vartheta}} f(r, \vartheta) = 0$ alors $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2-x^3+y^2+y^3}{x^2+y^2} = 1$.
25. Comme $f(x, 0) = 1$ et $f(0, y) = -1$ alors $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x-y}{x+y}$ n'existe pas.
26. En polaire : $f(r, \vartheta) = r^2 \ln(r^2) + 5 \xrightarrow{r \rightarrow 0} 5$ alors $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2+y^2) \ln(x^2+y^2) + 5 = 5$.
27. La restriction de f à la courbe continue $y = 0$ qui passe par le point $(0, 0)$ est la fonction $f(x, 0) = 0$. La restriction de f à la courbe continue $y = x$ qui passe par le point $(0, 0)$ est la fonction $f(x, x) = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin(x)}{x} \right)^2$. Comme $f(x, x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{2}$ mais $f(x, 0) = 0$, la limite $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y^2 \sin^2(x)}{x^4+y^4}$ n'existe pas.

 **Exercice 2.9**

Calculer la limite si elle existe finie ou montrer qu'elle n'existe pas :

1. $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{xy+yz^2+xz^2}{x^2+y^2+z^4}$;
2. $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (\pi,0,1/3)} e^{yz} \tan(xz)$;
3. $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{xy+yz^2+xz^2}{x^2+y^2+z^4}$.


Correction

1. Comme $f(x, x, x) = \frac{x^2+2x^3}{2x^2+x^4} = \frac{1+2x}{2+x^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{2}$ mais $f(x, 0, x) = \frac{x^3}{x^2+x^4} = \frac{x}{1+x^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ alors $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{xy+yz^2+xz^2}{x^2+y^2+z^4}$ n'existe pas.
2. $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (\pi, 0, 1/3)} e^{y^2} \tan(xz) = e^{0^2} \tan(\pi/3) = \sqrt{3}$ car $f(x, y, z) = e^{y^2} \tan(xz)$ est continue si $xz \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$;
3. La restriction de $f(x, y, z) = \frac{xy+yz^2+xz^2}{x^2+y^2+z^4}$ à la courbe continue d'équation $y = 0$ et $z = 0$ qui passe par le point $(0, 0, 0)$ est la fonction $f(x, 0, 0) = 0$. La restriction de f à la courbe continue d'équation $y = x$ et $z = 0$ qui passe par le point $(0, 0, 0)$ est la fonction $f(x, x, 0) = \frac{1}{2}$. Par conséquent la limite $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{xy+yz^2+xz^2}{x^2+y^2+z^4}$ n'existe pas.

Chapitre 3.

Dérivabilité et différentiabilité, fonctions implicites

3.1. Dérivées partielles du premier ordre et gradient

 **Rappels** Soit f une fonction à valeurs réelles définie sur I un intervalle ouvert de \mathbb{R} . On dit que f est dérivable en $x_0 \in I$ s'il existe finie la limite

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

ce qui équivaut, en posant $h = x - x_0$, à

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Cette limite est notée $f'(x_0)$ et appelée dérivée de f en x_0 .

L'unique dérivée d'une fonction d'une variable réelle, lorsqu'elle existe, est liée aux variations de la fonction tandis que la variable parcourt l'axe des abscisses. Pour une fonction $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, dont le graphe est une surface de \mathbb{R}^3 , la situation est très différente. En effet, l'axe réel n'offre que deux types de mouvements possibles : de gauche à droite et de droite à gauche tandis que le plan \mathbb{R}^2 possède une infinité de directions. Il peut s'avérer intéressant d'étudier comment une fonction $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ évolue lorsque la variable suit l'une ou l'autre direction du plan. À cet égard, considérons d'abord la direction à y fixé. Prenons le point (x_0, y_0) du domaine de f . Son image est $f(x_0, y_0) \in \mathbb{R}$ et le graphe de la fonction, qui est la surface d'équation $z = f(x, y)$ de \mathbb{R}^3 , comporte le point $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. L'intersection du graphe de f avec le plan vertical $y = y_0$ est la courbe d'équation $z = f(x, y_0)$ de \mathbb{R}^2 . Le point (x_0, y_0) étant fixé, on peut alors interpréter cette courbe comme le graphe de la fonction $f_{y=y_0}$ d'une seule variable définie par $f_{y=y_0}(x) = f(x, y_0)$ dans le repère xOz . Si $f_{y=y_0}$ est dérivable en x_0 , alors sa dérivée nous renseigne sur la variation de la fonction f lorsque (x, y) se déplace le long de la droite horizontale de \mathbb{R}^2 passant par le point (x_0, y_0) . Par analogie on peut répéter le même raisonnement à x fixé. En conclusion, lorsqu'on pose toutes les variables d'une fonction égales à une constante, sauf une, on obtient alors une fonction d'une seule variable qui peut être dérivée suivant les règles habituelles.

3.1 Définition (Dérivées partielles premières)

Soit f une fonction à valeurs réelles définie sur une partie ouverte \mathcal{D} de \mathbb{R}^2 . Soit $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}$. Les dérivées partielles de f en (x_0, y_0) sont les dérivées des fonctions partielles f_{y_0} et f_{x_0} évaluées en (x_0, y_0) , i.e. les fonctions

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) &= f'_{y=y_0}(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} && \text{dérivée partielle de } f \\ &&& \text{par rapport à } x \text{ au point } (x_0, y_0) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) &= f'_{x=x_0}(y_0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k} && \text{dérivée partielle de } f \\ &&& \text{par rapport à } y \text{ au point } (x_0, y_0) \end{aligned}$$

Il s'agit de limites d'une fonction réelle de variable réelle!

Si f admet toutes les dérivées partielles premières, on dit que f est dérivable.

Remarque (Notation)

La dérivée $\frac{\partial f}{\partial x}$ se note aussi $\partial_x f$ ou $f_{,x}$ ou encore $\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_y$ en insistant sur la variable qu'on considère constante.

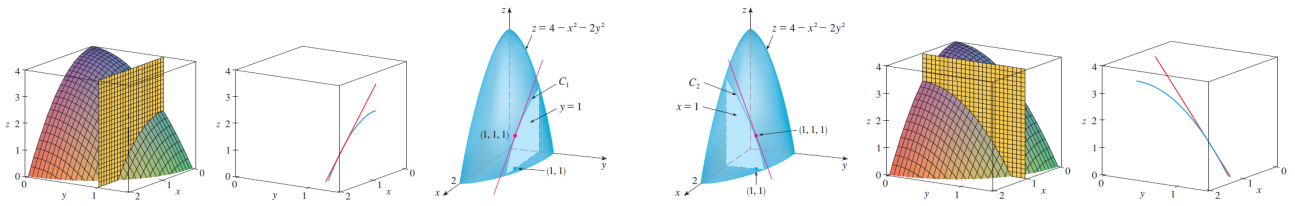
(Attention à ne pas confondre $f_{,x}$ la dérivée de f par rapport à x avec $f_{x=x_0}$ la fonction partielle associée à f .)

Astuce

En pratique, pour calculer la dérivée partielle $\partial_x f$ (resp. $\partial_y f$), on dérive f comme si elle était une fonction de la seule variable x (resp. y) et que l'autre variable, y (resp. x), était une constante.

EXEMPLE

Soit $f(x, y) = 4 - x^2 - 2y^2$. Le graphe de f est le parabololoïde $z = 4 - x^2 - 2y^2$. On a $\partial_x f(x, y) = -2x$ et $\partial_y f(x, y) = -4y$. Le plan vertical $y = 1$ intersecte le parabololoïde dans la parabole d'équation $z(x) = 2 - x^2$ (et on appelle cette courbe C_1 comme dans la figure à gauche). La pente de la droite tangente à cette parabole au point $(1, 1)$ est $\partial_x f(1, 1) = -2$. De la même façon, le plan vertical $x = 1$ intersecte le parabololoïde dans la parabole $z(y) = 2 - 2y^2$ (et on appelle cette courbe C_2 comme dans la figure à droite). La pente de la droite tangente à cette parabole au point $(1, 1)$ est $\partial_y f(1, 1) = -4$.



Les dérivées partielles jouissent des mêmes propriétés que les dérivées de fonctions d'une seule variable. En particulier, les fonctions élémentaires telles que les polynômes, les fonctions exponentielles, logarithmiques et trigonométriques sont dérivables dans leur domaine respectif. La dérivabilité (partielle) des autres fonctions s'établit, le cas échéant, en tant que somme, produit, composée, etc., de fonctions dérivables. Les règles de dérivation sont également similaires, à l'exception de celle relative à la *dérivation des fonctions composées*. En effet, lorsque $n > 1$, il est impossible de réaliser la composition entre deux fonctions de $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

EXEMPLE

1. Soit la fonction $f(x, y) = 3x^2 + xy - 2y^2$. Alors $\mathcal{D} \equiv \mathbb{R}^2$, f est continue, $\partial_x f(x, y) = 6x + y$ (car y est considérée constante) et $\partial_y f(x, y) = x - 4y$ (car x est considérée constante).
2. Soit la fonction $f(x, y, z) = 5xz \ln(1 + 7y)$. Alors $\mathcal{D} \equiv \{(x, y, z) \mid y > -1/7\}$, f est continue et $\partial_x f(x, y, z) = 5z \ln(1 + 7y)$, $\partial_y f(x, y, z) = \frac{35xz}{1+7y}$ et $\partial_z f(x, y, z) = 5x \ln(1 + 7y)$.
3. Considérons l'entropie d'un gaz parfait en fonction de l'énergie interne spécifique ε et du volume spécifique τ : $s(\tau, \varepsilon) = c_v \ln(\varepsilon \tau^{\gamma-1}) = c_v \ln(\varepsilon) + c_v(\gamma - 1) \ln(\tau)$ (avec c_v et $\gamma > 1$ deux constantes). Comme la température et la pression sont définies respectivement par $T = 1/\partial_\varepsilon s$ et $P = T \partial_\tau s$, on obtient $T = \frac{1}{\partial_\varepsilon s} = \frac{\varepsilon}{c_v}$ et $P = T \partial_\tau s = \frac{\varepsilon}{c_v} \frac{c_v(\gamma-1)\tau^{\gamma-2}}{\varepsilon \tau^{\gamma-1}} = (\gamma - 1) \frac{\varepsilon}{\tau}$. On retrouve ainsi la relation bien connue $P\tau = RT$ avec $R = c_v(\gamma - 1)$.
4. La résistance totale R d'un conducteur produite par trois conducteurs de résistances R_1, R_2, R_3 , connectés en parallèle, est donnée par la formule

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}.$$

On a alors $\partial_{R_i} R(R_1, R_2, R_3) = R^2 / R_i^2$.

Fonction de production de COBB-DOUGLAS COBB et DOUGLAS ont cherché une fonction, définie et dérivable dans \mathbb{R}_+^2 , qui caractérise la production en fonction du travail w et du capital k :

$$f: \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+^*$$

$$(w, k) \mapsto f(w, k)$$

La dérivée partielle $\partial_w f$ est la vitesse à laquelle la production change en fonction des variations du travail. On appelle cela *production marginale par rapport au travail* ou *productivité marginale du travail*. De la même manière, la dérivée partielle $\partial_k f$ est la vitesse à laquelle la production change en fonction des variations du capital. On appelle cela *production marginale par rapport au capital* ou *productivité marginale du capital*. COBB et DOUGLAS ont fait les hypothèses suivantes :

- ▷ si le travail ou le capital s'annulent, la production aussi s'annule : $f(w, 0) = f(0, k) = 0$;
- ▷ la productivité marginale du travail est proportionnelle à la production par unité de travail :

$$\exists \alpha \in \mathbb{R} \quad \text{tel que} \quad \partial_w f(w, k) = \frac{\alpha}{w} f(w, k);$$

pour chaque k fixé, cela correspond à l'EDO $f'_k(w) = \frac{\alpha}{w} f_k(w)$ dont la solution est $f_k(w) = g(k)w^\alpha$, i.e. $f(w, k) = g(k)w^\alpha$ où g est une fonction qui ne dépend que de k ;

- ▷ la productivité marginale du capital est proportionnelle à la production par unité de capital :

$$\exists \beta \in \mathbb{R} \quad \text{tel que} \quad \partial_k f(w, k) = \frac{\beta}{k} f(w, k).$$

pour chaque w fixé, cela correspond à l'EDO $f'_w(k) = \frac{\beta}{k} f_w(k)$ dont la solution est $f_w(k) = h(w)k^\beta$, i.e. $f(w, k) = h(w)k^\beta$ où h est une fonction qui ne dépend que de w .

On obtient alors la fonction $f: \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(w, k) = cw^\alpha k^\beta$, où c est une constante, appelée *fonction de production de COBB-DOUGLAS*.

Comme $\partial_w f(w, k) = \frac{\alpha}{w} f(w, k)$, alors $c = 1$. De plus, on a fait l'hypothèse que si le travail ou le capital s'annulent alors la production aussi s'annule, par conséquent $\alpha, \beta > 0$ et l'on a bien

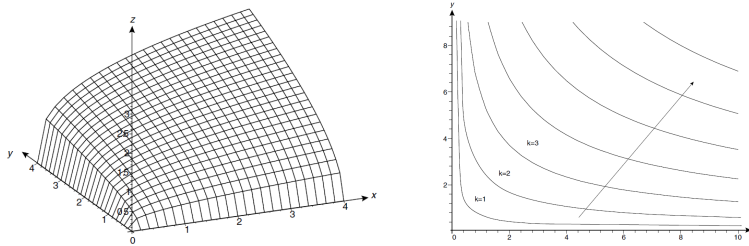
$$\partial_w f(w, k) = \alpha w^{\alpha-1} k^\beta = \frac{\alpha}{w} f(w, k), \quad \partial_k f(w, k) = \beta w^\alpha k^{\beta-1} = \frac{\beta}{k} f(w, k).$$

Remarquons que si le travail et le capital augment en même temps d'un facteur m alors

$$f(mw, mk) = c(mw)^\alpha (mk)^\beta = m^{\alpha+\beta} f(w, k).$$

Pour que la production augmente elle aussi d'un facteur m il faut imposer $\alpha + \beta = 1$.

Les courbes de niveau d'une telle fonction sont nommées isocantes ou courbes d'isoproduction. Pour un niveau fixé $K > 0$ de production, l'équation $w^\alpha k^\beta = K$ détermine les points du plan (w, k) donnant toutes les combinaisons des quantités de facteurs qui permettent de produire ce niveau K .



3.2 Définition (Vecteur gradient)

Le gradient de la fonction $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ évalué au point $\hat{\mathbf{x}} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)$, noté $\nabla f(\hat{\mathbf{x}})$ ou encore $\mathbf{grad} f(\hat{\mathbf{x}})$, est le vecteur dont les composantes sont les dérivées partielles premières :

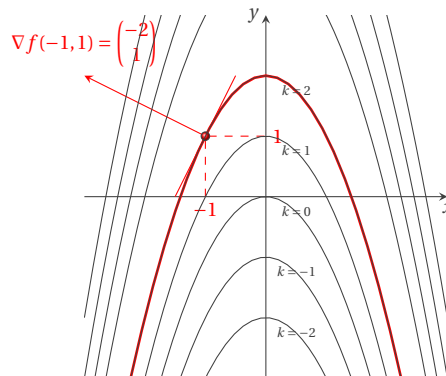
$$\nabla f(\mathbf{x}_0) = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} f(\hat{\mathbf{x}}) \\ \partial_{x_2} f(\hat{\mathbf{x}}) \\ \vdots \\ \partial_{x_n} f(\hat{\mathbf{x}}) \end{pmatrix}$$

Il est **orthogonal** à la courbe de niveau de f passant par (x_0, y_0) .

EXEMPLE

Considérons la fonction de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} définie par $f(x, y) = x^2 + y$. Le gradient de f est le vecteur $\nabla f(x, y) = (2x, 1)^T$. La courbe de niveau k de la fonction f est l'ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y = k\}$, autrement dit la parabole d'équation $y = -x^2 + k$. Le gradient est orthogonal à la courbe de niveau de f qui passe par le point (x, y) .

Dans la figure ci-dessous on considère le point $(-1, 1)$. Le vecteur gradient de f dans ce point vaut $(-2, 1)^T$. Le point donné appartient à la courbe de niveau 2 qui a pour équation $y = -x^2 + 2$. La droite tangente à cette courbe au point $(-1, 1)$ a pour équation $y = 2x + 3$ qui est orthogonale au gradient.



3.3 Définition (Matrice jacobienne et fonctions vectorielles)

Dans certaines applications, on est amené à considérer des fonctions de $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ qui peuvent être vues comme des empilements de fonctions de $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\mathbf{f}: \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

$$\mathbf{x} \mapsto \begin{pmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ f_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ f_m(\mathbf{x}) \end{pmatrix}.$$

De telles fonctions s'étudient comme s'il s'agissait de m fonctions de $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. On obtiendra ainsi un vecteur gradient pour chaque fonction $f_j, j = 1, \dots, m$. La matrice de n lignes et m colonnes dont la colonne j contient le vecteur ∇f_j est appelée *matrice jacobienne* de f .

EXEMPLE

Soit f la fonction ainsi définie :

$$\mathbf{f}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(x, y) \mapsto \begin{pmatrix} xy \\ x - y \\ x + y^2 \end{pmatrix}.$$

La matrice jacobienne de f est

$$J_{\mathbf{f}} = \begin{pmatrix} y & 1 & 1 \\ x & -1 & 2y \end{pmatrix}.$$

3.4 Définition (Dérivées des fonctions composées : règle de dérivation en chaîne (*chain rule*))

Cas $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ Soit f une fonction de deux variables admettant des dérivées partielles premières et x et y deux fonctions dérivables de \mathbb{R} dans \mathbb{R} :

$$\begin{array}{ll} \mathbf{f}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} & \mathbf{h}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto f(x, y) & t \mapsto \begin{pmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \end{pmatrix} \end{array}$$

Alors la fonction g

$$\begin{array}{c} g: \mathbb{R} \xrightarrow{\mathbf{h}} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R} \\ t \longmapsto \mathbf{h}(t) = \begin{pmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \end{pmatrix} \longmapsto g(t) = f(h_1(t), h_2(t)) \end{array}$$

est dérivable et

$$g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) \times x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) \times y'(t)$$

avec $x = h_1(t)$ et $y = h_2(t)$.

Cas $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ Soit f une fonction de deux variables x et y elles-mêmes fonctions des deux variables u et v .

$$\begin{array}{llll} \mathbf{f}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} & \mathbf{x}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} & \mathbf{y}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} & \mathbf{h}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto f(x, y) & (u, v) \mapsto x(u, v) & (u, v) \mapsto y(u, v) & (u, v) \mapsto \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \end{pmatrix} \end{array}$$

On peut définir la fonction composée $g(u, v) = f(x(u, v), y(u, v))$:

$$\begin{array}{c} g: \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\mathbf{h}} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R} \\ (u, v) \longmapsto \mathbf{h}(u, v) = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \end{pmatrix} \longmapsto g(u, v) = f(x(u, v), y(u, v)) \end{array}$$

Lorsque les dérivées partielles premières qui interviennent sont définies, on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial u}(u, v) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x(u, v), y(u, v)) \times \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(u, v), y(u, v)) \times \frac{\partial y}{\partial u}(u, v), \\ \frac{\partial g}{\partial v}(u, v) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x(u, v), y(u, v)) \times \frac{\partial x}{\partial v}(u, v) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(u, v), y(u, v)) \times \frac{\partial y}{\partial v}(u, v). \end{aligned}$$

En notation matricielle

$$\nabla g = J_h \nabla f$$

i.e.

$$\begin{pmatrix} \partial_u g \\ \partial_v g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_{ux} & \partial_{uy} \\ \partial_{vx} & \partial_{vy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_x f \\ \partial_y f \end{pmatrix}$$

Cas $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Soit f une fonction d'une variable x et x elle-même une fonction de deux variables u et v .

$$\begin{array}{ll} f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} & x: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) & (u, v) \mapsto x(u, v) \end{array}$$

On peut définir la fonction composée $g(u, v) = f(x(u, v))$:

$$\begin{array}{ccccc} g: \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{x} & \mathbb{R} & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ (u, v) & \mapsto & x(u, v) & \mapsto & g(u, v) = f(x(u, v)) \end{array}$$

Lorsque les dérivées partielles premières qui interviennent sont définies, on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial u}(u, v) &= f'(x(u, v)) \times \frac{\partial x}{\partial u}(u, v), \\ \frac{\partial g}{\partial v}(u, v) &= f'(x(u, v)) \times \frac{\partial x}{\partial v}(u, v). \end{aligned}$$

EXEMPLE (GAZ PARFAITS)

La pression P (en kilopascals), le volume V (en litres) et la température T (en kelvins) d'une mole d'un gaz parfait sont liés par l'équation $PV = RT$ avec $R = 8.31$. On veut déterminer la vitesse à laquelle la pression change quand la température est de 300 K et est en train d'augmenter à raison de $0.1 \text{ K} \cdot \text{s}^{-1}$ et quand le volume est de 100 L et est en train de croître à raison de $0.2 \text{ L} \cdot \text{s}^{-1}$.

Soit P une fonction de deux variables admettant des dérivées partielles premières et T et V sont deux fonctions dérivables de \mathbb{R} dans \mathbb{R} :

$$\begin{array}{lll} P: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} & T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} & V: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ (T, V) \mapsto P(T, V) & t \mapsto T(t) & t \mapsto V(t) \end{array}$$

Alors la fonction P

$$\begin{array}{ccccc} P: \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & (T(t), V(t)) & \longmapsto & P(T(t), V(t)) = R \frac{T(t)}{V(t)} \end{array}$$

est dérivable et

$$P'(t) = \frac{\partial P}{\partial T}(T(t), V(t))T'(t) + \frac{\partial P}{\partial V}(T(t), V(t))V'(t).$$

À l'instant considéré, $T = 300$ et $dT/dt = 0.1$, $V = 100$ et $dV/dt = 0.2$, donc

$$\frac{dP}{dt} = \frac{\partial P}{\partial T} \frac{dT}{dt} + \frac{\partial P}{\partial V} \frac{dV}{dt} = \frac{R}{V} \frac{dT}{dt} - \frac{RT}{V^2} \frac{dV}{dt} = \frac{3.81}{100} 0.1 - \frac{3.81 \times 300}{100^2} 0.2 = -0.04155.$$

La pression est donc en train de diminuer d'environ $0.042 \text{ kPa} \cdot \text{s}^{-1}$.

EXEMPLE

La température en un point (x, y) est notée $T(x, y)$ et mesurée en degrés Celsius. Un insecte en train de voler suit la trajectoire $(x = \sqrt{1+t}, y = 2 + t/3)$ où t est mesuré en secondes et x et y en centimètres. Si la fonction température vérifie $\partial_x T(2, 3) = 4$ et $\partial_y T(2, 3) = 3$, à quelle vitesse croît la température sur la trajectoire de l'insecte après 3 secondes ? Comme x et y sont chacune fonction du temps t , la fonction $T(x, y)$ est aussi fonction du temps

$$\begin{array}{ccccc} T: \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & (x(t), y(t)) & \longmapsto & T(x(t), y(t)) = T(\sqrt{1+t}, 2 + t/3) \end{array}$$

et l'on a

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial T}{\partial y} \frac{dy}{dt} = \frac{\partial T}{\partial x} \frac{1}{2\sqrt{1+t}} + \frac{\partial T}{\partial y} \frac{1}{3}.$$

Après 3 secondes, $x = 2$ et $y = 3$ et

$$\frac{dT}{dt}(2, 3) = 4 \frac{1}{2 \times 2} + 3 \frac{1}{3} = 2.$$

Ainsi la température croît de 2°C par second.

EXEMPLE

Le consommateur dont la fonction d'utilité est donnée par $U(x, y)$ est soumis à la contrainte de budget $Px + Qy = R$, où $P > 0$ et $Q > 0$ sont les prix des deux biens et $R > 0$ le montant dévolu à l'achat de ces deux biens. La quantité consommée du second bien devient ainsi fonction de celle du premier : $y = f(x)$ avec $f(x) = \frac{R-Px}{Q}$, de sorte que, sous la contrainte de budget, la fonction d'utilité peut être exprimée sous la forme d'une fonction d'une seule variable : $V(x) = U(x, f(x))$, qui est la composée des fonctions

$$\begin{array}{ll} y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 & U: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) & (x, y) \mapsto U(x, y) \end{array}$$

Grâce à la *chain rule*, on a

$$V'(x) = \frac{dV}{dx} = \partial_x U - \partial_y U \frac{P}{Q}.$$

EXEMPLE (VARIABLES POLAIRES)

Soit f une fonction de deux variables x et y elles-mêmes fonctions des deux variables r et ϑ .

$$\begin{array}{llll} f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 & x: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} & y: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} & \mathbf{h}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto f(x, y) & (r, \vartheta) \mapsto x(r, \vartheta) = x_0 + r \cos(\vartheta) & (r, \vartheta) \mapsto y(r, \vartheta) = y_0 + r \sin(\vartheta) & (r, \vartheta) \mapsto \begin{pmatrix} x(r, \vartheta) \\ y(r, \vartheta) \end{pmatrix} \end{array}$$

On peut définir la fonction composée $g(r, \vartheta) = f(x(r, \vartheta), y(r, \vartheta))$:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{g}: \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\mathbf{h}} & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ (r, \vartheta) & \longmapsto & \mathbf{h}(x, y) = \begin{pmatrix} x(r, \vartheta) \\ y(r, \vartheta) \end{pmatrix} & \longmapsto & g(r, \vartheta) = f(x(r, \vartheta), y(r, \vartheta)) \end{array}$$

Lorsque les dérivées partielles premières qui interviennent sont définies, on a

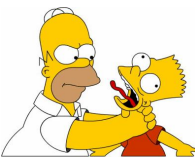
$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial r}(r, \vartheta) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x(r, \vartheta), y(r, \vartheta)) \times \frac{\partial x}{\partial r}(r, \vartheta) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(r, \vartheta), y(r, \vartheta)) \times \frac{\partial y}{\partial r}(r, \vartheta), \\ &= \cos(\vartheta) \frac{\partial f}{\partial x}(x(r, \vartheta), y(r, \vartheta)) + \sin(\vartheta) \frac{\partial f}{\partial y}(x(r, \vartheta), y(r, \vartheta)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \vartheta}(r, \vartheta) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x(r, \vartheta), y(r, \vartheta)) \times \frac{\partial x}{\partial \vartheta}(r, \vartheta) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(r, \vartheta), y(r, \vartheta)) \times \frac{\partial y}{\partial \vartheta}(r, \vartheta) \\ &= -r \sin(\vartheta) \frac{\partial f}{\partial x}(x(r, \vartheta), y(r, \vartheta)) + r \cos(\vartheta) \frac{\partial f}{\partial y}(x(r, \vartheta), y(r, \vartheta)). \end{aligned}$$

En notation matricielle

$$\nabla g = J_h \nabla f$$

$$\begin{pmatrix} \partial_r g \\ \partial_\theta g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_r x & \partial_r y \\ \partial_\theta x & \partial_\theta y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_x f \\ \partial_y f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\vartheta) & \sin(\vartheta) \\ -r \sin(\vartheta) & r \cos(\vartheta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_x f \\ \partial_y f \end{pmatrix}$$



ATTENTION

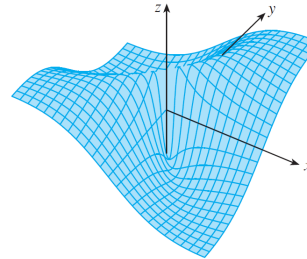
Une fonction $f^n \rightarrow \mathbb{R}$, $n \geq 2$, peut

- ▷ admettre des dérivées partielles en tout point d'un ouvert de \mathbb{R}^2 et
- ▷ ne pas être continue en un point de cet ouvert.

EXEMPLE
La fonction

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

n'est pas continue en $(0,0)$ car $f(x, x) = 1/2 \neq f(0,0)$, cependant elle admet des dérivées partielles en $(0,0)$ car $\partial_x f(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = 0$ et $\partial_y f(0,0) = \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = 0$.



3.5 Définition (Fonction de classe \mathcal{C}^1)

Si f et ses fonctions dérivées partielles $\partial_x f$ et $\partial_y f$ sont continues sur \mathcal{D} , on dit que f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathcal{D} et on note $f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{D})$.

Les directions correspondant aux dérivées partielles sont celles des axes. D'autres dérivées directionnelles sont aussi envisageables :

3.6 Définition (Dérivée directionnelle)

Les dérivées partielles d'une fonction de deux variables décrivent le taux de variation de cette fonction lorsqu'une de ses variable varie, l'autre restant constante. De manière plus générale, on peut s'intéresser au taux de variation de f lorsque ses arguments (x, y) varient dans une direction fixée. La dérivée de f en (x_0, y_0) selon la direction $\mathbf{v} = (a, b)$ est définie par

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

Lorsque f est différentiable (cf. prochaine section), cette limite vaut $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \mathbf{v} = \partial_x f(x_0, y_0)a + \partial_y f(x_0, y_0)b$.

EXEMPLE

Calculons la dérivée de $f = x^2 - y^2$ en $(1, 2)$ selon la direction $\mathbf{v} = (3, 5)$:

- ▷ en appliquant la définition on a $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(1, 2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{((1+3h)^2 - (2+5h)^2) - (1^2 - 2^2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-16h^2 - 14h}{h} = -14$;
- ▷ comme f est différentiable, on a $\partial_x f(1, 2) = 2$ et $\partial_y f(1, 2) = -4$ donc $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(1, 2) = \nabla f(1, 2) \cdot \mathbf{v} = 3\partial_x f(1, 2) + 5\partial_y f(1, 2) = 6 - 20 = -14$.

Élasticité Soit f une fonction à valeurs réelles définie sur une partie ouverte \mathcal{D} de \mathbb{R}^2 . Soit $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}$ et supposons f dérivable par rapport à x (resp. y) en (x_0, y_0) avec $x_0 \neq 0$ (resp. $y_0 \neq 0$) et $f(x_0, y_0) \neq 0$. L'élasticité (partielle) de f par rapport à x (resp. y) en (x_0, y_0) est le changement proportionnel de la fonction f relativement à la variable x (resp. y) en considérant l'autre variable constante et est donc définie par les relations :

$$E_f^x(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{f(x_0, y_0)}}{\frac{h}{x_0}}, \quad E_f^y(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x_0, y_0+h) - f(x_0, y_0)}{f(x_0, y_0)}}{\frac{h}{y_0}}.$$

Par conséquent

$$E_f^x(x_0, y_0) = \frac{x_0}{f(x_0, y_0)} \partial_x f(x_0, y_0), \quad E_f^y(x_0, y_0) = \frac{y_0}{f(x_0, y_0)} \partial_y f(x_0, y_0).$$

Si la valeur absolue de l'élasticité est > 1 , on dit que la fonction est *élastique*, si elle est < 1 on dit qu'elle est *rigide* et si elle est $= 1$ on dit qu'elle est *unitaire*. Par exemple, une élasticité E_f^x de -2 signifie qu'une augmentation des x (par exemple le prix) de 1% diminue de 2% la quantité f (par exemple la quantité vendue). Le concept de l'élasticité peut être employé toutes les fois qu'il y a un rapport de cause et d'effet. Elle est souvent exprimée pour une variation de 1% de x (resp. y). Si $E_f^x(x_0, y_0) = 0$ (resp. $E_f^y(x_0, y_0) = 0$), alors f est parfaitement inélastique relativement à la variable x (resp. y).

◉ EXEMPLE

La fonction de production de COBB-DOUGLAS $f: \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}$ s'écrit $f(x, y) = x^\alpha y^\beta$ (avec $\alpha, \beta > 0$). Elle est dérivable dans $(\mathbb{R}_+^*)^2$ et on obtient :

$$E_f^x(x, y) = \frac{x}{f(x, y)} \partial_x f(x, y) = \frac{x}{x^\alpha y^\beta} \alpha x^{\alpha-1} y^\beta = \alpha,$$

$$E_f^y(x, y) = \frac{y}{f(x, y)} \partial_y f(x, y) = \frac{y}{x^\alpha y^\beta} \beta x^\alpha y^{\beta-1} = \beta.$$

En conséquence, toutes les fonctions de COBB-DOUGLAS bénéficient d'élasticités constantes, ce qui contribue à expliquer l'attrait qu'elles représentent pour le modélisateur.

◉ EXEMPLE

La fonction de demande D d'un bien dépend du prix p et des revenus r du consommateur. Si $D(p, r) = 100 - p + \sqrt{r}$, on a

$$E_D^p(p, r) = \frac{p}{f(p, r)} \partial_p D(p, r) = \frac{-p}{100 - p + \sqrt{r}}, \quad E_D^r(p, r) = \frac{r}{D(p, r)} \partial_r D(p, r) = \frac{\sqrt{r}}{2(100 - p + \sqrt{r})}.$$

Si $p = 200$ et $r = 12000$, on a $E_D^p(200, 12000) = -20.95 < 0$ (la demande est une fonction décroissante du prix) et $E_D^r(200, 12000) = 5.74 > 0$ (la demande est une fonction croissante des revenus). Dans les deux cas, la demande est élastique car > 1 en valeur absolue.

3.2. Différentiabilité

La différentiabilité d'une fonction f en un point \mathbf{x}_0 correspond à l'existence d'une approximation linéaire de la fonction au voisinage du point $(\mathbf{x}_0, f(\mathbf{x}_0))$ du graphe de la fonction.

Pour les fonctions d'une seule variable, cette approximation linéaire est fournie par la droite tangente impliquant directement l'équivalence entre la dérivabilité et la différentiabilité. Il n'était donc pas nécessaire d'ajouter une définition.

✍ **Rappels** Soit f une fonction à valeurs réelles définie sur I un intervalle ouvert de \mathbb{R} . On dit que f est différentiable en $x_0 \in I$ s'il existe une constante réelle A et une fonction ε définie au voisinage de 0 tels que

$$f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x) \quad \text{avec } \lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0$$

qu'on peut réécrire, en notant $h = x - x_0$, comme

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + Ah + h\varepsilon(h) \quad \text{avec } \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0.$$

On peut montrer que f est différentiable en x_0 ssi elle est dérivable en x_0 . De plus, la constante A est $f'(x_0)$ et on retrouve le développement limité de f à l'ordre 1 au voisinage de x_0 :

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}_{\text{Équation droite tangente}} + o(x - x_0)$$

qu'on peut réécrire, en notant $h = x - x_0$, comme

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + o(h).$$

Par conséquent, f est différentiable en x_0 ssi

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} = 0$$

qu'on peut réécrire, en notant $h = x - x_0$, comme

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0)h}{h} = 0.$$

Si f est dérivable/différentiable en $x_0 \in I$ on peut définir la fonction

$$\begin{aligned} df_{x_0} :]0 - \delta; 0 + \delta[\subset \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x - x_0 &\mapsto (x - x_0)f'(x_0), \end{aligned}$$

ce qui équivaut, en notant $h = x - x_0$, à

$$\begin{aligned} df_{x_0} :]0 - \delta; 0 + \delta[\subset \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ h &\mapsto hf'(x_0), \end{aligned}$$

appelée *différentielle de f au point x_0* .

En générale on note $h = (x - x_0) = dx$ et on écrit

$$df(x_0) = f'(x_0) dx.$$

Par conséquent on a la définition/notation suivante :

3.7 Définition (Différentielle)

En tout point x où f est dérivable/différentiable, on définit la *différentielle de f* comme

$$df(x) = f'(x) dx.$$

Dans le cas des fonctions de deux variables et plus, l'équivalence disparaît entre l'existence des dérivées partielles, d'une part, et celle d'un plan tangent, d'autre part. Cela provient du fait que la dérivabilité repose seulement sur des limites le long de directions particulières. La dérivabilité apparaît donc comme un concept trop faible pour garantir l'existence d'un plan tangent et la notion de différentiabilité va combler ce déficit.

Pour les fonctions de deux variables, l'intuition géométrique peut encore servir de guide. Ainsi, si la fonction f est dérivable en (x_0, y_0) , on peut affirmer l'existence de deux droites tangentes, chacune par rapport à la trace verticale du graphe dans les plans d'équation $x = x_0$ et $y = y_0$. Dans le meilleur des cas, ces deux droites, nécessairement concourantes en $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, forment un plan qui est tangent au graphe. Toutefois, certaines irrégularités peuvent surgir (par exemple, la présence d'une discontinuité en (x_0, y_0)) qui excluent l'existence d'un plan tangent. Dans pareil cas, les deux droites existent et définissent un plan qui n'est pas un plan tangent, parce qu'un tel plan n'existe pas. Ces deux droites déterminent donc un «candidat plan tangent», dont l'existence doit encore être vérifiée.

Plus généralement, la différentiabilité d'une fonction de n variables, dérivable au point \mathbf{x}_0 , s'étudie en deux étapes. La première consiste à introduire la «candidate différentielle». La seconde teste si cette candidate constitue effectivement une approximation locale de l'accroissement de la fonction. Les définitions suivantes précisent ces notions.

3.8 Définition (Fonction différentiable)

Soit f une fonction à valeurs réelles définie sur \mathcal{D} une partie ouverte de \mathbb{R}^2 . On dit que f est *différentiable* en $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}$ s'il existe deux constantes réelles A et B et une fonction ε définie au voisinage de $(0, 0)$ telles que

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + A(x - x_0) + B(y - y_0) + \|(x - x_0, y - y_0)\|\varepsilon(x, y) \quad \text{avec} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \varepsilon(x, y) = 0$$

qu'on peut réécrire, en notant $(h, k) = (x - x_0, y - y_0)$, comme

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + hA + kB + \|(h, k)\|\varepsilon(h, k) \quad \text{avec} \quad \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \varepsilon(h, k) = 0$$

avec $\|\cdot\|$ une norme quelconque de \mathbb{R}^2 .

La différentiabilité est une notion plus forte que la continuité et que la dérivabilité :

3.9 Théorème

Soit f une fonction à valeurs réelles définie sur une partie ouverte \mathcal{D} de \mathbb{R}^2 . Si f est différentiable en $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}$, alors f est continue et dérivable en (x_0, y_0) et l'on a $A = \partial_x f(x_0, y_0)$ et $B = \partial_y f(x_0, y_0)$.

EXEMPLE

1. La fonction $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

n'est pas continue en $(0, 0)$ puisque $\lim_{y \rightarrow 0} f(y^2, y) = \frac{1}{2} \neq f(0, 0)$. Elle n'est donc pas différentiable en $(0, 0)$.

2. La fonction $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = |x| + |y|$ n'est pas dérivable en $(x, 0)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et n'est pas dérivable en $(0, y)$ pour tout $y \in \mathbb{R}$, donc n'est pas différentiable en tous ces points.

Si on choisit la norme euclidienne nous avons $\|(x - x_0, y - y_0)\| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ et donc

$$\varepsilon(x, y) = \frac{f(x, y) - f(x_0, y_0) - (x - x_0)\partial_x f(x_0, y_0) - (y - y_0)\partial_y f(x_0, y_0)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}}$$

ce qui équivaut, en notant $(h, k) = (x - x_0, y - y_0)$, à $\|(h, k)\| = \sqrt{h^2 + k^2}$ et donc

$$\varepsilon(h, k) = \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - h\partial_x f(x_0, y_0) - k\partial_y f(x_0, y_0)}{\sqrt{h^2 + k^2}}.$$

On peut alors énoncer le théorème suivant :

3.10 Théorème

Soit f une fonction à valeurs réelles définie sur \mathcal{D} une partie ouverte de \mathbb{R}^2 . Soit $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}$ un point en lequel f est continue et dérivable.

f est différentiable en (x_0, y_0) ssi

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{f(x, y) - f(x_0, y_0) - (x - x_0)\partial_x f(x_0, y_0) - (y - y_0)\partial_y f(x_0, y_0)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = 0$$

ce qui équivaut, en notant $(h, k) = (x - x_0, y - y_0)$, à

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - h\partial_x f(x_0, y_0) - k\partial_y f(x_0, y_0)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0.$$

3.11 Théorème

Soit f une fonction à valeurs réelles définie sur une partie ouverte \mathcal{D} de \mathbb{R}^2 . Soit $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}$. Si f est de classe \mathcal{C}^1 au voisinage de (x_0, y_0) , alors f est différentiable en (x_0, y_0) . La réciproque est fautive.

Notons que les fonctions élémentaires telles que les polynômes, les fonctions exponentielles, logarithmiques et trigonométriques sont automatiquement différentiables dans leur domaine respectif et que les propriétés de différentiabilité relatives aux sommes, produits, etc., existent.

Soit f une fonction à valeurs réelles définie sur une partie ouverte \mathcal{D} de \mathbb{R}^2 . Si f est différentiable en $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}$ on peut définir la fonction

$$\begin{aligned} df_{(x_0, y_0)}: \mathcal{B}((0, 0), \delta > 0) \subset \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x - x_0, y - y_0) &\mapsto (x - x_0)\partial_x f(x_0, y_0) + (y - y_0)\partial_y f(x_0, y_0), \end{aligned}$$

ce qui équivaut, en notant $(h, k) = (x - x_0, y - y_0)$, à

$$\begin{aligned} df_{(x_0, y_0)}: \mathcal{B}((0, 0), \delta > 0) \subset \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (h, k) &\mapsto h\partial_x f(x_0, y_0) + k\partial_y f(x_0, y_0), \end{aligned}$$

appelée *différentielle de f au point* (x_0, y_0) .

En générale on note $h = x - x_0 = dx$, $k = y - y_0 = dy$ et on écrit

$$df(x_0, y_0) = \partial_x f(x_0, y_0) dx + \partial_y f(x_0, y_0) dy.$$

Par conséquent on a la définition/notation suivante :

3.12  **Définition (Différentielle)**

En tout point (x, y) où f est différentiable, on définit la *différentielle de f* comme

$$df(x, y) = \partial_x f(x, y) dx + \partial_y f(x, y) dy.$$

 **EXEMPLE**

Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x, y) = 1 + x^2 - xy$. La différentielle de f au point (x_0, y_0) est la fonction

$$df_{(x_0, y_0)}: \mathcal{B}((x_0, y_0), \delta > 0) \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(h, k) \mapsto h(2x_0 - y_0) + k(-x_0).$$

Si on note $h = dx$ et $k = dy$, elle se réécrit

$$df_{(x_0, y_0)}: \mathcal{B}((x_0, y_0), \delta > 0) \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(dx, dy) \mapsto (2x_0 - y_0) dx - x_0 dy.$$

et on écrit

$$df(x, y) = (2x - y) dx - x dy.$$

 **EXEMPLE**

1. La fonction $f(x, y) = xy - 2x + 3y$ est différentiable en $(0, 0)$ car

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(h, k) - f(0,0) - h\partial_x f(0,0) - k\partial_y f(0,0)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{hk - 2h + 3k - h(-2) - k(3)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{hk}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0$$

puisque $\frac{hk}{\sqrt{h^2 + k^2}} = r \cos(\vartheta) \sin(\vartheta)$ et $|r \cos(\vartheta) \sin(\vartheta)| \leq r \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0$.

2. Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x, y) = x^2 + y^2$. Si f est différentiable, alors sa différentielle est la fonction

$$df_{(x_0, y_0)}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(h, k) \mapsto 2hx_0 + 2ky_0.$$

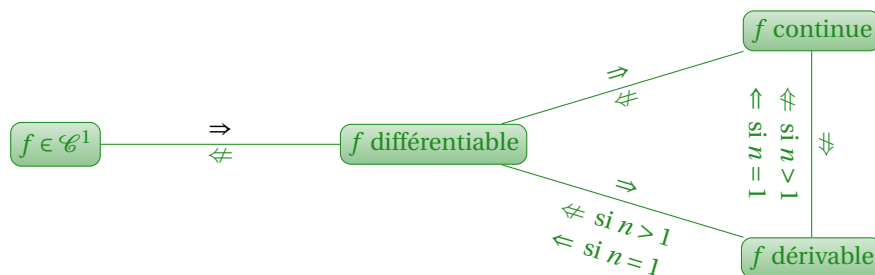
Afin de voir s'il s'agit effectivement d'une différentielle, on calcule

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{(x_0 + h)^2 + (y_0 + k)^2 - x_0^2 - y_0^2 - 2hx_0 - 2ky_0}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{h^2 + k^2}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \sqrt{h^2 + k^2} = 0.$$

Par conséquent, la fonction f est différentiable dans \mathbb{R}^2 et pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a $df = 2x dx + 2y dy$.

 **Astuce**

En résumé, pour répondre à la question “la fonction $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est-elle différentiable en $x_0 \in \mathbb{R}^n$?” il est utile de se rappeler le schéma suivant :



Contrexemples Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} g(x, y) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

▷ Si $g(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}$, f est de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$

PREUVE : il suffit de remarquer que

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases} & |f(r \cos(\vartheta), r \sin(\vartheta))| \leq r^2 \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0 \\ \partial_x f(x, y) &= \begin{cases} \frac{2xy^4}{(x^2 + y^2)^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases} & |\partial_x f(r \cos(\vartheta), r \sin(\vartheta))| \leq 2r \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0 \\ \partial_y f(x, y) &= \begin{cases} \frac{2x^4 y}{(x^2 + y^2)^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(0, k) - f(0, 0)}{k} = 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases} & |\partial_y f(r \cos(\vartheta), r \sin(\vartheta))| \leq 2r \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0 \end{aligned}$$

donc f , $\partial_x f$ et $\partial_y f$ sont continues sur \mathbb{R}^2 .

▷ Si $g(x, y) = (x^2 + y^2) \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)$ alors f n'est pas de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ mais elle est différentiable sur \mathbb{R}^2

PREUVE : on a

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases} & f(r \cos(\vartheta), r \sin(\vartheta)) = r^2 \sin\left(\frac{1}{r}\right) \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0 \\ \partial_x f(x, y) &= \begin{cases} 2x \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) - \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases} & \partial_x f(x, 0) = 2x \sin\left(\frac{1}{|x|}\right) - \frac{x}{|x|} \cos\left(\frac{1}{|x|}\right) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 \\ \partial_y f(x, y) &= \begin{cases} 2y \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) - \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(0, k) - f(0, 0)}{k} = 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases} & \partial_y f(0, y) = 2y \sin\left(\frac{1}{|y|}\right) - \frac{y}{|y|} \cos\left(\frac{1}{|y|}\right) \xrightarrow{y \rightarrow 0} 0 \end{aligned}$$

donc f est continue sur \mathbb{R}^2 , les dérivées partielles $\partial_x f$ et $\partial_y f$ existent sur \mathbb{R}^2 mais elles ne sont pas continues en $(0, 0)$. Bien que f ne soit pas de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$, elle est différentiable sur \mathbb{R}^2 car

$$\lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(h, k) - f(0, 0) - h \partial_x f(0, 0) - k \partial_y f(0, 0)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} \frac{(h^2 + k^2) \sin\left(\frac{1}{\sqrt{h^2 + k^2}}\right)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \lim_{r \rightarrow 0} r \sin\left(\frac{1}{r}\right) = 0.$$

▷ Si $g(x, y) = (xy)^{1/3}$, f n'est pas différentiable mais elle est continue et dérivable

PREUVE : f est clairement continue en $(0, 0)$. Elle admet des dérivées partielles en $(0, 0)$ car $\partial_x f(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = 0$ et $\partial_y f(0, 0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(0, k) - f(0, 0)}{k} = 0$. Cependant elle n'est pas différentiable en $(0, 0)$ car

$$\lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(h, k) - f(0, 0) - h \partial_x f(0, 0) - k \partial_y f(0, 0)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} \frac{(hk)^{1/3}}{\sqrt{h^2 + k^2}} \neq 0$$

puisque la restriction à la courbe continue d'équation $k = h$ qui passe par $(0, 0)$ donne $\frac{h^{-1/3}}{\sqrt{2}} \xrightarrow{h \rightarrow 0} +\infty$.

▷ Si $g(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$, f n'est pas continue mais elle est dérivable

PREUVE : f n'est pas continue en $(0, 0)$ car $f(x, x) = 1/2 \neq f(0, 0)$, cependant elle admet des dérivées partielles en $(0, 0)$ car $\partial_x f(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = 0$ et $\partial_y f(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} = 0$.

▷ Si $g(x, y) = |x| + |y|$, f n'est pas dérivable mais elle est continue

PREUVE : f est clairement continue en $(0, 0)$, cependant elle n'admet pas de dérivées partielles en $(0, 0)$ car les deux limites $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h}$ et $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h}$ n'existent pas.

▷ Si $g(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2}$, f n'est ni dérivable ni continue

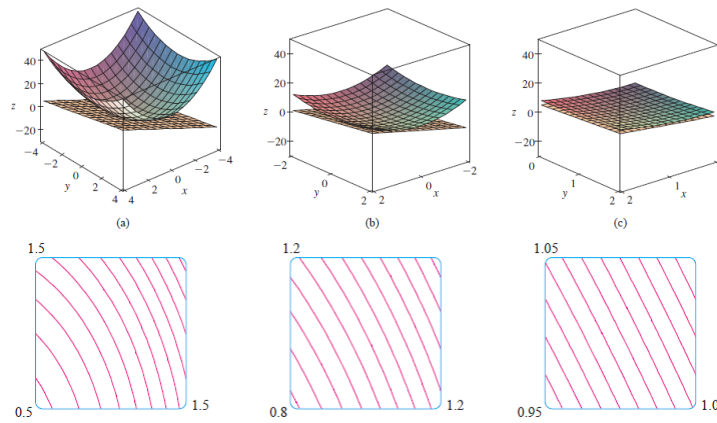


FIGURE 3.1. – La fonction $f(x, y) = 2x^2 + y^2$ semble coïncider avec son plan tangent au point $(1, 1, f(1, 1))$ lorsqu'on zoom vers ce point. Si on regarde les courbes de niveau, lorsque on zoom vers ce point les courbes tendent vers des droites parallèles toutes à la même distance les unes des autres.

PREUVE : f n'est pas continue en $(0, 0)$ car $f(y, y) = 1/y \xrightarrow{y \rightarrow 0} \infty$. Elle n'admet pas de dérivée partielle $\partial_y f(0, 0)$ car $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} = \frac{1}{h^2} \xrightarrow{y \rightarrow 0} \infty$.

3.2.1. Développement limité à l'ordre 1 et plan tangent

À l'approche analytique de la notion de différentiabilité correspond la vision géométrique d'un plan tangent. En effet, lorsque f est différentiable en (x_0, y_0) , on peut, dans un voisinage de (x_0, y_0) , approcher la différence $E(h, k) \equiv f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)$ par la différentielle $df_{(x_0, y_0)}(h, k)$, ce qui revient à approcher $f(x_0 + h, y_0 + k)$ par le plan d'équation $f(x_0, y_0) + df_{(x_0, y_0)}(h, k)$ (voir la figure 3.1).

3.13 Définition (Plan tangent et linéarisation)

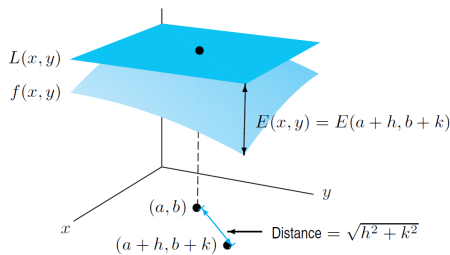
Soit \mathcal{D} une partie ouverte de \mathbb{R}^2 et soit $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable en (x_0, y_0) . L'équation du plan tangent au graphe de la fonction $f(x, y)$ en (x_0, y_0) est

$$L(x, y) = f(x_0, y_0) + (x - x_0)\partial_x f(x_0, y_0) + (y - y_0)\partial_y f(x_0, y_0)$$

ce qui équivaut, en notant $(h, k) = (x - x_0, y - y_0)$, à

$$L(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + h\partial_x f(x_0, y_0) + k\partial_y f(x_0, y_0).$$

Si on approche une fonction f au voisinage d'un point (x_0, y_0) au moyen d'une fonction affine, il est naturel de choisir une fonction dont le graphe est tangent au graphe de la fonction f en (x_0, y_0) . C'est ce qu'on appelle la linéarisation de f en (x_0, y_0) .



Graphe de la fonction $(x, y) \mapsto f(x, y)$ et sa linéarisation $(x, y) \mapsto L(x, y)$ au voisinage du point (a, b) . La fonction $(h, k) \mapsto E(h, k) \equiv f(a + h, b + k) - L(a + h, b + k)$ mesure l'erreur qu'on fait au point $(a + h, b + k)$ lorsqu'on approche la valeur de f par la valeur du plan tangent L . Si f est différentiable au point (a, b) alors

$$\lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} \frac{E(h, k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0.$$

Cette notion se généralise naturellement pour $n > 2$: il s'agit en fait d'un plan tangent pour $n = 2$ et d'un hyperplan tangent pour $n > 2$. Dans un espace de dimension n , un hyperplan est une variété linéaire de dimension $n - 1$.

EXEMPLE

On veut montrer que la fonction $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = xe^{xy}$ est différentiable en $(1, 0)$ et utiliser sa linéarisation

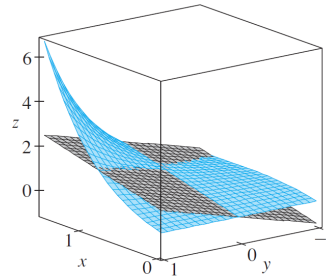
pour approcher $f(1.1, -0.1)$. On a

$$\begin{aligned} f(x, y) &= xe^{xy} & f(1, 0) &= 1 \\ \partial_x f(x, y) &= e^{xy} + xy e^{xy} & \partial_x f(1, 0) &= 1 \\ \partial_y f(x, y) &= x^2 e^{xy} & \partial_y f(1, 0) &= 1 \end{aligned}$$

Les trois fonctions f , $\partial_x f$ et $\partial_y f$ sont continues, donc f est différentiable. Sa linéarisation donne

$$f(x, y) \approx f(1, 0) + (x - 1)\partial_x f(1, 0) + (y - 0)\partial_y f(1, 0) = 1 + (x - 1) + y = x + y,$$

autrement dit $xe^{xy} \approx x + y$ lorsque $(x, y) \approx (1, 0)$, ainsi $f(1.1, -0.1) \approx 1.1 - 0.1 = 1$. En effet, $f(1.1, -0.1) = 1.1e^{-0.11} \approx 0.98542$



EXEMPLE

Considérons la fonction $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Elle n'est pas différentiable en $(0, 0)$ car elle n'est pas linéaire au voisinage de $(0, 0)$, autrement dit, faire un zoom vers $(0, 0)$ ne donne pas le graphe d'un plan. Pour prouver cela analytiquement, il suffit de montrer qu'il n'existe aucune approximation linéaire de f au voisinage de $(0, 0)$. Chaque plan qui passe par le point $(0, 0, f(0, 0))$ aura équation $L(x, y) = ax + by$ pour certaines constantes a et b .

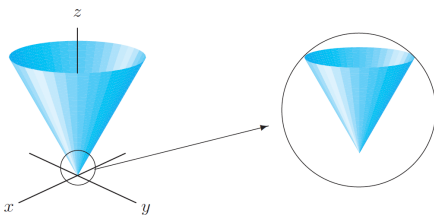
Si on pose $E(h, k) \equiv f(0 + h, 0 + k) - L(h, k)$, alors

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{E(h, k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{\sqrt{h^2 + k^2} - ah - bk}{\sqrt{h^2 + k^2}}.$$

Si on prend $k = 0$ on a $\lim_{h \rightarrow 0} 1 - a \frac{h}{|h|}$ qui ne vaut pas 0. En effet, $\partial_x f(0, 0)$ n'existe pas car

$$\partial_x f(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|}{h}$$

et cette limite n'existe pas.



3.2.2. Estimation d'erreurs

On rencontre couramment en physique le problème suivant : on a une quantité Q , fonction connue des quantités $\mathbf{x} \equiv (x_1, x_2, \dots)$. Ayant fait des mesures des quantités x_1, x_2, \dots avec une certaine incertitude, on se demande avec quelle incertitude est connue Q . Mathématiquement, on dispose des objets suivants :

- ▷ un rectangle $\mathcal{R} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid |x - x_i| < r_i, i = 1, \dots, n\}$, les nombres r_i représentent les erreurs maximales de mesure,
- ▷ une fonction $Q: \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}$,
- ▷ un point \mathbf{x}_M (c'est le point qu'on mesure),
- ▷ la valeur $Q(\mathbf{x}_M)$.

On ne connaît pas $Q(\mathbf{x})$ pour tout $\mathbf{x} \in \mathcal{R}$ mais on peut estimer sa valeur à partir de la différentielle de Q évaluée au point \mathbf{x}_M en appliquant le théorème suivant qui est une conséquence de la formule de TAYLOR à une variable appliquée à la fonction $g(z) = f(\mathbf{x}_M + z\overrightarrow{\mathbf{x}_M})$.

3.14 Proposition (Estimation d'erreurs)

Considérons n constantes positives r_i et \mathcal{R} un rectangle de \mathbb{R}^n centré en \mathbf{x}_M défini par

$$\mathcal{R} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid |x - x_i| < r_i, i = 1, \dots, n\}.$$

Soit $Q: \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1(\mathcal{R})$. Alors, pour tout $\mathbf{x} \in \mathcal{R}$, on a la majoration suivante :

$$|Q(\mathbf{x}) - Q(\mathbf{x}_M)| \leq \sup_{\mathbf{x} \in \mathcal{R}} \sum_{i=1}^n |(x_i - (x_M)_i) \partial_{x_i} Q(\mathbf{x})| \leq \sum_{i=1}^n C_i r_i$$

avec C_i un majorant de $|\partial_{x_i} Q(\mathbf{x})|$ sur \mathcal{R} .

 **Estimation d'erreurs dans \mathbb{R}^2** Soit r_1 et r_2 deux constantes positives et \mathcal{R} un rectangle de \mathbb{R}^2 centré en (x_0, y_0) défini par

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x - x_0| < r_1, |y - y_0| < r_2\}.$$

Soit $f: \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1(\mathcal{R})$. Alors, pour tout $(x_1, y_1) \in \mathcal{R}$, on a la majoration suivante :

$$|f(x_1, y_1) - f(x_0, y_0)| \leq \sup_{(x, y) \in \mathcal{R}} |(x_1 - x_0) \partial_x f(x, y) + (y_1 - y_0) \partial_y f(x, y)| \leq A r_1 + B r_2$$

avec A (resp. B) un majorant de $|\partial_x f(x, y)|$ (resp. $|\partial_y f(x, y)|$) sur \mathcal{R} .

3.2.3. Fonctions homogènes

3.15 Définition (Fonction homogène)

Soit la fonction $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Elle est dite homogène de degré k si

$$f(\lambda \mathbf{x}) = \lambda^k f(\mathbf{x}), \quad \forall (\mathbf{x}, \lambda) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^*.$$

Les fonctions homogènes bénéficient de la propriété suivante qui découle de la *chain rule*.

3.16 Théorème (d'EULER)

Si la fonction $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est homogène de degré k et différentiable dans \mathbb{R}^n , alors

$$\sum_{i=1}^n x_i \partial_{x_i} f(\mathbf{x}) = k f(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

EXEMPLE

La fonction de production de COBB-DOUGLAS à rendements constants s'écrit $f(x, y) = x^\alpha y^{1-\alpha}$, où $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Elle est homogène de degré 1 puisque $f(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x)^\alpha (\lambda y)^{1-\alpha} = \lambda (x^\alpha y^{1-\alpha}) = \lambda f(x, y)$. Dans ce cas, la formule d'EULER s'écrit

$$x \partial_x f(x, y) + y \partial_y f(x, y) = f(x, y).$$

Le résultat $f(x, y)$ de la production obtenue avec les quantités respectives x et y de facteurs permet donc de rémunérer ces facteurs au niveau de leur productivité marginale.

3.3. Dérivées partielles de deuxième ordre et matrice hessienne

Si les fonctions dérivées partielles admettent elles-mêmes des dérivées partielles en (x_0, y_0) , ces dérivées sont appelées dérivées partielles secondes, ou dérivées partielles d'ordre 2, de f en (x_0, y_0) . On peut, de la même façon, introduire les dérivées partielles d'ordres supérieurs. Les définitions suivantes s'énoncent dans des ensembles ouverts pour éviter les problèmes liés au calcul de limites au bord du domaine.

3.17 Définition (Dérivées partielles d'ordre 2 pour une fonction de deux variables)

Soit la fonction $f: \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ où \mathcal{D} est un ouvert de \mathbb{R}^2 . On a 2 dérivées partielles d'ordre 1 et donc 4 dérivées partielles d'ordre 2 ainsi notées :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) (x_0, y_0) && \text{(notée aussi } \partial_{xx} f(x_0, y_0)), \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) (x_0, y_0) && \text{(notée aussi } \partial_{xy} f(x_0, y_0)), \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)(x_0, y_0) \quad (\text{notée aussi } \partial_{yx}f(x_0, y_0)),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)(x_0, y_0) \quad (\text{notée aussi } \partial_{yy}f(x_0, y_0)).$$

Les dérivées partielles d'ordre supérieur à 2 se définissent par récurrence de façon analogue. Soit la fonction $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$; on aura n dérivées partielles d'ordre 1, n^2 dérivées partielles d'ordre 2, etc. donc n^k dérivées partielles d'ordre k .

3.18 📖 **Théorème (Théorème de SCHWARZ (ou de CLAIRAUT))**

Si les dérivées partielles mixtes $\partial_{xy}f$ et $\partial_{yx}f$ sont continues en (x_0, y_0) alors $\partial_{xy}f(x_0, y_0) = \partial_{yx}f(x_0, y_0)$.

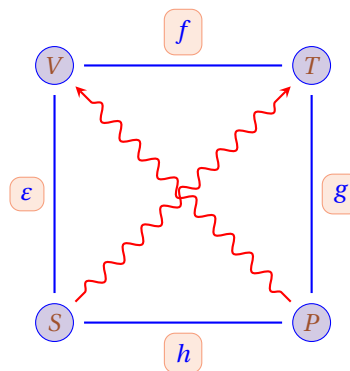
📖 **Relations de MAXWELL et Carré thermodynamique** En thermodynamique, on appelle *relations de MAXWELL* des équations obtenues grâce aux définitions des potentiels thermodynamiques et à l'égalité de SCHWARZ. Pour un système entièrement décrit par les variables pression P , température T , entropie S et volume V , on retient généralement un ensemble de quatre relations relatives aux quatre potentiels thermodynamiques énergie interne U , enthalpie H , énergie libre F et enthalpie libre (ou potentiel de GIBBS) G :

$$\begin{aligned} dF(V, T) &= -P(V, T)dV - S(V, T)dT, & \implies & P(V, T) = - \left. \frac{\partial F}{\partial V} \right|_T, & S(V, T) &= - \left. \frac{\partial F}{\partial T} \right|_V; \\ dG(P, T) &= V(P, T)dP - S(P, T)dT, & \implies & V(P, T) = \left. \frac{\partial G}{\partial P} \right|_T, & S(P, T) &= - \left. \frac{\partial G}{\partial T} \right|_P; \\ dU(S, V) &= T(S, V)dS - P(S, V)dV, & \implies & T(S, V) = \left. \frac{\partial U}{\partial S} \right|_V, & P(S, V) &= - \left. \frac{\partial U}{\partial V} \right|_S; \\ dH(P, S) &= V(P, S)dP + T(P, S)dS, & \implies & V(P, S) = \left. \frac{\partial H}{\partial P} \right|_S, & T(P, S) &= \left. \frac{\partial H}{\partial S} \right|_P; \end{aligned}$$

si bien qu'en utilisant l'égalité de SCHWARZ l'on a les relations de MAXWELL

$$\left. \frac{\partial P}{\partial T} \right|_V = \left. \frac{\partial S}{\partial V} \right|_T, \quad \left. \frac{\partial V}{\partial T} \right|_P = - \left. \frac{\partial S}{\partial P} \right|_T, \quad \left. \frac{\partial T}{\partial V} \right|_S = - \left. \frac{\partial P}{\partial S} \right|_V, \quad \left. \frac{\partial T}{\partial P} \right|_S = \left. \frac{\partial V}{\partial S} \right|_P.$$

Le «carré thermodynamique» ci-dessous a été conçu pour mémoriser simplement l'ensemble de ces relations (différentielles des potentiels thermodynamiques et relations de MAXWELL).



Le long des quatre cotés on écrit les quatre potentiels thermodynamiques f, g, h et ϵ , disposés en ordre alphabétique et en sens horaire, à partir de f sur le coté haut. Aux deux coins de gauche on pose les variables extensives V et S tandis qu'aux coins de droite on pose les variables intensives P et T .

Chacun des quatre potentiels thermodynamiques se trouve entre les variables indépendantes des quelles il est fonction naturelle. On a donc ϵ est fonction naturelle de V et S ; f de V et T etc.

Ce carré permet de lire facilement les dérivées partielles qui lient les potentiels aux variables naturelles respectives : plus précisément, la dérivée partielle d'un potentiel par rapport à une variable (coin) est donnée simplement par la variable qui se trouve au coin opposé et les flèches diagonales en déterminent le signe (positif dans la direction de la flèche, négatif sinon). Par exemple, on a $(V, T) \mapsto f$ et $\left. \frac{\partial f}{\partial V} \right|_T = -P$ mais $(P, T) \mapsto g$ et $\left. \frac{\partial g}{\partial P} \right|_T = V$.

Même les relations de MAXWELL peuvent se lire sur le schéma : la dérivée de la variable (coin) par rapport à la variable sur la même arête (en considérant constante la variable dans la diagonale opposée) est égale à la dérivée le long de l'autre diagonale. De nouveau, les signes doivent être choisis selon la direction des diagonales. Par exemple $\left. \frac{\partial V}{\partial S} \right|_P = \left. \frac{\partial T}{\partial P} \right|_S$ mais

$$\left. \frac{\partial T}{\partial V} \right|_S = - \left. \frac{\partial P}{\partial S} \right|_V.$$

3.3.1. Développements limités à l'ordre 2

La linéarisation d'une fonction f en un point (x_0, y_0) est un polynôme de degré inférieur ou égal à 1 tel que

$$\begin{cases} L(x_0, y_0) = f(x_0, y_0), \\ \partial_x L(x_0, y_0) = \partial_x f(x_0, y_0), \\ \partial_y L(x_0, y_0) = \partial_y f(x_0, y_0). \end{cases}$$

Les polynômes de TAYLOR généralisent cette construction pour des polynômes de degrés quelconques. Ici on va se limiter aux polynômes de degré au plus 2.

3.19 Définition (Développement limité à l'ordre 2 dans \mathbb{R}^2)

Soit $f: \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2(\mathcal{D})$. Alors au voisinage de $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}$ on a

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(x_0, y_0) \\ &+ (x - x_0)\partial_x f(x_0, y_0) + (y - y_0)\partial_y f(x_0, y_0) \\ &+ \frac{1}{2} [(x - x_0)^2 \partial_{xx} f(x_0, y_0) + 2(x - x_0)(y - y_0)\partial_{xy} f(x_0, y_0) + (y - y_0)^2 \partial_{yy} f(x_0, y_0)] \\ &+ o((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2). \end{aligned}$$

3.20 Définition (Matrice hessienne)

Soit la fonction $f: \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ où \mathcal{D} est un ouvert de \mathbb{R}^2 . La matrice hessienne de f en (x_0, y_0) est la matrice de taille 2×2 dont les entrées sont les dérivées partielles secondes :

$$H_f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \partial_{xx} f(x_0, y_0) & \partial_{xy} f(x_0, y_0) \\ \partial_{yx} f(x_0, y_0) & \partial_{yy} f(x_0, y_0) \end{pmatrix}.$$

Son déterminant est le réel $\det(H_f(x_0, y_0)) \equiv \partial_{xx} f(x_0, y_0)\partial_{yy} f(x_0, y_0) - \partial_{xy} f(x_0, y_0)\partial_{yx} f(x_0, y_0)$.

Cette notion se généralise naturellement pour $n > 2$.

EXEMPLE

Les dérivées premières et secondes de la fonction $f(x, y) = -2x^2 + 3xy^2 - y^3$ sont

$$\begin{aligned} \partial_x f(x, y) &= -4x + 3y^2, & \partial_y f(x, y) &= 6xy - 3y^2, \\ \partial_{xx} f(x, y) &= -4, & \partial_{xy} f(x, y) &= 6y, & \partial_{yx} f(x, y) &= 6y, & \partial_{yy} f(x, y) &= 6x - 6y. \end{aligned}$$

La matrice hessienne est

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} -4 & 6y \\ 6y & 6x - 6y \end{pmatrix}.$$

Dans cet exemple, on remarque que la matrice hessienne de f est symétrique du fait que les dérivées secondes mixtes, $\partial_{xy} f$ et $\partial_{yx} f$, sont égales.

Remarque (Développement limité à l'ordre 2 dans \mathbb{R}^n)

La notation matricielle permet d'écrire le développement limité à l'ordre 2 d'une manière plus compacte et généralisable à un nombre quelconque de variables : soit $f: \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2(\mathcal{D})$. Alors pour tout $\mathbf{x} \in \mathcal{B}(\mathbf{x}_0, \delta) \cap \mathcal{D}$ on a

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^T \cdot \nabla f(\mathbf{x}_0) + \frac{1}{2} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^T \cdot H_f(\mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^2 \varepsilon(\mathbf{x})$$

avec $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \varepsilon(\mathbf{x}) = 0$.

3.21 Définition (Fonction de classe \mathcal{C}^k)

Si f et les fonctions dérivées partielles d'ordre $1, 2, \dots, k$ sont continues sur \mathcal{D} , on dit que f est de classe \mathcal{C}^k sur \mathcal{D} . Si les dérivées partielles de tout ordre existent et sont continues, f est dite de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathcal{D} .

Comme la dérivée seconde pour les fonctions d'une seule variable, la matrice hessienne permet d'étudier la convexité des fonctions de plusieurs variables et joue, dès lors, un rôle important dans leur optimisation.

3.22  **Définition (Convexité dans \mathbb{R}^2)**

Soit \mathcal{D} un sous-ensemble convexe de \mathbb{R}^2 et $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

▷ f est concave dans \mathcal{D} si

$$f((1-t)(x_0, y_0) + t(x_1, y_1)) \geq (1-t)f(x_0, y_0) + tf(x_1, y_1) \quad \forall (x_0, y_0), (x_1, y_1) \in \mathcal{D} \text{ et } \forall t \in [0; 1];$$

▷ f est strictement concave dans \mathcal{D} si

$$f((1-t)(x_0, y_0) + t(x_1, y_1)) > (1-t)f(x_0, y_0) + tf(x_1, y_1) \quad \forall (x_0, y_0), (x_1, y_1) \in \mathcal{D} \text{ et } \forall t \in]0; 1[;$$

▷ f est convexe dans \mathcal{D} si

$$f((1-t)(x_0, y_0) + t(x_1, y_1)) \leq (1-t)f(x_0, y_0) + tf(x_1, y_1) \quad \forall (x_0, y_0), (x_1, y_1) \in \mathcal{D} \text{ et } \forall t \in [0; 1];$$

▷ f est strictement convexe dans \mathcal{D} si

$$f((1-t)(x_0, y_0) + t(x_1, y_1)) < (1-t)f(x_0, y_0) + tf(x_1, y_1) \quad \forall (x_0, y_0), (x_1, y_1) \in \mathcal{D} \text{ et } \forall t \in]0; 1[;$$

Comme pour les fonctions d'une variable, la concavité et la convexité des fonctions de n variables suffisamment régulières peuvent être caractérisées à l'aide des dérivées d'ordres 1 ou 2.

3.23  **Propriété**

Soit \mathcal{D} un sous-ensemble convexe de \mathbb{R}^2 et $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable dans \mathcal{D} . Alors

1. f est concave dans $\mathcal{D} \iff \forall (x_0, y_0), (x_1, y_1) \in \mathcal{D}, f(x_1, y_1) \leq f(x_0, y_0) + (x_1 - x_0)\partial_x f(x_0, y_0) + (y_1 - y_0)\partial_y f(x_0, y_0)$;
2. f est convexe dans $\mathcal{D} \iff \forall (x_0, y_0), (x_1, y_1) \in \mathcal{D}, f(x_1, y_1) \geq f(x_0, y_0) + (x_1 - x_0)\partial_x f(x_0, y_0) + (y_1 - y_0)\partial_y f(x_0, y_0)$.

Si, de plus, $f \in \mathcal{C}^2(\mathcal{D})$, alors

1. f est concave dans $\mathcal{D} \iff \forall (x, y) \in \mathcal{D}, H_f(x, y)$ est semi-définie négative (i.e. $\det(H_f(x, y)) \geq 0$ et $\partial_{xx}f(x, y) \leq 0$);
2. f est convexe dans $\mathcal{D} \iff \forall (x, y) \in \mathcal{D}, H_f(x, y)$ est semi-définie positive (i.e. $\det(H_f(x, y)) \geq 0$ et $\partial_{xx}f(x, y) \geq 0$);
3. $\forall (x, y) \in \mathcal{D}, H_f(x, y)$ est définie négative (i.e. $\det(H_f(x, y)) > 0$ et $\partial_{xx}f(x, y) < 0$) $\implies f$ est strictement concave dans \mathcal{D} ;
4. $\forall (x, y) \in \mathcal{D}, H_f(x, y)$ est définie positive (i.e. $\det(H_f(x, y)) > 0$ et $\partial_{xx}f(x, y) < 0$) $\implies f$ est strictement convexe dans \mathcal{D} .

Les deux premiers énoncés expriment que tout plan tangent au graphe d'une fonction concave (resp. convexe) se trouve au-dessus (resp. au-dessous) de ce graphe. Les deux derniers, relatifs à la matrice hessienne, rappellent celui qui fait référence au signe de la dérivée seconde d'une fonction d'une seule variable. De la même manière, la condition stricte ne s'applique que dans un seul sens. Dès lors, une fonction peut être strictement convexe sans que sa matrice hessienne soit définie positive en tout point.

 **EXEMPLE**

1. Soit $f(x, y) = x^2 + y^2$. On a

▷ $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$,

▷ $H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

▷ $\det(H_f(x, y)) = 4 > 0$ et $\partial_{xx}f(x, y) = 2 > 0$ donc $H_f(x, y)$ est définie positive pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Il s'en suit que f est strictement convexe dans \mathbb{R}^2 . En effet, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$,

$$f(x, y) = x^2 + y^2 > f(0, 0) + x\partial_x f(0, 0) + y\partial_y f(0, 0).$$

2. Soit $f(x, y) = x^4 + y^4$. On a

▷ $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$,

▷ $H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 12x^2 & 0 \\ 0 & 12y^2 \end{pmatrix}$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

▷ $\det(H_f(x, y)) = 144x^2y^2 \geq 0$ et $\partial_{xx}f(x, y) = 12x^2 \geq 0$ donc $H_f(x, y)$ est définie positive pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}^*)^2$ et semi-définie positive en $(0, 0)$.

On peut cependant montrer à l'aide de la définition que la fonction est strictement convexe dans \mathbb{R}^2 car

$$f(x, y) = x^4 + y^4 > f(0, 0) + x\partial_x f(0, 0) + y\partial_y f(0, 0) = 0 \quad \forall (x, y) \neq (0, 0).$$

 EXEMPLE (GAZ PARFAITS)

Considérons l'entropie d'un gaz parfait en fonction de l'énergie interne spécifique ε et du volume spécifique τ :

$$s: (\mathbb{R}_+^*)^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(\tau, \varepsilon) \mapsto c_v \ln(\varepsilon \tau^{\gamma-1}) = c_v \ln(\varepsilon) + c_v(\gamma-1) \ln(\tau)$$

avec c_v et $\gamma > 1$ deux constantes. L'entropie s est de classe $\in \mathcal{C}^\infty((\mathbb{R}_+^*)^2)$ et l'on a

$$\partial_\tau s = \frac{c_v(\gamma-1)}{\tau} > 0 \qquad \partial_\varepsilon s = \frac{c_v}{\varepsilon} > 0$$

donc l'entropie est strictement croissante en τ et en ε et

$$\partial_{\tau\tau} s = -\frac{c_v(\gamma-1)}{\tau^2} < 0 \qquad \partial_{\tau\varepsilon} s = \partial_{\varepsilon\tau} s = 0 \qquad \partial_{\varepsilon\varepsilon} s = -\frac{c_v}{\varepsilon^2}$$

donc $\det(H_s(\tau, \varepsilon)) = \frac{c_v^2(\gamma-1)}{\tau^2\varepsilon^2} > 0$: l'entropie est strictement concave.

3.4. Fonctions implicites

Si $b \neq 0$, l'équation $ax + by + c = 0$ définit une fonction $y = -(ax + c)/b$. Nous allons généraliser ce fait aux équations du type $f(x, y) = 0$ où f est une fonction différentiable : une fonction $\varphi(x)$ est définie implicitement près de $x = x_0$ par l'équation $f(x, y) = 0$ si toutes les solutions de cette équation dans un voisinage de $(x_0, \varphi(x_0))$ sont sur le graphe $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \varphi(x)\}$ de φ .

 EXEMPLE

Si $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$, l'équation $f(x, y) = 0$ est celle d'un cercle de rayon 1 centré en $(0, 0)$. Ce cercle n'est pas globalement le graphe d'une fonction, cependant l'équation $f(x, y) = 0$ peut être résolue explicitement pour y . On trouve les deux solutions $y = \pm\sqrt{1-x^2}$. Les fonctions $\varphi_1(x) = \sqrt{1-x^2}$ et $\varphi_2(x) = -\sqrt{1-x^2}$ sont définies implicitement par l'équation $f(x, y) = 0$ près de $x = 1$.

3.24 Théorème (de la fonction implicite (cas d'une fonction à deux variables))

Soit $f: \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 au voisinage de $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}$. Si $f(x_0, y_0) = k$ (k constante réelle) et $\partial_y f(x_0, y_0) \neq 0$, alors il existe un intervalle ouvert I contenant x_0 et une unique fonction φ de I dans \mathbb{R} de classe \mathcal{C}^1 sur I telle que

1. $\varphi(x_0) = y_0$
2. $f(x, \varphi(x)) = k$ pour tout $x \in I$
3. $\varphi'(x) = -\frac{\partial_x f(x, \varphi(x))}{\partial_y f(x, \varphi(x))}$ pour tout $x \in I$
4. la droite tangente à $y = \varphi(x)$ en $x = x_0$ a pour équation $y = \varphi'(x_0)(x - x_0) + y_0$.

Notons que les points 1 et 3 constituent un problème de CAUCHY dont la solution est bien la fonction cherchée $y = \varphi(x)$ pour tout $x \in I$.

 EXEMPLE

Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x, y) = y^2 - y - 3x$ et considérons le point $(x_0, y_0) = (2, -2)$. On a $f(2, -2) = 0$. Considérons alors la courbe de niveau 0 : le théorème de la fonction implicite permet d'affirmer qu'au voisinage de $x = 2$ il existe un intervalle I et une seule fonction $y = \varphi(x)$ définie implicitement par $f(x, y) = 0$ telle que

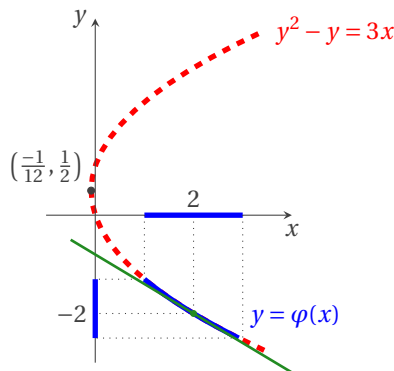
- ▷ $f(x, \varphi(x)) = 0$ pour tout $x \in I$
- ▷ $\varphi(2) = -2$
- ▷ $\varphi'(x) = \frac{3}{2\varphi(x)-1}$ pour tout $x \in I$
- ▷ la droite tangente au graphe de la courbe d'équation $y = \varphi(x)$ a équation

$$y = (x-2) \frac{-\partial_x f(2, \varphi(2))}{\partial_y f(2, \varphi(2))} + (-2) = (x-2) \frac{3}{2\varphi(2)-1} - 2 = -\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}$$

En résolvant le problème de CAUCHY

$$\begin{cases} \varphi'(x) = \frac{3}{2\varphi(x)-1} \\ \varphi(2) = -2 \end{cases}$$

on obtient $\varphi(x) = \frac{1-\sqrt{12x+1}}{2}$.



On aurait pu trouver l'expression analytique de φ en notant que

$$y^2 - y - 3x = 0 \iff y = \frac{1 \pm \sqrt{1+12x}}{2}$$

et que le point $(-2, 2)$ appartient à la branche d'équation $y = \frac{1-\sqrt{1+12x}}{2}$.

Formules de dérivation implicite et chain rule

▷ On calcule $\frac{d}{dx}$ de $f(x, \varphi(x)) = k$. On obtient

$$\partial_x f(x, \varphi(x)) + \partial_y f(x, \varphi(x)) \times \varphi'(x) = 0$$

d'où

$$\varphi'(x) = -\frac{\partial_x f(x, \varphi(x))}{\partial_y f(x, \varphi(x))}$$

▷ On calcule $\frac{d}{dx}$ de $\partial_x f(x, \varphi(x)) + \partial_y f(x, \varphi(x)) \times \varphi'(x) = 0$. On obtient

$$\partial_{xx} f(x, \varphi(x)) + (\partial_{xy} f(x, \varphi(x)) + \partial_{yy} f(x, \varphi(x)) \times \varphi'(x)) \times \varphi'(x) + \partial_y f(x, \varphi(x)) \times \varphi''(x) = 0$$

d'où

$$\begin{aligned} \varphi''(x) &= -\frac{\partial_{xx} f(x, \varphi(x)) + (\partial_{xy} f(x, \varphi(x)) + \partial_{yy} f(x, \varphi(x)) \times \varphi'(x)) \times \varphi'(x)}{\partial_y f(x, \varphi(x))} \\ &= -\frac{\partial_{xx} f(x, \varphi(x)) - (\partial_{xy} f(x, \varphi(x)) - \partial_{yy} f(x, \varphi(x)) \frac{\partial_x f(x, \varphi(x))}{\partial_y f(x, \varphi(x))}) \frac{\partial_x f(x, \varphi(x))}{\partial_y f(x, \varphi(x))}}{\partial_y f(x, \varphi(x))} \\ &= -\frac{\partial_{xx} f(x, \varphi(x)) - \partial_{xy} f(x, \varphi(x)) \frac{\partial_x f(x, \varphi(x))}{\partial_y f(x, \varphi(x))} + \partial_{yy} f(x, \varphi(x)) \frac{(\partial_x f(x, \varphi(x)))^2}{(\partial_y f(x, \varphi(x)))^2}}{\partial_y f(x, \varphi(x))} \end{aligned}$$

3.25 Théorème (de la fonction implicite (cas d'une fonction à trois variables))

Soit $f: \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 au voisinage de $(x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{D}$. Si $f(x_0, y_0, z_0) = k$ et $\partial_z f(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, alors il existe un ouvert $I \subset \mathbb{R}^2$ contenant (x_0, y_0) et une fonction φ de I dans \mathbb{R} de classe \mathcal{C}^1 sur I telle que $\varphi(x_0, y_0) = z_0$ et pour tout $(x, y) \in I$

$$f(x, y, \varphi(x, y)) = k, \quad \partial_x \varphi(x, y) = -\frac{\partial_x f(x, y, \varphi(x, y))}{\partial_z f(x, y, \varphi(x, y))}, \quad \partial_y \varphi(x, y) = -\frac{\partial_y f(x, y, \varphi(x, y))}{\partial_z f(x, y, \varphi(x, y))}$$



Exercices



Calcul de dérivées partielles

Exercice 3.1

Calculer toutes les dérivées partielles d'ordre 1 des fonctions données :

1. $f(x, y) = y^5 - 3xy$
2. $f(x, y) = x^2 + 3xy^2 - 6y^5$
3. $f(x, y) = x \cos(e^{xy})$
4. $f(x, y) = x/y$
5. $f(x, y) = x^y$
6. $f(x, y, z) = x \cos(xz) + \ln(2 - \sin^2(y + z))$
7. $f(x, t) = e^{-t} \cos(\pi x)$
8. $z = (2x + 3y)^{10}$
9. $f(x, y) = \frac{ax+by}{cx+dy}$
10. $F(x, y) = \int_y^x \cos(e^t) dt$

Correction

1. $\partial_x f(x, y) = -3y$ et $\partial_y f(x, y) = 5y^4 - 3x$
2. $\partial_x f(x, y) = 2x + 3y^2$ et $\partial_y f(x, y) = 6xy - 30y^4$
3. $\partial_x f(x, y) = \cos(e^{xy}) - xy e^{xy} \sin(e^{xy})$ et $\partial_y f(x, y) = -x^2 e^{xy} \sin(e^{xy})$
4. $\partial_x f(x, y) = 1/y$ et $\partial_y f(x, y) = -x/y^2$
5. $\partial_x f(x, y) = yx^y/x$ et $\partial_y f(x, y) = \ln(x)x^y$ $\triangle x^y = e^{y \ln(x)}$ donc $x > 0$
6. $\partial_x f(x, y, z) = \cos(xz) - xz \sin(xz)$, $\partial_y f(x, y, z) = \frac{-2 \sin(y+z) \cos(y+z)}{2 - \sin^2(y+z)}$ et $\partial_z f(x, y, z) = -x^2 \sin(xz) + \frac{-2 \sin(y+z) \cos(y+z)}{2 - \sin^2(y+z)}$
7. $\partial_x f(x, t) = -\pi e^{-t} \sin(\pi x)$ et $\partial_t f(x, t) = -e^{-t} \cos(\pi x)$
8. $\partial_x z(x, y) = 20(2x + 3y)^9$ et $\partial_y z(x, y) = 30(2x + 3y)^9$
9. $\partial_x f(x, y) = \frac{(ad-bc)y}{(cx+dy)^2}$ et $\partial_y f(x, y) = \frac{(bc-ad)x}{(cx+dy)^2}$
10. $\partial_x F(x, y) = \cos(e^x)$ et $\partial_y F(x, y) = -\cos(e^y)$

Exercice 3.2

1 mole de gaz parfait qui occupe le volume V à la température T et à la pression P vérifie la relation $PV = RT$ où R est une constante. Montrer que

$$\frac{\partial P}{\partial V} \frac{\partial V}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial P} = -1, \quad T \frac{\partial P}{\partial T} \frac{\partial V}{\partial T} = R.$$

Correction

On a

$$\frac{\partial P}{\partial V} = -R \frac{T}{V^2} \qquad \frac{\partial V}{\partial T} = \frac{R}{P} \qquad \frac{\partial T}{\partial P} = \frac{V}{R} \qquad \frac{\partial P}{\partial T} = \frac{R}{V}$$

donc

$$\frac{\partial P}{\partial V} \frac{\partial V}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial P} = -R \frac{T}{V^2} \frac{R}{P} \frac{V}{R} = -1, \qquad T \frac{\partial P}{\partial T} \frac{\partial V}{\partial T} = T \frac{R}{V} \frac{R}{P} = R.$$

Exercice 3.3

Une étude des glaciers a montré que la température T à l'instant t (mesuré en jours) à la profondeur x (mesurée en pied) peut être modélisée par la fonction

$$T(x, t) = T_0 + T_1 e^{-\lambda x} \sin(\omega t - \lambda x)$$

où $\omega = 2\pi/365$ et λ sont deux constantes positives.

1. Calculer $\partial_x T$ et $\partial_t T$.
2. Montrer que T satisfait l'équation de la chaleur $\partial_t T = k \partial_{xx} T$ pour une certaine constante k .

Correction

1. $\partial_x T = -\lambda T_1 e^{-\lambda x} (\sin(\omega t - \lambda x) + \cos(\omega t - \lambda x))$ et $\partial_t T = \omega T_1 e^{-\lambda x} \cos(\omega t - \lambda x)$.

1. $z(t) = f(x(t), y(t)), \quad f(x, y) = x^2 + y^2 + xy, \quad x(t) = \sin(t), \quad y(t) = e^t;$
2. $z(t) = f(x(t), y(t)), \quad f(x, y) = \cos(x + 4y), \quad x(t) = 5t^4, \quad y(t) = 1/t;$
3. $w(t) = f(x(t), y(t), z(t)), \quad f(x, y, z) = xe^{y/z}, \quad x(t) = t^2, \quad y(t) = 1 - t, \quad z(t) = 1 + 2t;$
4. $w(t) = f(x(t), y(t), z(t)), \quad f(x, y, z) = \ln(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}), \quad x(t) = \sin(t), \quad y(t) = \cos(t), \quad z(t) = \tan(t).$

Correction

1. $z'(t) = (2x(t) + y(t))x'(t) + (2y(t) + x(t))y'(t) = (2\sin(t) + e^t)\cos(t) + (2e^t + \sin(t))e^t;$
2. $z'(t) = -\sin(x(t) + 4y(t))x'(t) - 4\sin(x(t) + 4y(t))y'(t) = \left(\frac{4}{t^2} - 20t^3\right)\sin\left(5t^4 + \frac{4}{t}\right);$
3. $w'(t) = e^{y(t)/z(t)}x'(t) + \frac{x(t)}{z(t)}e^{y(t)/z(t)}y'(t) - \frac{x(t)y(t)}{z^2(t)}e^{y(t)/z(t)}z'(t) = \left(2t - \frac{t^2}{1+2t} - 2\frac{t^2(1-t)}{(1+2t)^2}\right)e^{(1-t)/(1+2t)} = \frac{8t^2+5t+2}{(1+2t)^2}te^{(1-t)/(1+2t)};$
4. $w'(t) = \frac{2x(t)}{\sqrt{x^2(t)+y^2(t)+z^2(t)}}x'(t) + \frac{2y(t)}{\sqrt{x^2(t)+y^2(t)+z^2(t)}}y'(t) + \frac{2z(t)}{\sqrt{x^2(t)+y^2(t)+z^2(t)}}z'(t) = -\frac{2\sin(t)\cos(t)}{\sqrt{\sin^2(t)+\cos^2(t)+\tan^2(t)}} + \frac{2\cos(t)\sin(t)}{\sqrt{x^2(t)+y^2(t)+\tan^2(t)}} + \frac{2\tan(t)}{\sqrt{\sin^2(t)+\cos^2(t)+\tan^2(t)}}\frac{1}{\cos^2(t)} = \frac{2\sin(t)}{\cos(t)}.$

Exercice 3.7

Soient les fonctions $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $z: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Calculer $\partial_x z$ et $\partial_y z$:

1. $z = f(x) + g(y)$
2. $z = f(x)g(y)$
3. $z = f(x)/g(y)$
4. $z = f(x + 2y)$
5. $z = f(xy)$
6. $z = f(x/y)$

Correction

1. $\partial_x z(x, y) = f'(x)$ et $\partial_y z(x, y) = g'(y)$
2. $\partial_x z(x, y) = g(y)f'(x)$ et $\partial_y z(x, y) = f(x)g'(y)$
3. $\partial_x z(x, y) = \frac{f'(x)}{g(y)}$ et $\partial_y z(x, y) = -\frac{f(x)g'(y)}{g^2(y)}$
4. Soit $w(x, y) = x + 2y$, alors $z = f(w(x, y))$ donc $\partial_x z(x, y) = f'(w(x, y))\partial_x w(x, y) = f'(x + 2y)$ et $\partial_y z(x, y) = f'(w(x, y))\partial_y w(x, y) = 2f'(x + 2y)$
5. Soit $w(x, y) = xy$, alors $z = f(w(x, y))$ donc $\partial_x z(x, y) = f'(w(x, y))\partial_x w(x, y) = yf'(xy)$ et $\partial_y z(x, y) = f'(w(x, y))\partial_y w(x, y) = xf'(xy)$
6. Soit $w(x, y) = x/y$, alors $z = f(w(x, y))$ donc $\partial_x z(x, y) = f'(w(x, y))\partial_x w(x, y) = \frac{f'(x/y)}{y}$ et $\partial_y z(x, y) = f'(w(x, y))\partial_y w(x, y) = -\frac{f'(x/y)}{y^2}$

Exercice 3.8

La production annuelle de blé B dépend de la température moyenne T et des précipitations R . Les scientifiques estiment que la température moyenne est en train de croître de $0.15^\circ\text{C} \cdot \text{an}^{-1}$ et que les précipitations diminuent à raison de $0.1 \text{ cm} \cdot \text{an}^{-1}$. Ils pensent aussi qu'aux niveaux de production actuels $\partial_T B = -2$ et $\partial_R B = 8$. Que signifient les signes de ces dérivées partielles? Estimez le taux actuel de variation de la production de blé dB/dt .

Correction

Comme $\partial_T B$ est négative, une augmentation de la température moyenne (tout en gardant les précipitations annuelles constant) entraîne une diminution de la production de blé aux niveaux de production actuels. Puisque $\partial_R B$ est positive, une augmentation de la pluviosité annuelle (tout en gardant la température moyenne constante) provoque une augmentation de la production de blé.

Puisque la température moyenne augmente à un taux de $0.15^\circ\text{C} \cdot \text{an}^{-1}$, nous savons que $dT/dt = 0.15$. Comme les précipitations diminuent à raison de $0.1 \text{ cm} \cdot \text{an}^{-1}$, nous savons que $dR/dt = 0.1$. Par conséquent,

$$\frac{dB}{dt} = \frac{\partial B}{\partial T} \frac{dT}{dt} + \frac{\partial B}{\partial R} \frac{dR}{dt} = (-2) \times (0.15) + (8) \times (-0.1) = -1.1.$$

Ainsi, nous estimons que la production de blé diminuera à raison de 1.1 unités par an.

Exercice 3.9

La longueur ℓ , la largeur w et la hauteur h d'une boîte changent en fonction du temps t . À un instant donné les dimensions sont $\ell = 1 \text{ m}, w = h = 2 \text{ m}$, et ℓ et w augmentent au taux de $2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ tandis que h diminue au taux de $3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Calculer les taux de variation du volume, de la surface et de la longueur de la diagonale.

Correction

On a

$$\begin{aligned} V(t) &= V(\ell(t), w(t), h(t)) = \ell(t) \times w(t) \times h(t), \\ S(t) &= S(\ell(t), w(t), h(t)) = 2(w(t) \times h(t) + w(t) \times \ell(t) + h(t) \times \ell(t)), \\ d(t) &= d(\ell(t), w(t), h(t)) = \sqrt{\ell^2(t) + w^2(t) + h^2(t)}, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} &= \partial_\ell V \times \ell' + \partial_w V \times w' + \partial_h V \times h' = w(t) \times h(t) \times \ell'(t) + \ell(t) \times h(t) \times w'(t) + w(t) \times \ell(t) \times h'(t) = 6\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}, \\ \frac{\partial S}{\partial t} &= \partial_\ell S \times \ell' + \partial_w S \times w' + \partial_h S \times h' = 2((w(t) + h(t)) \times \ell'(t) + (h(t) + \ell(t)) \times w'(t) + (w(t) + \ell(t)) \times h'(t)) = 10\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}, \\ \frac{\partial d}{\partial t} &= \partial_\ell d \times \ell' + \partial_w d \times w' + \partial_h d \times h' = \frac{\ell \ell'(t) + w w'(t) + h h'(t)}{\sqrt{\ell^2(t) + w^2(t) + h^2(t)}} = 0\text{m} \cdot \text{s}^{-1}. \end{aligned}$$

Linéarisation

 **Exercice 3.10**

Calculer les différentielles des fonctions suivantes :

$$m = p^5 q^3 \quad u = \sqrt{x^2 + 3y^2} \quad R = \alpha \beta^2 \cos(\gamma) \quad T = \frac{v}{1 + uvw} \quad L = xze^{-y^2 - z^2}$$

Correction

1. $dm = 5p^4 q^3 dp + 3p^5 q^2 dq$
2. $du = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 3y^2}} dx + \frac{3y}{\sqrt{x^2 + 3y^2}} dy$
3. $dR = \beta^2 \cos(\gamma) d\alpha + 2\alpha \beta \cos(\gamma) d\beta - \alpha \beta^2 \sin(\gamma) d\gamma$
4. $dT = -\frac{v^2 w}{(1 + uvw)^2} du + \frac{1}{(1 + uvw)^2} dv - \frac{v^2 u}{(1 + uvw)^2} dw$
5. $dL = ze^{-y^2 - z^2} dx - 2xyze^{-y^2 - z^2} dy - x(2z^2 - 1)e^{-y^2 - z^2} dz$

 **Exercice 3.11**

Sachant que la fonction $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est différentiable et que

$$f(2, 5) = 6, \quad \partial_x f(2, 5) = 1, \quad \partial_y f(2, 5) = -1,$$

donner une valeur approchée de $f(2.2, 4.9)$.

Correction

On approche $f(2.2, 4.9)$ par $L_{(2,5)}(2.2, 4.9)$ ou $L_{(2,5)}$ est l'équation du plan tangent à f au point $(2, 5)$:

$$L_{(2,5)}(x, y) = f(2, 5) + (x - 2)\partial_x f(2, 5) + (y - 5)\partial_y f(2, 5) = 6 + (x - 2) - (y - 5) = x - y + 9$$

donc $f(2.2, 4.9) \approx 6.3$.

 **Exercice 3.12**

La fonction de production d'un entrepreneur est donné par $\sqrt{K} \sqrt[4]{L}$, où K représente le capital utilisé et L le travail. Actuellement, il utilise 9 unités de capital et 16 unités de travail. Déterminez par approximation linéaire la production obtenue s'il augmente d'une unité le capital et de deux unités le facteur travail.

Correction

La fonction $f(K, L) = \sqrt{K} \sqrt[4]{L}$ est différentiable dans $(\mathbb{R}_+^*)^2$ et

$$\partial_K f(K, L) = \frac{\sqrt[4]{L}}{2\sqrt{K}}, \quad \partial_L f(K, L) = \frac{\sqrt{K}}{4\sqrt[4]{L^3}},$$

par conséquent

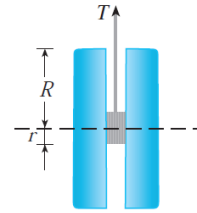
$$f(9+1, 16+2) \approx f(9, 16) + 1\partial_K f(9, 16) + 2\partial_L f(9, 16) = \sqrt{9}\sqrt[4]{16} + \frac{\sqrt[4]{16}}{2\sqrt{9}} + \frac{\sqrt{9}}{4\sqrt[4]{16^3}} \times 2 = 3 \times 2 + \frac{2}{2 \times 3} + \frac{3}{4 \times 8} \times 2 = \frac{313}{48}.$$

Exercice 3.13

La tension T de la cordelette du yo-yo en figure est décrite par la fonction

$$T = \frac{mgR}{2r^2 + R^2}$$

où m est la masse du yo-yo et g l'accélération due à la gravité. Donner une estimation de la variation de T lorsque R passe de 3 cm à 3.1 cm et r passe de 0.7 cm à 0.8 cm.



Correction

$$dT = \partial_R T dR + \partial_r T dr = \frac{mg(2r^2 - R^2)}{(2r^2 + R^2)^2} dR + \frac{-4mgrR}{(2r^2 + R^2)^2} dr = \frac{(-8.02 - 8.4) \times 0.1}{99.6004} mg \approx -0.0165mg < 0.$$

Exercice 3.14

Un sac contient $1.6\text{kg} \pm 40\text{g}$ de bonbons. Pour estimer le nombre de bonbons présents dans le sac, on pèse un bonbon au hasard et on obtient $19\text{g} \pm 2\text{g}$. On suppose que tous les bonbons sont identiques. Calculer le nombre total de bonbons avec l'incertitude absolue et relative.

Correction

Soit x le poids total et y le poids d'un seul bonbon (en grammes). Considérons le rectangle \mathcal{R} centré en $(1600, 19)$ avec $r_1 = 40$ et $r_2 = 2$. Le nombre de bonbons en fonction de x et y est donné par l'application

$$N: \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^* \\ (x, y) \mapsto N(x, y) \equiv \frac{x}{y}$$

N est une fonction de classe $\mathcal{C}^1(\mathcal{R})$ donc pour tout $(x, y) \in \mathcal{R}$ on a la majoration $|N(x, y) - N(1600, 19)| \leq Ar_1 + Br_2$ avec A (resp. B) un majorant de $|\partial_x N(x, y)|$ (resp. $|\partial_y N(x, y)|$) sur \mathcal{R} :

$$|\partial_x N(x, y)| = \left| \frac{1}{y} \right| \leq \frac{1}{19-2} \quad |\partial_y N(x, y)| = \left| -\frac{x}{y^2} \right| \leq \frac{1600+40}{(19-2)^2}$$

d'où

$$|N(x, y) - N(1600, 19)| \leq 40 \frac{1}{17} + 2 \frac{1640}{17^2} \approx 13.71.$$

On conclut que le nombre de bonbons est égale à 84.21 à ± 13.71 près et que l'erreur relative est de $13.71/84.21$ qui est inférieure à 17%.

Exercice 3.15

On mesure un rectangle et on obtient une largeur de 30 cm et une longueur de 24 cm, avec une erreur d'au plus 0.1 cm pour chaque mesure. Estimer l'aire du rectangle.

Correction

L'aire du rectangle est donnée par la fonction $f(x, y) = xy$ avec x la largeur et y la longueur (en cm). Lorsque $(h, k) \simeq (0, 0)$, on a

$$f(x+h, y+k) \simeq f(x, y) + h\partial_x f(x, y) + k\partial_y f(x, y)$$

donc, pour $h, k \in [-0.1, 0.1]$, on a

$$f(30+0.1, 24+0.1) \simeq 30 \times 24 + 0.1 \times 24 + 0.1 \times 30 = 725.4,$$

$$f(30-0.1, 24-0.1) \simeq 30 \times 24 - 0.1 \times 24 - 0.1 \times 30 = 714.6,$$

donc l'aire est comprise entre 714.6 cm^2 et 725.4 cm^2 .

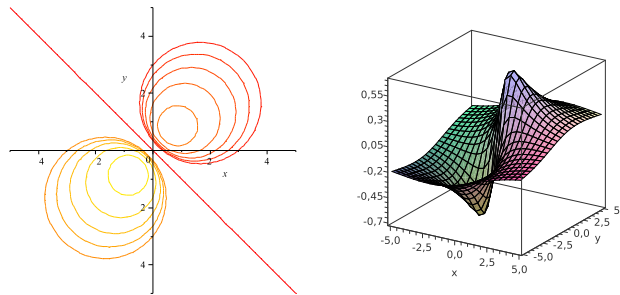
Exercice 3.16

Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x, y) = \frac{x + y}{1 + x^2 + y^2}$.

1. Déterminer et représenter ses courbes de niveau.
2. Calculer ses dérivées partielles premières.
3. Écrire l'équation du plan tangent à f en $(0, 0)$.

Correction

1. Les courbes de niveau de f sont les courbes d'équation $f(x, y) = k$, i.e. la droite d'équation $y = -x$ pour $k = 0$ et les courbes d'équation $x^2 + y^2 - \frac{1}{k}x - \frac{1}{k}y + 1 = 0$ pour $0 < k^2 < 1/2$ qui sont des cercles de centre $(\frac{1}{2k}, \frac{1}{2k})$ et rayon $\sqrt{\frac{1}{2k^2} - 1}$.



2. Les deux dérivées premières partielles de f sont

$$\partial_x f(x, y) = \frac{1 - x^2 - 2xy + y^2}{(1 + x^2 + y^2)^2}, \quad \partial_y f(x, y) = \frac{1 + x^2 - 2xy - y^2}{(1 + x^2 + y^2)^2}.$$

3. L'équation du plan tangent à f en $(0, 0)$ est

$$z = f(0, 0) + x\partial_x(0, 0) + y\partial_y(0, 0) = x + y.$$

Exercice 3.17

Considérons la loi d'état suivante : l'entropie s en fonction de l'énergie interne spécifique ε et du volume spécifique τ s'écrit

$$s: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(\tau, \varepsilon) \mapsto s(\tau, \varepsilon) = c_v \ln(\varepsilon \tau^{\gamma-1}) = c_v \ln(\varepsilon) + c_v(\gamma - 1) \ln(\tau)$$

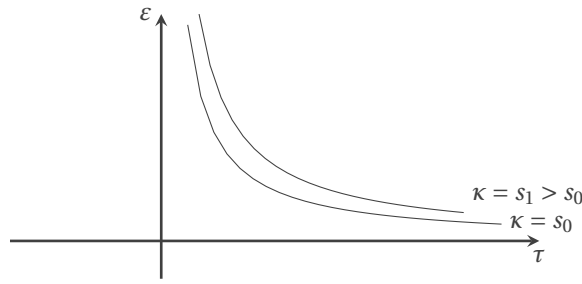
avec $c_v > 0$ et $\gamma > 1$ deux constantes.

1. Calculer \mathcal{D}_s le domaine de définition de s .
2. Déterminer la courbe de niveau de la fonction s (appelée "isentrope") associée à la valeur κ .
Considérons s_0 et $s_1 > s_0$ deux constantes. Tracer l'allure des deux courbes de niveau de la fonction s associées aux valeurs s_0 et s_1 .
3. Calculer les dérivées partielles premières de s .
4. Écrire l'équation du plan tangent à s en $(1, 1)$.
5. Calculer la matrice hessienne de s . En déduire si s est concave, convexe ou ni l'un ni l'autre.

Correction

1. $\mathcal{D}_s = \{(\tau, \varepsilon) \in \mathbb{R}^2 \mid \tau > 0, \varepsilon > 0\}$.
2. La courbe de niveau de la fonction s associée à la valeur κ est l'ensemble

$$\{(\tau, \varepsilon) \in \mathcal{D}_s \mid c_v \ln(\varepsilon \tau^{\gamma-1}) = \kappa\} = \left\{ \tau \in \mathbb{R}_+^* \mid \varepsilon(\tau) = \frac{e^{\kappa/c_v}}{\tau^{\gamma-1}} \right\}$$



3. $\frac{\partial s}{\partial \tau} \Big|_{\varepsilon} (\tau, \varepsilon) = \frac{c_v(\gamma - 1)}{\tau}$ et $\frac{\partial s}{\partial \varepsilon} \Big|_{\tau} (\tau, \varepsilon) = \frac{c_v}{\varepsilon}$.

4. $z(\tau, \varepsilon) = s(1, 1) + (\tau - 1) \frac{\partial s}{\partial \tau} \Big|_{\varepsilon} (1, 1) + (\varepsilon - 1) \frac{\partial s}{\partial \varepsilon} \Big|_{\tau} (1, 1) = c_v(\gamma - 1)(\tau - 1) + c_v(\varepsilon - 1)$.

5. La matrice Hessienne de s en un point $(\tau, \varepsilon) \in \mathcal{D}_s$ est

$$H_s(\tau, \varepsilon) = \begin{pmatrix} \partial_{\tau\tau} s & \partial_{\tau\varepsilon} s \\ \partial_{\varepsilon\tau} s & \partial_{\varepsilon\varepsilon} s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{c_v(\gamma-1)}{\tau^2} & 0 \\ 0 & -\frac{c_v}{\varepsilon^2} \end{pmatrix}.$$

Puisque $\det(H_s)(\tau, \varepsilon) = \frac{c_v^2(\gamma-1)}{\tau^2\varepsilon^2} > 0$ et $\partial_{\tau\tau} s(\tau, \varepsilon) < 0$ pour tout $(\tau, \varepsilon) \in \mathcal{D}_s$, la fonction s est strictement concave sur tout son domaine de définition.

Exercice 3.18

Considérons la loi d'état suivante : l'entropie s en fonction de l'énergie interne spécifique ε et de la densité spécifique ρ s'écrit :

$$s: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(\rho, \varepsilon) \mapsto s(\rho, \varepsilon) = c_v \ln(\varepsilon \rho^{1-\gamma}) = c_v \ln(\varepsilon) - c_v(\gamma - 1) \ln(\rho)$$

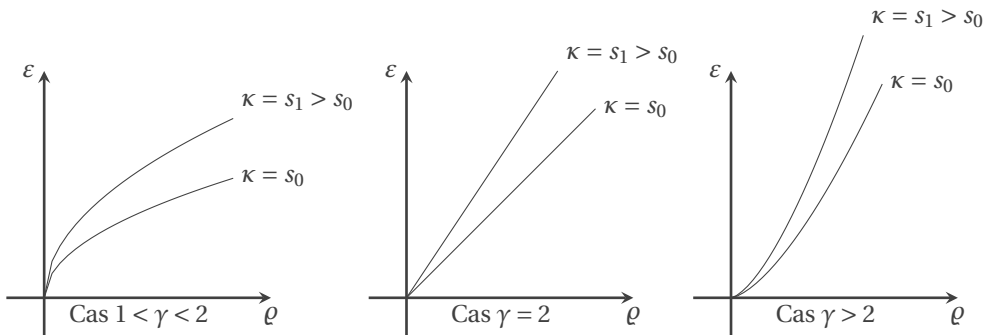
avec $c_v > 0$ et $\gamma > 1$ deux constantes.

1. Calculer \mathcal{D}_s le domaine de définition de s .
2. Déterminer la courbe de niveau de la fonction s (appelée "isentrope") associée à la valeur κ . Considérons s_0 et $s_1 > s_0$ deux constantes. Tracer l'allure des deux courbes de niveau de la fonction s associées aux valeurs s_0 et s_1 .
3. Calculer les dérivées partielles premières de s .
4. Écrire l'équation du plan tangent à s en $(1, 1)$.
5. Calculer la matrice hessienne de s et en déduire si s est concave ou convexe ou ni l'un ni l'autre.

Correction

1. $\mathcal{D}_s = \{(\rho, \varepsilon) \in \mathbb{R}^2 \mid \rho > 0, \varepsilon > 0\}$.
2. La courbe de niveau de la fonction s associée à la valeur κ est l'ensemble

$$\{(\rho, \varepsilon) \in \mathcal{D}_s \mid c_v \ln(\varepsilon \rho^{1-\gamma}) = \kappa\} = \{\rho \in \mathbb{R}_+^* \mid \varepsilon(\rho) = e^{\kappa/c_v} \rho^{\gamma-1}\}$$



3. $\frac{\partial s}{\partial \rho} \Big|_{\varepsilon} (\rho, \varepsilon) = \frac{-c_v(\gamma - 1)}{\rho}$ et $\frac{\partial s}{\partial \varepsilon} \Big|_{\rho} (\rho, \varepsilon) = \frac{c_v}{\varepsilon}$.

$$4. z(\rho, \varepsilon) = s(1, 1) + (\rho - 1) \frac{\partial s}{\partial \rho} \Big|_{\varepsilon} (1, 1) + (\varepsilon - 1) \frac{\partial s}{\partial \varepsilon} \Big|_{\rho} (1, 1) = -c_v(\gamma - 1)(\rho - 1) + c_v(\varepsilon - 1).$$

5. La matrice Hessienne de s en un point $(\rho, \varepsilon) \in \mathcal{D}_s$ est

$$H_s(\rho, \varepsilon) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 s}{\partial \rho^2} & \frac{\partial^2 s}{\partial \rho \varepsilon} \\ \frac{\partial^2 s}{\partial \varepsilon \rho} & \frac{\partial^2 s}{\partial \varepsilon^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{c_v(\gamma-1)}{\rho^2} & 0 \\ 0 & -\frac{c_v}{\varepsilon^2} \end{pmatrix}.$$

Puisque $\det(H_s)(\rho, \varepsilon) = \frac{-c_v^2(\gamma-1)}{\rho^2 \varepsilon^2} < 0$ pour tout $(\rho, \varepsilon) \in \mathcal{D}_s$, la fonction s n'est ni convexe ni concave.

Différentiabilité

Exercice 3.19

Vérifier, en utilisant la définition, que les fonctions $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ suivantes sont différentiables dans le point indiqué :

a) $f(x, y) = xy - 3x^2$ en $(1; 2)$,

c) $f(x, y) = xy + 3y^2$ en $(2; 1)$,

e) $f(x, y) = y\sqrt{x}$ en $(4; 1)$,

b) $f(x, y) = xy - 3y^2$ en $(2; 1)$,

d) $f(x, y) = xy - 2y^2$ en $(-2; 3)$,

f) $f(x, y) = |y| \ln(1+x)$ en $(0; 0)$.

Correction

Une application $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est différentiable en $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ ssi

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{f(x, y) - f(x_0, y_0) - \partial_x f(x_0, y_0)(x - x_0) - \partial_y f(x_0, y_0)(y - y_0)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = 0.$$

a) On a

$$\begin{aligned} f(x, y) &= xy - 3x^2 & f(1, 2) &= -1, \\ \partial_x f(x, y) &= y - 6x & \partial_x f(1, 2) &= -4, \\ \partial_y f(x, y) &= x & \partial_y f(1, 2) &= 1, \end{aligned}$$

donc

$$\frac{f(x, y) - f(x_0, y_0) - \partial_x f(x_0, y_0)(x - x_0) - \partial_y f(x_0, y_0)(y - y_0)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = \frac{xy - 3x^2 + 1 + 4(x - 1) - (y - 2)}{\sqrt{(x - 1)^2 + (y - 2)^2}}.$$

Avec le changement de variables $x = 1 + r \cos(\theta)$ et $y = 2 + r \sin(\theta)$ ce rapport se réécrit

$$\frac{xy - 3x^2 + 1 + 4(x - 1) - (y - 2)}{\sqrt{(x - 1)^2 + (y - 2)^2}} = \frac{(1 + r \cos(\theta))(2 + r \sin(\theta)) - 3(1 + r \cos(\theta))^2 + 1 + 4r \cos(\theta) - r \sin(\theta)}{r} = r \cos(\theta)(\sin(\theta) - 3 \cos(\theta))$$

On a alors

$$\left| \frac{xy - 3x^2 + 1 + 4(x - 1) - (y - 2)}{\sqrt{(x - 1)^2 + (y - 2)^2}} \right| \leq 4r \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0$$

d'où

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{xy - 3x^2 + 1 + 4(x - 1) - (y - 2)}{\sqrt{(x - 1)^2 + (y - 2)^2}} = 0.$$

La fonction est donc différentiable en $(1, 2)$.

Plus généralement, on peut prouver que la fonction est différentiable pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et la différentielle est $df(x, y) = (y - 6x) dx + x dy$.

b) On a

$$\begin{aligned} f(x, y) &= xy - 3y^2 & f(2, 1) &= -1, \\ \partial_x f(x, y) &= y & \partial_x f(2, 1) &= 1, \\ \partial_y f(x, y) &= x - 6y & \partial_y f(2, 1) &= -4, \end{aligned}$$

donc

$$\frac{f(x, y) - f(x_0, y_0) - \partial_x f(x_0, y_0)(x - x_0) - \partial_y f(x_0, y_0)(y - y_0)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = \frac{xy - 3y^2 + 1 - (x - 2) + 4(y - 1)}{\sqrt{(x - 2)^2 + (y - 1)^2}}.$$

Avec le changement de variables $x = 2 + r \cos(\theta)$ et $y = 1 + r \sin(\theta)$ ce rapport se réécrit

$$\frac{xy - 3y^2 + 1 - (x - 2) + 4(y - 1)}{\sqrt{(x - 2)^2 + (y - 1)^2}} = \frac{(2 + r \cos(\theta))(1 + r \sin(\theta)) - 3(1 + r \sin(\theta))^2 + 1 - r \cos(\theta) + 4r \sin(\theta)}{r} = r \sin(\theta)(\cos(\theta) - 3 \sin(\theta)).$$

On a alors

$$\left| \frac{xy - 3y^2 + 1 - (x - 2) + 4(y - 1)}{\sqrt{(x - 2)^2 + (y - 1)^2}} \right| \leq 4r \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0$$

d'où

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (2,1)} \frac{xy - 3y^2 + 1 - (x - 2) + 4(y - 1)}{\sqrt{(x - 2)^2 + (y - 1)^2}} = 0.$$

La fonction est donc différentiable en $(2, 1)$.

Plus généralement, on peut prouver que la fonction est différentiable pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et la différentielle est $df(x, y) = y dx + (x - 6y) dy$.

c) On a

$$\begin{aligned} f(x, y) &= xy + 3y^2 & f(2, 1) &= 5, \\ \partial_x f(x, y) &= y & \partial_x f(2, 1) &= 1, \\ \partial_y f(x, y) &= x + 6y & \partial_y f(2, 1) &= 8, \end{aligned}$$

donc

$$\frac{f(x, y) - f(x_0, y_0) - \partial_x f(x_0, y_0)(x - x_0) - \partial_y f(x_0, y_0)(y - y_0)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = \frac{xy + 3y^2 - 5 - (x - 2) - 8(y - 1)}{\sqrt{(x - 2)^2 + (y - 1)^2}}.$$

Avec le changement de variables $x = 2 + r \cos(\theta)$ et $y = 1 + r \sin(\theta)$ ce rapport se réécrit

$$\frac{xy + 3y^2 - 5 - (x - 2) - 8(y - 1)}{\sqrt{(x - 2)^2 + (y - 1)^2}} = \frac{(2 + r \cos(\theta))(1 + r \sin(\theta)) + 3(1 + r \sin(\theta))^2 - 5 - r \cos(\theta) - 8r \sin(\theta)}{r} = r \sin(\theta)(3 \sin(\theta) + \cos(\theta)).$$

On a alors

$$\left| \frac{xy + 3y^2 - 5 - (x - 2) - 8(y - 1)}{\sqrt{(x - 2)^2 + (y - 1)^2}} \right| \leq 4r \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0$$

d'où

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (2,1)} \frac{xy + 3y^2 - 5 - (x - 2) - 8(y - 1)}{\sqrt{(x - 2)^2 + (y - 1)^2}} = 0.$$

La fonction est donc différentiable en $(-2, 3)$.

Plus généralement, on peut prouver que la fonction est différentiable pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et la différentielle est $df(x, y) = y dx + (x + 6y) dy$.

d) On a

$$\begin{aligned} f(x, y) &= xy - 2y^2 & f(-2, 3) &= -24, \\ \partial_x f(x, y) &= y & \partial_x f(-2, 3) &= 3, \\ \partial_y f(x, y) &= x - 4y & \partial_y f(-2, 3) &= -14, \end{aligned}$$

donc

$$\frac{f(x, y) - f(x_0, y_0) - \partial_x f(x_0, y_0)(x - x_0) - \partial_y f(x_0, y_0)(y - y_0)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = \frac{xy - 2y^2 + 24 - 3(x + 2) + 14(y - 3)}{\sqrt{(x + 2)^2 + (y - 3)^2}}.$$

Avec le changement de variables $x = -2 + r \cos(\theta)$ et $y = 3 + r \sin(\theta)$ ce rapport se réécrit

$$\begin{aligned} \frac{xy - y^2 + 24 - 3(x + 2) + 14(y - 3)}{\sqrt{(x + 2)^2 + (y - 3)^2}} &= \frac{(-2 + r \cos(\theta))(3 + r \sin(\theta)) - 2(3 + r \sin(\theta))^2 - 24 - 3r \cos(\theta) + 14r \sin(\theta)}{r} \\ &= r \sin(\theta)(\cos(\theta) - 2 \sin(\theta)). \end{aligned}$$

On a alors

$$\left| \frac{xy - y^2 + 24 - 3(x + 2) + 14(y - 3)}{\sqrt{(x + 2)^2 + (y - 3)^2}} \right| \leq 3r \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0$$

d'où

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (-2,3)} \frac{xy - y^2 + 24 - 3(x+2) + 14(y-3)}{\sqrt{(x+2)^2 + (y-3)^2}} = 0.$$

La fonction est donc différentiable en $(-2, 3)$.

Plus généralement, on peut prouver que la fonction est différentiable pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et la différentielle est $df(x, y) = y dx + (x - 4y) dy$.

e) On a

$$\begin{aligned} f(x, y) &= y\sqrt{x} & f(4, 1) &= 2, \\ \partial_x f(x, y) &= \frac{y}{2\sqrt{x}} & \partial_x f(4, 1) &= \frac{1}{4}, \\ \partial_y f(x, y) &= \sqrt{x} & \partial_y f(4, 1) &= 2, \end{aligned}$$

donc

$$\frac{f(x, y) - f(x_0, y_0) - \partial_x f(x_0, y_0)(x - x_0) - \partial_y f(x_0, y_0)(y - y_0)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = \frac{y\sqrt{x} - 2 - \frac{1}{4}(x - 4) - 2(y - 1)}{\sqrt{(x - 4)^2 + (y - 1)^2}}.$$

Avec le changement de variables $x = 4 + r \cos(\theta)$ et $y = 1 + r \sin(\theta)$ ce rapport se réécrit

$$\begin{aligned} \frac{y\sqrt{x} - 2 - \frac{1}{4}(x - 4) - 2(y - 1)}{\sqrt{(x - 4)^2 + (y - 1)^2}} &= \frac{(1 + r \sin(\theta))\sqrt{4 + r \cos(\theta)} - 2 - \frac{r \cos(\theta)}{4} - 2r \sin(\theta)}{r} \\ &= \frac{2(1 + r \sin(\theta))\sqrt{1 + \frac{r \cos(\theta)}{4}} - 2 - \frac{r \cos(\theta)}{4} - 2r \sin(\theta)}{r} \\ &= \frac{2(1 + r \sin(\theta))\left(1 + \frac{r \cos(\theta)}{8} + o(r)\right) - 2 - \frac{r \cos(\theta)}{4} - 2r \sin(\theta)}{r} \\ &= \frac{r}{4} \cos(\theta) \sin(\theta) + \frac{o(r)}{r} \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0 \end{aligned}$$

où on a utilisé l'approximation $\sqrt{1+t} \simeq 1 + \frac{t}{2} + o(t)$ lorsque $x \simeq 0$. Par conséquent

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (4,1)} \frac{f(x, y) - f(x_0, y_0) - \partial_x f(x_0, y_0)(x - x_0) - \partial_y f(x_0, y_0)(y - y_0)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = 0.$$

La fonction est donc différentiable en $(4, 1)$.

f) Comme $f(x, 0) = f(0, y) = 0$ alors $\partial_x f(0, 0) = \partial_y f(0, 0) \equiv 0$ donc

$$\frac{f(x, y) - f(x_0, y_0) - \partial_x f(x_0, y_0)(x - x_0) - \partial_y f(x_0, y_0)(y - y_0)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = \frac{|y| \ln(1+x)}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

On passe aux coordonnées polaires : $x = r \cos(\theta)$ et $y = r \sin(\theta)$ et on a

$$\left| \frac{|y| \ln(1+x)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| = |\sin(\theta) \ln(1+r \cos(\theta))| \leq 2r |\sin(\theta) \cos(\theta)| \leq 2r \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0.$$

La fonction est donc différentiable en $(0, 0)$.

Continuité, dérivabilité, différentiabilité

Exercice 3.20

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une application. Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

- 1. Si $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ alors f est différentiable en tout point.
- 2. Si $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ alors il existe ∇f en tout point.
- 3. Si $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ alors f est continue.
- 4. Si f est différentiable en tout point alors $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$.

5. S'il existe ∇f en tout point alors $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$.
6. Si f est continue alors $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$.
7. Si f est différentiable en (x_0, y_0) alors il existe $\nabla f(x_0, y_0)$.
8. Si f est différentiable alors f est continue.
9. S'il existe $\nabla f(x_0, y_0)$ alors f est différentiable en (x_0, y_0) .
10. Si f est continue alors f est différentiable.
11. Si f est continue alors il existe ∇f en tout point.
12. S'il existe ∇f en tout point alors f est continue.

Correction

- Si $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ alors f est différentiable en tout point.
- Si $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ alors il existe ∇f en tout point.
- Si $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ alors f est continue.
- Si f est différentiable en tout point alors $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$.
- S'il existe ∇f en tout point alors $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$.
- Si f est continue alors $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$.
- Si f est différentiable en (x_0, y_0) alors il existe $\nabla f(x_0, y_0)$.
- Si f est différentiable alors f est continue.
- S'il existe $\nabla f(x_0, y_0)$ alors f est différentiable en (x_0, y_0) .
- Si f est continue alors f est différentiable.
- Si f est continue alors il existe ∇f en tout point.
- S'il existe ∇f en tout point alors f est continue.

Exercice 3.21

Soit f une fonction définie sur \mathbb{R}^2 telle que $\lim_{(x,y) \rightarrow (3,1)} f(x, y) = 6$.

- Que peut-on dire de $f(3, 1)$?
- Si f est continue en $(3, 1)$, que peut-on dire de $f(3, 1)$?
- Si f est dérivable en $(3, 1)$, que peut-on dire de $f(3, 1)$?
- Si f est différentiable en $(3, 1)$, que peut-on dire de $f(3, 1)$?
- Si f est de classe \mathcal{C}^1 au voisinage de $(3, 1)$, que peut-on dire de $f(3, 1)$?

Correction

- On ne peut rien dire de la valeur $f(3, 1)$.
- $f(3, 1) = 6$.
- On ne peut rien dire de la valeur $f(3, 1)$.
- $f(3, 1) = 6$ car la différentiabilité implique la continuité.
- $f(3, 1) = 6$ car être de classe \mathcal{C}^1 implique la continuité.

Exercice 3.22 (Exemple de PEANO)

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}^2 par

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- Montrer que f est continue sur \mathbb{R}^2 .
- Calculer $\nabla f(x, y)$.

3. Montrer que ∇f est continu sur \mathbb{R}^2 .
4. Montrez que f admet des dérivées partielles secondes en tout point.
5. Que pouvez-vous déduire du calcul de $\partial_{xy}f(0,0)$ et de $\partial_{yx}f(0,0)$?

Correction

1. La fonction est clairement continue dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ car quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas. Elle est aussi continue en $(0,0)$ car

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} |f(x,y)| = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left| \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} \right| = \lim_{\substack{\rho \rightarrow 0 \\ \forall \theta}} \rho^2 \left| \cos(\theta) \sin(\theta) (\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)) \right| \leq \lim_{\rho \rightarrow 0} 2\rho^2 = 0 = f(0,0).$$

f est donc continue sur \mathbb{R}^2 .

2. On a

$$\partial_x f(x,y) = \begin{cases} y \frac{x^4 + 4x^2 y^2 - y^4}{(x^2 + y^2)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = 0 & \text{si } (x,y) = (0,0), \end{cases} \quad \partial_y f(x,y) = \begin{cases} x \frac{x^4 - 4x^2 y^2 - y^4}{(x^2 + y^2)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y} = 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

3. La fonction $\partial_x f$ est clairement continue dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ car quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas. Elle est aussi continue en $(0,0)$ car

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} |\partial_x f(x,y)| = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left| y \frac{x^4 + 4x^2 y^2 - y^4}{(x^2 + y^2)^2} \right| = \lim_{\substack{\rho \rightarrow 0 \\ \forall \theta}} \rho \left| \sin(\theta) (\cos^4(\theta) + 4 \cos^2(\theta) \sin^2(\theta) - \sin^4(\theta)) \right| \leq \lim_{\rho \rightarrow 0} 6\rho = 0 = \partial_x f(0,0).$$

$\partial_x f$ est donc continue sur \mathbb{R}^2 .

La fonction $\partial_y f$ est clairement continue dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ car quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas. Elle est aussi continue en $(0,0)$ car

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} |\partial_y f(x,y)| = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left| x \frac{x^4 - 4x^2 y^2 - y^4}{(x^2 + y^2)^2} \right| = \lim_{\substack{\rho \rightarrow 0 \\ \forall \theta}} \rho \left| \cos(\theta) (\cos^4(\theta) - 4 \cos^2(\theta) \sin^2(\theta) - \sin^4(\theta)) \right| \leq \lim_{\rho \rightarrow 0} 6\rho = 0 = \partial_y f(0,0).$$

$\partial_y f$ est donc continue sur \mathbb{R}^2 .

4. Passons aux dérivées secondes :

$$\partial_{xx} f(x,y) = \begin{cases} \frac{4xy^3(x^2 - 3y^2)}{(x^2 + y^2)^3} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\partial_x f(x,0) - \partial_x f(0,0)}{x} = 0 & \text{si } (x,y) = (0,0), \end{cases} \quad \partial_{xy} f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^6 + 9x^4 y^2 - 9x^2 y^4 - y^6}{(x^2 + y^2)^3} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\partial_y f(x,0) - \partial_y f(0,0)}{x} = 1 & \text{si } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

$$\partial_{yx} f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^6 + 9x^4 y^2 - 9x^2 y^4 - y^6}{(x^2 + y^2)^3} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\partial_x f(0,y) - \partial_x f(0,0)}{y} = -1 & \text{si } (x,y) = (0,0), \end{cases} \quad \partial_{yy} f(x,y) = \begin{cases} \frac{4x^3 y(3x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^3} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\partial_y f(0,y) - \partial_y f(0,0)}{y} = 0 & \text{si } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

5. Comme $\partial_{xy}f(0,0) \neq \partial_{yx}f(0,0)$, le théorème de SCHWARZ permet de conclure que les dérivées secondes $\partial_{xy}f(x,y)$ et $\partial_{yx}f(x,y)$ ne sont pas continue en $(0,0)$. On peut donc conclure que f est de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ mais pas de classe $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$.

Exercice 3.23 (Continuité, dérivabilité, différentiabilité)

Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction ainsi définie

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1. Est-elle continue sur \mathbb{R}^2 ?
2. Calculer $\nabla f(x,y)$.
3. La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$?

4. Que peut-on conclure sur la différentiabilité de la fonction f sur \mathbb{R}^2 ?

Correction

1. f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ car quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas. Pour que f soit continue sur \mathbb{R}^2 il faut alors que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0$. Passons on coordonnées polaires : $x = 0 + r \cos(\vartheta)$, $y = 0 + r \sin(\vartheta)$,

$$\tilde{f}(r, \vartheta) = f(x(r, \vartheta), y(r, \vartheta)) = r \cos^2 \vartheta \sin(\vartheta).$$

Comme $|\tilde{f}(r, \vartheta)| \leq r \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0$ alors $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0$ donc f est continue sur \mathbb{R}^2 .

2. $\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} \partial_x f(x, y) \\ \partial_y f(x, y) \end{pmatrix}$ avec

$$\partial_x f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy^3}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x-0} = 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad \partial_y f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 - x^2 y^2}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y-0} = 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

3. Comme f est continue et dérivable sur \mathbb{R}^2 et ses dérivées partielles sont continues sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ alors f est de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$. Pour qu'elle soit de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ il faut que les dérivées partielles soient continues sur \mathbb{R}^2 , autrement dit il faut que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \partial_x f(x, y) = \partial_x f(0, 0) \qquad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \partial_y f(x, y) = \partial_y f(0, 0)$$

Comme $\partial_x f(x, x) = \frac{1}{2} \neq 0 = \partial_x f(0, 0)$ on conclut que $\partial_x f$ n'est pas continue en $(0, 0)$, donc f n'est pas de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$.

4. Comme f est de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$ alors f est différentiable sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Pour qu'elle soit différentiable sur \mathbb{R}^2 il faut que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y) - f(0,0) - \partial_x f(0,0)(x-0) - \partial_y f(0,0)(y-0)}{\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2}} = 0.$$

Si on note $h(x, y) = \frac{f(x,y) - f(0,0) - \partial_x f(0,0)(x-0) - \partial_y f(0,0)(y-0)}{\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2}} = \frac{x^2 y}{(x^2+y^2)^{3/2}}$, comme $h(x, x) = \frac{1}{2^{3/2}} \neq 0$, alors f n'est pas différentiable sur \mathbb{R}^2 .

Exercice 3.24 (Continuité, dérivabilité, différentiabilité)

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}^2 par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y - x y^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. La fonction f est-elle continue en $(0, 0)$?
2. Déterminer si les dérivées partielles $\partial_x f(0, 0)$ et $\partial_y f(0, 0)$ existent et les calculer le cas échéant.
3. La fonction f est-elle de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 ?
4. La fonction f est-elle différentiable en $(0, 0)$?

Correction

1. On étudie la limite $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 y - x y^3}{x^2 + y^2}$. On a

$$\frac{x^3 y - x y^3}{x^2 + y^2} = x y \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = r^2 \cos(\vartheta) \sin(\vartheta) (\cos^2(\vartheta) - \sin^2(\vartheta)) \xrightarrow[r \rightarrow 0]{\forall \vartheta} 0$$

car $\left| r^2 \cos(\vartheta) \sin(\vartheta) (\cos^2(\vartheta) - \sin^2(\vartheta)) \right| \leq 2r^2$. On en déduit que la limite de $f(x, y)$ quand (x, y) tend vers $(0, 0)$ est $0 = f(0, 0)$. La fonction est donc continue en $(0, 0)$. De plus, f est continue sur $(\mathbb{R}^*)^2$ car quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas, donc f est continue sur \mathbb{R}^2 .

2. Attention : il faut revenir à la définition de dérivée partielle en un point puisque la fonction au point $(0, 0)$ n'est pas définie de la même façon que sur le reste du domaine.

▷ Calcul de $\partial_x f(0, 0)$:

$$\partial_x f(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0+t, 0) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(0+t)0 \frac{(0+t)^2 - 0^2}{(0+t)^2 + 0^2} - 0}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} 0 = 0.$$

La dérivée partielle par rapport à x en $(0, 0)$ existe et est égale à 0.

▷ Calcul de $\partial_y f(0, 0)$:

$$\partial_y f(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0, 0+t) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0(0+t) \frac{0^2 - (0+t)^2}{0^2 + (0+t)^2} - 0}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} 0 = 0.$$

La dérivée partielle par rapport à y en $(0, 0)$ existe et est égale à 0.

3. Ici on doit calculer les dérivées partielles sur le reste du domaine et vérifier si elles sont continues ou non en $(0, 0)$ qui est le seul point qui peut poser des problèmes.

▷ Calcul de $\partial_x f(x, y)$ pour $(x, y) \neq (0, 0)$:

$$\partial_x \left(\frac{x^3 y - x y^3}{x^2 + y^2} \right) = \frac{(3x^2 y - y^3)(x^2 + y^2) - (x^3 y - x y^3)(2x)}{(x^2 + y^2)^2} = y \frac{x^4 - y^4 + 4x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

On a

$$y \frac{x^4 - y^4 + 4x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2} = r \sin(\vartheta) \left(\cos^4(\vartheta) - \sin^4(\vartheta) + 4 \cos^2(\vartheta) \sin^2(\vartheta) \right) \xrightarrow[r \rightarrow 0]{\forall \vartheta} 0$$

car $\left| r \sin(\vartheta) \left(\cos^4(\vartheta) - \sin^4(\vartheta) + 4 \cos^2(\vartheta) \sin^2(\vartheta) \right) \right| \leq 6r$. On en déduit que la limite de $\partial_x f(x, y)$ quand (x, y) tend vers $(0, 0)$ est $0 = \partial_x f(0, 0)$. La fonction $\partial_x f$ est donc continue en $(0, 0)$. De plus, elle est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ car quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas.

▷ Calcul de $\partial_y f(x, y)$ pour $(x, y) \neq (0, 0)$:

$$\partial_y \left(\frac{x^3 y - x y^3}{x^2 + y^2} \right) = \frac{(x^3 - 3x y^2)(x^2 + y^2) - (x^3 y - x y^3)(2y)}{(x^2 + y^2)^2} = x \frac{x^4 - y^4 - 4x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

On a

$$x \frac{x^4 - y^4 - 4x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2} = r \cos(\vartheta) \left(\cos^4(\vartheta) - \sin^4(\vartheta) - 4 \cos^2(\vartheta) \sin^2(\vartheta) \right) \xrightarrow[r \rightarrow 0]{\forall \vartheta} 0$$

car $\left| r \cos(\vartheta) \left(\cos^4(\vartheta) - \sin^4(\vartheta) - 4 \cos^2(\vartheta) \sin^2(\vartheta) \right) \right| \leq 6r$. On en déduit que la limite de $\partial_y f(x, y)$ quand (x, y) tend vers $(0, 0)$ est $0 = \partial_y f(0, 0)$. La fonction $\partial_y f$ est donc continue en $(0, 0)$. De plus, elle est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ car quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas.

La fonction f est continues sur \mathbb{R}^2 , elle admet des dérivées partielles sur \mathbb{R}^2 et ses dérivées partielles sont continues sur \mathbb{R}^2 . On conclut que la fonction f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 .

4. La fonction f est différentiable en $(0, 0)$ car elle est de classe \mathcal{C}^1 .

🔪 Exercice 3.25 (Continuité, dérivabilité, différentiabilité)

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction ainsi définie

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

1. Est-elle continue sur \mathbb{R}^2 ?
2. Est-elle dérivable sur \mathbb{R}^2 ?
3. Est-elle de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$?
4. Est-elle différentiable sur \mathbb{R}^2 ?

Correction

1. ÉTUDE DE LA CONTINUITÉ SUR \mathbb{R}^2

Étude sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$: f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ car quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas.

Étude en $(0,0)$: pour que f soit continue en $(0,0)$ il faut que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0$. Passons on coordonnées polaires : $x = 0 + r \cos(\vartheta)$, $y = 0 + r \sin(\vartheta)$,

$$\tilde{f}(r, \vartheta) = f(x(r, \vartheta), y(r, \vartheta)) = r \cos(\vartheta) \sin^2(\vartheta).$$

Comme $|\tilde{f}(r, \vartheta)| \leq r \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0$ alors $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0$.

Donc f est continue sur \mathbb{R}^2 .

2. ÉTUDE DE LA DÉRIVABILITÉ SUR \mathbb{R}^2

f est dérivable sur \mathbb{R}^2 si les deux dérivées partielles $\partial_x f$ et $\partial_y f$ sont définie pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\partial_x f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^4 - x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x-0} = 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases} \quad \partial_y f(x,y) = \begin{cases} \frac{2x^3 y}{(x^2 + y^2)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y-0} = 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Donc f est dérivable sur \mathbb{R}^2 .

3. ÉTUDE DE LA RÉGULARITÉ SUR \mathbb{R}^2

f est continue et dérivable sur \mathbb{R}^2 .

Étude sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$: les dérivées partielles sont continues sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ car quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas. Alors f est de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$

Étude en $(0,0)$: les dérivées partielles sont continues en $(0,0)$ ssi

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \partial_x f(x,y) = \partial_x f(0,0) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \partial_y f(x,y) = \partial_y f(0,0)$$

Comme $\partial_y f(x,x) = \frac{1}{2} \neq 0 = \partial_y f(0,0)$ on conclut que $\partial_y f$ n'est pas continue en $(0,0)$

f est de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$ mais n'est pas de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$.

4. ÉTUDE DE LA DIFFÉRENTIABILITÉ SUR \mathbb{R}^2

Étude sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$: comme f est de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$ alors f est différentiable sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Étude en $(0,0)$: pour que f soit différentiable en $(0,0)$ il faut que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - \partial_x f(0,0)(x-0) - \partial_y f(0,0)(y-0)}{\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2}} = 0.$$

Si on note $h(x,y) = \frac{f(x,y) - f(0,0) - \partial_x f(0,0)(x-0) - \partial_y f(0,0)(y-0)}{\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2}} = \frac{xy^2}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$, comme $h(x,x) = \frac{1}{2^{3/2}} \neq 0$, alors f n'est pas différentiable en $(0,0)$.

f est différentiable sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ mais n'est pas différentiable en $(0,0)$.

Exercice 3.26

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction ainsi définie

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{(x-1)y^2}{(x-1)^2 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (1,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (1,0). \end{cases}$$

1. Étude de la fonction sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(1,0)\}$:

- 1.1. montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(1,0)\}$;
- 1.2. calculer le gradient de f pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(1,0)\}$;
- 1.3. montrer que f est de classe \mathcal{C}^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(1,0)\}$;
- 1.4. que peut-on conclure sur la différentiabilité de f sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(1,0)\}$?

2. Étude de la fonction en $(1,0)$:

- 2.1. montrer que f est continue en $(1,0)$;
- 2.2. calculer le gradient de f en $(1,0)$;
- 2.3. montrer que f n'est pas différentiable en $(1,0)$;
- 2.4. f est-elle de classe \mathcal{C}^1 en $(1,0)$?

Correction

1. *Étude de la fonction sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(1, 0)\}$.*

- 1.1. f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(1, 0)\}$ car quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas.
- 1.2. Le gradient de f pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(1, 0)\}$ est le vecteur de composantes

$$\partial_x f(x, y) = -y^2 \frac{(x-1)^2 - y^2}{((x-1)^2 + y^2)^2}, \quad \partial_y f(x, y) = \frac{2(x-1)^3 y}{((x-1)^2 + y^2)^2}.$$

- 1.3. f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(1, 0)\}$; ses dérivées partielles sont continues sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(1, 0)\}$ car quotients de fonctions continues dont les dénominateurs ne s'annulent pas. Alors f est de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(1, 0)\})$.
- 1.4. Comme f est de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(1, 0)\})$ alors f est différentiable sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(1, 0)\}$.

2. *Étude de la fonction en $(1, 0)$.*

- 2.1. Pour que f soit continue en $(1, 0)$ il faut que $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} f(x, y) = f(1, 0)$. Passons en coordonnées polaires : $x = 1 + r \cos(\vartheta)$, $y = 0 + r \sin(\vartheta)$,

$$\tilde{f}(r, \vartheta) = f(x(r, \vartheta), y(r, \vartheta)) = r \cos(\vartheta) \sin^2 \vartheta.$$

Comme $|\tilde{f}(r, \vartheta)| \leq r \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0$ alors $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} f(x, y) = 0$ donc f est continue en $(1, 0)$.

- 2.2. Le gradient de f en $(1, 0)$ est le vecteur de composantes

$$\partial_x f(1, 0) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x, 0) - f(1, 0)}{x - 1} = 0, \quad \partial_y f(1, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(1, y) - f(1, 0)}{y - 0} = 0.$$

- 2.3. Pour prouver que f n'est pas différentiable en $(1, 0)$ il faut montrer que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{f(x, y) - f(1, 0) - \partial_x f(1, 0)(x-1) - \partial_y f(1, 0)(y-0)}{\sqrt{(x-1)^2 + (y-0)^2}} \neq 0.$$

Notons $h(x, y) = \frac{f(x, y) - f(1, 0) - \partial_x f(1, 0)(x-1) - \partial_y f(1, 0)(y-0)}{\sqrt{(x-1)^2 + (y-0)^2}} = \frac{(x-1)y^2}{((x-1)^2 + y^2)^{3/2}}$; comme $h(x, x-1) = \frac{1}{2^{3/2}} \neq 0$, alors f n'est pas différentiable en $(1, 0)$.

- 2.4. Comme f n'est pas différentiable en $(1, 0)$, elle n'est pas de classe \mathcal{C}^1 en $(1, 0)$. Si on a oublié ce théorème on peut le prouver directement : pour qu'elle soit de classe \mathcal{C}^1 en $(1, 0)$ il faut que les dérivées partielles soient continues, autrement dit il faut que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \partial_x f(x, y) = \partial_x f(1, 0) \quad \text{et} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \partial_y f(x, y) = \partial_y f(1, 0).$$

Comme $\partial_y f(x, x-1) = \frac{1}{2} \neq \partial_y f(1, 0) = 0$ on conclut que $\partial_x f$ n'est pas continue en $(1, 0)$, donc f n'est pas de classe \mathcal{C}^1 en $(1, 0)$.

 **Exercice 3.27**

Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction ainsi définie

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2(y+1)}{x^2 + (y+1)^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, -1), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, -1). \end{cases}$$

1. *Étude de la fonction sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, -1)\}$:*

- 1.1. montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, -1)\}$;
- 1.2. calculer le gradient de f pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, -1)\}$;
- 1.3. montrer que f est de classe \mathcal{C}^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, -1)\}$;
- 1.4. que peut-on conclure sur la différentiabilité de f sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, -1)\}$?

2. *Étude de la fonction en $(0, -1)$:*

- 2.1. montrer que f est continue en $(0, -1)$;
- 2.2. calculer le gradient de f en $(0, -1)$;
- 2.3. montrer que f n'est pas différentiable en $(0, -1)$;
- 2.4. f est-elle de classe \mathcal{C}^1 en $(0, -1)$?

Correction

1. Étude de la fonction sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, -1)\}$.

- 1.1. f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, -1)\}$ car quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas.
 1.2. Le gradient de f pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, -1)\}$ est le vecteur de composantes

$$\partial_x f(x, y) = \frac{2x(y+1)^3}{(x^2 + (y+1)^2)^2}, \quad \partial_y f(x, y) = x^2 \frac{x^2 - (y+1)^2}{(x^2 + (y+1)^2)^2}.$$

- 1.3. f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, -1)\}$; ses dérivées partielles sont continues sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, -1)\}$ car quotients de fonctions continues dont les dénominateurs ne s'annulent pas. Alors f est de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, -1)\})$.
 1.4. Comme f est de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, -1)\})$ alors f est différentiable sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, -1)\}$.

2. Étude de la fonction en $(0, -1)$.

- 2.1. Pour que f soit continue en $(0, -1)$ il faut que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,-1)} f(x, y) = f(0, -1)$. Passons en coordonnées polaires : $x = 0 + r \cos(\vartheta)$, $y = -1 + r \sin(\vartheta)$,

$$\tilde{f}(r, \vartheta) = f(x(r, \vartheta), y(r, \vartheta)) = r \cos^2 \vartheta \sin(\vartheta).$$

Comme $|\tilde{f}(r, \vartheta)| \leq r \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0$ alors $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,-1)} f(x, y) = 0$ donc f est continue en $(0, -1)$.

- 2.2. Le gradient de f en $(0, -1)$ est le vecteur de composantes

$$\partial_x f(0, -1) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, -1)}{x - 0} = 0, \quad \partial_y f(0, -1) = \lim_{y \rightarrow -1} \frac{f(0, y) - f(0, -1)}{y + 1} = 0.$$

- 2.3. Pour prouver que f n'est pas différentiable en $(0, -1)$ il faut montrer que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,-1)} \frac{f(x, y) - f(0, -1) - \partial_x f(0, -1)(x-0) - \partial_y f(0, -1)(y+1)}{\sqrt{x^2 + (y+1)^2}} \neq 0.$$

Notons $h(x, y) = \frac{f(x, y) - f(0, -1) - \partial_x f(0, -1)(x-0) - \partial_y f(0, -1)(y+1)}{\sqrt{(x-0)^2 + (y+1)^2}} = \frac{x^2(y+1)}{(x^2 + (y+1)^2)^{3/2}}$; comme $h(y+1, y) = \frac{1}{2^{3/2}} \neq 0$, alors f n'est pas différentiable en $(0, -1)$.

- 2.4. Comme f n'est pas différentiable en $(0, -1)$, elle n'est pas de classe \mathcal{C}^1 en $(0, -1)$. Si on a oublié ce théorème on peut le prouver directement : pour qu'elle soit de classe \mathcal{C}^1 en $(0, -1)$ il faut que les dérivées partielles soient continues, autrement dit il faut que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,-1)} \partial_x f(x, y) = \partial_x f(0, -1) \quad \text{et} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,-1)} \partial_y f(x, y) = \partial_y f(0, -1).$$

Comme $\partial_y f(y+1, y) = \frac{1}{2} \neq \partial_y f(0, -1) = 0$ on conclut que $\partial_x f$ n'est pas continue en $(0, -1)$, donc f n'est pas de classe \mathcal{C}^1 en $(0, -1)$.

Exercice 3.28

Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction ainsi définie

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{(x+1)y^2}{(x+1)^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (-1, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (-1, 0). \end{cases}$$

- Calculer le gradient de f en tout point.
- Étudier la continuité et la différentiabilité de f en $(-1, 0)$.
- Étudier la continuité du gradient.

Justifier chaque réponse.

Correction

1. Le gradient de f pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(-1, 0)\}$ est le vecteur de composantes

$$\partial_x f(x, y) = -y^2 \frac{(x+1)^2 - y^2}{((x+1)^2 + y^2)^2}, \quad \partial_y f(x, y) = \frac{2(x+1)^3 y}{((x+1)^2 + y^2)^2}.$$

Le gradient de f en $(-1, 0)$ est le vecteur de composantes

$$\partial_x f(-1, 0) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x, 0) - f(-1, 0)}{x + 1} = 0, \quad \partial_y f(-1, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(-1, y) - f(-1, 0)}{y - 0} = 0.$$

2. Passons en coordonnées polaires : $x = -1 + r \cos(\vartheta)$, $y = 0 + r \sin(\vartheta)$,

$$\tilde{f}(r, \vartheta) = f(x(r, \vartheta), y(r, \vartheta)) = r \cos(\vartheta) \sin^2 \vartheta.$$

Comme $|\tilde{f}(r, \vartheta)| \leq r \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0$ alors $\lim_{(x,y) \rightarrow (-1,0)} f(x, y) = 0 = f(-1, 0)$ donc f est continue en $(-1, 0)$.
 f n'est pas différentiable en $(-1, 0)$ car

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (-1,0)} \frac{f(x, y) - f(-1, 0) - \partial_x f(-1, 0)(x + 1) - \partial_y f(-1, 0)(y - 0)}{\sqrt{(x + 1)^2 + (y - 0)^2}} \neq 0.$$

En effet, notons $h(x, y) = \frac{f(x, y) - f(-1, 0) - \partial_x f(-1, 0)(x + 1) - \partial_y f(-1, 0)(y - 0)}{\sqrt{(x + 1)^2 + (y - 0)^2}} = \frac{(x + 1)y^2}{((x + 1)^2 + y^2)^{3/2}}$; comme $h(x, x + 1) = \frac{1}{2^{3/2}} \neq 0$, alors f n'est pas différentiable en $(-1, 0)$.

3. Comme f n'est pas différentiable en $(-1, 0)$, elle n'est pas de classe \mathcal{C}^1 en $(-1, 0)$, i.e. le gradient n'est pas continu en $(-1, 0)$. Si on a oublié ce théorème on peut le prouver directement : $\partial_y f(x, x + 1) = \frac{1}{2} \neq \partial_y f(-1, 0) = 0$ on conclut que $\partial_x f$ n'est pas continue en $(-1, 0)$, donc f n'est pas de classe \mathcal{C}^1 en $(-1, 0)$.

Exercice 3.29

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction ainsi définie

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{(x + 2016)y^2}{(x + 2016)^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (-2016, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (-2016, 0). \end{cases}$$

1. Calculer le gradient de f en tout point.
2. Étudier la continuité et la différentiabilité de f en $(-2016, 0)$.
3. Étudier la continuité du gradient.

Justifier chaque réponse.

Correction

1. Le gradient de f pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(-2016, 0)\}$ est le vecteur de composantes

$$\partial_x f(x, y) = -y^2 \frac{(x + 2016)^2 - y^2}{((x + 2016)^2 + y^2)^2}, \quad \partial_y f(x, y) = \frac{2(x + 2016)^3 y}{((x + 2016)^2 + y^2)^2}.$$

Le gradient de f en $(-2016, 0)$ est le vecteur de composantes

$$\partial_x f(-2016, 0) = \lim_{x \rightarrow -2016} \frac{f(x, 0) - f(-2016, 0)}{x + 2016} = 0, \quad \partial_y f(-2016, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(-2016, y) - f(-2016, 0)}{y - 0} = 0.$$

2. Passons en coordonnées polaires : $x = -2016 + r \cos(\vartheta)$, $y = 0 + r \sin(\vartheta)$,

$$\tilde{f}(r, \vartheta) = f(x(r, \vartheta), y(r, \vartheta)) = r \cos(\vartheta) \sin^2 \vartheta.$$

Comme $|\tilde{f}(r, \vartheta)| \leq r \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0$ alors $\lim_{(x,y) \rightarrow (-2016,0)} f(x, y) = 0 = f(-2016, 0)$ donc f est continue en $(-2016, 0)$.
 f n'est pas différentiable en $(-2016, 0)$ car

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (-2016,0)} \frac{f(x, y) - f(-2016, 0) - \partial_x f(-2016, 0)(x + 2016) - \partial_y f(-2016, 0)(y - 0)}{\sqrt{(x + 2016)^2 + (y - 0)^2}} \neq 0.$$

En effet, notons $h(x, y) = \frac{f(x, y) - f(-2016, 0) - \partial_x f(-2016, 0)(x + 2016) - \partial_y f(-2016, 0)(y - 0)}{\sqrt{(x + 2016)^2 + (y - 0)^2}} = \frac{(x + 2016)y^2}{((x + 2016)^2 + y^2)^{3/2}}$; comme $h(x, x + 2016) = \frac{1}{2^{3/2}} \neq 0$, alors f n'est pas différentiable en $(-2016, 0)$.

3. Comme f n'est pas différentiable en $(-2016, 0)$, elle n'est pas de classe \mathcal{C}^1 en $(-2016, 0)$, i.e. le gradient n'est pas continu en $(-2016, 0)$. Si on a oublié ce théorème on peut le prouver directement : $\partial_y f(x, x + 2016) = \frac{1}{2} \neq \partial_y f(-2016, 0) = 0$ on conclut que $\partial_x f$ n'est pas continue en $(-2016, 0)$, donc f n'est pas de classe \mathcal{C}^1 en $(-2016, 0)$.

Exercice 3.30 (Continuité, dérivabilité, différentiabilité)

Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction ainsi définie

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

1. Est-elle continue sur \mathbb{R}^2 ?
2. Calculer $\nabla f(x, y)$.
3. La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$?
4. Que peut-on conclure sur la différentiabilité de la fonction f sur \mathbb{R}^2 ?

Correction

1. La fonction est clairement continue dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Elle est aussi continue en $(0, 0)$ car

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} = \lim_{\substack{\rho \rightarrow 0 \\ \forall \theta}} \rho^2 \cos^2(\theta) \sin^2(\theta) \leq \lim_{\rho \rightarrow 0} \rho^2 = 0 = f(0, 0).$$

f est donc continue sur \mathbb{R}^2 .

2. Pour $(x, y) \neq (0, 0)$ on a

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} \partial_x f(x, y) \\ \partial_y f(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2} \\ \frac{2x^4y}{(x^2+y^2)^2} \end{pmatrix}.$$

Pour $(x, y) = (0, 0)$ on a

$$\nabla f(0, 0) = \begin{pmatrix} \partial_x f(0, 0) \\ \partial_y f(0, 0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} \\ \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y - 0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

3. On a déjà vérifié que la fonction est continue sur \mathbb{R}^2 . Vérifions si ses dérivées partielles sont continues sur \mathbb{R}^2 . On a

$$\partial_x f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \partial_x f(x, y) = \lim_{\substack{\rho \rightarrow 0 \\ \forall \theta}} \frac{2\rho^5 (\cos(\theta) \sin^4(\theta))}{\rho^4} = \lim_{\rho \rightarrow 0} 2\rho = 0 = \partial_x f(0, 0)$$

$$\partial_y f(x, y) = \begin{cases} \frac{2x^4y}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \partial_y f(x, y) = \lim_{\substack{\rho \rightarrow 0 \\ \forall \theta}} \frac{2\rho^5 (\cos^4 \theta \sin(\theta))}{\rho^4} = \lim_{\rho \rightarrow 0} 2\rho = 0 = \partial_y f(0, 0),$$

la fonction est donc de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$.

4. Puisque toute fonction de classe $\mathcal{C}^1(\Omega)$ est différentiable sur Ω , on conclut que f est différentiable sur \mathbb{R}^2 .

Exercice 3.31 (Continuité, dérivabilité, différentiabilité)

Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction ainsi définie

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

1. Est-elle continue sur \mathbb{R}^2 ?
2. Calculer $\nabla f(x, y)$.
3. La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$?
4. Que peut-on conclure sur la différentiabilité de la fonction f sur \mathbb{R}^2 ?

Correction

1. La fonction est clairement continue dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Elle est aussi continue en $(0, 0)$ car

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 y^2}{x^2 + y^2} = \lim_{\substack{\rho \rightarrow 0 \\ \forall \theta}} \rho^3 \cos^3(\theta) \sin^2(\theta) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \rho^3 = 0 = f(0, 0).$$

f est donc continue sur \mathbb{R}^2 .

2. Pour $(x, y) \neq (0, 0)$ on a

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} \partial_x f(x, y) \\ \partial_y f(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x^2 y^2 (x^2 + 3y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \\ \frac{2x^3 y}{(x^2 + y^2)^2} \end{pmatrix}.$$

Pour $(x, y) = (0, 0)$ on a

$$\nabla f(0, 0) = \begin{pmatrix} \partial_x f(0, 0) \\ \partial_y f(0, 0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} \\ \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y - 0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

3. On a déjà vérifié que la fonction est continue sur \mathbb{R}^2 . Vérifions si ses dérivées partielles sont continues sur \mathbb{R}^2 . On a

$$\partial_x f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2 (x^2 + 3y^2)}{(x^2 + y^2)^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \partial_x f(x, y) = \lim_{\substack{\rho \rightarrow 0 \\ \forall \theta}} \frac{\rho^6 \cos^2(\theta) \sin^2(\theta) (\cos^2(\theta) + 3 \sin^2(\theta))}{\rho^4} = \lim_{\rho \rightarrow 0} 4\rho^2 = 0 = \partial_x f(0, 0)$$

$$\partial_y f(x, y) = \begin{cases} \frac{2x^3 y}{(x^2 + y^2)^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \partial_y f(x, y) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{2\rho^6 (\cos^5(\theta) \sin(\theta))}{\rho^4} = \lim_{\rho \rightarrow 0} 2\rho^2 = 0 = \partial_y f(0, 0),$$

la fonction est donc de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$.

4. Puisque toute fonction de classe $\mathcal{C}^1(\Omega)$ est différentiable sur Ω , on conclut que f est différentiable sur \mathbb{R}^2 .

Exercice 3.32 (Continuité, dérivabilité, différentiabilité)

Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction ainsi définie

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

1. Est-elle continue sur \mathbb{R}^2 ?
2. Calculer $\nabla f(x, y)$.
3. La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$?
4. Que peut-on conclure sur la différentiabilité de la fonction f sur \mathbb{R}^2 ?

Correction

1. La fonction est clairement continue dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Elle est aussi continue en $(0, 0)$ car

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^3}{x^2 + y^2} = \lim_{\substack{\rho \rightarrow 0 \\ \forall \theta}} \rho^3 \cos^2(\theta) \sin^3(\theta) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \rho^3 = 0 = f(0, 0).$$

f est donc continue sur \mathbb{R}^2 .

2. Pour $(x, y) \neq (0, 0)$ on a

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} \partial_x f(x, y) \\ \partial_y f(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2xy^5}{(x^2 + y^2)^2} \\ \frac{x^2 y^2 (3x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \end{pmatrix}.$$

Pour $(x, y) = (0, 0)$ on a

$$\nabla f(0, 0) = \begin{pmatrix} \partial_x f(0, 0) \\ \partial_y f(0, 0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} \\ \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y - 0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

3. On a déjà vérifié que la fonction est continue sur \mathbb{R}^2 . Vérifions si ses dérivées partielles sont continues sur \mathbb{R}^2 . On a

$$\partial_x f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy^5}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \partial_x f(x, y) = \lim_{\substack{\rho \rightarrow 0 \\ \forall \theta}} \frac{2\rho^6(\cos(\theta)\sin^5(\theta))}{\rho^4} = \lim_{\rho \rightarrow 0} 2\rho^2 = 0 = \partial_x f(0, 0)$$

$$\partial_y f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2 (3x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \partial_y f(x, y) = \lim_{\substack{\rho \rightarrow 0 \\ \forall \theta}} \frac{\rho^6(3\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta))}{\rho^4} = \lim_{\rho \rightarrow 0} 4\rho^2 = 0 = \partial_y f(0, 0),$$

la fonction est donc de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$.

4. Puisque toute fonction de classe $\mathcal{C}^1(\Omega)$ est différentiable sur Ω , on conclut que f est différentiable sur \mathbb{R}^2 .

Exercice 3.33 (Continuité, dérivabilité, différentiabilité)

Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction ainsi définie

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2)^3 \cos\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

1. Est-elle continue sur \mathbb{R}^2 ?
2. Calculer $\nabla f(x, y)$.
3. La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$?
4. Sans faire de calculs, que peut-on conclure sur la différentiabilité de la fonction f sur \mathbb{R}^2 ?

Correction

1. La fonction est clairement continue dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Elle est aussi continue en $(0, 0)$ car

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \lim_{\substack{\rho \rightarrow 0 \\ \forall \theta}} \rho^6 \cos\left(\frac{1}{\rho^2}\right) = 0 = f(0, 0).$$

f est donc continue sur \mathbb{R}^2 .

2. Pour $(x, y) \neq (0, 0)$ on a

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} \partial_x f(x, y) \\ \partial_y f(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x(x^2 + y^2)^2 \cos\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) + 2x(x^2 + y^2) \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) \\ 6y(x^2 + y^2)^2 \cos\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) + 2y(x^2 + y^2) \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) \end{pmatrix}.$$

Pour $(x, y) = (0, 0)$ on a

$$\nabla f(0, 0) = \begin{pmatrix} \partial_x f(0, 0) \\ \partial_y f(0, 0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} \\ \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y - 0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

3. On a déjà vérifié que la fonction est continue sur \mathbb{R}^2 . Vérifions si ses dérivées partielles sont continues sur \mathbb{R}^2 . On a

$$\partial_x f(x, y) = \begin{cases} 6x(x^2 + y^2)^2 \cos\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) + 2x(x^2 + y^2) \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \partial_x f(x, y) = \lim_{\substack{\rho \rightarrow 0 \\ \forall \theta}} 6\rho^5 \cos(\theta) \cos\left(\frac{1}{\rho^2}\right) + 2\rho^3 \cos(\theta) \sin\left(\frac{1}{\rho^2}\right) = 0 = \partial_x f(0, 0)$$

$$\partial_y f(x, y) = \begin{cases} 6y(x^2 + y^2)^2 \cos\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) + 2y(x^2 + y^2) \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \partial_y f(x, y) = \lim_{\substack{\rho \rightarrow 0 \\ \forall \theta}} 6\rho^5 \sin(\theta) \cos\left(\frac{1}{\rho^2}\right) + 2\rho^3 \sin(\theta) \sin\left(\frac{1}{\rho^2}\right) = 0 = \partial_y f(0, 0),$$

la fonction est donc de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$.

4. Puisque toute fonction de classe $\mathcal{C}^1(\Omega)$ est différentiable sur Ω , on conclut que f est différentiable sur \mathbb{R}^2 .

Exercice 3.34 (Continuité, dérivabilité, différentiabilité)

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction ainsi définie

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^4}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

1. La fonction f est-elle continue sur \mathbb{R}^2 ?
2. Calculer $\nabla f(x, y)$ pour $(x, y) \neq (0, 0)$; calculer ensuite $\nabla f(0, 0)$. La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$?
3. La fonction f est-elle différentiable sur \mathbb{R}^2 ?

Correction

1. La fonction est clairement continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. De plus

$$\frac{y^4}{x^2 + y^2} = \frac{(r \sin(\theta))^4}{(r \cos(\theta))^2 + (r \sin(\theta))^2} = r^2 \sin^4(\theta) \leq r^2 \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0$$

d'où

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0 = f(0, 0).$$

f est donc continue sur \mathbb{R}^2 .

2. $\nabla f(x, y)$ est le vecteur de composantes $\partial_x f(x, y)$ et $\partial_y f(x, y)$ et on a :

$$\partial_x f(x, y) = \begin{cases} \frac{-2xy^4}{(x^2 + y^2)^2}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = 0, & \text{sinon;} \end{cases}$$

$$\partial_y f(x, y) = \begin{cases} 2y^3 \frac{2x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y - 0} = 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Étant donné que

$$\left| \frac{-2xy^4}{(x^2 + y^2)^2} \right| = 2 \left| \frac{(r \cos(\theta))(r \sin(\theta))^4}{((r \cos(\theta))^2 + (r \sin(\theta))^2)^2} \right| \leq 2r \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0$$

et

$$\left| \frac{2y^3(2x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \right| = 2 \left| \frac{(r \sin(\theta))^3(2(r \cos(\theta))^2 + (r \sin(\theta))^2)^2}{((r \cos(\theta))^2 + (r \sin(\theta))^2)^2} \right| \leq 18r^3 \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0$$

on a

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \partial_x f(x, y) = 0 = \partial_x f(0, 0),$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \partial_y f(x, y) = 0 = \partial_y f(0, 0).$$

La fonction f est donc de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$.

3. Étant de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$, f est différentiable sur \mathbb{R}^2 . Si on ne se rappelle pas du théorème on peut le vérifier directement par la définition : une application $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est différentiable en $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ ssi

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{f(x, y) - f(x_0, y_0) - \partial_x f(x_0, y_0)(x - x_0) - \partial_y f(x_0, y_0)(y - y_0)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0.$$

On a bien

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - f(x_0,y_0) - \partial_x f(x_0,y_0)(x-x_0) - \partial_y f(x_0,y_0)(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y^4}{(x^2+y^2)^{3/2}} = 0$$

car

$$\frac{y^4}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \frac{(r \sin(\theta))^4}{((r \cos(\theta))^2 + (r \sin(\theta))^2)^{3/2}} \leq r \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0.$$

Exercice 3.35 (Continuité, dérivabilité, différentiabilité)

Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction ainsi définie

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1. La fonction f est-elle continue sur \mathbb{R}^2 ?
2. Calculer $\nabla f(x,y)$ pour $(x,y) \neq (0,0)$; calculer ensuite $\nabla f(0,0)$.
3. La fonction f est-elle différentiable sur \mathbb{R}^2 ?

Correction

1. La fonction est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ mais elle n'est pas continue sur \mathbb{R}^2 car si on considère la restriction de f à la courbe $y = x$, qui passe par $(0,0)$, on a

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x,x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2x} \neq f(0,0).$$

2. $\nabla f(x,y)$ est le vecteur de composantes $\partial_x f(x,y)$ et $\partial_y f(x,y)$ et on a :

$$\partial_x f = \begin{cases} \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x-0} = 0, & \text{sinon;} \end{cases} \quad \partial_y f = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ \mathbb{A}, & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\text{car } \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y-0} = \infty.$$

3. N'étant pas continue, f n'est pas différentiable sur \mathbb{R}^2 .

Exercice 3.36 (Continuité, dérivabilité, différentiabilité)

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}^2 par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y + x y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. La fonction f est-elle continue en $(0,0)$?
2. Déterminer si les dérivées partielles $\partial_x f(0,0)$ et $\partial_y f(0,0)$ existent et les calculer le cas échéant.
3. La fonction f est-elle de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 ?
4. La fonction f est-elle différentiable en $(0,0)$?

Correction

1. On étudie la limite

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y + x y^2}{x^2 + y^2}.$$

On a

$$\frac{x^2 y + x y^2}{x^2 + y^2} = xy \frac{x+y}{x^2+y^2} = r \cos(\vartheta) \sin(\vartheta) (\cos(\vartheta) + \sin(\vartheta)) \xrightarrow[r \rightarrow 0]{\forall \vartheta} 0$$

car $\left| r \cos(\vartheta) \sin(\vartheta) (\cos(\vartheta) + \sin(\vartheta)) \right| \leq 2r$. On en déduit que la limite de $f(x,y)$ quand (x,y) tend vers $(0,0)$ est $0 = f(0,0)$. La fonction est donc continue en $(0,0)$.

2. Attention : il faut revenir à la définition de dérivée partielle en un point puisque la fonction au point $(0, 0)$ n'est pas définie de la même façon que sur le reste du domaine.

$$\partial_x f(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0+t, 0) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(0+t)0 - \frac{(0+t)+0}{(0+t)^2+0^2} - 0}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} 0 = 0.$$

La dérivée partielle par rapport à x en $(0, 0)$ existe et est égale à 0.

La fonction est symétrique en x et y , donc la dérivée partielle par rapport à y en $(0, 0)$ existe et est égale à 0.

3. Ici on doit calculer la dérivée partielle sur le reste du domaine et vérifier si elle est continue ou non en $(0, 0)$ qui est le seul point qui peut poser des problèmes.

$$\partial_x \left(\frac{x^2 y + x y^2}{x^2 + y^2} \right) = \frac{(2xy + y^2)(x^2 + y^2) - (x^2 y + x y^2)(2x)}{(x^2 + y^2)^2} = y^2 \frac{y^2 - x^2 + 2xy}{(x^2 + y^2)^2}.$$

On remarque que sur la droite $y = x$ elle vaut $1/2 \neq \partial_x f(0, 0)$. On en déduit que la dérivée partielle par rapport à x n'est pas continue en $(0, 0)$ donc la fonction f n'est pas de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 .

4. La fonction f est différentiable en $(0, 0)$ ssi

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y) - f(0, 0) - \partial_x f(0, 0)(x-0) - \partial_y f(0, 0)(y-0)}{\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2}} = 0.$$

On a

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y) - f(0, 0) - \partial_x f(0, 0)(x-0) - \partial_y f(0, 0)(y-0)}{\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} xy \frac{x+y}{(x^2 + y^2)^{3/2}}.$$

On remarque que sur la droite $y = x$ elle n'existe pas. La fonction f n'est pas différentiable en $(0, 0)$.

Exercice 3.37 (Continuité, dérivabilité, différentiabilité)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ une constante et $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction ainsi définie

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x^2+y^2)}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ \alpha & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

1. Étude de la fonction sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$:
 - 1.1. calculer le gradient de f pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$;
 - 1.2. montrer que f est de classe \mathcal{C}^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$; que peut-on conclure sur la différentiabilité de f ?
2. Étude de la fonction en $(0, 0)$:
 - 2.1. calculer le DL de $\ln(1+r^2)$ à l'ordre 4 lorsque $r \simeq 0$;
 - 2.2. calculer $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ et en déduire qu'il existe une valeur α_0 de α (à préciser) pour laquelle f est continue en $(0, 0)$;
 - 2.3. montrer que f admet des dérivées partielles en $(0, 0)$ si et seulement si $\alpha = \alpha_0$ et calculer $\nabla f(0, 0)$;
 - 2.4. soit $\alpha = \alpha_0$, montrer que f est de classe \mathcal{C}^1 en $(0, 0)$; que peut-on déduire sur la différentiabilité en $(0, 0)$?
 - 2.5. soit $\alpha = \alpha_0$, utiliser la définition pour prouver qu'effectivement f est différentiable en $(0, 0)$.

Correction

1. Étude de la fonction sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.
 - 1.1. Le gradient de f pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ est le vecteur de composantes

$$\partial_x f(x, y) = \frac{2x}{(x^2 + y^2)} \left(\frac{1}{1 + x^2 + y^2} - \frac{\ln(1 + x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} \right), \quad \partial_y f(x, y) = \frac{2y}{(x^2 + y^2)} \left(\frac{1}{1 + x^2 + y^2} - \frac{\ln(1 + x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} \right).$$

- 1.2. f et ses dérivées partielles sont continues sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ car composition et quotients de fonctions continues dont les dénominateurs ne s'annulent pas, f est donc de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\})$. Comme toute fonction de classe \mathcal{C}^1 est différentiable, on conclut que f est différentiable sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.
2. Étude de la fonction en $(0, 0)$.
 - 2.1. $\ln(1+x) \simeq x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ lorsque $x \simeq 0$ donc $\ln(1+r^2) \simeq r^2 - \frac{r^4}{2} + o(r^4)$ lorsque $r \simeq 0$.

2.2. Passons en coordonnées polaires :

$$\tilde{f} : \mathbb{R}_+^* \times [0; 2\pi[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$(r, \vartheta) \mapsto \tilde{f}(r, \vartheta) \equiv f(r \cos(\vartheta), r \sin(\vartheta)) = \frac{\ln(1+r^2)}{r^2}.$$

Comme $\tilde{f}(r, \vartheta) \xrightarrow[r \rightarrow 0]{} 1$ pour tout ϑ , alors $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 1$. Pour que f soit continue en $(0, 0)$ il faut que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = f(0, 0)$ donc $\alpha_0 = 1$.

2.3. Le gradient de f en $(0, 0)$ est le vecteur de composantes

$$\partial_x f(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\ln(1+x^2)}{x^2} - \alpha}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{\ln(1+x^2)}{x^2} - \alpha \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{x^2 - \frac{x^4}{2}}{x^2} - \alpha \right), = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \alpha}{x} - \frac{x}{2},$$

$$\partial_y f(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y - 0} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\frac{\ln(1+y^2)}{y^2} - \alpha}{y}.$$

Ces deux limites existent et sont finies si et seulement si $\alpha = 1$. Dans ce cas, $\nabla f(0, 0) = (0, 0)^T$.

2.4. Pour que f soit de classe \mathcal{C}^1 en $(0, 0)$ il ne reste à vérifier que les dérivées partielles premières sont continues, autrement dit il faut que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \partial_x f(x, y) = \partial_x f(0, 0) \quad \text{et} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \partial_y f(x, y) = \partial_y f(0, 0).$$

Comme

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \partial_x f(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2x}{(x^2 + y^2)} \left(\frac{1}{1 + x^2 + y^2} - \frac{\ln(1 + x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} \right)$$

$$= \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ \forall \vartheta}} \frac{2r \cos(\vartheta)}{r^2} \left(\frac{1}{1 + r^2} - \frac{\ln(1 + r^2)}{r^2} \right) = \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ \forall \vartheta}} \frac{2 \cos(\vartheta)}{r} \left(\frac{1}{1 + r^2} - 1 + \frac{r^2}{2} \right) = \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ \forall \vartheta}} \frac{r(r^2 - 1)}{(r^2 + 1)} \cos(\vartheta) = 0,$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \partial_y f(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2y}{(x^2 + y^2)} \left(\frac{1}{1 + x^2 + y^2} - \frac{\ln(1 + x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} \right)$$

$$= \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ \forall \vartheta}} \frac{2r \sin(\vartheta)}{r^2} \left(\frac{1}{1 + r^2} - \frac{\ln(1 + r^2)}{r^2} \right) = \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ \forall \vartheta}} \frac{r(r^2 - 1)}{(r^2 + 1)} \sin(\vartheta) = 0,$$

on a bien $\partial_x f$ et $\partial_y f$ sont continues en $(0, 0)$. Comme f aussi est continue en $(0, 0)$, on conclut que f est de classe \mathcal{C}^1 en $(0, 0)$ ce qui implique que f est différentiable en $(0, 0)$.

2.5. Pour prouver que f est différentiable en $(0, 0)$ il faut montrer que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y) - f(0, 0) - \partial_x f(0, 0)(x - 0) - \partial_y f(0, 0)(y - 0)}{\sqrt{(x - 0)^2 + (y - 0)^2}} = 0.$$

Notons $h(x, y) = \frac{f(x, y) - f(0, 0) - \partial_x f(0, 0)(x - 0) - \partial_y f(0, 0)(y - 0)}{\sqrt{(x - 0)^2 + (y - 0)^2}} = \frac{\frac{\ln(1+x^2+y^2)}{x^2+y^2} - 1}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Passons en coordonnées polaires :

$$\tilde{h}(r, \vartheta) = h(r \cos(\vartheta), r \sin(\vartheta)) = \frac{1}{r} \left(\frac{\ln(1+r^2)}{r^2} - 1 \right) \simeq -\frac{r}{2} \xrightarrow[r \rightarrow 0]{} 0.$$

donc f est bien différentiable en $(0, 0)$.

Exercice 3.38 (Continuité, dérivabilité, différentiabilité)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ une constante et $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction ainsi définie

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{(1 + x^2 + y^2)^2 - 1}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ \alpha & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

1. Étude de la fonction sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

1.1. Calculer le gradient de f_α pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

- 1.2. Montrer que f_α est de classe \mathcal{C}^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$; que peut-on conclure sur la différentiabilité de f_α ?
2. Étude de la fonction en $(0, 0)$.
- 2.1. Calculer $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f_\alpha(x, y)$ et en déduire qu'il existe une valeur α_0 de α (à préciser) pour laquelle f_α est continue en $(0, 0)$.
- 2.2. Montrer que f_α admet des dérivées partielles en $(0, 0)$ si et seulement si $\alpha = \alpha_0$ et calculer $\nabla f_{\alpha_0}(0, 0)$.
- 2.3. En utilisant la définition, prouver que f_{α_0} est différentiable en $(0, 0)$.
- 2.4. Montrer que f_{α_0} est de classe \mathcal{C}^1 en $(0, 0)$.

Correction

1. Étude de la fonction sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.
- 1.1. Le gradient de f_α pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ est le vecteur de composantes

$$\partial_x f_\alpha(x, y) = \frac{2x}{x^2 + y^2} \left(2(1 + x^2 + y^2) - \frac{(1 + x^2 + y^2)^2 - 1}{x^2 + y^2} \right), \quad \partial_y f_\alpha(x, y) = \frac{2y}{x^2 + y^2} \left(2(1 + x^2 + y^2) - \frac{(1 + x^2 + y^2)^2 - 1}{x^2 + y^2} \right).$$

- 1.2. f_α et ses dérivées partielles sont continues sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ car composition et quotients de fonctions continues dont les dénominateurs ne s'annulent pas, f_α est donc de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\})$. Comme toute fonction de classe \mathcal{C}^1 est différentiable, on conclut que f_α est différentiable sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.
2. Étude de la fonction en $(0, 0)$.
- 2.1. Passons en coordonnées polaires :

$$\begin{aligned} \tilde{f}_\alpha : \mathbb{R}_+^* \times [0; 2\pi[&\rightarrow \mathbb{R} \\ (r, \vartheta) &\mapsto \tilde{f}_\alpha(r, \vartheta) \equiv f_\alpha(r \cos(\vartheta), r \sin(\vartheta)) = \frac{(1 + r^2)^2 - 1}{r^2} = r^2 + 2. \end{aligned}$$

Comme $\tilde{f}_\alpha(r, \vartheta) \xrightarrow[r \rightarrow 0]{\forall \vartheta} 2$ alors $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f_\alpha(x, y) = 2$.

Pour que f_α soit continue en $(0, 0)$ il faut que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f_\alpha(x, y) = f_\alpha(0, 0)$ donc pour que f_α soit continue en $(0, 0)$ il faut que α soit égal à $\alpha_0 = 2$.

- 2.2. Le gradient de f_α en $(0, 0)$ est le vecteur de composantes

$$\begin{aligned} \partial_x f_\alpha(0, 0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f_\alpha(x, 0) - f_\alpha(0, 0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{(1+x^2)^2-1}{x^2} - \alpha}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(x + \frac{2-\alpha}{x} \right), \\ \partial_y f_\alpha(0, 0) &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f_\alpha(0, y) - f_\alpha(0, 0)}{y - 0} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\frac{(1+y^2)^2-1}{y^2} - \alpha}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \left(y + \frac{2-\alpha}{y} \right). \end{aligned}$$

Ces deux limites existent et sont finies si et seulement si $\alpha = 2$. Dans ce cas, $\nabla f_\alpha(0, 0) = (0, 0)^T$.

- 2.3. Pour prouver que f_{α_0} est différentiable en $(0, 0)$ il faut montrer que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f_{\alpha_0}(x, y) - f_{\alpha_0}(0, 0) - \partial_x f_{\alpha_0}(0, 0)(x-0) - \partial_y f_{\alpha_0}(0, 0)(y-0)}{\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2}} = 0.$$

Notons $h(x, y) = \frac{f_{\alpha_0}(x, y) - f_{\alpha_0}(0, 0) - \partial_x f_{\alpha_0}(0, 0)(x-0) - \partial_y f_{\alpha_0}(0, 0)(y-0)}{\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2}} = \frac{\frac{(1+x^2+y^2)^2-1}{x^2+y^2} - 2}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Passons en coordonnées polaires :

$$\tilde{h}(r, \vartheta) = h(r \cos(\vartheta), r \sin(\vartheta)) = r \xrightarrow[r \rightarrow 0]{\forall \vartheta} 0$$

donc f_{α_0} est bien différentiable en $(0, 0)$.

- 2.4. Pour que f_{α_0} soit de classe \mathcal{C}^1 en $(0, 0)$ il faut qu'elle et ses dérivées partielles premières soient continues, donc il faut que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f_{\alpha_0}(x, y) = f_{\alpha_0}(0, 0), \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \partial_x f_{\alpha_0}(x, y) = \partial_x f_{\alpha_0}(0, 0) \quad \text{et} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \partial_y f_{\alpha_0}(x, y) = \partial_y f_{\alpha_0}(0, 0).$$

Comme

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f_{\alpha_0}(x, y) = 2,$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \partial_x f_{\alpha_0}(x,y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2x}{(x^2+y^2)} (2(1+x^2+y^2) - f_{\alpha_0}(x,y)) = \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ \forall \vartheta}} 4r \cos(\vartheta) = 0,$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \partial_y f_{\alpha_0}(x,y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2y}{(x^2+y^2)} (2(1+x^2+y^2) - f_{\alpha_0}(x,y)) = \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ \forall \vartheta}} 4r \sin(\vartheta) = 0,$$

par conséquent f_{α_0} , $\partial_x f_{\alpha_0}$ et $\partial_y f_{\alpha_0}$ sont continues en $(0,0)$ et on conclut que f_{α_0} est de classe \mathcal{C}^1 en $(0,0)$.

Exercice 3.39 (Continuité, dérivabilité, différentiabilité)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ une constante et $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction ainsi définie

$$f_{\alpha}(x,y) = \begin{cases} \frac{e^{x^2+y^2} - 1}{x^2 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ \alpha & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1. Étude de la fonction sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

1.1. Calculer le gradient de f_{α} pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

1.2. Montrer que f_{α} est de classe \mathcal{C}^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$; que peut-on conclure sur la différentiabilité de f_{α} ?

2. Étude de la fonction en $(0,0)$.

2.1. Calculer $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f_{\alpha}(x,y)$ et en déduire qu'il existe une valeur α_0 de α (à préciser) pour laquelle f_{α} est continue en $(0,0)$.

2.2. Montrer que f_{α} admet des dérivées partielles en $(0,0)$ si et seulement si $\alpha = \alpha_0$ et calculer $\nabla f_{\alpha_0}(0,0)$.

2.3. En utilisant la définition, prouver que f_{α_0} est différentiable en $(0,0)$.

2.4. Montrer que f_{α_0} est de classe \mathcal{C}^1 en $(0,0)$.

Correction

1. Étude de la fonction sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

1.1. Le gradient de f_{α} pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ est le vecteur de composantes

$$\partial_x f_{\alpha}(x,y) = \frac{2x}{x^2+y^2} (e^{x^2+y^2} - f_{\alpha}(x,y)), \quad \partial_y f_{\alpha}(x,y) = \frac{2y}{x^2+y^2} (e^{x^2+y^2} - f_{\alpha}(x,y)).$$

1.2. f_{α} et ses dérivées partielles sont continues sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ car composition et quotients de fonctions continues dont les dénominateurs ne s'annulent pas, f_{α} est donc de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$. Comme toute fonction de classe \mathcal{C}^1 est différentiable, on conclut que f_{α} est différentiable sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

2. Étude de la fonction en $(0,0)$.

2.1. Passons en coordonnées polaires :

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{\alpha}: \mathbb{R}_+^* \times [0; 2\pi[&\rightarrow \mathbb{R} \\ (r, \vartheta) &\mapsto \tilde{f}_{\alpha}(r, \vartheta) \equiv f(r \cos(\vartheta), r \sin(\vartheta)) = \frac{e^{r^2} - 1}{r^2}. \end{aligned}$$

Lorsque $r \simeq 0$, le développement limité de $e^{(r^2)}$ à l'ordre 4 s'écrit $e^{(r^2)} \simeq 1 + r^2 + \frac{r^4}{2} + o(r^4)$, ainsi

$$\tilde{f}_{\alpha}(r, \vartheta) = \frac{e^{r^2} - 1}{r^2} \simeq \frac{1 + r^2 + o(r^3) - 1}{r^2} = 1 + o(r)$$

donc

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f_{\alpha}(x,y) = \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ \forall \vartheta}} \tilde{f}_{\alpha}(r, \vartheta) = 1.$$

Pour que f_{α} soit continue en $(0,0)$ il faut que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f_{\alpha}(x,y) = f_{\alpha}(0,0)$ donc pour que f_{α} soit continue en $(0,0)$ il faut que α soit égal à $\alpha_0 = 1$.

2.2. Le gradient de f_{α} en $(0,0)$ est le vecteur de composantes

$$\begin{aligned} \partial_x f_{\alpha}(0,0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{e^{x^2} - 1}{x^2} - \alpha}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{1 + x^2 + o(x^3) - 1}{x^2} - \alpha \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + o(x) - \alpha}{x}, \\ \partial_y f_{\alpha}(0,0) &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f_{\alpha}(0,y) - f_{\alpha}(0,0)}{y-0} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1 + o(y) - \alpha}{y}. \end{aligned}$$

Ces deux limites existent et sont finies si et seulement si $\alpha = 1$. Dans ce cas, $\nabla f_\alpha(0,0) = (0,0)^T$.

2.3. Pour prouver que f_{α_0} est différentiable en $(0,0)$ il faut montrer que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} h(x,y) = 0, \quad \text{avec} \quad h(x,y) = \frac{f_{\alpha_0}(x,y) - f_{\alpha_0}(0,0) - \partial_x f_{\alpha_0}(0,0)(x-0) - \partial_y f_{\alpha_0}(0,0)(y-0)}{\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2}} = \frac{e^{x^2+y^2} - 1}{x^2+y^2}.$$

Passons aux coordonnées polaires :

$$\tilde{h}: \mathbb{R}_+^* \times [0; 2\pi[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$(r, \vartheta) \mapsto \tilde{h}(r, \vartheta) \equiv h(r \cos(\vartheta), r \sin(\vartheta)) = \frac{e^{(r^2)} - 1}{r^2} - 1 = \frac{e^{(r^2)} - 1 - r^2}{r^3}$$

donc, lorsque $r \simeq 0$,

$$\tilde{h}(r, \vartheta) \simeq \frac{1 + r^2 + \frac{r^4}{2} + o(r^4) - 1 - r^2}{r^3} = \frac{r}{2} + o(r) \xrightarrow[r \rightarrow 0]{\forall \vartheta} 0$$

et on conclut que f_{α_0} est bien différentiable en $(0,0)$.

2.4. Pour que f_{α_0} soit de classe \mathcal{C}^1 en $(0,0)$ il faut qu'elle et ses dérivées partielles premières soient continues, donc il faut que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f_{\alpha_0}(x,y) = f_{\alpha_0}(0,0), \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \partial_x f_{\alpha_0}(x,y) = \partial_x f_{\alpha_0}(0,0) \quad \text{et} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \partial_y f_{\alpha_0}(x,y) = \partial_y f_{\alpha_0}(0,0).$$

Comme

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f_{\alpha_0}(x,y) &= 1, \\ \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \partial_x f_{\alpha_0}(x,y) &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2x}{x^2+y^2} (e^{x^2+y^2} - f_{\alpha_0}(x,y)) = \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ \forall \vartheta}} (r + o(r)) \cos(\vartheta) = 0, \\ \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \partial_y f_{\alpha_0}(x,y) &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2y}{x^2+y^2} (e^{x^2+y^2} - f_{\alpha_0}(x,y)) = \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ \forall \vartheta}} (r + o(r)) \sin(\vartheta) = 0, \end{aligned}$$

par conséquent f_{α_0} , $\partial_x f_{\alpha_0}$ et $\partial_y f_{\alpha_0}$ sont continues en $(0,0)$ et on conclut que f_{α_0} est de classe \mathcal{C}^1 en $(0,0)$.

Exercice 3.40 (Continuité, dérivabilité, différentiabilité)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ une constante et $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction ainsi définie

$$f_\alpha(x,y) = \begin{cases} \frac{\cos(x^2+y^2) - 1}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ \alpha & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1. Étude de la fonction sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

1.1. Calculer le gradient de f_α pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

1.2. Montrer que f_α est de classe \mathcal{C}^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$; que peut-on conclure sur la différentiabilité de f_α ?

2. Étude de la fonction en $(0,0)$.

2.1. Calculer $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f_\alpha(x,y)$ et en déduire qu'il existe une valeur α_0 de α (à préciser) pour laquelle f_α est continue en $(0,0)$.

2.2. Montrer que f_α admet des dérivées partielles en $(0,0)$ si et seulement si $\alpha = \alpha_0$ et calculer $\nabla f_{\alpha_0}(0,0)$.

2.3. En utilisant la définition, prouver que f_{α_0} est différentiable en $(0,0)$.

2.4. Montrer que f_{α_0} est de classe \mathcal{C}^1 en $(0,0)$.

Correction

1. Étude de la fonction sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

1.1. Le gradient de f_α pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ est le vecteur de composantes

$$\partial_x f_\alpha(x,y) = \frac{-2x}{x^2+y^2} \left(\frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} + 2f_\alpha(x,y) \right), \quad \partial_y f_\alpha(x,y) = \frac{-2y}{x^2+y^2} \left(\frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} + 2f_\alpha(x,y) \right).$$

1.2. f_α et ses dérivées partielles sont continues sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ car composition et quotients de fonctions continues dont les dénominateurs ne s'annulent pas, f_α est donc de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\})$. Comme toute fonction de classe \mathcal{C}^1 est différentiable, on conclut que f_α est différentiable sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

2. Étude de la fonction en $(0, 0)$.

2.1. Passons en coordonnées polaires :

$$\begin{aligned} \tilde{f}_\alpha : \mathbb{R}_+^* \times [0; 2\pi[&\rightarrow \mathbb{R} \\ (r, \vartheta) &\mapsto \tilde{f}_\alpha(r, \vartheta) \equiv f(r \cos(\vartheta), r \sin(\vartheta)) = \frac{\cos(r^2) - 1}{r^4}. \end{aligned}$$

Lorsque $r \simeq 0$, le développement limité de $\cos(r^2)$ à l'ordre 6 s'écrit $\cos(r^2) \simeq 1 - \frac{r^4}{2} + \frac{r^6}{24} + o(r^6)$, ainsi

$$\tilde{f}_\alpha(r, \vartheta) = \frac{\cos(r^2) - 1}{r^4} \simeq \frac{1 - \frac{r^4}{2} + \frac{r^6}{24} + o(r^6) - 1}{r^4} = -\frac{1}{2} + o(r^2)$$

donc

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f_\alpha(x, y) = \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ \forall \vartheta}} \tilde{f}_\alpha(r, \vartheta) = -\frac{1}{2}.$$

Pour que f_α soit continue en $(0, 0)$ il faut que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f_\alpha(x, y) = f_\alpha(0, 0)$ donc pour que f_α soit continue en $(0, 0)$ il faut que α soit égal à $\alpha_0 = -\frac{1}{2}$.

2.2. Le gradient de f_α en $(0, 0)$ est le vecteur de composantes

$$\begin{aligned} \partial_x f_\alpha(0, 0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f_\alpha(x, 0) - f_\alpha(0, 0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\cos(x^2) - 1}{x^4} - \alpha}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{24} + o(x^6) - 1}{x^4} - \alpha = \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{2} - \alpha + \frac{x}{24} + o(x) \right) \\ \partial_y f_\alpha(0, 0) &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f_\alpha(0, y) - f_\alpha(0, 0)}{y - 0} = \lim_{y \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{2} - \alpha + \frac{y}{24} + o(y) \right). \end{aligned}$$

Ces deux limites existent et sont finies si et seulement si $\alpha = -\frac{1}{2}$. Dans ce cas, $\nabla f_\alpha(0, 0) = (0, 0)^T$.

2.3. Pour prouver que f_{α_0} est différentiable en $(0, 0)$ il faut montrer que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} h(x, y) = 0, \quad \text{avec} \quad h(x, y) = \frac{f_{\alpha_0}(x, y) - f_{\alpha_0}(0, 0) - \partial_x f_{\alpha_0}(0, 0)(x - 0) - \partial_y f_{\alpha_0}(0, 0)(y - 0)}{\sqrt{(x - 0)^2 + (y - 0)^2}} = \frac{\frac{\cos(x^2 + y^2) - 1}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{1}{2}}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Passons aux coordonnées polaires :

$$\begin{aligned} \tilde{h} : \mathbb{R}_+^* \times [0; 2\pi[&\rightarrow \mathbb{R} \\ (r, \vartheta) &\mapsto \tilde{h}(r, \vartheta) \equiv h(r \cos(\vartheta), r \sin(\vartheta)) = \frac{\frac{\cos(r^2) - 1}{r^4} + \frac{1}{2}}{r} = \frac{\cos(r^2) - 1 + \frac{r^4}{2}}{r^5} \end{aligned}$$

donc, lorsque $r \simeq 0$,

$$\tilde{h}(r, \vartheta) \simeq \frac{1 - \frac{r^4}{2} + \frac{r^6}{24} + o(r^6) - 1 + \frac{r^4}{2}}{r^5} = \frac{r}{24} + o(r) \xrightarrow[r \rightarrow 0]{\forall \vartheta} 0$$

et on conclut que f_{α_0} est bien différentiable en $(0, 0)$.

2.4. Pour que f_{α_0} soit de classe \mathcal{C}^1 en $(0, 0)$ il faut qu'elle et ses dérivées partielles premières soient continues, donc il faut que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f_{\alpha_0}(x, y) = f_{\alpha_0}(0, 0), \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \partial_x f_{\alpha_0}(x, y) = \partial_x f_{\alpha_0}(0, 0) \quad \text{et} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \partial_y f_{\alpha_0}(x, y) = \partial_y f_{\alpha_0}(0, 0).$$

On a

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f_{\alpha_0}(x, y) &= -\frac{1}{2}, \\ \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \partial_x f_{\alpha_0}(x, y) &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{-2x}{x^2 + y^2} \left(\frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} + 2f_{\alpha_0}(x, y) \right) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{-2x}{x^2 + y^2} \left(\frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} - 1 \right), \\ \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \partial_y f_{\alpha_0}(x, y) &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{-2y}{x^2 + y^2} \left(\frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} + 2f_{\alpha_0}(x, y) \right) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{-2y}{x^2 + y^2} \left(\frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} - 1 \right). \end{aligned}$$

Lorsque $r \simeq 0$, le développement limité de $\sin(r^2)$ à l'ordre 6 s'écrit $\sin(r^2) \simeq r^2 - \frac{r^6}{6} + o(r^6)$, ainsi

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f_{\alpha_0}(x,y) &= -\frac{1}{2}, \\ \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \partial_x f_{\alpha_0}(x,y) &= \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ \forall \vartheta}} \frac{-2r \cos(\vartheta)}{r^2} \left(\frac{\sin(r^2)}{r^2} - 1 \right) = \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ \forall \vartheta}} \frac{-2 \cos(\vartheta)}{r} \left(1 - \frac{r^4}{6} + o(r^4) - 1 \right) = 0, \\ \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \partial_y f_{\alpha_0}(x,y) &= \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ \forall \vartheta}} \frac{-2r \sin(\vartheta)}{r^2} \left(\frac{\sin(r^2)}{r^2} - 1 \right) = \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ \forall \vartheta}} \frac{-2 \sin(\vartheta)}{r} \left(1 - \frac{r^4}{6} + o(r^4) - 1 \right) = 0; \end{aligned}$$

par conséquent f_{α_0} , $\partial_x f_{\alpha_0}$ et $\partial_y f_{\alpha_0}$ sont continues en $(0,0)$ et on conclut que f_{α_0} est de classe \mathcal{C}^1 en $(0,0)$.

Exercice 3.41 (Continuité, dérivabilité, différentiabilité)

Soit $m \in \mathbb{N}$ et $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie comme suit :

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^m y}{x^2 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1. Étude de la fonction sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$:
 - 1.1. montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ pour tout $m \in \mathbb{N}$;
 - 1.2. calculer le gradient de f pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ pour tout $m \in \mathbb{N}$;
 - 1.3. montrer que f est de classe \mathcal{C}^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ pour tout $m \in \mathbb{N}$;
 - 1.4. que peut-on conclure sur la différentiabilité de f sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$?
2. Étude de la fonction en $(0,0)$:
 - 2.1. pour quelles valeurs de $m \in \mathbb{N}$ la fonction f est-elle continue en $(0,0)$?
 - 2.2. calculer le gradient de f en $(0,0)$ pour tout $m \in \mathbb{N}$;
 - 2.3. pour quelles valeurs de $m \in \mathbb{N}$ la fonction f est-elle différentiable en $(0,0)$?
 - 2.4. pour quelles valeurs de $m \in \mathbb{N}$ la fonction f est-elle de classe \mathcal{C}^1 en $(0,0)$?

Correction

1. Étude de la fonction sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
 - 1.1. f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ car quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas.
 - 1.2. Le gradient de f pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ est le vecteur de composantes

$$\partial_x f(x,y) = \frac{x^{m-1} y (m x^2 + m y^2 - 2 x^2)}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \partial_y f(x,y) = \frac{x^m (x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}.$$

- 1.3. f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$; ses dérivées partielles sont continues sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ car quotients de fonctions continues dont les dénominateurs ne s'annulent pas. Alors f est de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$.
- 1.4. Comme f est de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$ alors f est différentiable sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
2. Étude de la fonction en $(0,0)$.

2.1. Pour que f soit continue en $(0,0)$ il faut que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = f(0,0)$.

▷ Si $m = 0$, f s'écrit

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y}{x^2 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

qui n'est pas continue en $(0,0)$ car $f(x,0) = 0$ mais $f(x,x) = 1/(2x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \infty$.

▷ Si $m = 1$, f s'écrit

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

qui n'est pas continue en $(0,0)$ car $f(x,0) = 0$ mais $f(x,x) = 1/2$.

▷ Si $m > 1$, passons en coordonnées polaires : $x = r \cos(\vartheta)$, $y = r \sin(\vartheta)$,

$$\tilde{f}(r,\vartheta) = f(x(r,\vartheta), y(r,\vartheta)) = r^{m-1} \cos^m(\vartheta) \sin(\vartheta).$$

Comme $|\tilde{f}(r,\vartheta)| \leq r^{m-1} \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0$ alors $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0$ donc f est continue en $(0,0)$.

2.2. Le gradient de f en $(0, 0)$ est le vecteur de composantes

$$\partial_x f(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = 0, \quad \partial_y f(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y - 0} = 0.$$

2.3. f est différentiable en $(0, 0)$ si et seulement si

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(x, y) - f(0, 0) - \partial_x f(0, 0)(x - 0) - \partial_y f(0, 0)(y - 0)}{\sqrt{(x - 0)^2 + (y - 0)^2}} = 0.$$

De plus, toute fonction différentiable est continue.

▷ Si $m = 0$ ou $m = 1$, f n'est pas continue en $(0, 0)$ donc elle n'est pas différentiable en $(0, 0)$.

▷ Soit $m > 1$ et notons $h(x, y) = \frac{f(x, y) - f(0, 0) - \partial_x f(0, 0)(x - 0) - \partial_y f(0, 0)(y - 0)}{\sqrt{(x - 0)^2 + (y - 0)^2}} = \frac{x^m y}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$.

▷ Si $m = 2$, comme $h(y, y) = \frac{1}{2^{3/2}} \neq 0$, alors f n'est pas différentiable en $(0, 0)$.

▷ Si $m > 2$, passons en coordonnées polaires : $x = 0 + r \cos(\vartheta)$, $y = 0 + r \sin(\vartheta)$,

$$\tilde{h}(r, \vartheta) = h(x(r, \vartheta), y(r, \vartheta)) = r^{m-2} \cos^m(\vartheta) \sin(\vartheta).$$

Comme $|\tilde{h}(r, \vartheta)| \leq r^{m-2} \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0$ alors $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} h(x, y) = 0$ donc f est différentiable en $(0, 0)$.

2.4. Une fonction est de classe \mathcal{C}^1 si ses dérivées partielles sont continues, autrement dit si

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \partial_x f(x, y) = \partial_x f(0, 0) \quad \text{et} \quad \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \partial_y f(x, y) = \partial_y f(0, 0).$$

De plus, toute fonction de classe \mathcal{C}^1 est différentiable.

▷ Si $m = 0$ ou $m = 1$ ou $m = 2$, f n'est pas différentiable en $(0, 0)$ donc elle n'est pas de classe \mathcal{C}^1 en $(0, 0)$.

▷ Si $m > 2$, passons en coordonnées polaires : $x = 0 + r \cos(\vartheta)$, $y = 0 + r \sin(\vartheta)$,

$$\begin{cases} \tilde{\partial}_x f(r, \vartheta) = \partial_x f(x(r, \vartheta), y(r, \vartheta)) = r^{m-2} (m - \cos^2(\vartheta)) \cos^{m-1}(\vartheta) \sin(\vartheta), \\ \tilde{\partial}_y f(r, \vartheta) = \partial_y f(x(r, \vartheta), y(r, \vartheta)) = r^{m-2} (\cos^2(\vartheta) - \sin^2(\vartheta)) \cos^m(\vartheta). \end{cases}$$

Comme $|\tilde{\partial}_x f(r, \vartheta)| \leq m r^{m-2} \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0$ et $|\tilde{\partial}_y f(r, \vartheta)| \leq 2 r^{m-2} \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0$ alors

$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \partial_x f(x, y) = 0$ et $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \partial_y f(x, y) = 0$ donc f est de classe \mathcal{C}^1 en $(0, 0)$.

Exercice 3.42 (Continuité, dérivabilité, différentiabilité)

Soit $m \in \mathbb{N}$ et $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie comme suit :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^m y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

1. Étude de la fonction sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$:

- 1.1. montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ pour tout $m \in \mathbb{N}$;
- 1.2. calculer le gradient de f pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ pour tout $m \in \mathbb{N}$;
- 1.3. montrer que f est de classe \mathcal{C}^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ pour tout $m \in \mathbb{N}$;
- 1.4. que peut-on conclure sur la différentiabilité de f sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$?

2. Étude de la fonction en $(0, 0)$:

- 2.1. pour quelles valeurs de $m \in \mathbb{N}$ la fonction f est-elle continue en $(0, 0)$?
- 2.2. calculer le gradient de f en $(0, 0)$ pour tout $m \in \mathbb{N}$;
- 2.3. pour quelles valeurs de $m \in \mathbb{N}$ la fonction f est-elle différentiable en $(0, 0)$?
- 2.4. pour quelles valeurs de $m \in \mathbb{N}$ la fonction f est-elle de classe \mathcal{C}^1 en $(0, 0)$?

Correction

1. Étude de la fonction sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

- 1.1. f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ car quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas.
- 1.2. Le gradient de f pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ est le vecteur de composantes

$$\partial_x f(x, y) = \frac{(m-1)x^{m-1}y^2(x^2 + y^2) - x^m y^2(2x)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^{m-1}y^2(mx^2 + my^2 - 2x^2)}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$\partial_y f(x, y) = x^m \frac{2y(x^2 + y^2) - 2y^3}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2x^{m+2}y}{(x^2 + y^2)^2}.$$

- 1.3. f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$; ses dérivées partielles sont continues sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ car quotients de fonctions continues dont les dénominateurs ne s'annulent pas. Alors f est de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\})$.
- 1.4. Comme f est de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\})$ alors f est différentiable sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.
2. Étude de la fonction en $(0, 0)$.

2.1. Pour que f soit continue en $(0, 0)$ il faut que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = f(0, 0)$.

▷ Si $m = 0$, f s'écrit

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

qui n'est pas continue en $(0, 0)$ car $f(x, 0) = 0$ mais $f(x, x) = 1/2$.

▷ Si $m > 0$, passons en coordonnées polaires : $x = 0 + r \cos(\vartheta)$, $y = 0 + r \sin(\vartheta)$,

$$\tilde{f}(r, \vartheta) = f(x(r, \vartheta), y(r, \vartheta)) = r^m \cos^m(\vartheta) \sin^2(\vartheta).$$

Comme $|\tilde{f}(r, \vartheta)| \leq r^m \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0$ alors $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$ donc f est continue en $(0, 0)$.

2.2. Le gradient de f en $(0, 0)$ est le vecteur de composantes

$$\partial_x f(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = 0, \quad \partial_y f(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y - 0} = 0.$$

2.3. f est différentiable en $(0, 0)$ si et seulement si

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y) - f(0, 0) - \partial_x f(0, 0)(x - 0) - \partial_y f(0, 0)(y - 0)}{\sqrt{(x - 0)^2 + (y - 0)^2}} = 0.$$

De plus, toute fonction différentiable est continue.

▷ Si $m = 0$, f n'est pas continue en $(0, 0)$ donc elle n'est pas différentiable en $(0, 0)$.

▷ Soit $m > 0$ et notons $h(x, y) = \frac{f(x, y) - f(0, 0) - \partial_x f(0, 0)(x - 0) - \partial_y f(0, 0)(y - 0)}{\sqrt{(x - 0)^2 + (y - 0)^2}} = \frac{x^m y^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$.

▷ Si $m = 1$, comme $h(y, y) = \frac{1}{2^{3/2}} \neq 0$, alors f n'est pas différentiable en $(0, 0)$.

▷ Si $m > 1$, passons en coordonnées polaires : $x = 0 + r \cos(\vartheta)$, $y = 0 + r \sin(\vartheta)$,

$$\tilde{h}(r, \vartheta) = h(x(r, \vartheta), y(r, \vartheta)) = r^{m-1} \cos^m(\vartheta) \sin^2(\vartheta).$$

Comme $|\tilde{h}(r, \vartheta)| \leq r^{m-1} \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0$ alors $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} h(x, y) = 0$ donc f est différentiable en $(0, 0)$.

2.4. Une fonction est de classe \mathcal{C}^1 si ses dérivées partielles sont continues, autrement dit si

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \partial_x f(x, y) = \partial_x f(0, 0) \quad \text{et} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \partial_y f(x, y) = \partial_y f(0, 0).$$

De plus, toute fonction de classe \mathcal{C}^1 est différentiable.

▷ Si $m = 0$ ou $m = 1$, f n'est pas différentiable en $(0, 0)$ donc elle n'est pas de classe \mathcal{C}^1 en $(0, 0)$.

▷ Si $m > 1$, passons en coordonnées polaires : $x = 0 + r \cos(\vartheta)$, $y = 0 + r \sin(\vartheta)$,

$$\begin{cases} \partial_x \tilde{f}(r, \vartheta) = \partial_x f(x(r, \vartheta), y(r, \vartheta)) = r^{m-1} (m - \cos^2(\vartheta)) \cos^{m-1}(\vartheta) \sin^2(\vartheta), \\ \partial_y \tilde{f}(r, \vartheta) = \partial_y f(x(r, \vartheta), y(r, \vartheta)) = 2r^{m-1} \cos^{m-2}(\vartheta) \sin(\vartheta). \end{cases}$$

Comme

$$|\partial_x \tilde{f}(r, \vartheta)| \leq m r^{m-1} \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0 \quad \quad \quad |\partial_y \tilde{f}(r, \vartheta)| \leq 2 r^{m-1} \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0$$

alors $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \partial_x f(x, y) = 0$ et $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \partial_y f(x, y) = 0$ donc f est de classe \mathcal{C}^1 en $(0, 0)$.

Polynôme de Taylor

Exercice 3.43

Calculer les polynômes de TAYLOR à l'ordre 1 (*i.e.* l'équation du plan tangent) et à l'ordre 2 au voisinage du point (x_0, y_0) des fonctions $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ suivantes :

1. $f(x, y) = 1 + x + y + x^3 + xy^3$ au voisinage du point $(-1, 1)$
2. $f(x, y) = 1 + x + y + x^3 + xy^3$ au voisinage du point $(0, 0)$
3. $f(x, y) = 1 + x + y + x^2 - xy + y^2$ au voisinage du point $(1, 2)$
4. $f(x, y) = 1 + x + y + x^2 - xy + y^2$ au voisinage du point $(0, 0)$
5. $f(x, y) = 1 + x + y$ au voisinage du point $(1, 1)$
6. $f(x, y) = 1 + x + y$ au voisinage du point $(0, 0)$
7. $f(x, y) = 1 - x + y - x^2 + xy^3$ au voisinage du point $(0, 0)$

Correction

1. $f(x, y) = 1 + x + y + x^3 + xy^3$ au voisinage du point $(x_0, y_0) = (-1, 1)$:

$f(x, y) = 1 + x + y + x^3 + xy^3$	$f(x_0, y_0) = 0$
$\partial_x f(x, y) = 1 + 3x^2 + y - y^2$	$\partial_x f(x_0, y_0) = 4$
$\partial_y f(x, y) = 1 + x - 2xy$	$\partial_y f(x_0, y_0) = 2$
$\partial_{xx} f(x, y) = 6x$	$\partial_{xx} f(x_0, y_0) = -6$
$\partial_{xy} f(x, y) = 1 - 2y$	$\partial_{xy} f(x_0, y_0) = -1$
$\partial_{yy} f(x, y) = -2x$	$\partial_{yy} f(x_0, y_0) = 2$

donc

▷ Polynôme de TAYLOR à l'ordre 1 (= plan tangent) : $z = 4x + 2y + 2$

▷ Polynôme de TAYLOR à l'ordre 2 : $z = 4x + 2y + 2 - 3(x+1)^2 + (y-1)^2 - (x+1)(y-1) = -3x^2 - xy + y^2 - x - y + 1$

2. $f(x, y) = 1 + x + y + x^3 + xy^3$ au voisinage du point $(x_0, y_0) = (0, 0)$

$f(x, y) = 1 + x + y + x^3 + xy^3$	$f(x_0, y_0) = 1$
$\partial_x f(x, y) = 1 + 3x^2 + y - y^2$	$\partial_x f(x_0, y_0) = 1$
$\partial_y f(x, y) = 1 + x - 2xy$	$\partial_y f(x_0, y_0) = 1$
$\partial_{xx} f(x, y) = 6x$	$\partial_{xx} f(x_0, y_0) = 0$
$\partial_{xy} f(x, y) = 1 - 2y$	$\partial_{xy} f(x_0, y_0) = 1$
$\partial_{yy} f(x, y) = -2x$	$\partial_{yy} f(x_0, y_0) = 0$

donc

▷ Polynôme de TAYLOR à l'ordre 1 (= plan tangent) : $z = 1 + x + y$

▷ Polynôme de TAYLOR à l'ordre 2 : $z = 1 + x + y + xy$

3. $f(x, y) = 1 + x + y + x^2 - xy + y^2$ au voisinage du point $(x_0, y_0) = (1, 2)$

$f(x, y) = 1 + x + y + x^2 - xy + y^2$	$f(x_0, y_0) = 7$
$\partial_x f(x, y) = 1 + 2x - y$	$\partial_x f(x_0, y_0) = 1$
$\partial_y f(x, y) = 1 - x + 2y$	$\partial_y f(x_0, y_0) = 4$
$\partial_{xx} f(x, y) = 2$	$\partial_{xx} f(x_0, y_0) = 2$
$\partial_{xy} f(x, y) = -1$	$\partial_{xy} f(x_0, y_0) = -1$
$\partial_{yy} f(x, y) = 2$	$\partial_{yy} f(x_0, y_0) = 2$

donc

▷ Polynôme de TAYLOR à l'ordre 1 (= plan tangent) : $z = x + 4y - 2$

▷ Polynôme de TAYLOR à l'ordre 2 : $z = x + 4y - 2 + (x-1)^2 - (x-1)(y-2) + (y-2)^2 = x^2 - xy + y^2 + x + y + 1 = f(x, y)$

4. $f(x, y) = 1 + x + y + x^2 - xy + y^2$ au voisinage du point $(x_0, y_0) = (0, 0)$

$f(x, y) = 1 + x + y + x^2 - xy + y^2$	$f(x_0, y_0) = 1$
$\partial_x f(x, y) = 1 + 2x - y$	$\partial_x f(x_0, y_0) = 1$
$\partial_y f(x, y) = 1 - x + 2y$	$\partial_y f(x_0, y_0) = 1$
$\partial_{xx} f(x, y) = 2$	$\partial_{xx} f(x_0, y_0) = 2$
$\partial_{xy} f(x, y) = -1$	$\partial_{xy} f(x_0, y_0) = -1$
$\partial_{yy} f(x, y) = 2$	$\partial_{yy} f(x_0, y_0) = 2$

donc

- ▷ Polynôme de TAYLOR à l'ordre 1 (= plan tangent) : $z = x + y + 1$
 - ▷ Polynôme de TAYLOR à l'ordre 2 : $z = x^2 - xy + y^2 + x + y + 1 = f(x, y)$
5. $f(x, y) = 1 + x + y$ au voisinage du point $(x_0, y_0) = (1, 1)$
- ▷ Polynôme de TAYLOR à l'ordre 1 (= plan tangent) : $z = 1 + x + y = f(x, y)$
 - ▷ Polynôme de TAYLOR à l'ordre 2 : $z = 1 + x + y = f(x, y)$
6. $f(x, y) = 1 + x + y + x^2 - xy + y^2$ au voisinage du point $(x_0, y_0) = (0, 0)$
- ▷ Polynôme de TAYLOR à l'ordre 1 (= plan tangent) : $z = 1 + x + y = f(x, y)$
 - ▷ Polynôme de TAYLOR à l'ordre 2 : $z = 1 + x + y = f(x, y)$
7. $f(x, y) = 1 - x + y - x^2 + xy^3$ au voisinage du point $(x_0, y_0) = (0, 0)$
- ▷ Polynôme de TAYLOR à l'ordre 1 (= plan tangent) : $z = 1 - x + y = f(x, y)$
 - ▷ Polynôme de TAYLOR à l'ordre 2 : $z = 1 - x + y - x^2$

Fonctions implicites

Exercice 3.44

Calculer $y'(x)$ à partir des relations suivantes

1. $y \cos(x) = x^2 + y^2$
2. $\cos(xy) = 1 + \sin(y)$
3. $e^y \sin(x) = x + xy$

Correction

On réécrit chaque relation sous la forme d'une équation $F(x, y) = 0$. On suppose qu'il existe une unique fonction $y = y(x)$ telle que $F(x, y(x)) = 0$ pour tout $x \in I$. Alors, en dérivant par rapport à x cette équation, on a

$$\frac{\partial F}{\partial x} \underbrace{\frac{\partial x}{\partial x}}_{=1} + \frac{\partial F}{\partial y} \underbrace{\frac{\partial y}{\partial x}}_{y'(x)} = 0.$$

Donc, si $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$ alors

$$y'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, y(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, y(x))} \quad \forall x \in I.$$

1. $F(x, y) = y \cos(x) - x^2 - y^2$; $\partial_x F(x, y) = -y \sin(x) - 2x$, $\partial_y F(x, y) = \cos(x) - 2y$; $y'(x) = \frac{2x + y(x) \sin(x)}{\cos(x) - 2y(x)}$.
2. $F(x, y) = \cos(xy) - 1 - \sin(y)$; $\partial_x F(x, y) = -y \sin(xy)$, $\partial_y F(x, y) = -x \sin(xy) - \cos(y)$; $y'(x) = \frac{-y(x) \sin(xy(x))}{\cos(y(x)) + x \sin(xy(x))}$.
3. $F(x, y) = e^y \sin(x) - x - xy$; $\partial_x F(x, y) = e^y \cos(x) - 1 - y$, $\partial_y F(x, y) = e^y \sin(x) - x$; $y'(x) = \frac{1 + y(x) - \cos(x)e^{y(x)}}{e^{y(x)} \sin(x) - x}$.

Exercice 3.45 (Différentiation implicite)

Considérons la sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Calculer $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$ au point $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$.

Correction

$$\frac{\partial(x^2 + y^2 + z^2(x, y))}{\partial x} = 0 \implies 2x + 2z \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \implies \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{z(x, y)};$$

$$\frac{\partial(x^2 + y^2 + z^2(x, y))}{\partial y} = 0 \implies 2y + 2z \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \implies \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{z(x, y)}.$$

Donc

$$\frac{\partial z}{\partial x} \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right) = -1, \quad \frac{\partial z}{\partial y} \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right) = -\frac{1}{2}.$$

Exercice 3.46 (Loi de VAN DER WAALS)La loi de VAN DER WAALS pour n moles d'un gaz s'écrit

$$\left(P + \frac{n^2 a}{V^2} \right) (V - nb) = nRT$$

où P est la pression, V le volume, T la température du gaz, R la constante universelle des gaz et a et b deux constantes positives.

- ▷ Calculer $\frac{\partial T}{\partial P}$.
- ▷ Calculer $\frac{\partial P}{\partial V}$.
- ▷ Calculer le coefficient de compressibilité isotherme κ_T défini par $-\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial P} \Big|_T$ et calculer $\lim_{V \rightarrow +\infty} \kappa_T$ lorsque P est fixé.
- ▷ Calculer le coefficient de compressibilité isobare κ_P défini par $\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial T} \Big|_P$.

Correction

- ▷ $T(P, V) = \frac{1}{nR} \left(P + \frac{n^2 a}{V^2} \right) (V - nb)$ donc $\frac{\partial T}{\partial P} = \frac{V - nb}{nR}$.
- ▷ $P(T, V) = \frac{nRT}{V - nb} - \frac{n^2 a}{V^2}$ donc $\frac{\partial P}{\partial V} = \frac{-nRT}{(V - nb)^2} + \frac{2n^2 a}{V^3}$.
- ▷ On ne peut pas écrire explicitement l'expression de la fonction $V = V(T, P)$. Cependant, on peut utiliser les formules de dérivation implicite pour calculer $\frac{\partial V}{\partial P} \Big|_T$. En effet, on a

$$PV(T, P) + \frac{n^2 a}{V(T, P)} - nbP - \frac{n^3 ab}{(V(T, P))^2} = nRT$$

donc

$$\frac{\partial \left(PV(T, P) + \frac{n^2 a}{V(T, P)} - nbP - \frac{n^3 ab}{(V(T, P))^2} \right)}{\partial P} \Big|_T = \frac{\partial(nRT)}{\partial P} \Big|_T$$

ce qui donne

$$V(T, P) + P \frac{\partial V}{\partial P} \Big|_T - \frac{2n^2 a}{(V(T, P))^2} \frac{\partial V}{\partial P} \Big|_T - nb + \frac{3n^3 ab}{(V(T, P))^3} \frac{\partial V}{\partial P} \Big|_T = 0$$

d'où

$$\kappa_T = -\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial P} \Big|_T = -\frac{1}{V} \frac{nb - V(T, P)}{P - \frac{2n^2 a}{(V(T, P))^2} + \frac{3n^3 ab}{(V(T, P))^3}} = \frac{1 - \frac{nb}{V(T, P)}}{P - \frac{2n^2 a}{(V(T, P))^2} + \frac{3n^3 ab}{(V(T, P))^3}} \xrightarrow{P \text{ fixé}} \frac{1}{P}.$$

- ▷ On ne peut pas écrire explicitement l'expression de la fonction $V = V(T, P)$. Cependant, on peut utiliser les formules de dérivation implicite pour calculer $\frac{\partial V}{\partial T} \Big|_P$. En effet, on a

$$PV(T, P) + \frac{n^2 a}{V(T, P)} - nbP - \frac{n^3 ab}{(V(T, P))^2} = nRT$$

donc

$$\frac{\partial \left(PV(T, P) + \frac{n^2 a}{V(T, P)} - nbP - \frac{n^3 ab}{(V(T, P))^2} \right)}{\partial T} \Big|_P = \frac{\partial(nRT)}{\partial T} \Big|_P$$

ce qui donne

$$P \frac{\partial V}{\partial T} \Big|_P - \frac{2n^2 a}{(V(T,P))^2} \frac{\partial V}{\partial T} \Big|_P + \frac{3n^3 ab}{(V(T,P))^3} \frac{\partial V}{\partial T} \Big|_P = nR$$

d'où

$$\kappa_P = \frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial T} \Big|_P = \frac{1}{V} \frac{nR}{P - \frac{2n^2 a}{(V(T,P))^2} + \frac{3n^3 ab}{(V(T,P))^3}}.$$

Exercice 3.47 (Dérivation implicite)

Soit f une fonction d'une variable x et x elle-même une fonction de deux variables u et v .

$$\begin{array}{ll} f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} & x: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) & (u, v) \mapsto x(u, v) \end{array}$$

On peut définir la fonction composée $g(u, v) = f(x(u, v))$:

$$\begin{array}{ccccc} g: \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{x} & \mathbb{R} & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ (u, v) & \longmapsto & x(u, v) & \longmapsto & g(u, v) = f(x(u, v)) \end{array}$$

Lorsque les dérivées partielles premières qui interviennent sont définies, on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial u}(u, v) &= f'(x(u, v)) \times \frac{\partial x}{\partial u}(u, v), \\ \frac{\partial g}{\partial v}(u, v) &= f'(x(u, v)) \times \frac{\partial x}{\partial v}(u, v). \end{aligned}$$

Calculer la matrice Hessienne de g .

Correction

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u, v) &= f''(x(u, v)) \left(\frac{\partial x}{\partial u}(u, v) \right)^2 + f'(x(u, v)) \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}(u, v), \\ \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(u, v) &= f''(x(u, v)) \left(\frac{\partial x}{\partial v}(u, v) \right)^2 + f'(x(u, v)) \frac{\partial^2 x}{\partial v^2}(u, v), \\ \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(u, v) &= f''(x(u, v)) \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) \frac{\partial x}{\partial v}(u, v) + f'(x(u, v)) \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}(u, v). \end{aligned}$$

Exercice 3.48 (Dérivation implicite — coordonnées polaires)

Considérons f , x et y trois fonctions de deux variables admettant des dérivées partielles premières et définies par

$$\begin{array}{lll} f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} & x: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} & y: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto f(x, y) & (r, \vartheta) \mapsto x(r, \vartheta) = r \cos(\vartheta) & (r, \vartheta) \mapsto y(r, \vartheta) = r \sin(\vartheta) \end{array}$$

Alors la fonction g

$$\begin{array}{ccccc} g: \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{x \text{ et } y} & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ (r, \vartheta) & \longmapsto & \begin{pmatrix} x(r, \vartheta) \\ y(r, \vartheta) \end{pmatrix} & \longmapsto & g(r, \vartheta) = f(x(r, \vartheta), y(r, \vartheta)) \end{array}$$

admet des dérivées partielles premières.

1. Calculer

$$\frac{\partial x}{\partial r}, \quad \frac{\partial x}{\partial \vartheta}, \quad \frac{\partial y}{\partial r}, \quad \frac{\partial y}{\partial \vartheta}, \quad \frac{\partial g}{\partial r}, \quad \frac{\partial g}{\partial \vartheta}.$$

en supposant connues $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$.

2. On peut voir r et ϑ comme deux fonctions de x et y , i.e.

$$\begin{aligned} r: \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} & \vartheta: \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto r(x, y) & (x, y) &\mapsto \vartheta(x, y) \end{aligned}$$

Sachant que $r^2 = x^2 + y^2$ et en utilisant la dérivation implicite, calculer

$$\frac{\partial r}{\partial x}, \quad \frac{\partial r}{\partial y}.$$

3. En utilisant la dérivation implicite de l'équation $x = r \cos(\vartheta)$ par rapport à x et de l'équation $y = r \sin(\vartheta)$ par rapport à y , calculer

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial x}, \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial y}.$$

4. On peut définir la fonction k

$$\begin{aligned} k: \mathbb{R}^2 &\xrightarrow{r \text{ et } \vartheta} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{g} \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto \begin{pmatrix} r(x, y) \\ \vartheta(x, y) \end{pmatrix} \mapsto k(x, y) = g(r(x, y), \vartheta(x, y)) \end{aligned}$$

Calculer

$$\frac{\partial k}{\partial x}, \quad \frac{\partial k}{\partial y}.$$

5. Montrer que

$$\left(\frac{\partial k}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial k}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial g}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial g}{\partial \vartheta}\right)^2$$

Correction

1. On a

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial r}(r, \vartheta) &= \cos(\vartheta), & \frac{\partial x}{\partial \vartheta}(r, \vartheta) &= -r \sin(\vartheta), \\ \frac{\partial y}{\partial r}(r, \vartheta) &= \sin(\vartheta), & \frac{\partial y}{\partial \vartheta}(r, \vartheta) &= r \cos(\vartheta), \end{aligned}$$

En utilisant la *chain rule* on obtient alors

$$\frac{\partial g}{\partial r}(r, \vartheta) = \cos(\vartheta) \frac{\partial f}{\partial x} + \sin(\vartheta) \frac{\partial f}{\partial y} \qquad \frac{\partial g}{\partial \vartheta}(r, \vartheta) = -r \sin(\vartheta) \frac{\partial f}{\partial x} + r \cos(\vartheta) \frac{\partial f}{\partial y}$$

2. En voyant $r = r(x, y)$ et $\vartheta = \vartheta(x, y)$ comme deux fonctions de x et y et en utilisant la dérivation implicite, on obtient

$$\begin{aligned} r^2 = x^2 + y^2 &\implies 2r \frac{\partial r}{\partial x} = 2x &\implies \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r(x, y)} = \cos(\vartheta(x, y)) \\ r^2 = x^2 + y^2 &\implies 2r \frac{\partial r}{\partial y} = 2y &\implies \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r(x, y)} = \sin(\vartheta(x, y)) \end{aligned}$$

3. En voyant $r = r(x, y)$ et $\vartheta = \vartheta(x, y)$ comme deux fonctions de x et y et en utilisant la dérivation implicite, on obtient

$$\begin{aligned} x = r \cos(\vartheta) &\implies 1 = \frac{\partial r}{\partial x} \cos(\vartheta) - r \sin(\vartheta) \frac{\partial \vartheta}{\partial x} &\implies 1 = \cos^2(\vartheta) - r \sin(\vartheta) \frac{\partial \vartheta}{\partial x} &\implies \frac{\partial \vartheta}{\partial x} = -\frac{\sin(\vartheta(x, y))}{r(x, y)} \\ y = r \sin(\vartheta) &\implies 1 = \frac{\partial r}{\partial y} \sin(\vartheta) + r \cos(\vartheta) \frac{\partial \vartheta}{\partial y} &\implies 1 = \sin^2(\vartheta) + r \cos(\vartheta) \frac{\partial \vartheta}{\partial y} &\implies \frac{\partial \vartheta}{\partial y} = \frac{\cos(\vartheta(x, y))}{r(x, y)} \end{aligned}$$

4. Par conséquent

$$\frac{\partial k}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial r} \times \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial \vartheta} \times \frac{\partial \vartheta}{\partial x} = \cos(\vartheta) \frac{\partial g}{\partial r} - \frac{\sin(\vartheta)}{r} \frac{\partial g}{\partial \vartheta},$$

$$\frac{\partial k}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial r} \times \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial \vartheta} \times \frac{\partial \vartheta}{\partial y} = \sin(\vartheta) \frac{\partial g}{\partial r} + \frac{\cos(\vartheta)}{r} \frac{\partial g}{\partial \vartheta}.$$

5. On a

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial k}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial k}{\partial y}\right)^2 &= \left(\cos(\vartheta) \frac{\partial g}{\partial r} - \frac{\sin(\vartheta)}{r} \frac{\partial g}{\partial \vartheta}\right)^2 + \left(\sin(\vartheta) \frac{\partial g}{\partial r} + \frac{\cos(\vartheta)}{r} \frac{\partial g}{\partial \vartheta}\right)^2 \\ &= \cos^2(\vartheta) \left(\frac{\partial g}{\partial r}\right)^2 + \frac{\sin^2(\vartheta)}{r^2} \left(\frac{\partial g}{\partial \vartheta}\right)^2 - 2 \frac{\cos(\vartheta) \sin(\vartheta)}{r} \frac{\partial g}{\partial r} \frac{\partial g}{\partial \vartheta} \\ &\quad + \sin^2(\vartheta) \left(\frac{\partial g}{\partial r}\right)^2 + \frac{\cos^2(\vartheta)}{r^2} \left(\frac{\partial g}{\partial \vartheta}\right)^2 + \frac{2 \cos(\vartheta) \sin(\vartheta)}{r} \frac{\partial g}{\partial r} \frac{\partial g}{\partial \vartheta} \\ &= \left(\frac{\partial g}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial g}{\partial \vartheta}\right)^2. \end{aligned}$$

✂ Exercice 3.49

On considère la courbe plane d'équation

$$ye^x + e^y \sin(2x) = 0. \tag{3.1}$$

1. Vérifier que l'équation (3.1) définit une et une seule fonction $y = \varphi(x)$ au voisinage de $(0, 0)$.
2. Calculer $\varphi'(0)$ et écrire l'équation de la droite tangente au graphe de la fonction φ en le point $(0, \varphi(0))$.
3. En déduire la limite de $\frac{y}{x}$ quand (x, y) tend vers $(0, 0)$ en étant sur la courbe.

Correction

Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x, y) = ye^x + e^y \sin(2x)$. La courbe plane donnée est la courbe de niveau 0 de la fonction f .

1. On note que $(0, 0)$ est une solution de l'équation $f(x, y) = 0$. On a

$$\begin{aligned} \partial_x f(x, y) &= ye^x + 2e^y \cos(2x), & \partial_x f(0, 0) &= 2, \\ \partial_y f(x, y) &= e^x + e^y \sin(2x), & \partial_y f(0, 0) &= 1. \end{aligned}$$

Puisque $\partial_y f(0, 0) \neq 0$ il existe une et une seule fonction $\varphi: [0 - \varepsilon, 0 + \varepsilon] \rightarrow \mathbb{R}$ définie au voisinage de 0 tel que $f(x, \varphi(x)) = 0$, i.e. $\varphi(x)e^x + e^{\varphi(x)} \sin(2x) = 0$.

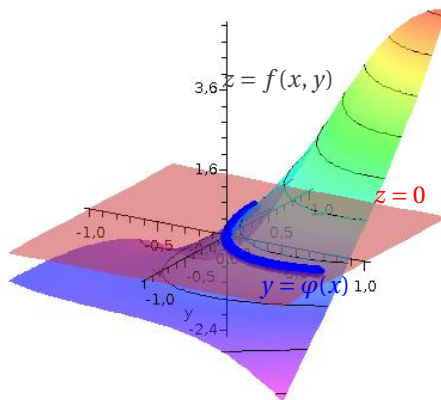
2. On a

$$\varphi'(x) = -\frac{\partial_x f(x, \varphi(x))}{\partial_y f(x, \varphi(x))} = -\frac{\varphi(x)e^x + 2e^{\varphi(x)} \cos(2x)}{e^x + e^{\varphi(x)} \sin(2x)}, \quad \varphi'(0) = -\frac{\partial_x f(0, 0)}{\partial_y f(0, 0)} = -2,$$

donc l'équation de la droite tangente à φ en $x = 0$ est $y = -2x$.

3. On a

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ f(x,y)=0}} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \varphi'(x) = \varphi'(0) = -2.$$



Exercice 3.50

On considère la courbe plane d'équation

$$xe^y + e^x \sin(2y) = 0. \quad (3.2)$$

1. Vérifier que l'équation (3.2) définit une et une seule fonction $y = \varphi(x)$ au voisinage de $(0, 0)$.
2. Calculer $\varphi'(0)$ et écrire l'équation de la droite tangente au graphe de la fonction φ en le point $(0, \varphi(0))$.
3. En déduire la limite de $\frac{y}{x}$ quand (x, y) tend vers $(0, 0)$ en étant sur la courbe.

Correction

On pose $f(x, y) = xe^y + e^x \sin(2y)$

1. On note que $(0, 0)$ est une solution de l'équation $f(x, y) = 0$. On a

$$\begin{aligned} \partial_x f(x, y) &= e^y + e^x \sin(2y), & \partial_x f(0, 0) &= 1, \\ \partial_y f(x, y) &= xe^y + 2e^x \cos(2y), & \partial_y f(0, 0) &= 2. \end{aligned}$$

Puisque $\partial_y f(0, 0) \neq 0$ il existe une et une seule fonction $y = \varphi(x)$ définie au voisinage de 0 tel que $f(x, \varphi(x)) = 0$.

2. On a

$$\varphi'(0) = -\frac{\partial_x f(0, 0)}{\partial_y f(0, 0)} = -\frac{1}{2}$$

donc l'équation de la droite tangente à φ en $x = 0$ est $y = -\frac{1}{2}x$.

3. On a

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ f(x,y)=0}} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \varphi'(x) = \varphi'(0) = -\frac{1}{2}.$$

Exercice 3.51

On considère la courbe plane d'équation

$$2x^3y + 2x^2 + y^2 = 5. \quad (3.3)$$

1. Vérifier que l'équation (3.3) définit une et une seule fonction $y = \varphi(x)$ au voisinage de $(1, 1)$.
2. Calculer $\varphi'(1)$ et écrire l'équation de la droite tangente au graphe de la fonction φ en le point $(1, \varphi(1))$.
3. Sachant que

$$\varphi''(x) = -\frac{\partial_{xx}f(x, \varphi(x))(\partial_y f(x, \varphi(x)))^2 - 2\partial_x f(x, \varphi(x))\partial_y f(x, \varphi(x))\partial_{xy}f(x, \varphi(x)) + (\partial_x f(x, \varphi(x)))^2\partial_{yy}f(x, \varphi(x))}{(\partial_y f(x, \varphi(x)))^3}$$

en déduire le développement de Taylor de φ à l'ordre 2 centré en $x = 1$.

Correction

On pose $f(x, y) = 2x^3y + 2x^2 + y^2 - 5$

1. On note que $(1, 1)$ est une solution de l'équation $f(x, y) = 0$. On a

$$\begin{aligned} \partial_x f(x, y) &= 6x^2y + 4x, & \partial_x f(1, 1) &= 10, \\ \partial_y f(x, y) &= 2x^3 + 2y, & \partial_y f(1, 1) &= 4. \end{aligned}$$

Puisque $\partial_y f(1, 1) \neq 0$ il existe une et une seule fonction $y = \varphi(x)$ définie au voisinage de 1 tel que $f(x, \varphi(x)) = 0$.

2. On a

$$\varphi'(1) = -\frac{\partial_x f(1, 1)}{\partial_y f(1, 1)} = -\frac{10}{4} = -\frac{5}{2}$$

donc l'équation de la droite tangente à φ en $x = 1$ est $y = -\frac{5}{2}(x - 1) + 1 = -\frac{5}{2}x + \frac{7}{2}$.

3. On a

$$\varphi''(x) = -\frac{\partial_{xx}f(\partial_y f)^2 - 2\partial_x f\partial_y f\partial_{xy}f + (\partial_x f)^2\partial_{yy}f}{(\partial_y f)^3}$$

et

$$\begin{aligned} \partial_{xx}f(x, y) &= 4(3xy + 1), & \partial_{xx}f(1, 1) &= 16, \\ \partial_{xy}f(x, y) &= 6x^2, & \partial_{xy}f(1, 1) &= 6, \\ \partial_{yy}f(x, y) &= 2, & \partial_{yy}f(1, 1) &= 2, \end{aligned}$$

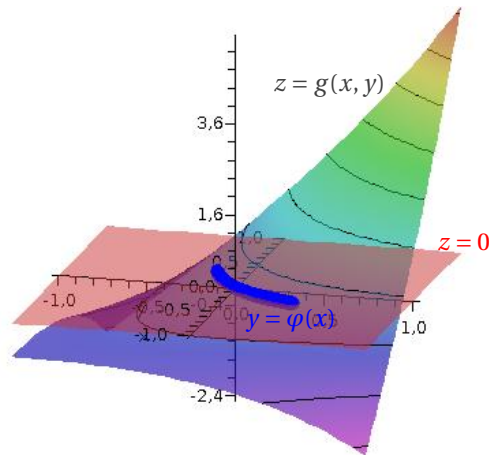
donc $\varphi''(1) = -1$ d'où $\varphi(x) = \varphi(1) + \varphi'(1)(x-1) + \frac{\varphi''(1)}{2}(x-1)^2 = 1 - \frac{5}{2}(x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2$.

Exercice 3.52

On considère l'équation $xe^y + ye^x = 0$.

1. Vérifier qu'elle définit une et une seule fonction $y = \varphi(x)$ au voisinage de $(0, 0)$.
2. Calculer le développement de Taylor de φ à l'ordre 2 centré en $x = 0$.

Correction



Soit $g(x, y) = xe^y + ye^x$; elle est clairement de classe \mathcal{C}^1 . De plus, $g(0, 0) = 0$ et $g_y(0, 0) = 1$. Elle définit alors une et une seule fonction $y = \varphi(x)$ dans un intervalle qui contient $x = 0$. De plus, on sait que $\varphi(0) = 0$ et $\varphi'(0) = -1$ car

$$\varphi'(x) = -\frac{g_x(x, \varphi(x))}{g_y(x, \varphi(x))} = -\frac{e^{\varphi(x)} + \varphi(x)e^x}{xe^{\varphi(x)} + e^x}.$$

Comme φ est de classe \mathcal{C}^1 , alors φ' est de classe \mathcal{C}^1 car composition de fonctions de classe \mathcal{C}^1 , il s'en suit que φ est de classe \mathcal{C}^2 . Alors

$$\varphi(x) = \varphi(0) + \varphi'(0)x + \frac{\varphi''(0)}{2}x^2 + o(x^2).$$

Pour calculer φ'' on peut soit dériver l'expression de φ' soit dériver l'équation qui la définit implicitement : comme

$$g(x, \varphi(x)) = xe^{\varphi(x)} + \varphi(x)e^x$$

en dérivant cette expression on obtient

$$e^{\varphi(x)} + xe^{\varphi(x)}\varphi'(x) + \varphi'(x)e^x + \varphi(x)e^x = 0$$

et en la dérivant à nouveau (ce que l'on peut faire car φ est de classe \mathcal{C}^2) on obtient

$$e^{\varphi(x)}\varphi'(x) + (e^{\varphi(x)}\varphi'(x) + xe^{\varphi(x)}(\varphi'(x))^2 + xe^{\varphi(x)}\varphi''(x)) + (\varphi''(x)e^x + \varphi'(x)e^x) + (\varphi'(x)e^x + \varphi(x)e^x) = 0.$$

On obtient $\varphi''(0) = 4$ et le développement de Taylor s'écrit

$$\varphi(x) = -x + 2x^2 + o(x^2).$$

Exercice 3.53

Montrer que l'équation $xy^4 - x^3 + y = 0$ définit implicitement au voisinage de 0 une fonction réelle de la variable réelle $y = \varphi(x)$ et calculer la tangente au graphe de φ au point $(0, 0)$.

Correction

Soit $g(x, y) = xy^4 - x^3 + y$; elle est clairement de classe \mathcal{C}^1 . De plus, $g(0, 0) = 0$ et $g_y(0, 0) = 1$. Elle définit alors une et une seule fonction $y = \varphi(x)$ dans un intervalle qui contient $x = 0$. De plus, on sait que $\varphi(0) = 0$ et $\varphi'(0) = \text{car}$

$$\varphi'(x) = -\frac{g_x(x, \varphi(x))}{g_y(x, \varphi(x))} = -\frac{y^4 - 3x^2}{4xy^3 + 1}.$$

La droite tangente à $y = \varphi(x)$ en $(0, 0)$ a équation $y = \varphi'(0)(x - 0) + 0 = 0$.

Exercice 3.54

Soit f l'application définie sur \mathbb{R}^2 par

$$f(x, y) = \frac{x^2 y}{2} + x^2 + \frac{y^3}{3} - 4y.$$

Soit l'équation $f(x, y) = 3$. Montrer qu'elle définit implicitement au voisinage de $(0, -3)$ une fonction $y = \varphi(x)$ et calculer l'équation de la droite tangente à $y = \varphi(x)$ en $x = 0$.

Correction

f est une application de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}^2 . Comme $f(0, -3) = 3$ et $\partial_y f(0, -3) = 5 \neq 0$, alors il existe un intervalle ouvert I contenant $x = 0$ et une fonction φ de I dans \mathbb{R} de classe \mathcal{C}^∞ sur I telle que $\varphi(0) = -3$ et pour tout $x \in I$

$$f(x, \varphi(x)) = 3 \quad \text{et} \quad \varphi'(x) = -\frac{\partial_x f(x, \varphi(x))}{\partial_y f(x, \varphi(x))} = -2x \frac{\varphi(x) + 2}{x^2 + 2\varphi^2(x) - 8}.$$

L'équation de la droite tangente à $y = \varphi(x)$ en $x = 0$ est $y = mx + q$ avec $m = \varphi'(0) = -2 \times 0 \frac{-3+2}{0^2+2 \times (-3)^2-8} = 0$ et $q = y_0 - mx_0 = -3 - 0 = -3$.

Exercice 3.55

Soit f l'application définie sur \mathbb{R}^2 par

$$f(x, y) = \frac{x^2 y}{2} - x^2 + \frac{y^3}{3} - 4y.$$

Soit l'équation $f(x, y) = -3$. Montrer qu'elle définit implicitement au voisinage de $(0, 3)$ une fonction $y = \varphi(x)$ et calculer l'équation de la droite tangente à $y = \varphi(x)$ en $x = 0$.

Correction

f est une application de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}^2 . Comme $f(0, 3) = -3$ et $\partial_y f(0, 3) = 5 \neq 0$, alors il existe un intervalle ouvert I contenant $x = 0$ et une fonction φ de I dans \mathbb{R} de classe \mathcal{C}^∞ sur I telle que $\varphi(0) = 3$ et pour tout $x \in I$

$$f(x, \varphi(x)) = -3 \quad \text{et} \quad \varphi'(x) = -\frac{\partial_x f(x, \varphi(x))}{\partial_y f(x, \varphi(x))} = -2x \frac{\varphi(x) - 2}{x^2 + 2\varphi^2(x) - 8}.$$

L'équation de la droite tangente à $y = \varphi(x)$ en $x = 0$ est $y = mx + q$ avec $m = \varphi'(0) = -2 \times 0 \frac{3-2}{0^2+2 \times 3^2-8} = 0$ et $q = y_0 - mx_0 = 3 - 0 = 3$.

Exercice 3.56

Soit f l'application définie sur \mathbb{R}^2 par

$$f(x, y) = \frac{xy^2}{2} + \frac{x^3}{3} - 4x + y^2.$$

Soit l'équation $f(x, y) = 7$. Montrer qu'elle définit implicitement au voisinage de $(3, 2)$ une fonction $y = \varphi(x)$ et calculer l'équation de la droite tangente à $y = \varphi(x)$ en $x = 3$.

Correction

f est une application de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}^2 . Comme $f(3, 2) = 7$ et $\partial_y f(3, 2) = 5 \neq 0$, alors il existe un intervalle ouvert I contenant $x = 3$ et une fonction φ de I dans \mathbb{R} de classe \mathcal{C}^∞ sur I telle que $\varphi(3) = 2$ et pour tout $x \in I$

$$f(x, \varphi(x)) = 7 \quad \text{et} \quad \varphi'(x) = -\frac{\partial_x f(x, \varphi(x))}{\partial_y f(x, \varphi(x))} = -\frac{\varphi(x)^2 + 2x^2 - 8}{2(x+2)\varphi(x)}.$$

L'équation de la droite tangente à $y = \varphi(x)$ en $x = 3$ est $y = mx + q$ avec $m = \varphi'(3) = -\frac{7}{10}$ et $q = y_0 - mx_0 = 2 + \frac{7}{10} \times 3 = \frac{41}{10}$.

Exercice 3.57

Calculer $\partial_x z(x, y)$ et $\partial_y z(x, y)$ à partir des relations suivantes

1. $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$
2. $x^2 - y^2 + z^2 - 2z = 4$
3. $e^z = xyz$
4. $yz + x \ln(y) = z^2$

Correction

On réécrit chaque relation sous la forme d'une équation $F(x, y, z) = 0$. On suppose qu'il existe une unique fonction $z = z(x, y)$ telle que $F(x, y, z(x, y)) = 0$ pour tout $(x, y) \in \Omega$. Alors, en dérivant par rapport à x et à y cette équation, on a les deux relations

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} \underbrace{\frac{\partial x}{\partial x}}_{=1} + \frac{\partial F}{\partial y} \underbrace{\frac{\partial y}{\partial x}}_{=0} + \frac{\partial F}{\partial z} \underbrace{\frac{\partial z}{\partial x}}_{\partial_x z(x,y)} = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial x} \underbrace{\frac{\partial x}{\partial y}}_{=0} + \frac{\partial F}{\partial y} \underbrace{\frac{\partial y}{\partial y}}_{=1} + \frac{\partial F}{\partial z} \underbrace{\frac{\partial z}{\partial y}}_{\partial_y z(x,y)} = 0. \end{cases}$$

Donc, si $\frac{\partial F}{\partial z} \neq 0$, alors

$$\partial_x z(x, y) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z(x, y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z(x, y))}, \quad \partial_y z(x, y) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z(x, y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z(x, y))}.$$

1. $F(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 1$; $\partial_x F(x, y, z) = 2x$, $\partial_y F(x, y, z) = 4y$, $\partial_z F(x, y, z) = 6z$; $\partial_x z(x, y) = -\frac{x}{3z(x,y)}$, $\partial_y z(x, y) = \frac{-2y}{3z(x,y)}$.
2. $F(x, y, z) = x^2 - y^2 + z^2 - 2z - 4$; $\partial_x F(x, y, z) = 2x$, $\partial_y F(x, y, z) = -2y$, $\partial_z F(x, y, z) = 2z - 2$; $\partial_x z(x, y) = -\frac{x}{z(x,y)-1}$, $\partial_y z(x, y) = \frac{y}{z(x,y)-1}$.
3. $F(x, y, z) = e^z - xyz$; $\partial_x F(x, y, z) = -yz$, $\partial_y F(x, y, z) = -xz$, $\partial_z F(x, y, z) = e^z - xy$; $\partial_x z(x, y) = \frac{yz(x,y)}{e^{z(x,y)} - xy}$, $\partial_y z(x, y) = \frac{xz(x,y)}{e^{z(x,y)} - xy}$.
4. $F(x, y, z) = yz + x \ln(y) - z^2$; $\partial_x F(x, y, z) = \ln(y)$, $\partial_y F(x, y, z) = z + \frac{x}{y}$, $\partial_z F(x, y, z) = y - 2z$; $\partial_x z(x, y) = \frac{-\ln(y)}{y-2z(x,y)}$, $\partial_y z(x, y) = \frac{z(x,y) + \frac{x}{y}}{y-2z(x,y)}$.

Exercice 3.58

Montrez que l'équation

$$x^3 + 4xy + z^2 - 3yz^2 - 3 = 0$$

permet d'exprimer z en fonction de (x, y) au voisinage de $(1, 1, 1)$. Calculez alors $\partial_x z(1, 1)$ et $\partial_y z(1, 1)$.

Correction

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}^3 par $f(x, y, z) = x^3 + 4xy + z^2 - 3yz^2 - 3$. f possède des dérivées partielles continues :

$$\partial_x f(x, y, z) = 3x^2 + 4y, \quad \partial_y f(x, y, z) = 4x - 3z^2, \quad \partial_z f(x, y, z) = 2z - 6yz,$$

et au point $(1, 1, 1)$ on a

$$\partial_x f(1, 1, 1) = 7, \quad \partial_y f(1, 1, 1) = 1, \quad \partial_z f(1, 1, 1) = -4.$$

Puisque $f(1, 1, 1) = 0$ et $\partial_z f(1, 1, 1) \neq 0$, le théorème des fonctions implicites nous assure qu'on peut exprimer z en fonction de (x, y) dans un voisinage de $(1, 1, 1)$ et que

$$\frac{\partial z}{\partial x}(1, 1) = -\frac{\partial_x f(1, 1, 1)}{\partial_z f(1, 1, 1)} = \frac{7}{4}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}(1, 1) = -\frac{\partial_y f(1, 1, 1)}{\partial_z f(1, 1, 1)} = \frac{1}{4}.$$

Pour $(x, y) \simeq (1, 1)$ on a alors

$$z(x, y) \simeq z(1, 1) + (x-1) \frac{\partial z}{\partial x}(1, 1) + (y-1) \frac{\partial z}{\partial y}(1, 1) = 1 + \frac{7}{4}(x-1) + \frac{1}{4}(y-1) = \frac{7}{4}x + \frac{1}{4}y - 1.$$

Chapitre 4.

Optimisation de fonctions de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}

Parmi toutes les sujets abordées dans ce cours, l'optimisation de fonctions, généralement de plusieurs variables, est sans conteste celle qui apparaît le plus fréquemment dans la modélisation physique ou économique (maximiser le bénéfice, la satisfaction des clients, la productivité ou minimiser les coûts, le risque, etc.).

Un optimum ou extremum est soit un maximum soit un minimum, c'est-à-dire la valeur la plus haute ou la plus faible que prend la fonction sur son ensemble de définition ou tout sous-ensemble de son ensemble de définition.

4.1 Définition

Soit f une fonction de $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ dans \mathbb{R} . On dit que

- ▷ f est bornée dans \mathcal{D} s'il existe un nombre réel $M \geq 0$ tel que

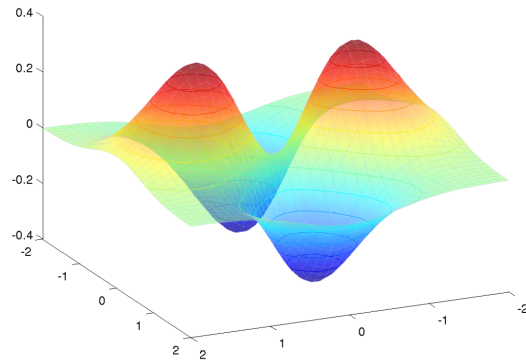
$$\forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}, |f(\mathbf{x})| \leq M;$$

- ▷ f admet un maximum (resp. minimum) *global* (ou absolu) en $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{D}$ si

$$\forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}, f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}_0) \text{ (resp. } f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}_0));$$

- ▷ f admet un maximum (resp. minimum) *local* (ou relatif) en $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{D}$ s'il existe une boule de rayon non nul $\mathcal{B}(\mathbf{x}_0, r)$ telle que

$$\forall \mathbf{x} \in \mathcal{D} \cap \mathcal{B}(\mathbf{x}_0, r), f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}_0) \text{ (resp. } f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}_0)).$$



La détermination des extrema dans le cas d'une seule variable a été détaillée lors du module M11. Logiquement, le présent chapitre en est un prolongement qui fait intervenir les diverses notions spécifiques aux fonctions de plusieurs variables. Néanmoins, le thème de l'optimisation à plusieurs variables exige un saut conceptuel important. En effet, plusieurs notions relatives aux fonctions d'une variable sont loin de se généraliser de façon évidente. Par exemple, les fonctions d'une variable (suffisamment régulières) admettent une seule dérivée première, une seule dérivée seconde, etc., tandis que, pour les fonctions de n variables, le nombre de dérivées possibles croît avec l'ordre de dérivation : n dérivées partielles premières, n^2 dérivées partielles secondes, etc. Une conséquence directe de cet accroissement apparaîtra sous la forme de conditions nécessaires et suffisantes plus lourdes à formuler. Par ailleurs, la prise en compte pratique des contraintes imposées aux variables doit être fondamentalement revue.

Prenons le cas de la maximisation de la fonction $x \mapsto f(x)$ dont l'unique variable est soumise à une contrainte de non-négativité ($x \geq 0$), qui traduit par exemple le fait que x est une quantité, une densité, un prix ou toute autre grandeur dépourvue de sens pour une valeur négative. L'optimisation s'effectue alors à l'aide de la procédure usuelle, la contrainte ayant pour effet de restreindre le domaine d'étude à \mathbb{R}^+ et d'exiger un examen particulier pour le seul point qui en constitue le «bord» ($x = 0$). Plongeons le même problème dans un cadre bivarié : maximiser $f(x, y)$ sous la double contrainte $x \geq 0$ et $y \geq 0$. À présent, le domaine admissible est donné par $(\mathbb{R}_+)^2$ dont le «bord», $\{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}_+\} \cup \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}_+\}$, comporte évidemment une infinité de points. Une étude individuelle des points de cet ensemble devient techniquement difficile, de sorte qu'il apparaît indispensable de disposer de méthodes d'optimisation qui intègrent d'emblée la présence de contraintes qui font apparaître des «bords». Cette approche (recherche d'extrema liés), spécifique aux fonctions de plusieurs variables, sera abordée dans ce chapitre après l'exposé des principes de l'optimisation dite libre, qui vise la détermination des extrema dans un domaine ouvert, donc «sans bords».

EXEMPLE

Vous vous promenez sur un chemin de montagne.

- ▷ Vous êtes très sportif et vous désirez aller le plus haut possible dans la région dont vous avez la carte.
- ▷ Vous êtes un peu moins sportif, vous vous contentez de suivre le chemin indiqué. À la fin de la journée, vous désirez savoir quel est le point le plus haut ou le plus bas où vous êtes passé.

L'altitude est une fonction h de deux variables, la position (x, y) sur la carte.

- ▷ Dans le premier cas, vous cherchez à trouver le maximum de la fonction h .
- ▷ Dans le deuxième cas, le chemin est représenté par une contrainte entre x et y donnée par une équation $g(x, y) = 0$. La question est donc de trouver les points (x_0, y_0) vérifiant $g(x_0, y_0)$ tels que h soit extrémale en (x_0, y_0) parmi les points vérifiant $g(x, y) = 0$.

Un problème d'optimisation étant donné, deux questions se posent : existe-t-il des solutions ? Et comment calculer les solutions éventuelles ? La théorie de l'optimisation affronte donc deux problèmes classiques en mathématiques : celui de l'existence et celui des méthodes de recherche.

À priori, un problème d'optimisation peut n'admettre aucune solution ou en admettre au moins une. En toute généralité, aucun argument mathématique ne garantit l'existence de solution(s). On dispose cependant d'une condition suffisante grâce au théorème de WEIERSTRASS, qui ne concerne que les fonctions continues sur un compact de \mathbb{R}^n , *i.e.* un sous-ensemble de \mathbb{R}^n qui est fermé et borné. On rappelle qu'un ensemble est fermé s'il contient sa frontière et qu'un ensemble est borné s'il est contenu dans une boule de rayon $r \in \mathbb{R}$. Par exemple, le carré $[-1; 1]^2$ est un compact de \mathbb{R}^2 ; l'ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0\}$ est un ensemble fermé non borné ; le disque $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$ est un ensemble borné non fermé ; le demi-plan $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$ est un ensemble non fermé non borné.

4.2 Théorème (de WEIERSTRASS)

Soit \mathcal{D} un compact de \mathbb{R}^n et soit $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, alors f admet un maximum et un minimum globaux atteints au moins une fois, autrement dit il existe $\mathbf{x}_m \in \mathcal{D}$ et $\mathbf{x}_M \in \mathcal{D}$ tels que

$$f(\mathbf{x}_m) \leq f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}_M), \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}.$$

Remarquons que les extrema peuvent appartenir soit à l'ouvert $\overset{\circ}{\mathcal{D}} = \mathcal{D} \setminus \partial\mathcal{D}$ soit à la frontière $\partial\mathcal{D}$.

Ce résultat donne une condition suffisante d'existence d'un minimum et d'un maximum globaux. Cependant, la restriction relative au domaine compact est malheureusement trop forte pour la résolution de nombreux problèmes, en particulier ceux pour lesquels les variables ne sont pas bornées. Beaucoup plus épineuse à n variables qu'à une seule variable, la question du traitement des éventuels «bords» du domaine motive la scission entre extrema libres et liés. En effet, les restrictions du domaine qui s'expriment sous la forme d'une égalité ($g(\mathbf{x}) = 0$) ou d'une inégalité non stricte ($g(\mathbf{x}) \leq 0$) créent généralement une infinité de points de bords, dont l'étude au cas par cas devient impraticable. Les conditions de LAGRANGE et de KUHN et TUCKER visent à combler cette lacune.

Avant d'aborder ces nouveaux résultats, la section suivante présente la détermination des extrema dans un domaine ouvert. La terminologie d'extrema «libres» résulte de l'absence de conditions introduisant des «bords» dans le domaine, que l'on appelle aussi des «contraintes».

4.1. Extrema libres

Pour rechercher les extrema, la première idée qui vient en tête est de calculer les valeurs que prend la fonction f pour toutes les valeurs prises par les arguments puis de repérer la plus grande et la plus petite valeurs prises par les images. Ce n'est évidemment pas la bonne option si les arguments peuvent prendre une infinité de valeurs. Si la fonction à optimiser est une fonction numérique d'une variable réelle, on peut toujours construire le tableau de variations ou tracer la fonction dans le plan comme on l'a appris au lycée. C'est fastidieux dans la mesure où on ne s'intéresse qu'aux optima et à eux seuls. Si la fonction à optimiser est à deux variables réelles, on peut à la rigueur demander à un logiciel approprié de tracer sa surface représentative ou des courbes de niveau et conclure au vu des graphes. Ce peut être parfois utile mais c'est souvent frustrant dans la mesure où on ignore a priori où se trouvent les optima, ce qui entraîne qu'on est bien en peine de donner toutes les indications utiles au traceur de fonction. Quoiqu'il en soit, dès que la fonction a plus de trois variables, les méthodes graphiques ne sont d'aucun secours et il faut disposer d'une théorie solide pour déterminer les optima. L'objet de ce chapitre est d'illustrer certaines résultats mathématiques qui permettent de répondre à certains de ces questions.

Il se trouve que la théorie mathématique de l'optimisation est très complète pour les fonctions au moins deux fois continument différentiables sur un ouvert. Résoudre un problème de maximisation (resp. de minimisation) au moyen des théorèmes reposant sur la différentiabilité revient à rechercher les maxima (resp. les minima) locaux. En effet, la différentiabilité est une propriété locale en ce sens qu'il est licite de remplacer une fonction par une fonction polynomiale au voisinage d'un point. L'approximation résultant de la différentiation est de moins en moins bonne, voire franchement erronée, quand on s'éloigne du point où elle a été calculée. En conséquence, la partie la plus élaborée de la théorie de l'optimisation donne les propriétés locales d'une solution et se trouve démunie pour caractériser les optima globaux sauf si les fonctions ont des propriétés particulières telles que la convexité ou la concavité.

4.3 Théorème (de FERMAT : condition nécessaire du premier ordre)

Soit \mathcal{D} un sous-ensemble ouvert de \mathbb{R}^n , \mathbf{x}_0 un point contenu dans \mathcal{D} et $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 en ce point. Si f présente un extrémum local alors

$$\nabla f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}.$$

4.4 Définition (Point stationnaire ou critique)

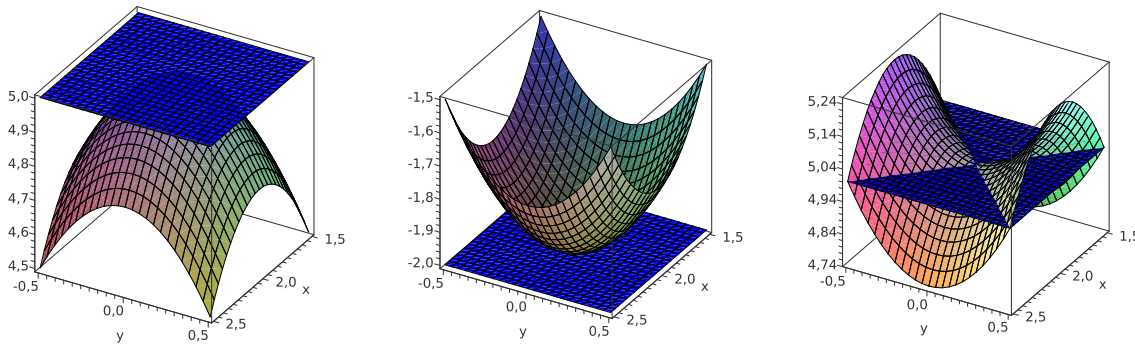
À l'instar des fonctions d'une variable réelle, un point \mathbf{x}_0 vérifiant $\nabla f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$ est appelé *point stationnaire* ou *point critique* de f .

Nature d'un point critique : étude directe La condition du premier ordre signifie géométriquement que le plan tangent à la surface d'équation $z = f(x, y)$ au point (x_0, y_0) de coordonnées $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ est horizontal. Après avoir déterminé un point stationnaire \mathbf{x}_0 , on peut alors déterminer sa nature en étudiant le signe de la différence

$$d(\mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0).$$

Si cette différence est de signe constant pour \mathbf{h} voisin de $\mathbf{0}$, il s'agit d'un extrémum local (un *maximum* si $d < 0$, un *minimum* si $d > 0$). Sinon, il s'agit d'un *point-col* (ou *point-selle*). Mieux, si le signe est constant pour \mathbf{h} quelconque, alors l'extrémum est global.

La figure à gauche illustre le cas d'un *maximum* et la figure au centre le cas d'un *minimum*. La figure à droite illustre le fait que la condition nécessaire d'optimalité n'est pas une condition suffisante ; dans ce cas on dit que f présente un *col* en (x_0, y_0) ou que (x_0, y_0) est un *point-selle* de f . Le mot *col* vient de l'exemple de la fonction altitude et de la configuration (idéalisée) d'un col de montagne : minimum de la ligne de crête, maximum de la route, sans être un extrémum du paysage. Le mot *selle* vient de l'exemple d'une selle de cheval.



EXEMPLE

On cherche les extrema de la fonction $f(x, y) = x^2 + y^2$ dans le disque ouvert centré en $(0, 0)$ de rayon 1, représenté par $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$. Le seul candidat extrémum est l'unique point critique $(0, 0)$ qu'on trouve en résolvant $\partial_x f(x, y) = 0$ et $\partial_y f(x, y) = 0$. La définition implique de façon immédiate que f admet un minimum global en $(0, 0)$. En effet

$$f(x, y) = x^2 + y^2 \geq 0 = f(0, 0) \quad \forall (x, y) \in \mathcal{D}.$$

En revanche, la fonction n'admet aucun maximum.

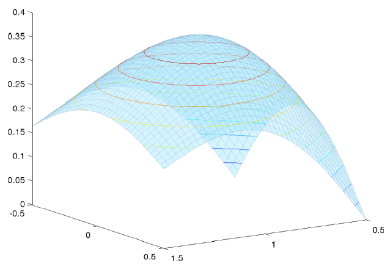
4.5 Théorème (Condition suffisante d'extrémum local dans un ouvert (cas de 2 variables))

Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^2 sur un ouvert $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ et (x_0, y_0) un point stationnaire ; posons

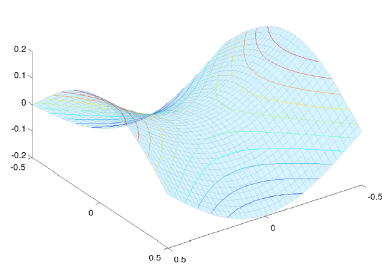
$$\det(H_f(x_0, y_0)) \equiv \partial_{xx} f(x_0, y_0) \cdot \partial_{yy} f(x_0, y_0) - (\partial_{xy} f(x_0, y_0))^2,$$

le déterminant de la matrice hessienne de f évalué en (x_0, y_0) .

- ▷ Si $\det(H_f(x_0, y_0)) > 0$, alors f présente un extrémum relatif en (x_0, y_0) ; il s'agit
 - ▷ d'un maximum si $\partial_{xx} f(x_0, y_0) < 0$
 - ▷ d'un minimum si $\partial_{xx} f(x_0, y_0) > 0$;
- ▷ si $\det(H_f(x_0, y_0)) < 0$, alors f présente un point-selle (ou point-col) en (x_0, y_0) ; ce n'est pas un extrémum ;



(a) Point de maximum



(b) Point de selle



▷ si $\det(H_f(x_0, y_0)) = 0$, on ne peut pas conclure à partir des dérivées secondes.

En résumé, si $\partial_x f(x_0, y_0) = 0$ et $\partial_y f(x_0, y_0) = 0$, la nature du point critique (x_0, y_0) est déterminée par le tableaux suivant :

$\det(H_f(x_0, y_0))$	$\partial_{xx}f(x_0, y_0)$	Nature de (x_0, y_0)
+	+	minimum local
+	-	maximum local
-		point-selle
0		on ne peut pas conclure

EXEMPLE

On veut étudier la fonction $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y$ sur \mathbb{R}^2 . Elle a pour dérivées partielles $\partial_x f(x, y) = 2x - 2$ et $\partial_y f(x, y) = 2y - 4$ qui ne s'annulent qu'en $(1, 2)$, seul point où il peut donc y avoir un extremum local. On étudie directement le signe de la différence

$$d(h, k) = f(1 + h, 2 + k) - f(1, 2) = h^2 + k^2 > 0.$$

Comme cette différence est positive pour h et k voisins de 0 il s'agit d'un minimum. En effet, $\partial_{xx}f(1, 2) = 2 > 0$, $\partial_{yy}f(1, 2) = 2$, $\partial_{xy}f(1, 2) = 0$ donc $\det(H_f(1, 2)) = 4 > 0$ et il s'agit bien d'un minimum.

EXEMPLE

Pour déterminer les extrema libres de la fonction $f(x, y) = x^2 + y^3 - 2xy - y$ dans \mathbb{R}^2 , on constate d'abord que f est un polynôme, donc différentiable dans l'ouvert \mathbb{R}^2 . Les seuls candidats extrema locaux sont les points critiques. Toutefois, nous ne disposons d'aucune garantie a priori sur le fait que les éventuels extrema locaux soient globaux.

Recherche des points critiques On a

$$\nabla f = \mathbf{0} \iff \begin{pmatrix} 2x - 2y \\ 3y^2 - 2x - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff (x, y) = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) \text{ ou } (x, y) = (1, 1).$$

Les deux candidats sont donc $(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$ et $(1, 1)$.

Classification La matrice hessienne de f en un point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ est

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} \partial_{xx}f(x, y) & \partial_{xy}f(x, y) \\ \partial_{yx}f(x, y) & \partial_{yy}f(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 6y \end{pmatrix}.$$

Comme $\det(H_f(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})) < 0$ et $D(1, 1) > 0$, alors $(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$ est un point-selle et f admet en $(1, 1)$ un minimum local de valeur $f(1, 1) = -1$. Ce minimum n'est cependant pas global puisque, par exemple, $f(0, -2) = -6 < f(1, 1) = -1$.

EXEMPLE

Une firme produit deux types de biens A et B . Son coût total de fabrication C et la demande respective des deux biens q_A et q_B sont donnés par

$$C = q_A^2 + 2q_B^2 + 10, \tag{4.1}$$

$$q_A = 40 - 2p_A - p_B, \tag{4.2}$$

$$q_B = 35 - p_A - p_B. \tag{4.3}$$

Quels sont les niveaux de production qui maximisent le profit ? Quels sont les prix de A et B qui suscitent une demande correspondant à ces niveaux optimaux ?

Pour répondre à ces questions, on écrit la fonction profit $\Pi(q_A, q_B) = q_A p_A + q_B p_B - C(q_A, q_B)$. De (4.2) et (4.3) on peut déduire

$$p_A = 5 - q_A + p_B, \tag{4.4}$$

$$p_B = 30 + q_A - 2q_B, \tag{4.5}$$

et donc que

$$\Pi(q_A, q_B) = 5q_A - 2q_A^2 + 2q_A q_B - 4q_B^2 + 30q_B - 10.$$

Pour maximiser le profit en fonction du niveau de production, on recherche d'abord les points stationnaires de Π :

$$\nabla \Pi(q_A, q_B) = \begin{pmatrix} 5 - 4q_A + 2q_B \\ 2q_A - 8q_B + 30 \end{pmatrix}, \quad \nabla \Pi(q_A, q_B) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff (q_A, q_B) = (50/14, 65/14).$$

On étudie la nature de ce point critique en évaluant la matrice Hessienne :

$$H_{\Pi}(q_A, q_B) = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -8 \end{pmatrix};$$

pour le point stationnaire $(50/14, 65/14)$ on a $\det(H_{\Pi})(50/14, 65/14) > 0$ et $\partial_{q_A q_A} \Pi(50/14, 65/14) < 0$, donc le point $(50/14, 65/14)$ est un maximum local de Π . Comme $H_{\Pi}(q_A, q_B)$ ne dépend pas des variables q_A et q_B , on a $\det(H_{\Pi})(q_A, q_B) > 0$ et $\partial_{q_A q_A} \Pi(q_A, q_B) < 0$ en tout point du domaine, autrement dit Π est une fonction concave et le point $(50/14, 65/14)$ est un maximum global de Π . Comme $q_A = 50/14$ et $q_B = 65/14$ maximisent le profit en fonction des niveaux de production, les prix associés à ce niveau de production sont $p_A = 85/14$ et $p_B = 340/14$.

🔍 EXEMPLE (LOIS DE SNELL-DESCARTES)

Un rayon lumineux se propage à la vitesse v_1 dans le milieu M_1 et à la vitesse v_2 dans le milieu M_2 . Le principe de FERMAT précise que la lumière suit le trajet le plus économique en temps.

En dimension 2. En notant x l'abscisse du point où la trajectoire coupe l'interface, le temps nécessaire pour aller de (x_1, z_1) à (x_2, z_2) en passant par le point d'abscisse x vaut

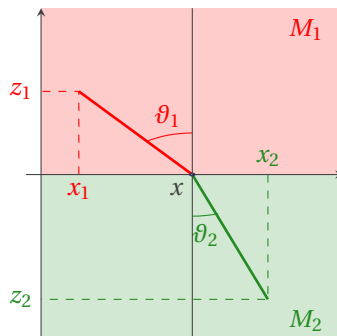
$$t(x) = \frac{\sqrt{(x - x_1)^2 + z_1^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(x_2 - x)^2 + z_2^2}}{v_2}.$$

Cette quantité est (localement) optimale quand sa dérivée par rapport à x s'annule, c'est à dire lorsque

$$\frac{x - x_1}{v_1 \sqrt{(x - x_1)^2 + z_1^2}} - \frac{x_2 - x}{v_2 \sqrt{(x_2 - x)^2 + z_2^2}} = 0,$$

ce qui conduit à la loi de SNELL-DESCARTES

$$\frac{\sin(\vartheta_1)}{v_1} = \frac{\sin(\vartheta_2)}{v_2}.$$



En dimension 3. Dans le cas tridimensionnel, la situation est similaire. Il s'agit cette fois de déterminer les coordonnées (x, y) dans le plan de l'interface où le rayon coupera celui-ci. Le temps de trajet vaut cette fois

$$t(x, y) = \frac{\sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + z_1^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(x_2-x)^2 + (y_2-y)^2 + z_2^2}}{v_2}.$$

Il s'agit cette fois d'optimiser par rapport à x et y simultanément, ce qui revient à annuler simultanément les dérivées de t par rapport à x et y , c'est à dire son gradient. Ceci conduit aux équations

$$\nabla t = \mathbf{0} \iff \begin{pmatrix} \frac{x-x_1}{v_1 \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + z_1^2}} - \frac{x_2-x}{v_2 \sqrt{(x_2-x)^2 + (y_2-y)^2 + z_2^2}} \\ \frac{y-y_1}{v_1 \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + z_1^2}} - \frac{y_2-y}{v_2 \sqrt{(x_2-x)^2 + (y_2-y)^2 + z_2^2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x_2-x \\ y_2-y \end{pmatrix} = \frac{v_2 d_2}{v_1 d_1} \begin{pmatrix} x-x_1 \\ y-y_1 \end{pmatrix}$$

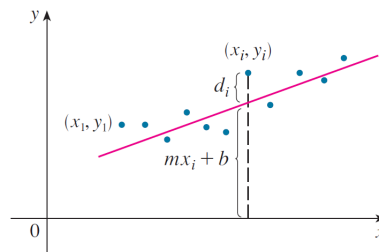
autrement dit, le point du plan de coordonnées (x, y) se trouve dans le segment compris entre (x_1, y_1) et (x_2, y_2) . On se ramène donc à un problème bidimensionnel et le raisonnement ci-dessus s'applique directement.

On obtient de la même façon la loi de SNELL-DESCARTES à la réflexion.

4.1.1. Méthode des moindres carrés

Lorsqu'un chercheur met au point une expérience (parce qu'il a quelques raisons de croire que les deux grandeurs x et y sont liées par une fonction f), il récolte des données sous la forme de points $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^n$ mais en générale ces données sont affectées par des erreurs de mesure. Lorsqu'il en fait une représentation graphique il cherche f pour qu'elle s'ajuste le mieux possible aux points observés. Soit $d_i = y_i - f(x_i)$ l'écart vertical du point (x_i, y_i) par rapport à la fonction f . La méthode des moindres carrés est celle qui choisit f de sorte que *la somme des carrés de ces déviations soit minimale*.

🐼 Fitting par une relation affine Supposons que les deux grandeurs x et y sont liées approximativement par une relation affine, c'est-à-dire de la forme $y = mx + q$ pour certaines valeurs de m et q (autrement dit, lorsqu'on affiche ces points dans un plan cartésien, les points ne sont pas exactement alignés mais cela semble être dû à des erreurs de mesure). On souhaite alors trouver les constantes m et q pour que la droite d'équation $y = mx + q$ s'ajuste *le mieux possible* aux points observés. Pour cela, introduisons $d_i \equiv y_i - (mx_i + q)$ l'écart vertical du point (x_i, y_i) par rapport à la droite.



La méthode des moindres carrés est celle qui choisit m et q de sorte que *la somme des carrés de ces déviations soit minimale*. Pour cela, on doit minimiser la fonction $\mathcal{E} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par

$$\mathcal{E}(m, q) = \sum_{i=0}^n d_i^2 = \sum_{i=0}^n (y_i - mx_i - q)^2.$$

Pour minimiser \mathcal{E} on cherche d'abord les points stationnaires, *i.e.* les points (m, q) qui vérifient $\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial m} = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial q} = 0$. Puisque

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial m}(m, q) = -2 \left(\sum_{i=0}^n (y_i - (mx_i + q)) x_i \right), \quad \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial q}(m, q) = -2 \left(\sum_{i=0}^n (y_i - (mx_i + q)) \right),$$

alors

$$\begin{aligned} \begin{cases} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial m}(m, q) = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial q}(m, q) = 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} \sum_{i=0}^n (y_i - mx_i - q)x_i = 0 \\ \sum_{i=0}^n (y_i - mx_i - q) = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} (\sum_{i=1}^n x_i^2) m + (\sum_{i=0}^n x_i) q = \sum_{i=0}^n y_i x_i \\ (\sum_{i=1}^n x_i) m + (n+1) q = \sum_{i=0}^n y_i \end{cases} \iff \begin{cases} m = \frac{(\sum_{i=0}^n x_i)(\sum_{i=0}^n y_i) - (n+1)(\sum_{i=0}^n x_i y_i)}{(\sum_{i=0}^n x_i)^2 - (n+1)(\sum_{i=0}^n x_i^2)}, \\ q = \frac{(\sum_{i=0}^n x_i)(\sum_{i=0}^n x_i y_i) - (\sum_{i=0}^n y_i)(\sum_{i=0}^n x_i^2)}{(\sum_{i=0}^n x_i)^2 - (n+1)(\sum_{i=0}^n x_i^2)}. \end{cases} \end{aligned}$$

On a trouvé un seul point stationnaire. On établit sa nature en étudiant la matrice Hessienne :

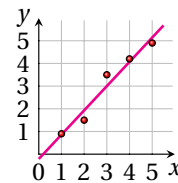
$$H_{\mathcal{E}}(m, q) = 2 \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=0}^n x_i \\ \sum_{i=0}^n x_i & (n+1) \end{pmatrix}$$

et $\det(H_{\mathcal{E}}(m, q)) = 4 \left((n+1) \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=0}^n x_i)^2 \right) > 0$ avec $\partial_{mm} \mathcal{E}(m, q) = \sum_{i=1}^n x_i^2 > 0$ donc il s'agit bien d'un minimum. La droite d'équation $y = mx + q$ ainsi calculée s'appelle *droite de régression de y par rapport à x*.

EXEMPLE

Si on a les points suivantes

x	1	2	3	4	5
y	0.9	1.5	3.5	4.2	4.9



on trouve $m = 1.07$ et $q = -0.21$.

Fitting par un exponentiel Soit $a > 0$ et considérons la fonction $f(x) = ae^{kx}$: elle est non-linéaire mais si on prend son logarithme on obtient $\ln(f(x)) = kx + \ln(a)$ qui est linéaire en k et a la forme $mx + q$ avec $m = k$ et $q = \ln(a)$. On peut alors faire une régression linéaire sur l'ensemble $\{(x_i, \ln(y_i))\}_{i=0}^n$ et obtenir ainsi k et $\ln(a)$. Cependant ceci n'est pas équivalent à faire un fitting sur l'ensemble initial $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^n$. En effet, si on note $d_i = y_i - ae^{kx_i}$ et $D_i = \ln(y_i) - (kx_i + \ln(a))$, lorsqu'on fait une régression linéaire sur l'ensemble $\{(x_i, \ln(y_i))\}_{i=0}^n$ on minimise D_i et non d_i .

Fitting par un polynôme On considère un ensemble de points expérimentaux $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^n$ et on suppose que les deux grandeurs x et y sont liées, au moins approximativement, par une relation polynomiale, c'est-à-dire de la forme $y = \sum_{j=0}^m a_j x^j$ pour certaines valeurs de a_j . On souhaite alors trouver les $m + 1$ constantes a_j pour que le polynôme d'équation $y = \sum_{j=0}^m a_j x^j$ s'ajuste le mieux possible aux points observés. Soit $d_i = y_i - \left(\sum_{j=0}^m a_j x_i^j\right)$ l'écart vertical du point (x_i, y_i) par rapport au polynôme. La méthode des moindres carrés est celle qui choisit les a_j de sorte que la somme des carrés de ces déviations soit minimale.

Pour cela, on doit minimiser la fonction $\mathcal{E} : \mathbb{R}^{m+1} \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par

$$\mathcal{E}(a_0, a_1, \dots, a_m) = \sum_{i=1}^n d_i^2 = \sum_{i=0}^n \left(y_i - \sum_{j=0}^m a_j x_i^j \right)^2.$$

Pour minimiser \mathcal{E} on cherche d'abord ses points stationnaires, i.e. les points qui vérifient $\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial a_j} = 0$ pour $j = 0, \dots, m$. Puisque

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial a_0}(a_0, a_1, \dots, a_m) &= -2 \sum_{i=0}^n \left(x_i^0 \left(y_i - \sum_{j=0}^m a_j x_i^j \right) \right), \\ \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial a_1}(a_0, a_1, \dots, a_m) &= -2 \sum_{i=0}^n \left(x_i^1 \left(y_i - \sum_{j=0}^m a_j x_i^j \right) \right), \\ &\vdots \\ \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial a_m}(a_0, a_1, \dots, a_m) &= -2 \sum_{i=0}^n \left(x_i^m \left(y_i - \sum_{j=0}^m a_j x_i^j \right) \right), \end{aligned}$$

on obtient alors le système linéaire de $(m + 1)$ équations en les $(m + 1)$ inconnues a_0, a_1, \dots, a_m suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial a_0}(a_0, a_1, \dots, a_m) = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial a_1}(a_0, a_1, \dots, a_m) = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial a_m}(a_0, a_1, \dots, a_m) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a_0(n+1) + a_1 \sum_{i=0}^n x_i + \dots + a_m \sum_{i=0}^n x_i^m = \sum_{i=0}^n y_i \\ a_0 \sum_{i=0}^n x_i + a_1 \sum_{i=0}^n x_i^2 + \dots + a_m \sum_{i=0}^n x_i^{m+1} = \sum_{i=0}^n y_i x_i \\ \vdots \\ a_0 \sum_{i=0}^n x_i^m + a_1 \sum_{i=0}^n x_i^{m+1} + \dots + a_m \sum_{i=0}^n x_i^{2m} = \sum_{i=0}^n y_i x_i^m \end{cases}$$

$$\iff \begin{pmatrix} (n+1) & \sum_{i=0}^n x_i & \dots & \sum_{i=0}^n x_i^m \\ \sum_{i=0}^n x_i & \sum_{i=0}^n x_i^2 & \dots & \sum_{i=0}^n x_i^{m+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=0}^n x_i^m & \sum_{i=0}^n x_i^{m+1} & \dots & \sum_{i=0}^n x_i^{2m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^n y_i \\ \sum_{i=0}^n y_i x_i \\ \vdots \\ \sum_{i=0}^n y_i x_i^m \end{pmatrix}$$

Quand $m = n$, le polynôme des moindres carrés coïncide avec le polynôme d'interpolation de LAGRANGE, *i.e.* l'unique polynôme L tel que $L(x_i) = y_i$ pour tout $i = 0, \dots, n$.

EXEMPLE

À partir des données

x	1.0	2.5	3.5	4.0	1.1	1.8	2.2	3.7
y	6.008	15.722	27.130	33.772	5.257	9.549	11.098	28.828

on veut calculer la droite et la parabole de régression et comparer les erreurs des chaque régression.

1. La droite de régression a équation $y = mx + q$ avec

$$m = \frac{\sum_{i=0}^6 y_i(x_i - \bar{x})}{\sum_{i=0}^6 x_i(x_i - \bar{x})} \approx 8.420042377, \quad q = \bar{y} - m\bar{x} \approx -3.37833528,$$

où $\bar{x} = \frac{1}{7} \sum_{i=0}^6 x_i = 2.0125$ et $\bar{y} = \frac{1}{7} \sum_{i=0}^6 y_i = 13.567$. L'erreur est

$$\sum_{i=0}^6 (y_i - (mx_i + q))^2 = 39.59960820.$$

2. La parabole de régression a équation $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ avec a_0, a_1, a_2 solution du système linéaire

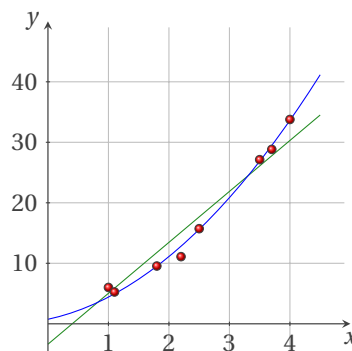
$$\begin{pmatrix} 8 & \sum_{i=0}^6 x_i & \sum_{i=0}^6 x_i^2 \\ \sum_{i=0}^6 x_i & \sum_{i=0}^6 x_i^2 & \sum_{i=0}^6 x_i^3 \\ \sum_{i=0}^6 x_i^2 & \sum_{i=0}^6 x_i^3 & \sum_{i=0}^6 x_i^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^6 y_i \\ \sum_{i=0}^6 y_i x_i \\ \sum_{i=0}^6 y_i x_i^2 \end{pmatrix} \quad i.e. \quad \begin{pmatrix} 8 & 16.1 & 44.79 \\ 16.1 & 44.79 & 141.311 \\ 44.79 & 141.311 & 481.5123 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 108.536 \\ 322.7425 \\ 1067.97905 \end{pmatrix}$$

et on obtient

$$\begin{cases} a_0 = 0.744611871628180655, \\ a_1 = 2.14480468957977077, \\ a_2 = 1.51926210146774388. \end{cases}$$

L'erreur est

$$\sum_{i=0}^6 (y_i - (a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2))^2 = 5.715921703.$$



EXEMPLE

Le tableau ci-dessous donne la conductivité thermique k du sodium pour différentes valeurs de la température. On veut calculer la parabole de meilleur approximation.

T (°C)	79	190	357	524	690
k	1.00	0.932	0.839	0.759	0.693

La parabole de régression a équation $y = a_0 + a_1x + a_2x^2$ avec a_0, a_1, a_2 solution du système linéaire

$$\begin{pmatrix} 6 & \sum_{i=0}^4 x_i & \sum_{i=0}^4 x_i^2 \\ \sum_{i=0}^4 x_i & \sum_{i=0}^4 x_i^2 & \sum_{i=0}^4 x_i^3 \\ \sum_{i=0}^4 x_i^2 & \sum_{i=0}^4 x_i^3 & \sum_{i=0}^4 x_i^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^4 y_i \\ \sum_{i=0}^4 y_i x_i \\ \sum_{i=0}^4 y_i x_i^2 \end{pmatrix} \quad i.e. \quad \begin{pmatrix} 8 & 16.1 & 44.79 \\ 16.1 & 44.79 & 141.311 \\ 44.79 & 141.311 & 481.5123 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 108.536 \\ 322.7425 \\ 1067.97905 \end{pmatrix}$$

et on obtient

$$\begin{cases} a_0 = 0.744611871628180655, \\ a_1 = 2.14480468957977077, \\ a_2 = 1.51926210146774388. \end{cases}$$

L'erreur est

$$\sum_{i=0}^6 (y_i - (a_0 + a_1x_i + a_2x_i^2))^2 = 5.715921703.$$

EXEMPLE

La viscosité cinématique μ de l'eau varie en fonction de la température comme dans le tableau suivant :

T (°C)	0	21.1	37.8	54.4	71.1	87.8	100
μ ($10^{-3} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$)	1.79	1.13	0.696	0.519	0.338	0.321	0.296

On veut évaluer les valeurs $\mu(10^\circ)$, $\mu(30^\circ)$, $\mu(60^\circ)$, $\mu(90^\circ)$ par le polynôme de meilleur approximation de degré 3.

On a la famille de points $\{(T_i, \mu_i)\}_{i=0}^6$. Le polynôme de meilleur approximation de degré 3 s'écrit

$$r(T) = a_0 + a_1T + a_2T^2 + a_3T^3$$

où a_0, a_1, a_2, a_3 sont solution du système linéaire

$$\begin{pmatrix} 6 & \sum_{i=0}^6 T_i & \sum_{i=0}^6 T_i^2 & \sum_{i=0}^6 T_i^3 \\ \sum_{i=0}^6 T_i & \sum_{i=0}^6 T_i^2 & \sum_{i=0}^6 T_i^3 & \sum_{i=0}^6 T_i^4 \\ \sum_{i=0}^6 T_i^2 & \sum_{i=0}^6 T_i^3 & \sum_{i=0}^6 T_i^4 & \sum_{i=0}^6 T_i^5 \\ \sum_{i=0}^6 T_i^3 & \sum_{i=0}^6 T_i^4 & \sum_{i=0}^6 T_i^5 & \sum_{i=0}^6 T_i^6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^6 \mu_i \\ \sum_{i=0}^6 \mu_i T_i \\ \sum_{i=0}^6 \mu_i T_i^2 \\ \sum_{i=0}^6 \mu_i T_i^3 \end{pmatrix}$$

et on obtient

$$\begin{cases} a_0 = 0.914534618675843625, \\ a_1 = 0.914534618675843625, \\ a_2 = -0.000620138768106035594, \\ a_3 = -0.000620138768106035594. \end{cases}$$

On a alors

$$r(10^\circ) = 1.004300740 \quad r(30^\circ) = 0.9114735501 \quad r(60^\circ) = 0.9114735501 \quad r(90^\circ) = 0.249145396$$

4.2. Extrema liés

La scission entre extrema libres et liés (ou «sous contraintes») est née de l'impossibilité de traiter l'optimisation dans les domaines non ouverts selon la procédure exposée dans la section précédente. En effet, la condition nécessaire ne s'applique pas aux bords du domaine. Or, si de tels points existent, leur étude au cas par cas est généralement peu aisée. Dès lors, la théorie mathématique propose des méthodes d'optimisation liée. Celles-ci incorporent directement dans la résolution les contraintes qui définissent des domaines non ouverts. La nomenclature peut s'avérer trompeuse. En effet, au plan opérationnel, ce n'est pas la présence intrinsèque de contraintes dans l'optimisation qui conduit à délaissier

l'optimisation libre au profit de l'optimisation liée. Ce sont plutôt les conséquences de ces restrictions au niveau de la nature topologique du domaine de définition de la fonction qui guident l'utilisateur vers l'une ou l'autre des techniques. Ainsi, dans un domaine fort limité, mais ouvert, la recherche des extrema libres s'applique. À l'inverse, une contrainte sous forme d'inégalité non stricte doit toujours être prise en compte pour déterminer les extrema liés.

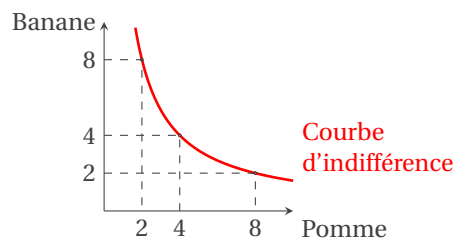
Parmi les types de contraintes auxquelles le modélisateur peut se trouver confronté, deux classes se distinguent. D'une part, celles qui lient les variables du problème au travers d'une ou plusieurs équations. Ces contraintes dites d'égalités sont appréhendées grâce au théorème de LAGRANGE, qui fournit une condition de premier ordre formulée à partir d'une fonction *ad hoc*, dénommée lagrangien. Dans cette approche, de nouvelles variables, dites multiplicateurs, apparaissent et offrent une possibilité supplémentaire dans l'analyse des résultats. D'autre part, l'optimisation sous des contraintes d'inégalités non strictes, généralement traitée grâce au théorème de KUHN et TUCKER, ne sera pas étudiée lors de ce module.

EXEMPLE

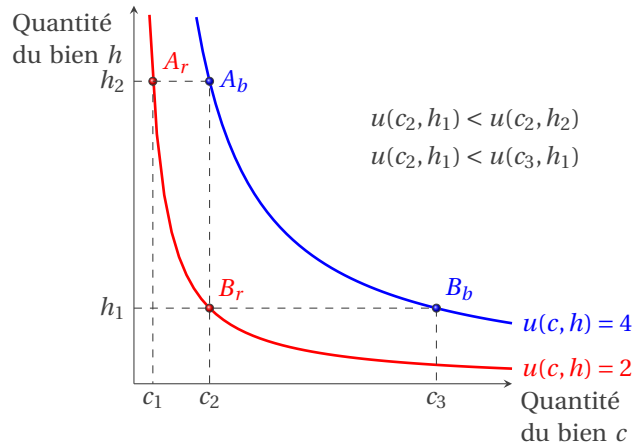
En économie, l'optimisation sous contraintes permet de déterminer une situation optimale (par exemple comment maximiser le profit, minimiser les dépenses, ou encore maximiser le bien-être) sous une contrainte quelconque (budget limité, bien-être minimum requis...). Chaque jour, en tant que consommateur, nous résolvons dans notre tête un problème d'optimisation sous contraintes en répondant à la question «quelle quantité de chaque bien vais-je acheter pour maximiser mon bien-être, étant donné ma contrainte budgétaire?». Chaque jour, les producteurs aussi résolvent un problème d'optimisation sous contraintes en se demandant par exemple «pour produire un bien supplémentaire, vais-je acheter une machine ou embaucher un nouveau salarié, étant donné le rendement de chacun et ma contrainte actuelle de trésorerie?». Nous allons essayer de comprendre l'idée qui se cache derrière ce problème d'optimisation.

Considérons par exemple un consommateur qui va dans un fast-food et a le choix entre deux biens : il peut acheter c canettes de soda et/ou h hamburgers. Sachant qu'un hamburger coûte $p_h = 4\text{€}$ et une canette de soda coûte $p_c = 2\text{€}$ et que notre consommateur a un budget de 16€ par jour pour manger (*i.e.* $cp_c + hp_h \leq 16$), il a donc le choix entre diverses combinaisons : acheter 8 canettes de soda et 0 hamburger, 6 canettes de soda et 1 hamburger, 4 canettes de soda et 2 hamburgers, 2 canettes de soda et 3 hamburgers, 0 canette de soda et 4 hamburgers. Pour trouver quelle est la consommation optimale pour lui, notre consommateur va essayer de mesurer le bien-être (ce que l'on appelle en économie la fonction «utilité» $u: (\mathbb{R}_+)^2 \rightarrow \mathbb{R}$ qui est une fonction des deux biens c et h) des quatre options possibles et choisir l'option (*i.e.* c_0 et h_0) qui *maximise son bien-être* (*i.e.* la valeur $u(c_0, h_0)$) *tout en respectant sa contrainte de budget*. La première chose à bien comprendre dans ce problème, c'est que le bien-être apporté par *la consommation d'une unité supplémentaire d'un bien est décroissant*. Qu'est ce que cela signifie? Simplement que lorsque votre consommation de soda augmente, passant de 0 canette à 1 canette, alors le bien-être apporté par cette première canette sera très grand. Par contre, le bien-être additionnel que vous procure une hausse de consommation de 7 à 8 canettes de soda sera très faible. Donc pour une même hausse de quantité (+1 canette) et le même coût (2€), votre bien-être n'augmente pas dans la même manière. D'un point de vue économique, on dit alors que *l'utilité marginale d'un bien est décroissante*; le bien-être procuré par chaque dose supplémentaire d'un bien consommé va en diminuant et devient nul à partir d'un certain seuil appelé «point de satiété».

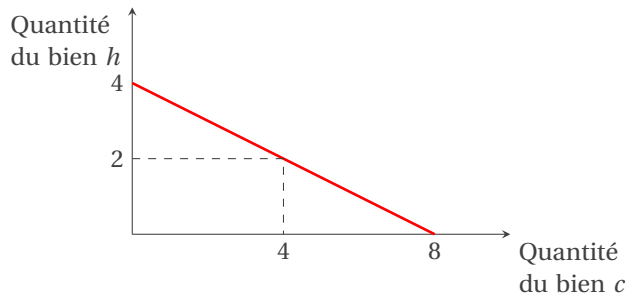
Cette relation non-linéaire du bien-être permet d'introduire ce que l'on appelle les *courbes d'indifférence*, qui représentent toutes les combinaisons de deux biens apportant le même bien-être final (*i.e.* les courbes de niveau de la fonction utilité u). Sur le graphique ci-dessous, nous voyons le cas d'un consommateur qui se dit que, pour lui, le bien-être apporté par la consommation de 8 bananes et de 2 pommes est le même que le bien-être procuré par 4 bananes et 4 pommes, mais aussi le même que s'il mange 2 bananes et 8 pommes. Les trois points sont situés sur cette même courbe d'indifférence.



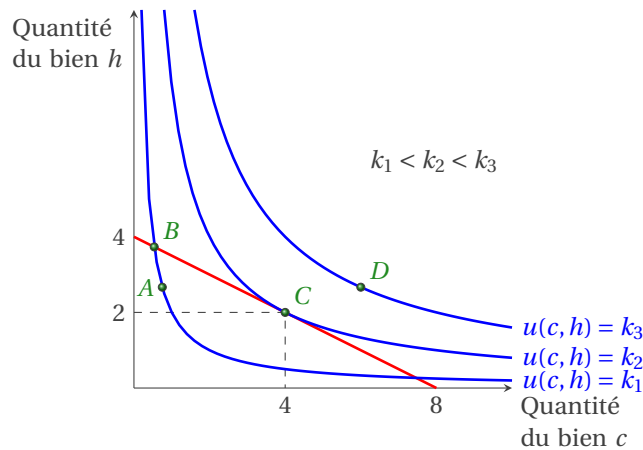
Pour un même individu, il existe donc une infinité de courbes d'indifférence, chaque courbe représentant l'ensemble des combinaisons de deux biens procurant au consommateur un niveau de bien-être identique. Plus on s'éloigne de l'ordonnée à l'origine, plus le bien-être total est grand; par exemple sur le graphique ci-dessous le bien-être d'un consommateur sur la courbe **bleue** est supérieur au bien-être sur la courbe **rouge**. C'est logique, il consomme davantage de quantité des deux biens sur cette courbe **bleue**.



Mais le but d'un consommateur n'est pas simplement de maximiser son utilité (car dans ce cas, il faut simplement consommer le plus possible jusqu'à atteindre la satiété pour l'ensemble des biens), mais de maximiser son utilité sous contrainte budgétaire. L'idée va donc être d'aller chercher la courbe d'indifférence la plus éloignée de l'ordonnée à l'origine, tout en respectant son budget. Pour cela, il faut donc introduire une droite de budget, représentant la quantité de chaque bien que l'on peut acheter étant donné son budget total. Dans notre exemple soda/hamburgers, cela correspond aux différentes combinaisons possible : c'est la droite en rouge ci-dessous.




On commence à voir comment trouver la consommation optimale : le but est de maximiser l'utilité sous contrainte budgétaire, c'est à dire en fait trouver la courbe d'indifférence la plus éloignée possible de l'ordonnée à l'origine mais qui reste tout de même sur la ligne rouge de contrainte budgétaire. Graphiquement, le point optimale est donc trouvé lorsque la droite de contrainte budgétaire est tangente à la courbe d'indifférence.



Par exemple, sur le graphique ci-dessus on a tracé pour les biens c et h notre contrainte budgétaire (droite rouge) et 3 courbes d'indifférence. Étant donné la contrainte, la consommation optimale se trouve au point C . Pourquoi ce n'est pas A , B ou D par exemple ? Car en B , l'ensemble du budget est utilisé, mais on se trouve sur une courbe d'indifférence plus basse qu'en C , donc le bien-être en B est inférieur au bien-être de C pour un même niveau de dépense. Idem en A , on ne maximise pas l'utilité et on ne respecte pas au passage notre contrainte budgétaire. En D , le bien être serait supérieur au bien-être en C , mais on ne respecte pas la contrainte budgétaire, donc ce point n'est pas atteignable (vous n'avez pas assez d'argent pour atteindre la consommation des deux biens en D).

Voilà donc comment trouver graphiquement et intuitivement la solution de notre problème. Mais lorsque cela devient plus complexe, quelques notions de mathématiques et l'utilisation de la méthode de LAGRANGE permettent de répondre précisément à ce type de questions concernant la maximisation ou minimisation d'une fonction sous contrainte quelconque.

 **Problème** Déterminer les extrema d'une fonction de n variables, notée $f(\mathbf{x})$, mathématiquement définie dans un domaine ouvert $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$, mais dont les variables sont soumises aux m contraintes $g_1(\mathbf{x}) = 0, g_2(\mathbf{x}) = 0, \dots, g_m(\mathbf{x}) = 0$, où les fonctions g_j sont également définies dans \mathcal{D} . Ces contraintes délimitent le sous-ensemble \mathcal{A} de \mathcal{D} dans lequel s'effectue l'optimisation $\mathcal{A} = \{\mathbf{x} \in \mathcal{D} \mid g_1(\mathbf{x}) = 0, \dots, g_m(\mathbf{x}) = 0\}$.

La définition d'extremum lié résulte de celle des extrema libres.

4.6  **Définition (Optimisation liée)**

La fonction f , appelée *fonction objectif*, admet en $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{A}$ un maximum lié (resp. un minimum lié) sous les contraintes $g_1(\mathbf{x}) = 0, g_2(\mathbf{x}) = 0, \dots, g_m(\mathbf{x}) = 0$, si en ce point elle admet un maximum libre (resp. un minimum libre) dans le domaine \mathcal{A} .

Généralement, une contrainte de type $g_j(\mathbf{x}) = 0$ définit une courbe. L'ensemble \mathcal{A} est donc constitué de l'intersection de m courbes dans $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$. Pour $m > 1$, il peut donc contenir fort peu de points. C'est pourquoi, en pratique, il est rare de rencontrer plus d'une contrainte d'égalité. Et, dans tous les cas, il est exclu d'avoir plus de contraintes que de variables, de sorte que la condition $m < n$ sera systématiquement imposée.

 **EXEMPLE**

Le consommateur maximise une fonction d'utilité, notée $U(x, y)$, qui dépend des quantités consommées de deux biens, x et y , sous une contrainte budgétaire $p_1x + p_2y = R$, où $p_1 > 0$ et $p_2 > 0$ sont les prix des biens. Cette contrainte exprime que le montant alloué aux dépenses relatives aux deux biens considérés est fixé à R . Dans ce cas simple qui comporte deux variables et une contrainte linéaire, on peut aisément ramener l'optimisation liée à la recherche d'un maximum libre. En effet, la contrainte de budget permet d'explicitement la quantité d'un bien en fonction de l'autre : $y = \frac{R}{p_2} - \frac{p_1}{p_2}x$ et on peut définir la fonction d'une seule variable $\tilde{U}(x) = U(x, y(x))$. En vertu de la condition nécessaire pour la fonction d'une variable obtenue après substitution de y en fonction de x , on a

$$\tilde{U}'(x) = \frac{dU(x, y(x))}{dx} = \partial_x U(x, y) + \partial_y U(x, y) y'(x) = \partial_x U(x, y) - \frac{p_1}{p_2} \partial_y U(x, y)$$

donc

$$\tilde{U}'(x) = 0 \implies \frac{\partial_x U(x, y)}{p_1} = \frac{\partial_y U(x, y)}{p_2}.$$

Ce résultat indique qu'à l'optimum, les utilités marginales (terme économique qui signifie tout simplement dérivées partielles de la fonction utilité par rapport aux quantités consommées) pondérées par les inverses des prix s'égalisent et désignons par λ cette quantité commune.

Par ailleurs, la contrainte de budget peut être reformulée par $g(x, y) = 0$, où $g(x, y) = p_1x + p_2y - R$, de sorte que $p_1 = \partial_x g(x, y)$ et $p_2 = \partial_y g(x, y)$ et finalement

$$\frac{\partial_x U(x, y)}{p_1} = \frac{\partial_y U(x, y)}{p_2} = \lambda \iff \begin{cases} \partial_x U(x, y) - \lambda \partial_x g(x, y) = 0 \\ \partial_y U(x, y) - \lambda \partial_y g(x, y) = 0 \end{cases} \iff \nabla U = \lambda \nabla g.$$

Autrement dit, si on introduit la fonction

$$L(x, y, \lambda) \equiv U(x, y) - \lambda g(x, y),$$

à l'optimum on a $\nabla L = 0$, ce qui correspond à la condition nécessaire d'existence d'un extrema libre pour la fonction L .

Le théorème de LAGRANGE généralise la démarche adoptée dans cette résolution. Il représente une *condition nécessaire pour l'optimisation sous des contraintes d'égalité*.

4.7  **Théorème (des multiplicateurs de LAGRANGE)**

Soit les fonctions f et g_1, \dots, g_m ($m < n$) de classe \mathcal{C}^1 dans un ouvert $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$. Si f admet en \mathbf{x}_0 un extremum lié sous les contraintes $g_1(\mathbf{x}) = 0, \dots, g_m(\mathbf{x}) = 0$ et si la jacobienne en \mathbf{x}_0 (i.e. la matrice $(\partial x_j g_i(\mathbf{x}_0))_{m \times n}$) est de rang m , alors

$$\exists \boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m \text{ tel que } \nabla f(\mathbf{x}_0) = \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla g_i(\mathbf{x}_0).$$

Le théorème de LAGRANGE peut être vu comme la condition nécessaire d'existence d'extrema libres appliquée à la fonction de $n + m$ variables appelée fonction lagrangienne (ou le lagrangien) :

$$L: \mathcal{D} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) \mapsto f(\mathbf{x}_0) - \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(\mathbf{x}_0)$$

où $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$.

⚠ ATTENTION

La méthode de LAGRANGE permet juste de trouver les candidats extrema \mathbf{x}_0 de f sous les contraintes $g_i(\mathbf{x}) = 0$ mais ne permet pas de conclure sur leur nature. Il faut alors étudier le comportement de f au voisinage de chaque point critique dans $\{\mathbf{x} \in \mathcal{D} \mid g_1(\mathbf{x}) = 0, \dots, g_m(\mathbf{x}) = 0\}$. Pour cela, on étudie le signe de la fonction distance définie par

$$d(\mathbf{h}) \equiv f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0),$$

pour $\mathbf{h} \simeq \mathbf{0}$ et $g_i(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) = 0$ pour $i = 1, \dots, m$.

D'une manière qui peut sembler paradoxale, la méthode de LAGRANGE permet de transformer un problème d'optimisation liée d'une fonction de n variables sous m contraintes en un problème d'optimisation libre d'une fonction de $n + m$ variables, alors qu'intuitivement, on aurait plutôt attendu une baisse de la dimension du problème due aux restrictions impliquées par la présence de contraintes. Mais le paradoxe n'est qu'apparent. En effet, l'introduction des m multiplicateurs de LAGRANGE, $(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$, enrichit plus qu'elle n'alourdit l'optimisation, grâce à l'interprétation dont jouissent ces variables. Précisément, la valeur prise par un multiplicateur traduit l'influence marginale du niveau de la contrainte correspondante sur la valeur de la fonction objective à l'optimum. On dit aussi que le multiplicateur de LAGRANGE mesure l'intensité de la contrainte. Chaque multiplicateur exprime la sensibilité de la fonction d'objectif à la variation du niveau d'une contrainte. Par exemple, une contrainte qui n'influence pas l'optimisation (contrainte inopérante ou superflue) est affectée d'un multiplicateur nul. À l'opposé, un multiplicateur élevé correspond à une contrainte qui pénalise de façon importante l'optimum.

📖 **Explication (prérequis : algèbre linéaire)** On considère le problème d'optimisation suivant :

optimiser localement la fonction $f: \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sous les contraintes

$$\begin{cases} g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \\ g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \\ \vdots \\ g_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \end{cases} \quad (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathcal{D},$$

c'est-à-dire qu'il y a m contraintes unidimensionnelles dans un espace à n dimensions ($m < n$). Ce que nous entendons par *optimiser localement*, c'est chercher les points $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ qui minimisent localement ou maximisent localement f tout en satisfaisant la contrainte $\mathbf{g}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$ ayant noté $\mathbf{g} \equiv (g_1, g_2, \dots, g_m): \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^m$ et \mathcal{A} l'ensemble des contraintes défini par $\mathcal{A} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$. Soit \mathbf{x}_0 un point de \mathcal{A} , c'est-à-dire tel que $\mathbf{g}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$, et soit

$$\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{D}$$

$$t \mapsto \mathbf{x}(t) \equiv (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$$

une courbe paramétrée sur \mathcal{A} qui passe par \mathbf{x}_0 à l'instant $t = t_0$, c'est-à-dire telle que $\mathbf{g}(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{0}$ pour tout t et $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$. Introduisons la fonction

$$\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$t \mapsto f(\mathbf{x}(t))$$

Si \mathbf{x}_0 optimise f sur \mathcal{A} , alors il optimise a fortiori f sur la courbe γ , puisque γ est contenue dans \mathcal{A} . On en déduit que t_0 optimise φ , c'est-à-dire que φ atteint un minimum ou un maximum en t_0 . Or φ est une fonction habituelle, on doit donc avoir annulation de sa dérivée en t_0 : $\varphi'(t_0) = 0$. Compte tenu de la formule de dérivation d'une fonction composée, on a $\varphi'(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}(t)) \frac{dx_i}{dt}(t)$; par conséquent $\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) \frac{dx_i}{dt}(t_0) = 0$. Ce raisonnement étant valable pour toute courbe γ contenue dans \mathcal{A} passant par \mathbf{x}_0 en $t = t_0$, on a $\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) v_i = 0$ pour tout $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ appartenant au plan tangent

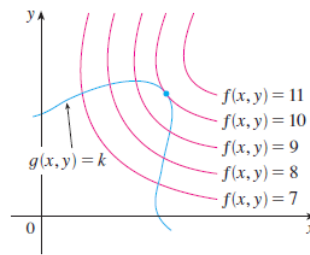


FIGURE 4.1. – On cherche les extrema de la fonction $f(x, y)$ sous la contrainte $g(x, y) = k$. Cela signifie qu'on cherche les extrema de $f(x, y)$ lorsque le point (x, y) appartient à la courbe de niveau $g(x, y) = k$. En figure on voit cette courbe ainsi que plusieurs courbes de niveau de f . Celles-ci ont équation $f(x, y) = c$ pour $c = 7, 8, 9, 10, 11$. Optimiser $f(x, y)$ sous la condition $g(x, y) = k$ signifie chercher la plus grande (ou plus petite) valeur de c telle que la courbe de niveau $f(x, y) = c$ croise la courbe $g(x, y) = k$. Pour que cela ait lieu il faut que les deux courbes aient la même droite tangente. Cela signifie que les gradients sont parallèles, c'est-à-dire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0)$. Ce multiplicateur de LAGRANGE λ représente l'effet sur la valeur optimale de la fonction objectif f si l'on modifie d'une unité la valeur de k dans la contrainte.

à f en \mathbf{x}_0 , c'est-à-dire que tout \mathbf{x} optimisant f sous la contrainte $\mathbf{g}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$ est tel que $\nabla f(\mathbf{x}_0)$ appartient à l'espace normal à l'ensemble \mathcal{A} engendré par les vecteurs $\nabla g_1(\mathbf{x}_0), \nabla g_2(\mathbf{x}_0), \dots, \nabla g_m(\mathbf{x}_0)$. Il existe donc des coefficients réels $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ tels que $\nabla f(\mathbf{x}_0) = \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla g_i(\mathbf{x}_0)$.

☛ EXEMPLE (INÉGALITÉ DES MOYENNES ARITHMÉTIQUES ET GÉOMÉTRIQUES)

Cherchons le maximum de la fonction $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$ sur \mathbb{R}_+^n sous la contrainte $x_1 + x_2 + \dots + x_n = n$. En un point où le maximum est atteint, on peut appliquer le théorème précédent avec $g(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1 + x_2 + \dots + x_n) - n$. On obtient

$$\nabla f = \lambda \nabla g \iff \frac{\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}}{n} \begin{pmatrix} \frac{1}{x_1} \\ \frac{1}{x_2} \\ \vdots \\ \frac{1}{x_n} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

En particulier, on obtient que pour que (x_1, x_2, \dots, x_n) soit un extremum il faut que tous les x_i soient égaux et dans ce cas la contrainte implique qu'ils sont tous égaux à 1. Ainsi, on a $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq f(1, 1, \dots, 1) = 1 = g(x, y)/n$. On retrouve ainsi l'inégalité des moyennes arithmétiques et géométriques

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}.$$

☛ Optimiser $f(x, y)$ sous la contrainte $g(x, y) = 0$. Réécrivons le théorème des multiplicateurs de LAGRANGE pour une fonction de deux variables et une seule contrainte d'égalité (voir la figure 4.1 pour une interprétation géométrique) :

Soit les fonctions f et g de classe \mathcal{C}^1 dans un ouvert $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$. Si f admet en (x_0, y_0) un extremum lié sous la contrainte $g(x, y) = 0$ et si $\nabla g(x_0, y_0) \neq (0, 0)$, alors

$$\exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } \nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0).$$

On a alors deux méthodes pratiques pour déterminer les extrema liés de f sous la contrainte g :

Méthode 1 : Lagrangien. Formons le lagrangien

$$\begin{aligned} L: \mathcal{D} \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, \lambda) &\mapsto L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y) \end{aligned}$$

où λ (multiplicateur de LAGRANGE) est une inconnue. Pour que cette fonction ait un extremum il faut que le

gradient de L soit nul, autrement dit on cherche les triplets (x, y, λ) tels que

$$\begin{cases} \partial_x f(x, y) = \lambda \partial_x g(x, y), \\ \partial_y f(x, y) = \lambda \partial_y g(x, y), \\ 0 = g(x, y). \end{cases}$$

Notons (x_0, y_0, λ_0) une solution de ce système. Si $\nabla g(x_0, y_0) \neq 0$, alors (x_0, y_0) est un *point critique* de la fonction f sous la contrainte g . Ces points critiques satisfont la contrainte, mais il s'agit à présent de classer ces candidats. Comme dans le cas des extrema libres, on peut formuler des conditions du deuxième ordre relatives aux points critiques, mais qui ne s'appliquent qu'à certains cas. Soit

$$\Delta(x_0, y_0, \lambda_0) \equiv \partial_{xx}L(x_0, y_0, \lambda_0)\partial_{yy}L(x_0, y_0, \lambda_0) - (\partial_{xy}L(x_0, y_0, \lambda_0))^2,$$

c'est-à-dire le déterminant de la sous matrice obtenue à partir de la hessienne de L en éliminant la dernière ligne et la dernière colonne.

- ▷ Si $\Delta(x_0, y_0, \lambda_0) > 0$, $\partial_{xx}L(x_0, y_0, \lambda_0) < 0$ et $\partial_{yy}L(x_0, y_0, \lambda_0) < 0$ on a un maximum local en (x_0, y_0) ;
- ▷ si $\Delta(x_0, y_0, \lambda_0) > 0$, $\partial_{xx}L(x_0, y_0, \lambda_0) > 0$ et $\partial_{yy}L(x_0, y_0, \lambda_0) > 0$ on a un minimum local en (x_0, y_0) ;
- ▷ si $\Delta(x_0, y_0, \lambda_0) \leq 0$ on ne peut pas conclure directement. On étudie alors le signe de la différence

$$d(h, k) \equiv f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0),$$

h et k étant liés par la relation $\phi(h, k) \equiv g(x_0 + h, y_0 + k) = 0$. Si cette différence est de signe constant pour (h, k) voisin de $(0, 0)$, il s'agit d'un extrémum local (un maximum si $d < 0$, un minimum si $d > 0$). Sinon, f ne présente pas d'extrémum local en (x_0, y_0) .

Méthode 2 : Réduction. Cette méthode est basée sur la possibilité d'exprimer la contrainte sous forme paramétrique.

Par exemple

- ▷ s'il existe une fonction $h(x)$ telle que $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x, y) = 0\} = \{x \in \mathbb{R} \mid h(x) = y\}$, alors optimiser la fonction de deux variables $f(x, y)$ sous la contrainte $g(x, y) = 0$ équivaut à optimiser la fonction d'une seule variable $f(x, y = h(x))$;
- ▷ s'il existe une fonction $h(y)$ telle que $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x, y) = 0\} = \{y \in \mathbb{R} \mid h(y) = x\}$, alors optimiser la fonction de deux variables $f(x, y)$ sous la contrainte $g(x, y) = 0$ équivaut à optimiser la fonction d'une seule variable $f(x = h(y), y)$;
- ▷ s'il existe deux fonctions $x = x(t)$ et $y = y(t)$ telles que $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x, y) = 0\} = \{t \in \mathbb{R} \mid g(x(t), y(t)) = 0\}$, alors optimiser la fonction de deux variables $f(x, y)$ sous la contrainte $g(x, y) = 0$ équivaut à optimiser la fonction d'une seule variable $f(x = x(t), y = y(t))$.

🔍 **EXEMPLE (TROUVER UN CHAMP RECTANGULAIRE D'AIRE MAXIMALE DÉLIMITÉ PAR UNE CLÔTURE DE LONGUEUR ℓ DONNÉE.)**

Si x et y désignent les longueurs des côtés d'un champ rectangulaire, la longueur de la clôture est $2(x + y)$ et l'aire xy . Le problème est de trouver le maximum atteint par l'aire, non pas parmi tous les points de $(\mathbb{R}_+^*)^2$, mais seulement parmi ceux vérifiant la contrainte $2(x + y) = \ell$, où $\ell > 0$ est fixé.

Méthode 1 : Lagrangien. Formons le lagrangien

$$\begin{aligned} L: (\mathbb{R}_+^*)^2 \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, \lambda) &\mapsto L(x, y, \lambda) = xy - \lambda(2(x + y) - \ell) \end{aligned}$$

où λ (multiplicateur de LAGRANGE) est une inconnue. Pour que cette fonction ait un extrémum il faut que le gradient de L soit nul, autrement dit on cherche les triplets (x, y, λ) tels que

$$\nabla L = \mathbf{0} \iff \begin{pmatrix} y - 2\lambda \\ x - 2\lambda \\ \ell - 2(x + y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x = \ell/4 \\ y = \ell/4 \\ \lambda = \ell/8 \end{cases}$$

Donc $(\ell/4, \ell/4)$ est un *point critique* de la fonction f sous la contrainte g . Observons que ce point a été obtenu par une condition nécessaire et comme $\Delta(\ell/4, \ell/4, \ell/8) < 0$, rien dans le théorème ne permet de savoir directement si c'est un maximum, un minimum ou ni l'un ni l'autre. Étudions alors le signe de la différence $d(h, k) = f(\ell/4 + h, \ell/4 + k) - f(\ell/4, \ell/4) = hk + \ell(h + k)/4$, h et k étant liés par la relation $0 = g(\ell/4 + h, \ell/4 + k) = 2(h + k)$, soit encore $k = -h$. On a $d(h, -h) = -h^2 < 0$ pour tout $h \in \mathbb{R}$: le point $(\ell/4, \ell/4)$ est alors un maximum local de f sous la contrainte g .

Méthode 2 : Réduction. On peut utiliser la contrainte pour calculer une des variables en fonction de l'autre. Par exemple pour y :

$$2(x + y) = \ell \implies y = \frac{\ell}{2} - x.$$

En reportant cette valeur de y dans l'expression de l'aire, on obtient

$$A_\ell(x) = x \left(\frac{\ell}{2} - x \right) \quad \text{et} \quad A'_\ell(x) = \frac{\ell}{2} - 2x.$$

Le maximum de $A_\ell(x)$ est atteint pour $x = \ell/4$, ce qui entraîne aussi $y = x$: à périmètre fixé, le rectangle d'aire maximale est le carré.

◉ EXEMPLE

Soient à déterminer les minima et maxima de la fonction objectif $f(x, y) = 5x^2 + 6y^2 - xy$ sous la contrainte $x + 2y = 24$. Pour cela, construisons la fonction de LAGRANGE

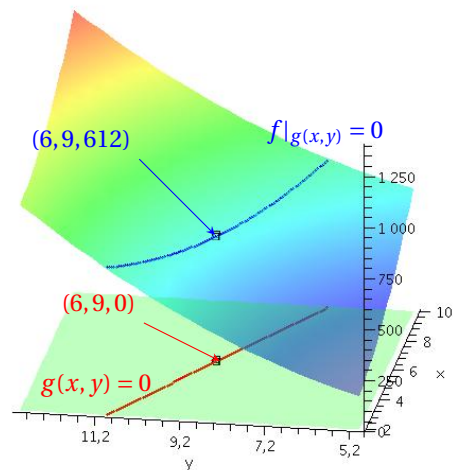
$$L: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, \lambda) \mapsto L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y) = 5x^2 + 6y^2 - xy - \lambda(x + 2y - 24)$$

et annulons son gradient

$$\nabla L = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 10x - y + \lambda \\ 12y - x + 2\lambda \\ -x - 2y - 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On obtient $x = 6$, $y = 9$ et $\lambda = -51$. Comme $\partial_{xx}L(6, 9, -51) = 10 > 0$, $\partial_{yy}L(6, 9, -51) = 12 > 0$, $\partial_{xy}L(6, 9, -51) = -1$ et $\partial_{xx}L(6, 9, -51)\partial_{yy}L(6, 9, -51) - \partial_{xy}L^2(6, 9, -51) > 0$, il s'agit d'un minimum.

Dans cet exemple on peut expliciter une variable dans la contrainte, par exemple $y = 12 - \frac{x}{2}$. Alors on peut minimiser directement la fonction $f(x, 12 - \frac{x}{2}) = 7x^2 - 84x + 864$: comme $f'(x, 12 - \frac{x}{2}) = 14x - 84$, le minimum se trouve en $x = 6$, $y = 12 - \frac{6}{2} = 9$ et la fonction vaut $f(6, 9) = 612$.



◉ EXEMPLE

On veut étudier l'existence d'extrema de la fonction $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = xy$ sous la contrainte $g(x, y) = x + y - 6 = 0$.

Première méthode Introduisons le lagrangien

$$L: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, \lambda) \mapsto L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y) = xy - \lambda(6 - x - y)$$

En appliquant la condition nécessaire des multiplicateurs de LAGRANGE, on doit calculer les triplets (x, y, λ) solutions du système

$$\nabla L(x, y, \lambda) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} y + \lambda = 0, \\ x + \lambda = 0, \\ x + y = 6, \end{cases} \implies (x, y, \lambda) = (3, 3, -3).$$

L'unique candidat extrémum de f sous la contrainte g est le point $(3, 3)$ et $f(3, 3) = 9$. Comme $\Delta(3, 3, -3) = -1 < 0$, on ne peut pas établir directement la nature du point critique. Étudions alors le signe de la différence $d(h, k) = f(3 + h, 3 + k) - f(3, 3) = hk + 3(h + k)$, h et k étant liés par la relation $0 = g(3 + h, 3 + k) = h + k$, soit encore $k = -h$. On a $d(h, -h) = -h^2 < 0$ pour tout $h \in \mathbb{R}$: le point $(3, 3)$ est alors un maximum local de f sous la contrainte g .

Seconde méthode Dans ce cas on peut écrire directement la restriction de f à la contrainte et on obtient

$$\tilde{f}(x) = f(x, 6 - x) = x(6 - x).$$

Pour maximiser cette restriction on calcule sa dérivée première :

$$\tilde{f}'(x) = 6 - 2x = 0 \text{ ssi } x = 3, \quad \tilde{f}'(x) > 0 \text{ ssi } x < 3, \quad \tilde{f}'(x) < 0 \text{ ssi } x > 3.$$

Le point (3,3) est bien un maximum.

Optimiser $f(x, y, z)$ sous la contrainte $g(x, y, z) = 0$. Réécrivons le théorème des multiplicateurs de LAGRANGE pour une fonction de trois variables et une seule contrainte d'égalité :

Soit les fonctions f et g de classe \mathcal{C}^1 dans un ouvert $\mathcal{D} \in \mathbb{R}^3$. Si f admet en (x_0, y_0, z_0) un extremum lié sous la contrainte $g(x, y, z) = 0$ et si $\nabla g(x_0, y_0, z_0) \neq (0, 0, 0)$, alors

$$\exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } \nabla f(x_0, y_0, z_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0, z_0).$$

On a alors deux méthodes pratiques pour déterminer les extrema liés de f sous la contrainte g :

Méthode 1 : Lagrangien. Formons le lagrangien

$$L: \mathcal{D} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z, \lambda) \mapsto L(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) - \lambda g(x, y, z)$$

où λ (multiplicateur de LAGRANGE) est une inconnue. Pour que cette fonction ait un extremum il faut que le gradient de L soit nul, autrement dit on cherche les triplets (x, y, z, λ) tels que

$$\begin{cases} \partial_x f(x, y, z) = \lambda \partial_x g(x, y, z), \\ \partial_y f(x, y, z) = \lambda \partial_y g(x, y, z), \\ \partial_z f(x, y, z) = \lambda \partial_z g(x, y, z), \\ 0 = g(x, y, z). \end{cases}$$

Notons $(x_0, y_0, z_0, \lambda_0)$ une solution de ce système. Si $\nabla g(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, alors (x_0, y_0, z_0) est un *point critique* de la fonction f sous la contrainte g . Ces points critiques satisfont la contrainte, mais il reste encore à déterminer s'il s'agit effectivement d'extrema. On étudie alors le signe de la différence

$$d(h_1, h_2, h_3) \equiv f(x_0 + h_1, y_0 + h_2, z_0 + h_3) - f(x_0, y_0, z_0),$$

h_1, h_2 et h_3 étant liés par la relation $\phi(h_1, h_2, h_3) \equiv g(x_0 + h_1, y_0 + h_2, z_0 + h_3) = 0$. Si cette différence est de signe constant pour (h_1, h_2, h_3) voisin de $(0, 0, 0)$, il s'agit d'un extremum local (un maximum si $d < 0$, un minimum si $d > 0$). Sinon, f ne présente pas d'extremum local en (x_0, y_0, z_0) .

Méthode 2 : Réduction. Cette méthode est basée sur la possibilité d'exprimer la contrainte sous forme paramétrique. Par exemple

- ▷ s'il existe une fonction $h(x, y)$ telle que $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid g(x, y, z) = 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid h(x, y) = z\}$, alors chercher les extrema liés de la fonction de trois variables $f(x, y, z)$ sous la contrainte $g(x, y, z) = 0$ équivaut à chercher les extrema libres de la fonction de deux variables $f(x, y, z = h(x, y))$;
- ▷ s'il existe une fonction $h(x, z)$ telle que $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid g(x, y, z) = 0\} = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 \mid h(x, z) = y\}$, alors chercher les extrema liés de la fonction de trois variables $f(x, y, z)$ sous la contrainte $g(x, y, z) = 0$ équivaut à chercher les extrema libres de la fonction de deux variables $f(x, y = h(x, z), z)$;
- ▷ s'il existe une fonction $h(y, z)$ telle que $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid g(x, y, z) = 0\} = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 \mid h(y, z) = x\}$, alors chercher les extrema liés de la fonction de trois variables $f(x, y, z)$ sous la contrainte $g(x, y, z) = 0$ équivaut à chercher les extrema libres de la fonction de deux variables $f(x = h(y, z), y, z)$.

EXEMPLE (PARMI LES PARALLÉLÉPIPÈDES DE SURFACE S FIXÉE, LESQUELS ONT UN VOLUME MAXIMAL ?)

Si x, y et z désignent les longueurs des côtés d'un parallélépipède, sa surface est $2(xy + yz + xz)$ et son volume xyz . Le problème est de trouver le maximum atteint par le volume, non pas parmi tous les points de $(\mathbb{R}_+^*)^3$, mais seulement parmi ceux vérifiant la contrainte $2(xy + yz + xz) = S$, où S est fixé.

Lagrangien. Formons le lagrangien

$$L: (\mathbb{R}_+^*)^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z, \lambda) \mapsto L(x, y, z, \lambda) = xyz - \lambda(2(xy + yz + xz) - S)$$

où λ (multiplicateur de LAGRANGE) est une inconnue. Si $(x_0, y_0, z_0) \in (\mathbb{R}_+^*)$ est un extremum de $f(x, y, z) = xyz$ sous la contrainte $g(x, y, z) = 0$ avec $g(x, y, z) = 2(xy + yz + xz) - S$ alors il existe $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\nabla L(x_0, y_0, z_0, \lambda_0) = \mathbf{0}$. Cherchons donc les points stationnaires de L :

$$\nabla L = \mathbf{0} \iff \begin{pmatrix} yz - 2\lambda(y + z) \\ xz - 2\lambda(x + z) \\ xy - 2\lambda(y + x) \\ S - 2(xy + yz + xz) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} z(y - x) = 2\lambda(y - x) \\ y(z - x) = 2\lambda(z - x) \\ x(z - y) = 2\lambda(z - y) \\ 2(xy + yz + xz) = S \end{cases} \iff \begin{cases} x = \sqrt{S/6} \\ y = \sqrt{S/6} \\ z = \sqrt{S/6} \\ \lambda = \sqrt{S/96} \end{cases}$$

Donc $(\sqrt{S/6}, \sqrt{S/6}, \sqrt{S/6})$ est un *point critique* de la fonction f sous la contrainte g . Observons que ce point a été obtenu par une condition nécessaire. Rien dans le théorème ne permet de savoir si c'est un maximum, un minimum ou ni l'un ni l'autre. Pour cela, on essaye d'étudier directement le signe de la distance

$$d(h_1, h_2, h_3) \equiv f(\sqrt{S/6} + h_1, \sqrt{S/6} + h_2, \sqrt{S/6} + h_3) - f(\sqrt{S/6}, \sqrt{S/6}, \sqrt{S/6})$$

avec h_1, h_2 et h_3 proches de zéro et liés par l'équation $g(\sqrt{S/6} + h_1, \sqrt{S/6} + h_2, \sqrt{S/6} + h_3) = 0$, soit encore $h_3 = \frac{\frac{S}{2} - (\sqrt{S/6} + h_1)(\sqrt{S/6} + h_2)}{(\sqrt{S/6} + h_1) + (\sqrt{S/6} + h_2)} - \sqrt{S/6}$. On doit alors étudier le signe de la fonction

$$\tilde{d}(h_1, h_2) \equiv d(h_1, h_2, h_3(h_1, h_2)) = (\sqrt{S/6} + h_1)(\sqrt{S/6} + h_2) \frac{\frac{S}{2} - (\sqrt{S/6} + h_1)(\sqrt{S/6} + h_2)}{(\sqrt{S/6} + h_1) + (\sqrt{S/6} + h_2)} - \sqrt{S^3/6^3} = -\frac{1}{2} \frac{N(h_1, h_2)}{\sqrt{6S} + 3(h_1 + h_2)},$$

avec $N(h_1, h_2) \equiv S(h_1^2 + h_2^2) + 6h_1^2 h_2^2 + Sh_1 h_2 + 2\sqrt{6S} h_1 h_2 (h_1 + h_2)$, pour $(h_1, h_2) \in \mathcal{B}((0, 0), \delta)$ et $\delta \simeq 0$. Le signe de \tilde{d} est l'opposé du signe de N mais celui-ci est difficile à étudier. Cependant, il est simple de vérifier que $\nabla N(0, 0) = (0, 0)$ et que la matrice Hessienne $H_N(h_1, h_2)$ est semi-définie positive, par conséquent N est convexe et donc $N(h_1, h_2) \geq 0$ pour $(h_1, h_2) \in \mathcal{B}((0, 0), \delta)$ et $\delta \simeq 0$. On trouve alors $\tilde{d}(h_1, h_2) \leq 0$ et on conclut que $(\sqrt{S/6}, \sqrt{S/6}, \sqrt{S/6})$ est un *maximum* de la fonction f sous la contrainte g .

Réduction. Dans ce cas, on peut utiliser la contrainte pour calculer une des variables en fonction des deux autres. Par exemple,

$$2(xy + yz + xz) = S \implies z = \frac{\frac{S}{2} - xy}{x + y}.$$

En reportant cette valeur de z dans l'expression du volume, on obtient

$$V_S(x, y) = f(x, y, z(x, y)) = xy \frac{\frac{S}{2} - xy}{x + y}.$$

Maximiser f sous la contrainte g est équivalent à maximiser V_S . Pour calculer le maximum de cette fonction il faut d'abord trouver les points critiques de V_S et ensuite en étudier la nature :

$$\triangleright \nabla V_S(x, y) = \frac{1}{2(x+y)^2} \begin{pmatrix} y^2(S - 2x^2 - 4xy) \\ x^2(S - 2y^2 - 4xy) \end{pmatrix} \text{ donc, dans } (\mathbb{R}_+^*)^2, \text{ le gradient de } V_S \text{ s'annule seulement en } (\sqrt{S/6}, \sqrt{S/6});$$

$$\triangleright H_{V_S}(x, y) = \frac{-1}{(x+y)^3} \begin{pmatrix} y^2(S + 2y^2) & xy(2x^2 + 6xy + 2y^2 - S) \\ xy(2x^2 + 6xy + 2y^2 - S) & x^2(S + 2x^2) \end{pmatrix} \text{ donc } H_{V_S}(\sqrt{S/6}, \sqrt{S/6}) = \begin{pmatrix} -\sqrt{S/6} & -\sqrt{S/24} \\ -\sqrt{S/24} & -\sqrt{S/6} \end{pmatrix}$$

et $\det(H_{V_S}(\sqrt{S/6}, \sqrt{S/6})) = S/8 > 0$.

Le maximum de $V_S(x, y)$ est donc atteint pour $x = y = \sqrt{S/6}$, ce qui entraîne aussi $z = \sqrt{S/6}$: à surface fixée, le parallélépipède de volume maximal est le cube.

Optimiser $f(x, y, z)$ sous les contraintes $g_1(x, y, z) = 0$ et $g_2(x, y, z) = 0$. Réécrivons le théorème des multiplicateurs de LAGRANGE pour une fonction de trois variables et deux contraintes d'égalité :

Soit les fonctions f, g_1 et g_2 de classe \mathcal{C}^1 dans un ouvert $\mathcal{D} \in \mathbb{R}^3$. Si f admet en (x_0, y_0, z_0) un extremum lié sous les contraintes $g_1(x, y, z) = 0$ et $g_2(x, y, z) = 0$ et si $\nabla g_1(x_0, y_0, z_0) \neq (0, 0, 0)$ et $\nabla g_2(x_0, y_0, z_0) \neq (0, 0, 0)$, alors

$$\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ tels que } \nabla f(x_0, y_0, z_0) = \lambda \nabla g_1(x_0, y_0, z_0) + \mu \nabla g_2(x_0, y_0, z_0).$$

On a alors deux méthodes pratiques pour déterminer les extrema liés de f sous les contraintes g_1 et g_2 :

Méthode 1 : Lagrangien. Formons le lagrangien

$$L: \mathcal{D} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y, z, \lambda, \mu) \mapsto L(x, y, z, \lambda, \mu) = f(x, y, z) - \lambda g_1(x, y, z) - \mu g_2(x, y, z)$$

où λ et μ (multiplicateurs de LAGRANGE) sont des inconnues. Pour que cette fonction ait un extremum il faut que le gradient de L soit nul, autrement dit on cherche les 5-uplets (x, y, z, λ, μ) tels que

$$\begin{cases} \partial_x f(x, y, z) = \lambda \partial_x g_1(x, y, z) - \mu \partial_x g_2(x, y, z), \\ \partial_y f(x, y, z) = \lambda \partial_y g_1(x, y, z) - \mu \partial_y g_2(x, y, z), \\ \partial_z f(x, y, z) = \lambda \partial_z g_1(x, y, z) - \mu \partial_z g_2(x, y, z), \\ 0 = g_1(x, y, z), \\ 0 = g_2(x, y, z). \end{cases}$$

Notons $(x_0, y_0, z_0, \lambda_0, \mu_0)$ une solution de ce système. Si $\text{rg}([\nabla g_1(x_0, y_0, z_0) | \nabla g_2(x_0, y_0, z_0)]) = 2$ (i.e. si les deux vecteurs sont linéairement indépendants), alors (x_0, y_0, z_0) est un *point critique* de la fonction f sous les contraintes g_1 et g_2 . Ces points critiques satisfont les contraintes, mais il reste encore à déterminer s'il s'agit effectivement d'extrema. On étudie alors le signe de la différence

$$d(h_1, h_2, h_3) \equiv f(x_0 + h_1, y_0 + h_2, z_0 + h_3) - f(x_0, y_0, z_0),$$

h_1, h_2 et h_3 étant liés par les relations $\phi_1(h_1, h_2, h_3) \equiv g_1(x_0 + h_1, y_0 + h_2, z_0 + h_3) = 0$ et $\phi_2(h_1, h_2, h_3) \equiv g_2(x_0 + h_1, y_0 + h_2, z_0 + h_3) = 0$. Si cette différence est de signe constant pour (h_1, h_2, h_3) voisin de $(0, 0, 0)$, il s'agit d'un extrémum local (un maximum si $d < 0$, un minimum si $d > 0$). Sinon, f ne présente pas d'extremum local en (x_0, y_0, z_0) .

Méthode 2 : Réduction. Cette méthode est basée sur la possibilité d'exprimer la contrainte sous forme paramétrique. Par exemple, s'il existe deux fonctions $h_1(x)$ et $h_2(x)$ telles que $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid g_1(x, y, z) = 0 \text{ et } g_2(x, y, z) = 0\} = \{x \in \mathbb{R} \mid y = h_1(x) \text{ et } z = h_2(x)\}$, alors optimiser la fonction de trois variables $f(x, y, z)$ sous les contraintes $g_1(x, y, z) = 0$ et $g_2(x, y, z) = 0$ équivaut à optimiser la fonction d'une seule variable $f(x, y = h_1(x), z = h_2(x))$; etc.

EXEMPLE

Dans \mathbb{R}^3 , on veut optimiser la fonction $f(x, y, z) = xyz$ sous les contraintes $g_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$ et $g_2(x, y, z) = x + y + z - 1$. Notons que les deux contraintes décrivent un cercle de \mathbb{R}^3 : la contrainte $g_1(x, y, z) = 0$ est l'équation de la sphère de centre $(0, 0, 0)$ et de rayon 1 ; la contrainte $g_2(x, y, z) = 0$ est l'équation d'un plan. On cherche donc les extrema de f sur l'intersection de la sphère unité et d'un plan, à savoir sur un cercle dans l'espace.

Lagrange Avant d'oublier, commençons par chercher les points de la surface de contrainte qui ne sont pas réguliers, c'est à dire les (x, y, z) tels que $g_1(x, y, z) = 0$, $g_2(x, y, z) = 0$ et les vecteurs ∇g_1 et ∇g_2 ne forment pas une famille libre de \mathbb{R}^3 . On a $\nabla g_1(x, y, z) = 2(x, y, z)^T$ et $\nabla g_2(x, y, z) = (1, 1, 1)^T$. Ils sont liés s'ils sont colinéaires, c'est-à-dire lorsque $x = y = z$. Ce qui, avec les contraintes, donne le système non linéaire

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ x + y + z = 1, \\ x = y = z. \end{cases}$$

Or, ce système n'admet pas de solution, donc tous les points de la contrainte (le cercle) sont réguliers et on peut utiliser la méthode de LAGRANGE : si un point (x, y, z) est un extremum de f sous les deux contraintes g_1 et g_2 , alors il existe deux multiplicateurs λ_0, μ_0 tels que $\nabla L(x_0, y_0, z_0, \lambda_0, \mu_0) = \mathbf{0}$ où

$$L: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z, \lambda, \mu) \mapsto L(x, y, z, \lambda, \mu) = xyz - \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1) - \mu(x + y + z - 1)$$

On cherche donc à résoudre le système

$$\nabla L = \mathbf{0} \iff \begin{pmatrix} yz - \lambda(2x) - \mu \\ xz - \lambda(2y) - \mu \\ xy - \lambda(2z) - \mu \\ 1 - (x^2 + y^2 + z^2) \\ 1 - (x + y + z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On obtient un système de 5 équations et 5 inconnues : x, y, z, λ, μ . L'étude de ce système montre qu'il y a 6 solutions,

données dans le tableau ci-dessous :

x_0	y_0	z_0	λ_0	μ_0
1	0	0	0	0
0	1	0	0	0
0	0	1	0	0
$-1/3$	$2/3$	$2/3$	$-1/3$	$2/9$
$2/3$	$-1/3$	$2/3$	$-1/3$	$2/9$
$2/3$	$2/3$	$-1/3$	$-1/3$	$2/9$

Observons que ces points ont été obtenus par une condition nécessaire. Rien dans le théorème ne permet de savoir si ce sont des maxima, des minima ou ni l'un ni l'autre.

Réduction (partielle) Dans ce cas, on peut utiliser la deuxième contrainte pour exprimer une des trois variables en fonction des deux autres. Par exemple

$$x + y + z - 1 = 0 \iff z = 1 - x - y.$$

En reportant cette valeur de z dans f et g_1 on obtient le nouveau problème équivalent :

dans \mathbb{R}^2 , optimiser la fonction $\tilde{f}(x, y) \equiv f(x, y, z(x, y))$ sous la contrainte $g(x, y) \equiv g_1(x, y, z(x, y))$.

Pour résoudre ce problème on peut soit utiliser la méthode de LAGRANGE appliquée à $\tilde{f}(x, y)$ sous la contrainte $g(x, y) = 0$, soit la méthode de réduction en essayant d'exprimer la contrainte $g(x, y) = 0$ sous forme paramétrique. Ici le plus simple c'est d'utiliser la première méthode : pour cela, formons la fonction de LAGRANGE

$$\begin{aligned} \tilde{L}: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, \nu) &\mapsto \tilde{L}(x, y, \nu) = \tilde{f}(x, y) - \nu g(x, y) = xy - x^2y - xy^2 - 2\nu(x^2 + y^2 + xy - x - y) \end{aligned}$$

En appliquant la condition nécessaire des multiplicateurs de LAGRANGE, on doit chercher les triplets (x, y, ν) solutions du système

$$\nabla \tilde{L}(x, y, \nu) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} y(1 - x - y) - xy - \nu(4x + 2y - 2) = 0, \\ x(1 - x - y) - xy - \nu(4y + 2x - 2) = 0, \\ x^2 + y^2 + xy - x - y = 0. \end{cases}$$

On obtient un système de 3 équations et 3 inconnues : x, y, ν . L'étude de ce système montre qu'il y a 6 solutions, données dans le tableau ci-dessous :

x_0	y_0	ν_0
1	0	0
0	1	0
0	0	0
$-1/3$	$2/3$	$-1/3$
$2/3$	$-1/3$	$-1/3$
$2/3$	$2/3$	$-1/3$

Observons que ces points ont été obtenus par une condition nécessaire. Rien dans le théorème ne permet de savoir si ce sont des maxima, des minima ou ni l'un ni l'autre.

ATTENTION

La condition du premier ordre ne concerne que les fonctions différentiables définies sur un ensemble \mathcal{D} ouvert. Cependant, il peut naturellement arriver qu'une fonction ne soit pas différentiable en un point et admette néanmoins un extremum. Ou encore, la fonction peut être différentiable sur un compact, mais la condition (nécessaire) du premier ordre s'applique aux points intérieurs et non aux points de la frontière où f peut pourtant passer par un optimum. On a alors la «recette» suivante pour le calcul des extrema d'une fonction f continue dans un ensemble \mathcal{D} compact.

«Recette» pour le calcul des extrema d'une fonction f continue dans un ensemble \mathcal{D} compact

- ▷ On calcul la valeur de f en les points stationnaires de f dans l'ouvert $\mathring{\mathcal{D}} = \mathcal{D} \setminus \partial\mathcal{D}$;
- ▷ on calcul la valeur de f en les points stationnaires de f sur le bord $\partial\mathcal{D}$ (i.e. il faut étudier la restriction de f à la courbe qui définit le bord $\partial\mathcal{D}$) ;
- ▷ on calcul la valeur de f en les points de non dérivabilité (s'il en existe).

La plus grande valeur donne le maximum global, la plus petite le minimum global.

EXEMPLE

On veut trouver les extrema globaux de la fonction f définie par $f(x, y) = (x - y)^2$ sur le carré fermé $\mathcal{D} = [0; 1]^2$.

▷ On calcule la valeur de f en les points stationnaires de f dans l'ouvert $\mathring{\mathcal{D}} =]0; 1[^2$:

$$f(x, y) = (x - y)^2, \quad \partial_x f(x, y) = 2(x - y), \quad \partial_y f(x, y) = -2(x - y),$$

et $\nabla f = (0, 0)$ si et seulement si $y = x$ et l'on a $f(x, x) = 0$.

▷ On calcule la valeur de f en les points stationnaires de f sur le bord $\partial\mathcal{D}$:

- ▷ Arrête d'équation $y = 0$: soit $g :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ telle que $g(x) \equiv f(x, 0) = x^2$ alors $g'(x) \neq 0$ pour tout $x \in]0, 1[$
- ▷ Arrête d'équation $y = 1$: soit $g :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ telle que $g(x) \equiv f(x, 1) = (x - 1)^2$ alors $g'(x) \neq 0$ pour tout $x \in]0, 1[$
- ▷ Arrête d'équation $x = 0$: soit $g :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ telle que $g(y) \equiv f(0, y) = (-y)^2$ alors $g'(y) \neq 0$ pour tout $y \in]0, 1[$
- ▷ Arrête d'équation $x = 1$: soit $g :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ telle que $g(y) \equiv f(1, y) = (1 - y)^2$ alors $g'(y) \neq 0$ pour tout $y \in]0, 1[$

donc il n'existe pas de points stationnaires sur les arrêtes du carré.

▷ On calcule la valeur de f en les points de non dérivabilité :

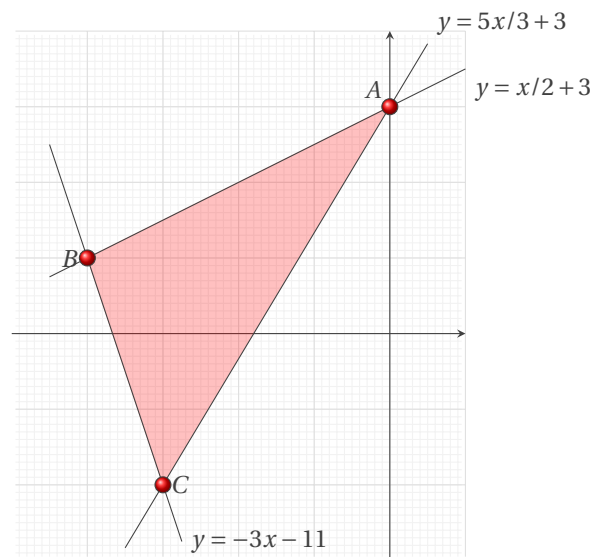
- ▷ $f(0, 0) = 0$
- ▷ $f(1, 0) = 1$
- ▷ $f(0, 1) = 1$
- ▷ $f(1, 1) = 0$

En résumé, les candidats extrema globaux sont les points $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ et (k, k) avec $k \in]0; 1[$. On conclut que

- ▷ les minima globaux sont atteints aux points (k, k) avec $k \in [0; 1]$ et valent 0,
- ▷ le maximum global est atteint au point $(1, 0)$ et $(0, 1)$ et vaut 1.

EXEMPLE

On veut trouver les extrema globaux de la fonction f définie par $f(x, y) = -6y^2 - 4xy - 4y + x^2 + 6x - 6$ sur la région triangulaire compacte \mathcal{D} de sommets $A = (0, 3)$, $B = (-4, 1)$ et $C = (-3, -2)$.



▷ On calcule la valeur de f en les points stationnaires de f dans l'ouvert $\mathring{\mathcal{D}} = \mathcal{D} \setminus \partial\mathcal{D}$:

$$f(x, y) = -6y^2 - 4xy - 4y + x^2 + 6x - 6, \quad \partial_x f(x, y) = -4y + 2x + 6 \quad \partial_y f(x, y) = -12y - 4x - 4$$

et $\nabla f = (0, 0)$ si et seulement si $(x, y) = (-11/5, 2/5)$ et l'on a $f(-11/5, 2/5) = -67/5$.

▷ On calcule la valeur de f en les points stationnaires de f sur le bord $\partial\mathcal{D}$:

- ▷ Arrête AB : $y = mx + q$ avec $m = (y_A - y_B)/(x_A - x_B) = 1/2$ et $q = y_A - mx_A = 3$
- ▷ Arrête AC : $y = mx + q$ avec $m = (y_A - y_C)/(x_A - x_C) = 5/3$ et $q = y_A - mx_A = 3$
- ▷ Arrête BC : $y = mx + q$ avec $m = (y_B - y_C)/(x_B - x_C) = -3$ et $q = y_B - mx_B = -11$

donc

$$g_{AB}(x) \equiv f\left(x, y = \frac{1}{2}x + 3\right) = -\frac{5}{2}x^2 - 26x - 72, \quad x \in [-4; 0] \quad g'_{AB}(x) = -5x - 26 < 0;$$

$$g_{AC}(x) \equiv f\left(x, y = \frac{5x}{3} + 3\right) = -\frac{67}{3}x^2 - \frac{218}{3}x - 72, \quad x \in [-3; 0] \quad g'_{AC}(x) = -\frac{134}{3}x - \frac{218}{3} \iff x = -\frac{109}{67}$$

et $g_{AC}\left(-\frac{109}{67}\right) = -\frac{2591}{201}$;

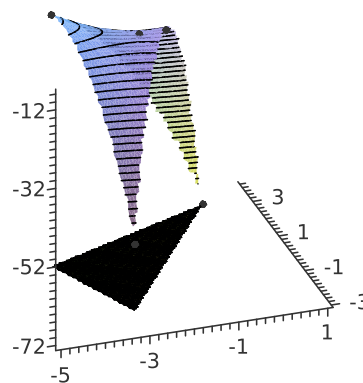
$$g_{BC}(x) \equiv f(x, y = -3x - 11) = -41x^2 - 334x - 688, \quad x \in [-4; -3] \quad g'_{BC}(x) = -82x - 334 < 0.$$

En résumé, les candidats extrema globaux sont les points

x	y	$f(x, y)$	
-11/5	2/5	-67/5	$\in \overset{\circ}{\mathcal{D}}$
0	3	-72	$\in \partial\mathcal{D}$
-4	1	-8	$\in \partial\mathcal{D}$
-3	-2	-55	$\in \partial\mathcal{D}$
-109/67	58/201	-2591/201	$\in \partial\mathcal{D}$

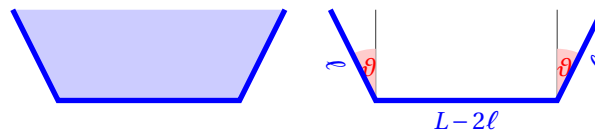
On conclut que

- ▷ le minimum global est atteint au point $(-11/5, 2/5) \in \overset{\circ}{\mathcal{D}}$ et vaut $-67/5$,
- ▷ le maximum global est atteint au point $(-26/5, 4/5) \in \partial\mathcal{D}$ et vaut $-22/5$.



EXEMPLE

On construit une canalisation de forme trapézoïdale avec une plaque de largeur $L > 0$ fixée. Quelles sont les valeurs optimales de la longueur ℓ du côté incliné et de l'angle ϑ qu'il fait avec la verticale pour que le flux passant dans la gouttière soit maximal ?



La surface à maximiser est décrite par la fonction

$$f(\ell, \vartheta) = \ell \cos(\vartheta)(\ell \sin(\vartheta) + L - 2\ell),$$

avec $\mathcal{D} = \{(\ell, \vartheta) \mid 0 \leq \ell \leq \frac{L}{2}, 0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}\}$.

- ▷ On cherche tout d'abord les points critiques de f qui se trouvent dans $\overset{\circ}{\mathcal{D}}$ l'intérieur du domaine de \mathcal{D} et on calcul la valeur de f en ces points :

$$f(\ell, \vartheta) = \ell \cos(\vartheta)(\ell \sin(\vartheta) + L - 2\ell),$$

$$\partial_\ell f(\ell, \vartheta) = \cos(\vartheta)(2\ell \sin(\vartheta) + L - 4\ell),$$

$$\partial_{\vartheta} f(\ell, \vartheta) = \ell(2\ell \cos^2(\vartheta) + 2\ell \sin(\vartheta) - L \sin(\vartheta) - \ell) = \ell(-2\ell \sin^2(\vartheta) + (2\ell - L) \sin(\vartheta) + \ell),$$

et $\nabla f(\ell, \vartheta) = (0, 0)$ dans $\overset{\circ}{\mathcal{D}}$ si et seulement si $(\ell, \vartheta) = (L/3, \pi/6)$ et l'on a $f(L/3, \pi/6) = \sqrt{3}L^2/12 \approx 0.14434L^2$.

▷ On cherche le maximum de f sur le bord $\partial\mathcal{D}$ de \mathcal{D} :

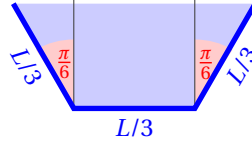
$$g_1(\ell) \equiv f(\ell, 0) = \ell(L - 2\ell), \quad g_1'(\ell) = L - 4\ell = 0 \iff \ell = \frac{L}{4} \text{ et } f\left(\frac{L}{4}, 0\right) = \frac{L^2}{8} = 0.125L^2 < \sqrt{3}L^2/12;$$

$$g_2(\ell) \equiv f(\ell, \pi/2) = 0;$$

$$g_3(\vartheta) \equiv f(0, \vartheta) = 0;$$

$$g_4(\vartheta) \equiv f(L, \vartheta) = L^2 \cos(\vartheta) \sin(\vartheta)/4, \quad g_4'(\vartheta) = L^2(\cos^2(\vartheta) - \sin^2(\vartheta))/4 = 0 \iff \vartheta = \frac{\pi}{4} \text{ et } f\left(\frac{L}{2}, \frac{\pi}{4}\right) = \frac{L^2}{8} = 0.125L^2 < \sqrt{3}L^2/12.$$

Comme $f(\ell, \vartheta) \leq f(L/3, \pi/6)$ pour tout $(\ell, \vartheta) \in \mathcal{D}$ on conclut que le flux passant dans la gouttière sera maximal pour $\ell = L/3$ et $\vartheta = \pi/6$.





Optimisation libre dans un ouvert

Exercice 4.1

Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$ et (a, b) un point de \mathbb{R}^2 . On suppose que

$$f(a, b) = 0, \quad \partial_x f(a, b) = 0, \quad \partial_y f(a, b) = 0, \quad \partial_{xx} f(a, b) = 1, \quad \partial_{yy} f(a, b) = 2, \quad \partial_{xy} f(a, b) = 3.$$

Le point (a, b) est-il un point critique ? Si oui, de quelle nature ?

Correction

Il est un point critique et plus particulièrement il s'agit d'un point-selle car $\det(H_f(a, b)) < 0$.

Exercice 4.2

On suppose que $(1, 1)$ est un point critique d'une fonction f dont les dérivées secondes sont continues. Dans chaque cas, que peut-on dire au sujet de f ?

1. $\partial_{xx} f(1, 1) = 4, \partial_{xy} f(1, 1) = 1, \partial_{yy} f(1, 1) = 2$;
2. $\partial_{xx} f(1, 1) = 4, \partial_{xy} f(1, 1) = 3, \partial_{yy} f(1, 1) = 2$.

Correction

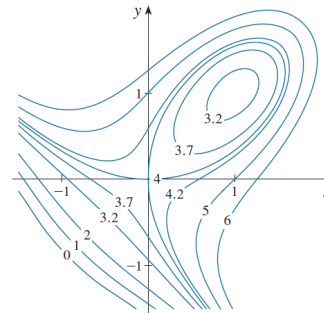
1. D'abord on calcule $\det(H_f(1, 1)) = \partial_{xx} f(1, 1)\partial_{yy} f(1, 1) - (\partial_{xy} f(1, 1))^2 = 7$. Comme $\det(H_f(1, 1)) > 0$ et $\partial_{xx} f(1, 1) > 0$, f a un minimum local en $(1, 1)$.
2. D'abord on calcule $\det(H_f(1, 1)) = \partial_{xx} f(1, 1)\partial_{yy} f(1, 1) - (\partial_{xy} f(1, 1))^2 = -1$. Comme $\det(H_f(1, 1)) < 0$, f a un point-selle en $(1, 1)$.

Exercice 4.3

À partir de la carte des courbes de niveau de la figure ci-contre, localiser les points critiques de $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ et préciser pour chacun de ces points s'il s'agit d'un point-selle ou d'un maximum ou d'un minimum local.

Vérifier ensuite le raisonnement sachant que

$$f(x, y) = 4 + x^3 + y^3 - 3xy.$$



Correction

Dans la figure, le point $(1, 1)$ est entouré par des courbes de niveau qui sont de forme ovale et qui indiquent que si nous nous éloignons du point dans n'importe quelle direction les valeurs de f augmentent. Ainsi on pourrait s'attendre à un minimum local en ou à proximité de $(1, 1)$.

Les courbes de niveau proches du point $(0, 0)$ ressemblent à des hyperboles, et si nous nous éloignons de l'origine, les valeurs de f augmentent dans certaines directions et diminuent dans d'autres, donc nous nous attendons à trouver un point selle.

Vérifions cette analyse :

Points critiques : $\partial_x f(x, y) = 3x^2 - 3y, \partial_y f(x, y) = 3y^2 - 3x$. On a un point critique si les deux dérivées partielles s'annulent en même temps ; on trouve deux points critiques : $(1, 1)$ et $(0, 0)$.

Études des points critiques : les dérivées secondes sont $\partial_{xx} f(x, y) = 6x, \partial_{xy} f(x, y) = -3, \partial_{yy} f(x, y) = 6y$, ainsi $\det(H_f(x, y)) = \partial_{xx} f(x, y)\partial_{yy} f(x, y) - (\partial_{xy} f(x, y))^2 = 36xy - 9$. Comme $\det(H_f(1, 1)) > 0$ et $\partial_{xx} f(1, 1) > 0$, f a un minimum local en $(1, 1)$. Comme $\det(H_f(0, 0)) < 0$, f a un point-selle en $(0, 0)$.

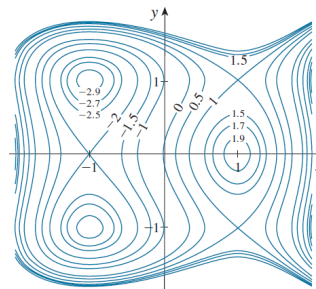
Exercice 4.4

À partir de la carte des courbes de niveau de la figure ci-contre, localiser les points critiques de $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ et préciser

pour chacun de ces points s'il s'agit d'un point-selle ou d'un maximum ou d'un minimum local.

Vérifier ensuite le raisonnement sachant que

$$f(x, y) = 3x - x^3 - 2y^2 + y^4.$$



Correction

Dans la figure, les points $(-1, -1)$ et $(-1, 1)$ sont entourés par des courbes de niveau qui sont de forme ovale et qui indiquent que si nous nous éloignons du point dans n'importe quelle direction les valeurs de f augmentent. Ainsi on pourrait s'attendre à des minima locaux en ou à proximité de $(-1, \pm 1)$.

De la même manière, le point $(1, 0)$ est entouré par des courbes de niveau qui sont de forme ovale et qui indiquent que si nous nous éloignons du point dans n'importe quelle direction les valeurs de f diminuent. Ainsi on pourrait s'attendre à un maximum local en ou à proximité de $(1, 0)$.

Les courbes de niveau proche des points $(-1, 0)$, $(1, 1)$ et $(1, -1)$ ressemblent à des hyperboles, et si nous nous éloignons de ces points, les valeurs de f augmentent dans certaines directions et diminuent dans d'autres, donc nous nous attendons à trouver des points de selle.

Vérifions cette analyse :

$$\nabla f = \mathbf{0} \iff \begin{cases} 3 - 3x^2 = 0 \\ -4y + 4y^3 = 0 \end{cases}$$

donc les points critiques sont $(1, 0)$, $(1, 1)$, $(1, -1)$, $(-1, 0)$, $(-1, 1)$, $(-1, -1)$. Les dérivées secondes sont $\partial_{xx}f(x, y) = -6x$, $\partial_{xy}f(x, y) = 0$, $\partial_{yy}f(x, y) = 12y^2 - 4$, ainsi $\det(H_f(x, y)) = \partial_{xx}f(x, y)\partial_{yy}f(x, y) - (\partial_{xy}f(x, y))^2 = -72xy^2 + 24x$.

Point critique (x_0, y_0)	$\det(H_f(x_0, y_0))$	$\partial_{xx}f(x_0, y_0)$	Conclusion
$(1, 0)$	$24 > 0$	$-6 < 0$	f a un maximum local en $(1, 0)$
$(1, 1)$	$-48 < 0$		f a un point-selle en $(1, 1)$
$(1, -1)$	$-48 < 0$	$-6 < 0$	f a un point-selle en $(1, -1)$
$(-1, 0)$	$-24 < 0$		f a un point-selle en $(-1, 0)$
$(-1, 1)$	$48 > 0$	$6 > 0$	f a un minimum local en $(-1, 1)$
$(-1, -1)$	$48 > 0$	$6 > 0$	f a un minimum local en $(-1, -1)$

Exercice 4.5

Une montagne a la forme de la surface $z(x, y) = 2xy - 2x^2 - y^2 - 8x + 6y + 4$ (l'unité de mesure est de 100 mètres). Si le niveau de la mer correspond à $z = 0$, quelle est la hauteur de la montagne ?

Correction

Il s'agit d'évaluer $z(x, y)$ dans le point de maximum. Cherchons d'abord les points critiques :

$$\nabla z(x, y) = \begin{pmatrix} 2y - 4x - 8 \\ 2x - 2y + 6 \end{pmatrix}$$

et $\nabla z(x, y) = \mathbf{0}$ ssi $(x, y) = (-1, 2)$. On établit la nature du point critique en étudiant le déterminant de la matrice hessienne :

$$\partial_{xx}f(x, y) = -4 < 0, \quad \partial_{yy}f(x, y) = -2, \quad \partial_{xy}f(x, y) = 2,$$

et $\partial_{xx}f(-1, 2)\partial_{yy}f(-1, 2) - (\partial_{xy}f(-1, 2))^2 = 4 > 0$ donc $(-1, 2)$ est un maximum. Comme $z(-1, 2) = 14$, la montagne est haute 1400 mètre.

Exercice 4.6 (Optimisation libre)

Si f est une fonction continue d'une seule variable réelle et si f admet deux maxima sur un intervalle alors il existe un minimum compris entre les deux maxima. Le but de cet exercice est de montrer que ce résultat ne s'étend pas en deux dimensions.

Considérons la fonction $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = 4y^2e^x - 2y^4 - e^{4x}$. Montrer que cette fonctions admet deux maxima mais aucun autre point critique.

Correction

- ▷ f est de classe \mathcal{C}^2 dans son domaine de définition, l'ouvert \mathbb{R}^2 .
 ▷ Recherche de points critiques :

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 4y^2e^x - 4e^{4x} = 0 \\ 8ye^x - 8y^3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 4e^x(y^2 - e^{3x}) = 0 \\ 8y(e^x - y^2) = 0 \end{cases} \begin{matrix} \nearrow \\ \searrow \end{matrix} \begin{cases} y = 0 \\ -4e^{4x} = 0 \\ e^x = y^2 \\ y^2 = e^{3x} = y^6 \end{cases} \iff (x, y) = (0, \pm 1).$$

On a deux points critiques : $(0, 1)$ et $(0, -1)$.

- ▷ Nature des points critiques :

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 4y^2e^x - 16e^{4x} & 8ye^x \\ 8ye^x & 8e^x - 24y^2 \end{pmatrix}, \quad \det(H_f(x, y)) = 32e^x((e^x - 3y^2)(y^2 - 4e^{3x}) - 2y^2e^x).$$

$\det(H_f(0, \pm 1)) = 128 > 0$ et $\partial_{xx}f(0, \pm 1) = -12 < 0$ donc les points $(0, \pm 1)$ sont des maxima.

Exercice 4.7 (Optimisation libre)

Si f est une fonction continue d'une seule variable réelle et si f admet deux maxima sur un intervalle alors il existe un minimum compris entre les deux maxima. Le but de cet exercice est de montrer que ce résultat ne s'étend pas en deux dimensions.

Considérons la fonction $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = 4x^2e^y - 2x^4 - e^{4y}$. Montrer que cette fonction admet deux maxima mais aucun autre point critique.

Correction

- ▷ f est de classe \mathcal{C}^2 dans son domaine de définition, l'ouvert \mathbb{R}^2 .
 ▷ Recherche de points critiques :

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 8xe^y - 8x^3 = 0 \\ 4x^2e^y - 4e^{4y} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 8x(e^y - x^2) = 0 \\ 4e^y(x^2 - e^{3y}) = 0 \end{cases} \begin{matrix} \nearrow \\ \searrow \end{matrix} \begin{cases} x = 0 \\ -4e^{4y} = 0 \\ e^y = x^2 \\ x^2 = e^{3y} = x^6 \end{cases} \iff (x, y) = (\pm 1, 0).$$

On a deux points critiques : $(1, 0)$ et $(-1, 0)$.

- ▷ Nature des points critiques :

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 8e^y - 24x^2 & 8xe^y \\ 8xe^y & 4x^2e^y - 16e^{4y} \end{pmatrix}, \quad \det(H_f(x, y)) = 32e^y((e^y - 3x^2)(x^2 - 4e^{3y}) - 2x^2e^y).$$

$\det(H_f(\pm 1, 0)) = 128 > 0$ et $\partial_{xx}f(\pm 1, 0) = -16 < 0$ donc les points $(\pm 1, 0)$ sont des maxima.

Exercice 4.8

Déterminer et établir la nature des points critiques des fonction $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définies par

1. $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + y$
2. $f(x, y) = xy - 2x - 2y - x^2 - y^2$
3. $f(x, y) = (x - y)(1 - xy)$
4. $f(x, y) = y^3 + 3x^2y - 6x^2 - 6y^2 + 2$
5. $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy + 3$
6. $f(x, y) = xy(1 - x - y)$
7. $f(x, y) = x^3 - 12xy + 8y^3$
8. $f(x, y) = xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$
9. $f(x, y) = e^x \cos(y)$
10. $f(x, y) = y \cos(x)$
11. $f(x, y) = y^2 + xy \ln(x)$
12. $f(x, y) = \frac{x^2y}{2} + x^2 + \frac{y^3}{3} - 4y$
13. $f(x, y) = \frac{x^2y}{2} - x^2 + \frac{y^3}{3} - 4y$
14. $f(x, y) = \frac{xy^2}{2} + \frac{x^3}{3} - 4x + y^2$
15. $f(x, y) = (x^2 - y^2)e^{-(x^2 - y^2)}$
16. $f(x, y) = (y^2 - x^2)e^{-(x^2 - y^2)}$
17. $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$
18. $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4(x - y)^2$
19. $f(x, y, z) = \frac{x^2}{2} + xyz - z + y$
20. $f(x, y) = (x - 1)^2 + 2y^2$
21. $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$
22. $f(x, y) = x^3y^2(6 - x - y)$
23. $f(x, y) = e^{x-y}(x^2 - 2y^2)$
24. $f(x, y) = \frac{8}{x} + \frac{x}{y} + y$
25. $f(x, y) = x^2 - \cos(y)$
26. $f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{-(x^2 + y^2)}$
27. $f(x, y) = x^3 + y^2 - 6(x^2 - y^2)$
28. $f(x, y) = (x^2 + y^2 - y^3)e^{-y}$

Correction

1. $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + y$

▷ f est de classe \mathcal{C}^2 dans son domaine de définition, l'ouvert \mathbb{R}^2 .

▷ Recherche de points critiques :

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 2x + y = 0 \\ x + 2y + 1 = 0 \end{cases} \iff (x, y) = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right).$$

On a un unique point critique : $\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$.

▷ Nature du point critique :

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \det(H_f(x, y)) = 3.$$

 $\det(H_f\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)) > 0$ et $\partial_{xx}f\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right) > 0$ donc $\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ est un minimum.

2. $f(x, y) = xy - 2x - 2y - x^2 - y^2$

▷ f est de classe \mathcal{C}^2 dans son domaine de définition, l'ouvert \mathbb{R}^2 .

▷ Recherche de points critiques :

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} y - 2 - 2x = 0 \\ x - 2 - 2y = 0 \end{cases} \iff (x, y) = (-2, -2).$$

On a un unique point critique : $(-2, -2)$.

▷ Nature du point critique :

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \det(H_f(x, y)) = 3.$$

 $\det(H_f(-2, -2)) > 0$ et $\partial_{xx}f(-2, -2) < 0$ donc $(-2, -2)$ est un maximum.

3. $f(x, y) = (x - y)(1 - xy)$

▷ f est de classe \mathcal{C}^2 dans son domaine de définition, l'ouvert \mathbb{R}^2 .

▷ Recherche de points critiques :

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 1 - 2xy + y^2 = 0 \\ -1 - x^2 + 2xy = 0 \end{cases} \iff (x, y) \in \{(-1, -1), (1, 1)\}.$$

On a deux points critiques : $(-1, -1)$ et $(1, 1)$.

▷ Nature des points critiques :

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} -2y & -2x + 2y \\ -2x + 2y & 2x \end{pmatrix}, \quad \det(H_f(x, y)) = -4xy - 4(y - x)^2.$$

 $\det(H_f(-1, -1)) < 0$ donc $(-1, -1)$ est un point-selle ;

 $\det(H_f(1, 1)) < 0$ donc $(1, 1)$ est un point-selle.

4. $f(x, y) = y^3 + 3x^2y - 6x^2 - 6y^2 + 2$

▷ f est de classe \mathcal{C}^2 dans son domaine de définition, l'ouvert \mathbb{R}^2 .

▷ Recherche de points critiques :

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 6xy - 12x = 0 \\ 3y^2 + 3x^2 - 12y = 0 \end{cases} \iff (x, y) \in \{(0, 0), (0, 4), (2, 2), (-2, 2)\}.$$

On a quatre points critiques : $(0, 0)$, $(0, 4)$, $(2, 2)$ et $(-2, 2)$.

▷ Nature des points critiques :

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 6y - 12 & 6x \\ 6x & 6y - 12 \end{pmatrix}, \quad \det(H_f(x, y)) = (6y - 12)^2 - 36x^2 = 36((y - 2)^2 - x^2).$$

 $\det(H_f(0, 0)) > 0$ et $\partial_{xx}f(0, 0) < 0$ donc $(0, 0)$ est un maximum ;

 $\det(H_f(0, 4)) > 0$ et $\partial_{xx}f(0, 4) > 0$ donc $(0, 4)$ est un minimum ;

$\det(H_f(2,2)) < 0$ donc $(2,2)$ est un point-selle ;
 $\det(H_f(-2,2)) < 0$ donc $(-2,2)$ est un point-selle.

5. $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy + 3.$

- ▷ f est de classe \mathcal{C}^2 dans son domaine de définition, l'ouvert \mathbb{R}^2 .
- ▷ Recherche de points critiques :

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 3(x^2 - y) = 0 \\ 3(y^2 - x) = 0 \end{cases} \iff (x,y) \in \{(0,0), (1,1)\}.$$

On a deux points critiques : $(0,0)$ et $(1,1)$.

- ▷ Nature des points critiques :

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix}, \quad \det(H_f(x,y)) = 36xy - 9.$$

$\det(H_f(0,0)) = -9 < 0$ donc $(0,0)$ est un point-selle ;
 $\det(H_f(1,1)) = 27 > 0$ et $\partial_{xx}f(1,1) = 6 > 0$, donc $(1,1)$ est un minimum.

6. $f(x,y) = xy(1-x-y)$

- ▷ f est de classe \mathcal{C}^2 dans son domaine de définition, l'ouvert \mathbb{R}^2 .
- ▷ Recherche de points critiques :

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} y - 2xy - y^2 = 0 \\ x - x^2 - 2xy = 0 \end{cases} \iff (x,y) \in \left\{ (0,0), (1,0), (0,1), \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \right\}.$$

On a quatre points critiques : $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$ et $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

- ▷ Nature des points critiques :

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} -2y & 1-2x-2y \\ 1-2x-2y & -2x \end{pmatrix}, \quad \det(H_f(x,y)) = 4xy - (1-2x-2y)^2$$

$\det(H_f(0,0)) < 0$ donc $(0,0)$ est un point-selle ;
 $\det(H_f(1,0)) < 0$ donc $(1,0)$ est un point-selle ;
 $\det(H_f(0,1)) < 0$ donc $(0,1)$ est un point-selle ;
 $\det(H_f(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})) > 0$ et $\partial_{xx}f(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) < 0$ donc $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ est un maximum.

7. $f(x,y) = x^3 - 12xy + 8y^3$

- ▷ f est de classe \mathcal{C}^2 dans son domaine de définition, l'ouvert \mathbb{R}^2 .
- ▷ Recherche de points critiques :

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 3x^2 - 12y = 0 \\ -12x + 24y^2 = 0 \end{cases} \iff (x,y) \in \{(0,0), (2,1)\}.$$

On a deux points critiques : $(0,0)$, et $(2,1)$.

- ▷ Nature des points critiques :

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & -12 \\ -12 & 48y \end{pmatrix}, \quad \det(H_f(x,y)) = 144(2xy - 1)$$

$\det(H_f(0,0)) < 0$ donc $(0,0)$ est un point-selle ;
 $\det(H_f(2,1)) > 0$ et $\partial_{xx}f(2,1) > 0$ donc $(2,1)$ est un minimum.

8. $f(x,y) = xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$

- ▷ f est de classe \mathcal{C}^2 dans son domaine de définition, l'ouvert $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,\kappa) \mid \kappa \in \mathbb{R}\} \setminus \{(\kappa,0) \mid \kappa \in \mathbb{R}\}$.
- ▷ Recherche de points critiques :

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} y - \frac{1}{x^2} = 0 \\ x - \frac{1}{y^2} = 0 \end{cases} \iff (x,y) = (1,1).$$

On a un unique point critique : $(1,1)$.

▷ Nature du point critique :

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{2}{x^3} & 1 \\ 1 & \frac{2}{y^3} \end{pmatrix}, \quad \det(H_f(x, y)) = \frac{4}{(xy)^3} - 1$$

$\det(H_f(1, 1)) > 0$ et $\partial_{xx}f(1, 1) > 0$ donc $(1, 1)$ est un minimum.

9. $f(x, y) = e^x \cos(y)$

▷ f est de classe \mathcal{C}^2 dans son domaine de définition, l'ouvert \mathbb{R}^2 .

▷ Recherche de points critiques :

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} e^x \cos(y) = 0 \\ -e^x \sin(y) = 0 \end{cases} \iff \exists (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Cette fonction n'admet aucun point critique.

10. $f(x, y) = y \cos(x)$

▷ f est de classe \mathcal{C}^2 dans son domaine de définition, l'ouvert \mathbb{R}^2 .

▷ Recherche de points critiques :

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -y \sin(x) = 0 \\ \cos(x) = 0 \end{cases} \iff (x, y) = \left(\frac{\pi}{2} + \kappa\pi, 0\right), \quad \kappa \in \mathbb{Z}.$$

On a une infinité de points critiques alignés sur la droite d'équation $y = 0$ et qui ont ordonnée $x = \frac{\pi}{2} + \kappa\pi$ avec $\kappa \in \mathbb{Z}$.

▷ Nature des points critiques :

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} -y \cos(x) & -\sin(x) \\ -\sin(x) & 0 \end{pmatrix}, \quad \det(H_f(x, y)) = -\sin^2(x)$$

$\det(H_f(\frac{\pi}{2} + \kappa\pi, 0)) < 0$ donc ils sont tous des points-selle.

11. $f(x, y) = y^2 + xy \ln(x)$

▷ f est de classe \mathcal{C}^2 dans son domaine de définition, l'ouvert $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$.

▷ Recherche de points critiques :

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} y(\ln(x) + 1) = 0 \\ 2y + x \ln(x) = 0 \end{cases} \iff (x, y) \in \left\{ (1, 0); \left(\frac{1}{e}, \frac{1}{2e}\right) \right\}$$

On a deux points critiques : $(1, 0)$ et $(\frac{1}{e}, \frac{1}{2e})$.

▷ Nature des points critiques :

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{y}{x} & 1 + \ln(x) \\ 1 + \ln(x) & 2 \end{pmatrix}, \quad \det(H_f(x, y)) = 2\frac{y}{x} - (1 + \ln(x))^2$$

$\det(H_f(1, 0)) < 0$ donc $(1, 0)$ est un point-selle;

$\det(H_f(\frac{1}{e}, \frac{1}{2e})) > 0$ et $\partial_{xx}f(\frac{1}{e}, \frac{1}{2e}) > 0$ donc $(\frac{1}{e}, \frac{1}{2e})$ est un minimum.

12. $f(x, y) = \frac{x^2 y}{2} + x^2 + \frac{y^3}{3} - 4y$

▷ f est de classe \mathcal{C}^2 dans son domaine de définition, l'ouvert \mathbb{R}^2 .

▷ Recherche de points critiques :

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} xy + 2x = 0 \\ \frac{x^2}{2} + y^2 - 4 = 0 \end{cases} \iff (x, y) \in \{(0, -2), (0, 2)\}.$$

On a deux points critiques : $(0, -2)$ et $(0, 2)$.

▷ Nature des points critiques :

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} y+2 & x \\ x & 2y \end{pmatrix}, \quad \det(H_f(x, y)) = 2y(y+2) - x^2$$

$\det(H_f(0,2)) > 0$ et $\partial_{xx}f(0,2) = 4 > 0$ donc $(0,2)$ est un minimum pour f ;

comme $\det(H_f(0,-2)) = 0$, on ne peut pas conclure en utilisant la matrice hessienne (l'étude du signe de la distance dans ce cas est trop compliquée).

13. $f(x,y) = \frac{x^2y}{2} - x^2 + \frac{y^3}{3} - 4y$

▷ f est de classe \mathcal{C}^2 dans son domaine de définition, l'ouvert \mathbb{R}^2 .

▷ Recherche de points critiques :

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} xy - 2x = 0 \\ \frac{x^2}{2} + y^2 - 4 = 0 \end{cases} \iff (x,y) \in \{(0,-2), (0,2)\}.$$

On a deux points critiques : $(0,-2)$ et $(0,2)$.

▷ Nature des points critiques :

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} y-2 & x \\ x & 2y \end{pmatrix}, \quad \det(H_f(x,y)) = 2y(y-2) - x^2$$

$\det(H_f(0,-2)) > 0$ et $\partial_{xx}f(0,-2) < 0$ donc $(0,-2)$ est un maximum pour f ;

comme $\det(H_f(0,2)) = 0$, on ne peut pas conclure en utilisant la matrice hessienne (l'étude du signe de la distance dans ce cas est trop compliquée).

14. $f(x,y) = \frac{xy^2}{2} + \frac{x^3}{3} - 4x + y^2$

▷ f est de classe \mathcal{C}^2 dans son domaine de définition, l'ouvert \mathbb{R}^2 .

▷ Recherche de points critiques :

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} \frac{y^2}{2} + x^2 - 4 = 0 \\ xy + 2y = 0 \end{cases} \iff (x,y) \in \{(-2,0), (2,0)\}.$$

On a deux points critiques : $(-2,0)$ et $(2,0)$.

▷ Nature des points critiques :

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & y \\ y & x+2 \end{pmatrix}, \quad \det(H_f(x,y)) = 2x(x+2) - y^2$$

$\det(H_f(2,0)) > 0$ et $\partial_{xx}f(2,0) = 4 > 0$ donc $(2,0)$ est un minimum pour f ;

comme $\det(H_f(-2,0)) = 0$, on ne peut pas conclure en utilisant la matrice hessienne (l'étude du signe de la distance dans ce cas est trop compliquée).

15. $f(x,y) = (x^2 - y^2)e^{(-x^2 - y^2)}$

▷ f est de classe \mathcal{C}^2 dans son domaine de définition, l'ouvert \mathbb{R}^2 .

▷ Recherche de points critiques :

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 2x(1 - x^2 + y^2)e^{(-x^2 - y^2)} = 0 \\ 2y(-1 - x^2 + y^2)e^{(-x^2 - y^2)} = 0 \end{cases} \iff (x,y) \in \{(0,0), (0,1), (0,-1), (1,0), (-1,0)\}.$$

On a 5 points critiques : $(0,0)$, $(0,1)$, $(0,-1)$, $(1,0)$ et $(-1,0)$.

▷ Nature des points critiques :

$$\partial_{xx}f(x,y) = 2e^{(-x^2 - y^2)}(1 - 5x^2 + y^2 + 2x^4 - 2x^2y^2),$$

$$\partial_{xy}f(x,y) = 4xy(x^2 - y^2)e^{(-x^2 - y^2)},$$

$$\partial_{yy}f(x,y) = 2e^{(-x^2 - y^2)}(-1 - x^2 + 5y^2 + 2x^2y^2 - 2y^4).$$

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} \partial_{xx}f(x,y) & \partial_{xy}f(x,y) \\ \partial_{xy}f(x,y) & \partial_{yy}f(x,y) \end{pmatrix}, \quad \det(H_f(x,y)) = \partial_{xx}f(x,y)\partial_{yy}f(x,y) - (\partial_{xy}f(x,y))^2$$

On a alors

(x_0, y_0)	$\partial_{xx}f(x_0, y_0)$	$\partial_{xy}f(x_0, y_0)$	$\partial_{yy}f(x_0, y_0)$	$\det(H_f(x_0, y_0))$	
(0, 0)	2	0	-2	-4	c'est un point-selle
(1, 0)	$-\frac{4}{e}$	0	$-\frac{4}{e}$	$\frac{16}{e^2}$	c'est un maximum
(-1, 0)	$-\frac{4}{e}$	0	$-\frac{4}{e}$	$\frac{16}{e^2}$	c'est un maximum
(0, 1)	$\frac{4}{e}$	0	$\frac{4}{e}$	$\frac{16}{e^2}$	c'est un minimum
(0, -1)	$\frac{4}{e}$	0	$\frac{4}{e}$	$\frac{16}{e^2}$	c'est un minimum

16. $f(x, y) = (y^2 - x^2)e^{(-x^2 - y^2)}$

- ▷ f est de classe \mathcal{C}^2 dans son domaine de définition, l'ouvert \mathbb{R}^2 .
- ▷ Recherche de points critiques :

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 2x(-1 + x^2 - y^2)e^{(-x^2 - y^2)} = 0 \\ 2y(1 + x^2 - y^2)e^{(-x^2 - y^2)} = 0 \end{cases} \iff (x, y) \in \{(0, 0), (0, 1), (0, -1), (1, 0), (-1, 0)\}.$$

On a 5 points critiques : (0, 0), (0, 1), (0, -1), (1, 0) et (-1, 0).

- ▷ Nature des points critiques :

$$\begin{aligned} \partial_{xx}f(x, y) &= -2e^{(-x^2 - y^2)}(1 - 5x^2 + y^2 + 2x^4 - 2x^2y^2), \\ \partial_{xy}f(x, y) &= -4xy(x^2 - y^2)e^{(x^2 - y^2)}, \\ \partial_{yy}f(x, y) &= -2e^{(-x^2 - y^2)}(-1 - x^2 + 5y^2 + 2x^2y^2 - 2y^4). \end{aligned}$$

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} \partial_{xx}f(x, y) & \partial_{xy}f(x, y) \\ \partial_{xy}f(x, y) & \partial_{yy}f(x, y) \end{pmatrix}, \quad \det(H_f(x, y)) = \partial_{xx}f(x, y)\partial_{yy}f(x, y) - (\partial_{xy}f(x, y))^2$$

On a alors

(x_0, y_0)	$\partial_{xx}f(x_0, y_0)$	$\partial_{xy}f(x_0, y_0)$	$\partial_{yy}f(x_0, y_0)$	$\det(H_f(x_0, y_0))$	
(0, 0)	-2	0	2	-4	c'est un point-selle
(1, 0)	$\frac{4}{e}$	0	$\frac{4}{e}$	$\frac{16}{e^2}$	c'est un minimum
(-1, 0)	$\frac{4}{e}$	0	$\frac{4}{e}$	$\frac{16}{e^2}$	c'est un minimum
(0, 1)	$-\frac{4}{e}$	0	$-\frac{4}{e}$	$\frac{16}{e^2}$	c'est un maximum
(0, -1)	$-\frac{4}{e}$	0	$-\frac{4}{e}$	$\frac{16}{e^2}$	c'est un maximum

17. $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$

- ▷ f est de classe \mathcal{C}^2 dans son domaine de définition, l'ouvert \mathbb{R}^2 . Comme la restriction $f(x, 0) = x^4 - 2x^2$ tend vers $+\infty$ pour x qui tend vers $\pm\infty$, il n'y a pas de maximum global sur \mathbb{R}^2 . Comme \mathbb{R}^2 est ouvert, un extrémum relatif de f vérifie la condition nécessaire $\nabla f(x, y) = 0$.
- ▷ Recherche de points critiques :

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 4(x^3 - x + y) = 0 \\ 4(y^3 + x - y) = 0 \end{cases} \iff (x, y) \in \{(0, 0), (\sqrt{2}, -\sqrt{2}), (-\sqrt{2}, \sqrt{2})\}.$$

On a 3 points critiques : ¹ (0, 0), $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ et $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ (on note que $f(x, y) = f(-x, -y)$).

- ▷ Nature des points critiques :

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 12x^2 - 4 & 4 \\ 4 & 12y^2 - 4 \end{pmatrix}, \quad \det(H_f(x, y)) = 16((3x^2 - 1)(3y^2 - 1) - 1).$$

1. $\begin{cases} 4x^3 - 4x + 4y = 0 \\ 4y^3 + 4x - 4y = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x^3 + y^3 = 0 \\ y^3 + x - y = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = -y \\ (y^2 - 2)y = 0 \end{cases}$

$\det(H_f(\sqrt{2}, -\sqrt{2})) = 384 > 0$ et $\partial_{xx}f(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = 20 > 0$ donc $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ est un minimum pour f ;
 $\det(H_f(-\sqrt{2}, \sqrt{2})) = 384 > 0$ et $\partial_{xx}f(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = 20 > 0$ donc $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ est un minimum pour f ;
 comme $\det(H_f(0, 0)) = 0$, on ne peut pas conclure en utilisant la matrice hessienne.

Pour connaître la nature du point $(0, 0)$ on étudie le signe de $d(h, k) = f(h, k) - f(0, 0)$ pour h et k voisins de 0 :

$$d(h, k) = h^4 + k^4 - 2(h - k)^2;$$

comme $d(h, 0) = (h^2 - 2)h^2 < 0$ lorsque h est voisin de 0 mais $d(h, h) = 2h^4 > 0$, alors $(0, 0)$ est un point-selle.
 Remarquons qu'avec des transformations algébriques, on peut réécrire la fonction sous la forme

$$f(x, y) = (x^2 - 2)^2 + (y^2 - 2)^2 + 2(x + y)^2 - 8 \geq 8 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Comme $f(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = f(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = -8$, les points $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ et $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ sont des minima globaux.

18. $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4(x - y)^2$

▷ f est de classe \mathcal{C}^2 dans son domaine de définition, l'ouvert \mathbb{R}^2 . Comme la restriction $f(x, 0) = x^4 - 4x^2$ tend vers $+\infty$ pour x qui tend vers $\pm\infty$, il n'y a pas de maximum global sur \mathbb{R}^2 . Comme \mathbb{R}^2 est ouvert, un extrémum relatif de f vérifie la condition nécessaire $\nabla f(x, y) = 0$.

▷ Recherche de points critiques :

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 4(x^3 - 2x + 2y) = 0 \\ 4(y^3 + 2x - 2y) = 0 \end{cases} \iff (x, y) \in \{(0, 0), (2, -2), (-2, 2)\}.$$

On a 3 points critiques : ² $(0, 0)$, $(2, -2)$ et $(-2, 2)$ (on note que $f(x, y) = f(-x, -y)$).

▷ Nature des points critiques :

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 12x^2 - 8 & 8 \\ 8 & 12y^2 - 8 \end{pmatrix}, \quad \det(H_f(x, y)) = 48(3x^2y^2 - 2(x^2 + y^2)).$$

- ▷ $\det(H_f(2, -2)) = 1536 > 0$ et $\partial_{xx}f(2, -2) = 40 > 0$ donc $(2, -2)$ est un minimum local pour f ;
- ▷ $\det(H_f(-2, 2)) = 1536 > 0$ et $\partial_{xx}f(-2, 2) = 40 > 0$ donc $(-2, 2)$ est un minimum local pour f ;
- ▷ comme $\det(H_f(0, 0)) = 0$, on ne peut pas conclure en utilisant la matrice hessienne. Pour connaître la nature du point $(0, 0)$ on étudie le signe de $d(h, k) = f(h, k) - f(0, 0)$ pour h et k voisins de 0 :

$$d(h, k) = h^4 + k^4 - 4(h - k)^2;$$

comme $d(h, 0) = (h^2 - 4)h^2 < 0$ lorsque h est voisin de 0 mais $d(h, h) = 2h^4 > 0$, alors $(0, 0)$ est un point-selle.

Remarquons qu'avec des transformations algébriques, on peut réécrire la fonction sous la forme

$$f(x, y) = (x^2 - 4)^2 + (y^2 - 4)^2 + 4(x + y)^2 - 32 \geq -32 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Comme $f(2, -2) = f(-2, 2) = -32$, les points $(2, -2)$ et $(-2, 2)$ sont des minima globaux.

19. $f(x, y, z) = \frac{x^2}{2} + xyz - z + y$

▷ f est définie sur \mathbb{R}^3 à valeur dans \mathbb{R} ; comme la restriction $f(0, 0, z) = -z$ tend vers $\pm\infty$ pour z qui tend vers $\mp\infty$, il n'y a pas d'extremum global sur \mathbb{R}^3 . Comme \mathbb{R}^3 est ouvert, un extrémum relatif de f vérifie la condition nécessaire $\nabla f(x, y, z) = 0$.

▷ Recherche de points critiques :

$$\nabla f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x + yz = 0 \\ xz + 1 = 0 \\ xy - 1 = 0 \end{cases} \iff (x, y, z) = (1, 1, -1).$$

Il n'y a qu'un point critique : $(1, 1, -1)$.

2. $\begin{cases} 4x^3 - 8x + 8y = 0 \\ 4y^3 + 8x - 8y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^3 - 2(x - y) = 0 \\ y^3 + 2(x - y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^3 + y^3 = 0 \\ y^3 + 2x - 2y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -y \\ (y^2 - 4)y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -y \\ y = 0 \text{ ou } y = 2 \text{ ou } y = -2 \end{cases}$

- ▷ Nature du point critique : on étudie le signe de $\Delta f(h, k, l) \equiv f(1+h, 1+k, -1+l)$ pour h, k et l voisins de 0 (les termes de degré 1 en h, k et l doivent disparaître) :

$$\Delta f(h, k, l) = \frac{h^2 + 1 + 2h}{2} + (1+h)(1+k)(-1+l) - (-1+l) + (1+k) - \frac{3}{2} = \frac{h^2}{2} + hkl + hl - hk + kl.$$

Il ne reste que transformer Δf si on pense qu'il s'agit d'un extrémum ou fournir des restrictions qui se contredisent si on pense que ce n'est pas un extrémum. Comme les deux restrictions à deux courbes continues passant par l'origine $\Delta f(h, 0, h) = \frac{3}{2}h^2 > 0$ et $\Delta f(h, h, 0) = -\frac{1}{2}h^2 < 0$ donnent des signes différents, on conclut que ce n'est pas un extrémum.

20. $f(x, y) = (x-1)^2 + 2y^2$

- ▷ f est de classe \mathcal{C}^2 dans son domaine de définition, l'ouvert \mathbb{R}^2 .
 ▷ Recherche de points critiques :

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 2x-2=0 \\ 4y=0 \end{cases} \iff (x, y) = (1, 0).$$

On a un seul point critique : $(1, 0)$.

- ▷ Nature du point critique :

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad \det(H_f(x, y)) = 8.$$

$\det(H_f(1, 0)) = 8 > 0$ et $\partial_{xx}f(1, 0) = 2 > 0$ donc $(1, 0)$ est un minimum pour f .

21. $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$

- ▷ f est de classe \mathcal{C}^2 dans son domaine de définition, l'ouvert \mathbb{R}^2 .
 ▷ Recherche de points critiques :

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 2x+y-2=0 \\ x+2y-1=0 \end{cases} \iff (x, y) = (1, 0).$$

On a un seul point critique : $(1, 0)$.

- ▷ Nature du point critique :

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \det(H_f(x, y)) = 7.$$

$\det(H_f(1, 0)) = 7 > 0$ et $\partial_{xx}f(1, 0) = 2 > 0$ donc $(1, 0)$ est un minimum pour f .

22. $f(x, y) = x^3y^2(6-x-y)$

- ▷ f est de classe \mathcal{C}^2 dans son domaine de définition, l'ouvert \mathbb{R}^2 .
 ▷ Recherche de points critiques :

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 3x^2y^2(6-x-y) - x^3y^2 = 0 \\ 2x^3y(6-x-y) - x^3y^2 = 0 \end{cases} \iff (x, y) \in \{(3, 2), (t, 0), (0, t) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

On a une infinité de points critiques : les points $(t, 0)$ et $(0, t)$ pour $t \in \mathbb{R}$ sont des points critiques ainsi que le point $(3, 2)$.

- ▷ Nature des points critiques :

$$\begin{aligned} \partial_{xx}f(x, y) &= 6xy^2(6-x-y) - 6x^2y^2, \\ \partial_{xy}f(x, y) &= 6x^2y(6-x-y) - 3x^2y^2 - 2x^3y, \\ \partial_{yy}f(x, y) &= 2x^3(6-x-y) - 4x^3y. \end{aligned}$$

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} \partial_{xx}f(x, y) & \partial_{xy}f(x, y) \\ \partial_{xy}f(x, y) & \partial_{yy}f(x, y) \end{pmatrix}, \quad \det(H_f(x, y)) = \partial_{xx}f(x, y)\partial_{yy}f(x, y) - (\partial_{xy}f(x, y))^2$$

$\det(H_f(3, 2)) > 0$ et $\partial_{xx}f(3, 2) < 0$ donc $(3, 2)$ est un maximum pour f .

$\det(H_f(t, 0)) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$: l'étude de la matrice hessienne ne permet pas de conclure pour les points sur l'axe d'équation $y = 0$. Pour connaître la nature de ces points on étudie le signe de $d(h, k) = f(t+h, 0) +$

$k) - f(t, 0) = (t + h)^3 k^2 (6 - t - h - k)$ pour h et k proches de 0. On conclut que les points $(t, 0)$ pour $t < 0$ ou $t > 6$ sont des maxima, les points $(t, 0)$ pour $0 < t < 6$ sont des minima et les points $(0, 0)$ et $(6, 0)$ sont des points-selle.

$\det(H_f(0, t)) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$: l'étude de la matrice hessienne ne permet pas de conclure pour les points sur les axes. Pour connaître la nature de ces points on étudie le signe de $d(h, k) = f(0 + h, t + k) - f(0, t) = h^3 (t + k)^2 (6 - t - h - k)$ pour h et k proches de 0. On conclut que les points $(0, t)$ sont des points-selle pour tout $t \in \mathbb{R}$.

23. $f(x, y) = e^{x-y}(x^2 - 2y^2)$

- ▷ f est de classe \mathcal{C}^2 dans son domaine de définition, l'ouvert \mathbb{R}^2 .
- ▷ Recherche de points critiques :

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} (x^2 - 2y^2 + 2x)e^{x-y} = 0 \\ (-x^2 + 2y^2 - 4y)e^{x-y} = 0 \end{cases} \iff (x, y) \in \{(0, 0), (-4, -2)\}.$$

On a deux points critiques : $(0, 0)$ et $(-4, -2)$.

- ▷ Nature des points critiques :

$$\partial_{xx}f(x, y) = e^{x-y}(x^2 - 2y^2 + 4x + 2), \quad \partial_{xy}f(x, y) = e^{x-y}(-x^2 + 2y^2 - 2x - 4y), \quad \partial_{yy}f(x, y) = e^{x-y}(x^2 - 2y^2 + 8y - 4);$$

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} \partial_{xx}f(x, y) & \partial_{xy}f(x, y) \\ \partial_{xy}f(x, y) & \partial_{yy}f(x, y) \end{pmatrix}, \quad \det(H_f(x, y)) = \partial_{xx}f(x, y)\partial_{yy}f(x, y) - (\partial_{xy}f(x, y))^2.$$

On en déduit que

(x_0, y_0)	$\partial_{xx}f(x_0, y_0)$	$\partial_{xy}f(x_0, y_0)$	$\partial_{yy}f(x_0, y_0)$	$\det(H_f(x_0, y_0))$	
$(-4, -2)$	$-6e^{-2}$	$8e^{-2}$	$-12e^{-2}$	$8e^{-4}$	maximum
$(0, 0)$	2	0	-4	-8	point-selle

24. $f(x, y) = \frac{8}{x} + \frac{x}{y} + y$

- ▷ f est de classe \mathcal{C}^2 dans son domaine de définition, l'ouvert $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \mid xy = 0\}$.
- ▷ Recherche de points critiques :

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} \frac{1}{y} - \frac{8}{x^2} = 0 \\ 1 - \frac{x}{y^2} = 0 \end{cases} \iff (x, y) = (4, 2).$$

On a un unique point critique : $(4, 2)$.

- ▷ Nature du point critique :

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{16}{x^3} & -\frac{1}{y^2} \\ -\frac{1}{y^2} & \frac{2x}{y^3} \end{pmatrix}, \quad \det(H_f(x, y)) = \frac{1}{y^3} \left(\frac{16}{x^2} - \frac{1}{y} \right).$$

$\det(H_f(4, 2)) > 0$ et $\partial_{xx}f(4, 2) > 0$ donc $(4, 2)$ est un minimum pour f .

25. $f(x, y) = x^2 - \cos(y)$

- ▷ f est de classe \mathcal{C}^2 dans son domaine de définition, l'ouvert \mathbb{R}^2 .
- ▷ Recherche de points critiques :

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 2x = 0 \\ \sin(y) = 0 \end{cases} \iff (x, y) \in \{(0, \kappa\pi) \mid \kappa \in \mathbb{Z}\}.$$

On a une infinité de points critiques qui s'écrivent $(0, \kappa\pi)$ avec $\kappa \in \mathbb{Z}$.

- ▷ Nature du point critique :

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \cos(y) \end{pmatrix}, \quad \det(H_f(x, y)) = 2 \cos(y).$$

$\det(H_f(0, \kappa\pi)) = (-1)^\kappa$ et $\partial_{xx}f(0, \kappa\pi) > 0$ pour tout $\kappa \in \mathbb{Z}$ donc $(0, \kappa\pi)$ est un minimum si κ est pair et un point-selle si κ est impair.

26. $f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)}$.

On peut remarquer que si on passe aux coordonnées polaire on obtient $w(r) \equiv f(r \cos(\vartheta), r \sin(\vartheta)) = r^2 e^{-r^2}$, autrement-dit on obtient une fonction de la seule variable $r > 0$ et on a $w'(r) = 2r(1 - r^2)e^{-r^2}$ qui s'annule pour $r = 1$ et dont l'étude des variations montre qu'il s'agit d'un minimum. Il faut étudier séparément le cas $(x = 0, y = 0)$ car il n'est pas pris en compte lorsqu'on passe aux coordonnées polaire. Si on n'a pas remarqué cette symétrie, on étudie la fonction comme dans les cas précédents :

- ▷ f est de classe \mathcal{C}^2 dans son domaine de définition, l'ouvert \mathbb{R}^2 .
- ▷ Recherche de points critiques :

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 2x(1 - x^2 - y^2)e^{-(x^2+y^2)} = 0 \\ 2y(1 - x^2 - y^2)e^{-(x^2+y^2)} = 0 \end{cases}$$

On a une infinité de points critiques : le point $(0, 0)$ et les points (x, y) qui appartiennent au cercle $x^2 + y^2 = 1$.

- ▷ Nature du point critique : comme $f(x, y) \geq 0$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $f(x, y) = 0$ ssi $(x, y) \neq (0, 0)$ ou (x, y) est tel que $x^2 + y^2 - 1 = 0$, on en déduit qu'ils sont des minima (le calcul des dérivées secondes porte à des calculs très longues et inutiles dans ce cas).

27. $f(x, y) = x^3 + y^2 - 6(x^2 - y^2)$

- ▷ f est de classe \mathcal{C}^2 dans son domaine de définition, l'ouvert \mathbb{R}^2 .
- ▷ Recherche de points critiques :

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 3x(x - 4) = 0 \\ 3y(y + 4) = 0 \end{cases} \iff (x, y) \in \{(0, 0), (0, -4), (4, 0), (4, -4)\}.$$

On a quatre points critiques : $(0, 0)$, $(0, -4)$, $(4, 0)$ et $(4, -4)$.

- ▷ Nature des points critiques :

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 6(x - 2) & 0 \\ 0 & 6(y + 2) \end{pmatrix}, \quad \det(H_f(x, y)) = 36(x - 2)(y + 2).$$

$\det(H_f(0, 0)) < 0$ donc $(0, 0)$ est un point-selle ;
 $\det(H_f(0, -4)) > 0$ et $\partial_{xx}f(0, -4) < 0$ donc $(0, -4)$ est un maximum ;
 $\det(H_f(4, 0)) > 0$ et $\partial_{xx}f(4, 0) > 0$ donc $(4, 0)$ est un minimum ;
 $\det(H_f(4, -4)) < 0$ $(4, -4)$ est un point-selle.

28. $f(x, y) = (x^2 + y^2 - y^3)e^{-y}$

- ▷ f est de classe \mathcal{C}^2 dans son domaine de définition, l'ouvert \mathbb{R}^2 .
- ▷ Recherche de points critiques :

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 2xe^{-y} = 0 \\ (-x^2 + 2y - 4y^2 + y^3)e^{-y} = 0 \end{cases} \iff (x, y) \in \{(0, 0), (0, 2 - \sqrt{2}), (0, 2 + \sqrt{2})\}.$$

On a quatre trois critiques : $(0, 0)$, $(0, 2 - \sqrt{2})$ et $(0, 2 + \sqrt{2})$.

- ▷ Nature des points critiques :

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2e^{-y} & -2xe^{-y} \\ -2xe^{-y} & (2 + x^2 - 10y + 7y^2 - y^3)e^{-y} \end{pmatrix}, \quad \det(H_f(x, y)) = (4 - 2x^2 - 20y + 14y^2 - 2y^3)e^{-2y}.$$

$\det(H_f(0, 0)) > 0$ et $\partial_{xx}f(0, 0) > 0$ donc $(0, 0)$ est un minimum ;
 $\det(H_f(0, 2 - \sqrt{2})) < 0$ donc $(0, 2 - \sqrt{2})$ est un point-selle ;
 $\det(H_f(0, 2 + \sqrt{2})) > 0$ et $\partial_{xx}f(0, 2 + \sqrt{2}) > 0$ donc $(0, 2 + \sqrt{2})$ est un minimum.

Exercice 4.9

La société d'Adèle produit deux types d'ampoules : E17 et E24. Indiquons par x le nombre de milliers d'ampoules de type E17 produites et supposons que la demande pour ce type de lampes est donnée par $p_1 = 50 - x$, où p_1 est le prix

de vente en euros. De même, indiquons par y le nombre de milliers d'ampoules de type E24 produites et supposons que la demande pour ce type est donnée par $p_2 = 60 - 2y$, où p_2 est aussi le prix de vente en euros. Les coûts communs de production de ces ampoules est $C = 2xy$ (en milliers d'euros). Par conséquent, le bénéfice de la société d'Adèle (en milliers d'euros) est une fonction de deux variables x et y . Déterminer le profit maximal d'Adèle.

Correction

La fonction profit en milliers d'euros est $p(x, y) = p_1x + p_2y - C(x, y) = 50x - x^2 + 60y - 2y^2 - 2xy$. Pour maximiser le profit, on cherche d'abord les points stationnaires :

$$\nabla p = \mathbf{0} \iff \begin{pmatrix} 50 - 2x - 2y \\ 60 - 4y - 2x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x = 20, \\ y = 5. \end{cases}$$

Pour établir la nature de ces points, on étudie la matrice hessienne :

$$\begin{aligned} \partial_{xx}p(x, y) &= -2, & \partial_{xx}p(20, 5) &= -2 < 0, \\ \partial_{xy}p(x, y) &= -2, & \partial_{xy}p(20, 5) &= -2, \\ \partial_{yy}p(x, y) &= -4, & \partial_{yy}p(20, 5) &= -4, \end{aligned}$$

et $\det(H_f(20, 5)) = (-2)(-4) - (-2)^2 = 4 > 0$ donc $(20, 5)$ est un point de maximum pour p et le profit maximal vaut $p(20, 5) = 650$. La société d'Adèle réalise le profit maximal de 650000 euros lorsqu'elle vend 20000 ampoules E17 à 30 euros l'une et 5000 ampoules E24 à 50 euros l'une.

Exercice 4.10

Vous êtes le directeur financier de la firme SANBON & FILS. Cette entreprise a investi 3000 euros pour mettre au point un nouveau parfum. Le coût de la production est de 3 euros par flacon de 100 mL. L'expert consulté par M. SANBON père a établi que si la firme consacre x euros en publicité pour son parfum et que le prix de vente d'un flacon est de y euros, la firme vendra exactement $300 + 6\sqrt{x} - 10y$ pièces. La firme SANBON & FILS fixe évidemment x et y de manière à maximiser son profit. En tant que directeur financier, il vous incombe de déterminer ces valeurs.

Correction

- ▷ Revenu de la vente : $y(300 + 6\sqrt{x} - 10y)$
- ▷ Coût de production : $3(300 + 6\sqrt{x} - 10y)$
- ▷ Coût de développement et de publicité : $3000 + x$
- ▷ Profit = (Revenu de la vente) - (Coût de production) - (Coût de développement et de publicité)

Le profit de la firme à maximiser est donc la fonction

$$\begin{aligned} f: (\mathbb{R}_+^*)^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x, y) = (y - 3)(300 + 6\sqrt{x} - 10y) - x - 3000 \end{aligned}$$

La condition nécessaire s'écrit

$$\begin{cases} \partial_x f(x, y) = \frac{3(y-3)}{\sqrt{x}} - 1 = 0 \\ \partial_y f(x, y) = 330 + 6\sqrt{x} - 20y = 0 \end{cases} \implies (x_0, y_0) = (164025, 138).$$

La hessienne en ce point est définie négative :

$$\begin{cases} \partial_{xx}f(x, y) = -\frac{3(y-3)}{2\sqrt{x^3}} \\ \partial_{xy}f(x, y) = \frac{3}{\sqrt{x}} \\ \partial_{yy}f(x, y) = \frac{30(y-3)}{\sqrt{x^3}} - \frac{3}{\sqrt{x}} \end{cases} \implies \det(H_f(x_0, y_0)) = -\frac{241}{32805}.$$

Comme $\partial_{xx}f(x_0, y_0) = -20$, on a bien un maximum. La firme SANBON & FILS va donc consacrer 164025 euros à la promotion de son nouveau parfum et vendre le flacon de 100 mL à 138 euros. Elle réalisera de la sorte le profit maximal de $f(164025, 138) = 15225$ euros.

Exercice 4.11 (Une fabrication optimale)

Votre société s'occupe de la fabrication d'une pièce mécanique. Celle-ci dépend de deux paramètres réels x et y (à priori non-contraints) de la façon suivante : le coût unitaire de fabrication d'une pièce est égal à

$$c(x, y) = x^2 + 2y^2$$

tandis que le taux de pièces défectueuses (compris entre 0 et 1) est égal à

$$t(x, y) = \frac{1}{1 + (xy)^2}.$$

On cherche à maximiser la rentabilité totale du processus de fabrication. On prendra pour fonction objectif le coût unitaire moyen d'une pièce non-défectueuse, qui est égal au coût de fabrication d'une pièce divisé par le taux de pièces non-défectueuses, et on tentera de le simplifier autant que possible.

Correction

La fonction à minimiser s'écrit $f(x, y) = \frac{c(x, y)}{1-t(x, y)} = \frac{x^2+2y^2}{1-\frac{1}{1+(xy)^2}} = \frac{(x^2+2y^2)(1+x^2y^2)}{x^2y^2} = \frac{1}{y^2} + x^2 + \frac{2}{x^2} + 2y^2$. La condition nécessaire s'écrit

$$\begin{cases} \partial_x f(x, y) = 2\frac{x^4-2}{x^3} = 0 \\ \partial_y f(x, y) = 2\frac{2y^4-1}{y^3} = 0 \end{cases} \implies (x_0, y_0) = (\sqrt[4]{2}, 1/\sqrt[4]{2}).$$

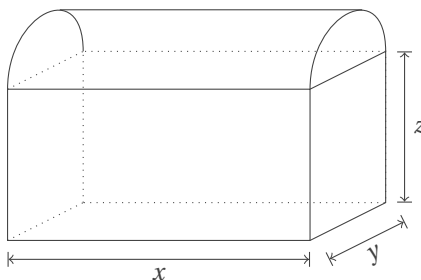
La hessienne en ce point est définie positive :

$$\begin{cases} \partial_{xx} f(x, y) = 2\frac{x^4+6}{x^4} \\ \partial_{xy} f(x, y) = 0 \\ \partial_{yy} f(x, y) = 2\frac{2y^4+3}{y^4} \end{cases} \implies \det(H_f(x_0, y_0)) = 4\frac{2+6}{2}\frac{1+3}{1/2} > 0.$$

Comme $\partial_{xx} f(x_0, y_0) > 0$, on a bien un minimum. En choisissant $(x, y) = (\sqrt[4]{2}, 1/\sqrt[4]{2})$, le coût unitaire moyen d'une pièce non-défectueuse est minimale et égal à $4\sqrt{2}$.

Exercice 4.12

Une boîte a la forme d'un parallélépipède surmonté par un demi-cylindre comme dans la figure ci-dessous



On cherche les valeurs $x, y, z \in \mathbb{R}_+^*$ qui minimisent la surface totale S de la boîte pour un volume V égal à C .

1. Écrire $S(x, y, z)$
2. Écrire $V(x, y, z)$
3. Exprimer $z(x, y)$ comme solution de l'équation $V(x, y, z) = C$
4. Écrire $\tilde{S}(x, y) = S(x, y, z(x, y))$. Calculer et établir la nature des points critiques de $\tilde{S}(x, y)$

Correction

1. $S(x, y, z) = xy + 2xz + 2yz + \pi\left(\frac{y}{2}\right)^2 + \pi\frac{y}{2}x = \left(1 + \frac{\pi}{2}\right)xy + \frac{\pi}{4}y^2 + 2(x+y)z$
2. $V(x, y, z) = xyz + \frac{1}{2}\pi\left(\frac{y}{2}\right)^2x = xyz + \frac{\pi}{8}xy^2$
3. $V(x, y, z) = C \iff z = \frac{C - \frac{\pi}{8}xy^2}{xy}$ donc $z(x, y) = \frac{C}{xy} - \frac{\pi}{8}y$
4. $\tilde{S}(x, y) = S(x, y, z(x, y)) = \left(1 + \frac{\pi}{2}\right)xy + \frac{\pi}{4}y^2 + 2(x+y)\left(\frac{C}{xy} - \frac{\pi}{8}y\right) = \left(1 + \frac{\pi}{4}\right)xy + \frac{2C}{x} + \frac{2C}{y}$

▷ Calcul des points critiques :

$$\nabla \tilde{S}(x, y) = \begin{pmatrix} (1 + \frac{\pi}{4})y - \frac{2C}{x^2} \\ (1 + \frac{\pi}{4})x - \frac{2C}{y^2} \end{pmatrix} \text{ donc } \nabla \tilde{S}(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff (x, y) = \left(\sqrt[3]{\frac{2C}{1 + \frac{\pi}{4}}}, \sqrt[3]{\frac{2C}{1 + \frac{\pi}{4}}} \right)$$

Il existe un seul point critique qui est $\left(\sqrt[3]{\frac{2C}{1 + \frac{\pi}{4}}}, \sqrt[3]{\frac{2C}{1 + \frac{\pi}{4}}} \right)$.

▷ Nature des points critiques :

$$H_{\tilde{S}}(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{4C}{x^3} & 1 + \frac{\pi}{4} \\ 1 + \frac{\pi}{4} & \frac{4C}{y^3} \end{pmatrix} \text{ et } \det(H_{\tilde{S}}(x, y)) = \frac{16C^2}{x^3 y^3} - \left(1 + \frac{\pi}{4}\right)^2$$

donc

$$H_{\tilde{S}}\left(\sqrt[3]{\frac{2C}{1 + \frac{\pi}{4}}}, \sqrt[3]{\frac{2C}{1 + \frac{\pi}{4}}}\right) = \begin{pmatrix} 2\left(1 + \frac{\pi}{4}\right) & 1 + \frac{\pi}{4} \\ 1 + \frac{\pi}{4} & 2\left(1 + \frac{\pi}{4}\right) \end{pmatrix} \text{ et } \det\left(H_{\tilde{S}}\left(\sqrt[3]{\frac{2C}{1 + \frac{\pi}{4}}}, \sqrt[3]{\frac{2C}{1 + \frac{\pi}{4}}}\right)\right) = 3\left(1 + \frac{\pi}{4}\right)^2.$$

On conclut que l'unique point critique est bien un minimum et l'on a $z\left(\sqrt[3]{\frac{2C}{1 + \frac{\pi}{4}}}, \sqrt[3]{\frac{2C}{1 + \frac{\pi}{4}}}\right) = \frac{C}{\left(\frac{2C}{1 + \frac{\pi}{4}}\right)^{2/3}} - \frac{\pi}{8} \left(\frac{2C}{1 + \frac{\pi}{4}}\right)^{2/3}$

🔗 Exercice 4.13 (Courbe de meilleure approximation)

On considère un ensemble de points expérimentaux $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^n$ et on suppose que les deux grandeurs x et y sont liées, au moins approximativement, par une relation de la forme $y = a \sin(\frac{\pi}{2}x) + b \cos(\frac{\pi}{2}x)$. On souhaite alors trouver les constantes a et b pour que la courbe d'équation $y = a \sin(\frac{\pi}{2}x) + b \cos(\frac{\pi}{2}x)$ s'ajuste le mieux possible aux points observés (on parle de *courbe de meilleure approximation*).

Soit $d_i = y_i - (a \sin(\frac{\pi}{2}x_i) + b \cos(\frac{\pi}{2}x_i))$ l'écart vertical du point (x_i, y_i) par rapport à la courbe. La méthode de régression (ou des moindres carrés) est celle qui choisit a et b de sorte que la somme des carrés de ces déviations soit minimale. Pour cela, on doit minimiser la fonction \mathcal{E} définie par

$$\begin{aligned} \mathcal{E} : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}_+ \\ (a, b) &\mapsto \mathcal{E}(a, b) = \sum_{i=0}^n d_i^2. \end{aligned}$$

Écrire et résoudre le système linéaire qui permet de calculer a et b .

Correction

Pour minimiser \mathcal{E} on cherche ses points stationnaires. Puisque

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial a}(a, b) &= -2 \left(\sum_{i=0}^n (y_i - (a \sin(\frac{\pi}{2}x_i) + b \cos(\frac{\pi}{2}x_i))) \sin(\frac{\pi}{2}x_i) \right), \\ \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial b}(a, b) &= -2 \left(\sum_{i=0}^n (y_i - (a \sin(\frac{\pi}{2}x_i) + b \cos(\frac{\pi}{2}x_i))) \cos(\frac{\pi}{2}x_i) \right), \end{aligned}$$

on obtient

$$\begin{aligned} \begin{cases} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial a}(a, b) = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial b}(a, b) = 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} \sum_{i=0}^n (y_i - (a \sin(\frac{\pi}{2}x_i) + b \cos(\frac{\pi}{2}x_i))) \sin(\frac{\pi}{2}x_i) = 0 \\ \sum_{i=0}^n (y_i - (a \sin(\frac{\pi}{2}x_i) + b \cos(\frac{\pi}{2}x_i))) \cos(\frac{\pi}{2}x_i) = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \sum_{i=0}^n ((a \sin(\frac{\pi}{2}x_i) + b \cos(\frac{\pi}{2}x_i))) \sin(\frac{\pi}{2}x_i) = \sum_{i=0}^n y_i \sin(\frac{\pi}{2}x_i) \\ \sum_{i=0}^n ((a \sin(\frac{\pi}{2}x_i) + b \cos(\frac{\pi}{2}x_i))) \cos(\frac{\pi}{2}x_i) = \sum_{i=0}^n y_i \cos(\frac{\pi}{2}x_i) \end{cases} \\ &\iff \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^n \sin^2(\frac{\pi}{2}x_i) & \sum_{i=0}^n \sin(\frac{\pi}{2}x_i) \cos(\frac{\pi}{2}x_i) \\ \sum_{i=0}^n \sin(\frac{\pi}{2}x_i) \cos(\frac{\pi}{2}x_i) & \sum_{i=0}^n \cos^2(\frac{\pi}{2}x_i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^n y_i \sin(\frac{\pi}{2}x_i) \\ \sum_{i=0}^n y_i \cos(\frac{\pi}{2}x_i) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Si on note

$$U \equiv \sum_{i=0}^n \sin^2\left(\frac{\pi}{2}x_i\right), \quad V \equiv \sum_{i=0}^n \sin\left(\frac{\pi}{2}x_i\right) \cos\left(\frac{\pi}{2}x_i\right), \quad W \equiv \sum_{i=0}^n \cos^2\left(\frac{\pi}{2}x_i\right), \quad P \equiv \sum_{i=0}^n y_i \sin\left(\frac{\pi}{2}x_i\right), \quad Q \equiv \sum_{i=0}^n y_i \cos\left(\frac{\pi}{2}x_i\right),$$

on doit résoudre le système linéaire

$$\begin{pmatrix} U & V \\ V & W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$$

dont la solution est

$$a = \frac{WP - VQ}{UW - V^2}, \quad b = \frac{UQ - VP}{UW - V^2}.$$

🔪 Exercice 4.14

La méthode de régression s'étend facilement à des données qui dépendent de deux ou plusieurs variables. On considère un ensemble de points expérimentaux $\{(x_i, y_i, z_i)\}_{i=0}^n$ et on suppose que les trois grandeurs x , y et z sont liées, au moins approximativement, par une relation affine de la forme $z = a + bx + cy$. On souhaite alors trouver les constantes a , b et c pour que le plan d'équation $z = a + bx + cy$ s'ajuste le mieux possible aux points observés (on parle de *plan de meilleure approximation*).

Soit $d_i = z_i - (a + bx_i + cy_i)$ l'écart vertical du point (x_i, y_i, z_i) par rapport au plan. La méthode de régression (ou des moindres carrés) est celle qui choisit a , b et c de sorte que la somme des carrés de ces déviations soit minimale. Pour cela, on doit minimiser la fonction \mathcal{E} définie par

$$\mathcal{E}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}_+$$

$$(a, b, c) \mapsto \mathcal{E}(a, b, c) = \sum_{i=0}^n d_i^2.$$

1. Écrire le système linéaire qui permet de calculer a , b et c
2. Calculer l'équation du plan de meilleure approximation pour l'ensemble $\{(x_i, y_i, z_i)\}_{i=0}^5$ où

i	0	1	2	3	4	5
x_i	0	0	1	2	2	2
y_i	0	1	0	0	1	2
z_i	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1

On utilisera la méthode du pivot de GAUSS pour la résolution du système linéaire.

Correction

1. Pour minimiser \mathcal{E} on cherche ses points stationnaires. Puisque

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial a}(a, b, c) = -2 \left(\sum_{i=0}^n (z_i - (a + bx_i + cy_i)) \right),$$

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial b}(a, b, c) = -2 \left(\sum_{i=0}^n (z_i - (a + bx_i + cy_i)) x_i \right),$$

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial c}(a, b, c) = -2 \left(\sum_{i=0}^n (z_i - (a + bx_i + cy_i)) y_i \right),$$

on obtient

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial a}(a, b, c) = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial b}(a, b, c) = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial c}(a, b, c) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \sum_{i=0}^n (z_i - (a + bx_i + cy_i)) = 0 \\ \sum_{i=0}^n (z_i - (a + bx_i + cy_i)) x_i = 0 \\ \sum_{i=0}^n (z_i - (a + bx_i + cy_i)) y_i = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \sum_{i=0}^n (a + bx_i + cy_i) = \sum_{i=0}^n z_i \\ \sum_{i=0}^n (ax_i + bx_i^2 + cy_i x_i) = \sum_{i=0}^n z_i x_i \\ \sum_{i=0}^n (ay_i + bx_i y_i + cy_i^2) = \sum_{i=0}^n z_i y_i \end{cases}$$

$$\iff \begin{pmatrix} (n+1) & \sum_{i=0}^n x_i & \sum_{i=0}^n y_i \\ \sum_{i=0}^n x_i & \sum_{i=0}^n x_i^2 & \sum_{i=0}^n x_i y_i \\ \sum_{i=0}^n y_i & \sum_{i=0}^n x_i y_i & \sum_{i=0}^n y_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^n z_i \\ \sum_{i=0}^n z_i x_i \\ \sum_{i=0}^n z_i y_i \end{pmatrix}.$$

2. Dans notre cas,

$$\sum_{i=0}^n x_i = 7 \quad \sum_{i=0}^n y_i = 4 \quad \sum_{i=0}^n z_i = \frac{11}{2}$$

$$\sum_{i=0}^n x_i y_i = 6 \quad \sum_{i=0}^n x_i z_i = \frac{7}{2} \quad \sum_{i=0}^n y_i z_i = \frac{9}{2}$$

$$n + 1 = 6 \qquad \sum_{i=0}^n x_i^2 = 13 \qquad \sum_{i=0}^n y_i^2 = 6$$

donc on a le système linéaire

$$\begin{pmatrix} 6 & 7 & 4 \\ 7 & 13 & 6 \\ 4 & 6 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11/2 \\ 7/2 \\ 9/2 \end{pmatrix}$$

qu'on peut résoudre par la méthode de GAUSS

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 7 & 4 & 11/2 \\ 7 & 13 & 6 & 7/2 \\ 4 & 6 & 6 & 9/2 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - \frac{7}{6}L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - \frac{2}{3}L_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 7 & 4 & 11/2 \\ 0 & 29/6 & 4/3 & -35/12 \\ 0 & 4/3 & 10/3 & 5/6 \end{array} \right) \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - \frac{8}{29}L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 7 & 4 & 11/2 \\ 0 & 29/6 & 4/3 & -35/12 \\ 0 & 0 & 86/29 & 95/58 \end{array} \right)$$

dont la solution est

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 123/86 \\ -65/86 \\ 95/172 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1.430232557 \\ -0.7558139503 \\ 0.5523255766 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4.15 (Fonctions implicites, extrema libres)

On considère l'équation $x^2 + 4y^2 + 2y^4 + z^2 + \sin(z) = 0$.

- Vérifier qu'elle définit une et une seule fonction $z = \varphi(x, y)$ au voisinage de $(0, 0, 0)$.
- Montrer que le point $(0, 0)$ est un point stationnaire pour $z = \varphi(x, y)$ et en établir sa nature.

Correction

Soit $g(x, y, z) = x^2 + 4y^2 + 2y^4 + z^2 + \sin(z)$. Elle est clairement de classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3)$ et on a

$$\begin{aligned} \partial_x g(x, y, z) &= 2x, & \partial_y g(x, y, z) &= 8y + 8y^3, & \partial_z g(x, y, z) &= 2z + \cos(z), \\ \partial_x g(0, 0, 0) &= 0, & \partial_y g(0, 0, 0) &= 0, & \partial_z g(0, 0, 0) &= 1. \end{aligned}$$

Comme $\partial_z g(0, 0, 0) \neq 0$ on peut conclure que l'équation $\partial_x g(x, y, z) = 0$ définit implicitement une et une seule fonction $z = \varphi(x, y)$ au voisinage de $(0, 0)$ et $\varphi(0, 0) = 0$. De plus

$$\begin{aligned} \partial_x \varphi(x, y) &= -\frac{\partial_x g(x, y, \varphi(x, y))}{\partial_z g(x, y, \varphi(x, y))} = \frac{-2x}{2\varphi(x, y) + \cos(\varphi(x, y))}, & \partial_x \varphi(0, 0) &= 0, \\ \partial_y \varphi(x, y) &= -\frac{\partial_y g(x, y, \varphi(x, y))}{\partial_z g(x, y, \varphi(x, y))} = \frac{-8y(1 + y^2)}{2\varphi(x, y) + \cos(\varphi(x, y))}, & \partial_y \varphi(0, 0) &= 0, \end{aligned}$$

donc $(0, 0)$ est un point stationnaire pour $z = \varphi(x, y)$. Comme

$$\begin{aligned} \partial_{xx} \varphi(x, y) &= \frac{-2}{2\varphi(x, y) + \cos(\varphi(x, y))} + 2x \frac{\varphi(x, y)(2 - \sin(\varphi(x, y)))}{(2\varphi(x, y) + \cos(\varphi(x, y)))^2}, & \partial_{xx} \varphi(0, 0) &= -2, \\ \partial_{xy} \varphi(x, y) &= 2x \frac{2\partial_y \varphi(x, y) - \sin(\varphi(x, y))\partial_y \varphi(x, y)}{(2\varphi(x, y) + \cos(\varphi(x, y)))^2}, & \partial_{xy} \varphi(0, 0) &= 0 \\ \partial_{yy} \varphi(x, y) &= \frac{-8(1 + 3y^2)}{2\varphi(x, y) + \cos(\varphi(x, y))} + \frac{8(y + y^3)\partial_y \varphi(x, y)(2 - \sin(\varphi(x, y)))}{(2\varphi(x, y) + \cos(\varphi(x, y)))^2} & \partial_{yy} \varphi(x, y) &= -8. \end{aligned}$$

le déterminant de la matrice hessienne est 16 : le point $(0, 0)$ est un point de maximum local pour la fonction $z = \varphi(x, y)$.

Optimisation liée (sous contraintes d'égalité)

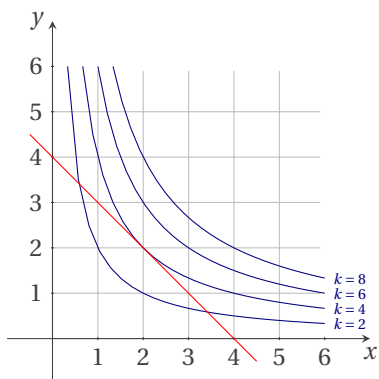
Exercice 4.16 (Optimisation sous contrainte)

- Tracer les courbes de niveau 2, 4, 6, et 8 de la fonction $f: (\mathbb{R}_+^*)^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = xy$. Tracer sur la même figure la courbe d'équation $x + y = 4$. En déduire si f admet des extrema sous la contrainte $x + y = 4$. En cas affirmatif, en établir la nature.
- Utiliser la méthode des multiplicateurs de Lagrange pour justifier l'étude précédente.

3. Utiliser la méthode de réduction pour confirmer l'étude précédente.

Correction

1.



- ▷ $f(x, y) = k$ ssi $y = k/x$: les courbes de niveau de f sont des hyperboles.
- ▷ $x + y = 4$ est l'équation d'une droite de pente -1 et qui passe par le point $(0, 4)$.
- ▷ Il existe une seule courbe de niveau de f qui est tangente à la contraintes : la courbe de niveau 4. Le seul point où les deux courbes sont tangentes est le point $(2, 2)$.
- ▷ En analysant le sens de croissance de f le long de la contrainte, on en déduit que ce point est un maximum pour f sous la contrainte $x + y = 4$.

2. Introduisons le lagrangien :

$$L: (\mathbb{R}_+^*)^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y, \lambda) \mapsto xy - \lambda(x + y - 4).$$

On cherche les points critiques de L :

$$\nabla L(x, y, \lambda) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} y - \lambda = 0, \\ x - \lambda = 0, \\ x + y = 4, \end{cases} \iff (x, y, \lambda) = (2, 2, 2).$$

On étudie la nature de ce point critique :

$$\partial_{xx}L(x, y, \lambda) = 0, \quad \partial_{yy}L(x, y, \lambda) = 0, \quad \partial_{xy}L(x, y, \lambda) = 1.$$

Comme $\Delta(2, 2, 2) = \partial_{xx}L(2, 2, 2)\partial_{yy}L(2, 2, 2) - (\partial_{xy}L(2, 2, 2))^2 = -1 < 0$, rien dans le théorème ne permet de savoir s'il s'agit d'un maximum, minimum ou ni l'un ni l'autre. Étudions alors le signe de la différence $d(h, k) = f(2 + h, 2 + k) - f(2, 2) = (2 + h)(2 + k) - 4$, h et k étant liés par la relation $(2 + h) + (2 + k) = 4$, soit encore $2 + k = 4 - (2 + h)$. On a par conséquent $d(h, 4 - (2 + h)) = 4(2 + h) - (2 + h)^2 - 4 = -h^2 \leq 0$ pour tout $h \in \mathbb{R}$: le point $(2, 2)$ est alors un maximum local de f sous la contrainte $x + y = 4$.

3. La contrainte se réécrit $y = 4 - x$ donc il s'agit de chercher les extrema de la fonction réelle de variable réelle $s: (\mathbb{R}_+^*) \rightarrow \mathbb{R}^+$ définie par

$$s(x) = f(x, 4 - x) = x(4 - x) = -x^2 + 4x.$$

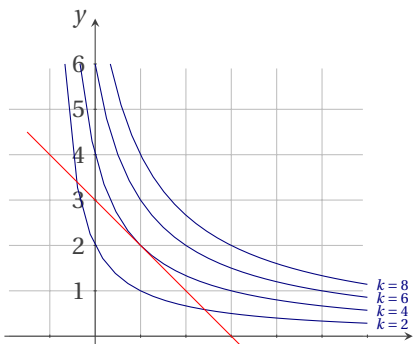
Il s'agit d'une parabole concave dont le sommet se trouve en $x = 2$ qui en est un maximum.

Exercice 4.17 (Optimisation sous contrainte)

1. Tracer les courbes de niveau 2, 4, 6, et 8 de la fonction $f: (\mathbb{R}_+^*)^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = (x + 1)y$. Tracer sur la même figure la courbe d'équation $x + y = 3$. En déduire si f admet des extrema sous la contrainte $x + y = 3$. En cas affirmatif, en établir la nature.
2. Utiliser la méthode des multiplicateurs de Lagrange pour justifier l'étude précédente.
3. Utiliser la méthode de réduction pour confirmer l'étude précédente.

Correction

1.



- ▷ $f(x, y) = k$ ssi $y = k/(x + 1)$: les courbes de niveau de f sont des hyperboles.
- ▷ $x + y = 3$ est l'équation d'une droite de pente -1 et qui passe par le point $(0, 3)$.
- ▷ Il existe une seule courbe de niveau de f qui est tangente à la contraintes : la courbe de niveau 4. Le

seul point où les deux courbes sont tangentes est le point $(1, 2)$.

- ▷ En analysant le sens de croissance de f le long de la contrainte, on en déduit que ce point est un maximum pour f sous la contrainte $x + y = 3$.

2. Introduisons le lagrangien :

$$L: (\mathbb{R}_+^*)^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y, \lambda) \mapsto xy + y - \lambda(x + y - 3).$$

On cherche les points critiques de L :

$$\nabla L(x, y, \lambda) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} y - \lambda = 0, \\ x + 1 - \lambda = 0, \\ x + y = 3, \end{cases} \iff (x, y, \lambda) = (1, 2, 2).$$

On étudie la nature de ce point critique :

$$\partial_{xx}L(x, y, \lambda) = 0, \quad \partial_{yy}L(x, y, \lambda) = 0, \quad \partial_{xy}L(x, y, \lambda) = 1.$$

Comme $\Delta(1, 2, 2) = \partial_{xx}L(1, 2, 2)\partial_{yy}L(1, 2, 2) - (\partial_{xy}L(1, 2, 2))^2 = -1 < 0$, rien dans le théorème ne permet de savoir s'il s'agit d'un maximum, minimum ou ni l'un ni l'autre. Étudions alors le signe de la différence $d(h, k) = f(1 + h, 2 + k) - f(1, 2) = (2 + h)(2 + k) - 4$ avec h et k liés par la relation $(1 + h) + (2 + k) = 3$. Comme $\partial_k((1 + h) + (2 + k) - 3) \neq 0$, on peut écrire $2 + k = 3 - (1 + h)$ i.e. $2 + k = 2 - h$ pour obtenir $d(h, 2 - h) = -h^2 \leq 0$ pour tout $h \in \mathbb{R}$: le point $(1, 2)$ est alors un maximum local de f sous la contrainte $x + y = 3$.

3. La contrainte se réécrit $y = 3 - x$ donc il s'agit de chercher les extrema de la fonction réelle de variable réelle $s:]-1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}^+$ définie par

$$s(x) = f(x, 3 - x) = -(x + 1)(x - 3).$$

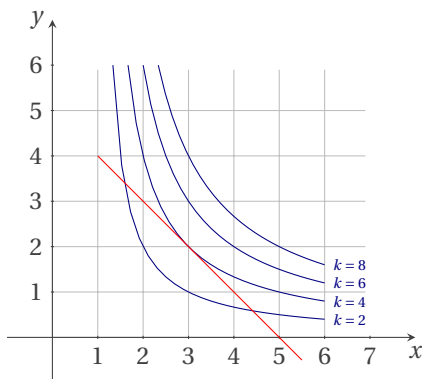
Il s'agit d'une parabole concave dont le sommet se trouve en $x = 1$ qui en est un maximum.

Exercice 4.18 (Optimisation sous contrainte)

1. Tracer les courbes de niveau 2, 4, 6, et 8 de la fonction $f: (\mathbb{R}_+^*)^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = (x - 1)y$. Tracer sur la même figure la courbe d'équation $x + y = 5$. En déduire si f admet des extrema sous la contrainte $x + y = 5$. En cas affirmatif, en établir la nature.
2. Utiliser la méthode des multiplicateurs de Lagrange pour justifier l'étude précédente.
3. Utiliser la méthode de réduction pour confirmer l'étude précédente.

Correction

1.



- ▷ $f(x, y) = k$ ssi $y = k/(x - 1)$: les courbes de niveau de f sont des hyperboles.
- ▷ $x + y = 5$ est l'équation d'une droite de pente -1 et qui passe par le point $(0, 5)$.
- ▷ Il existe une seule courbe de niveau de f qui est tangente à la contraintes : la courbe de niveau 4. Le seul point où les deux courbes sont tangentes est le point $(3, 2)$.
- ▷ En analysant le sens de croissance de f le long de la contrainte, on en déduit que ce point est un maximum pour f sous la contrainte $x + y = 5$.

2. Introduisons le lagrangien :

$$L: (\mathbb{R}_+^*)^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y, \lambda) \mapsto xy - y - \lambda(x + y - 5).$$

On cherche les points critiques de L :

$$\nabla L(x, y, \lambda) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} y - \lambda = 0, \\ x - 1 - \lambda = 0, \\ x + y = 5, \end{cases} \iff (x, y, \lambda) = (3, 2, 2).$$

On étudie la nature de ce point critique :

$$\partial_{xx}L(x, y, \lambda) = 0, \quad \partial_{yy}L(x, y, \lambda) = 0, \quad \partial_{xy}L(x, y, \lambda) = 1.$$

Comme $\Delta(3, 2, 2) = \partial_{xx}L(3, 2, 2)\partial_{yy}L(3, 2, 2) - (\partial_{xy}L(3, 2, 2))^2 = -1 < 0$, rien dans le théorème ne permet de savoir s'il s'agit d'un maximum, minimum ou ni l'un ni l'autre. Étudions alors le signe de la différence $d(h, k) = f(3 + h, 2 + k) - f(3, 2) = (2 + h)(2 + k) - 4$, h et k étant liés par la relation $(3 + h) + (2 + k) = 5$, soit encore $2 + k = 5 - (3 + h)$ i.e. $2 + k = 2 - h$. On a par conséquent $d(h, 2 - h) = -h^2 \leq 0$ pour tout $h \in \mathbb{R}$: le point $(3, 2)$ est alors un maximum local de f sous la contrainte $x + y = 5$.

3. La contrainte se réécrit $y = 3 - x$ donc il s'agit de chercher les extrema de la fonction réelle de variable réelle $s:]1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}^+$ définie par

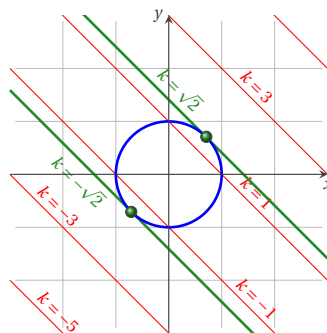
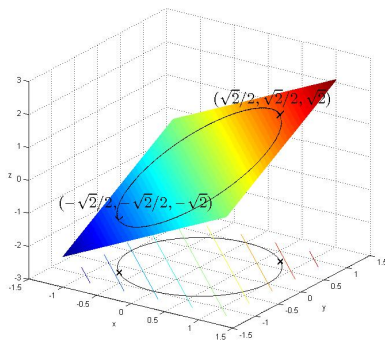
$$s(x) = f(x, 5 - x) = -(x - 1)(x - 5).$$

Il s'agit d'une parabole concave dont le sommet se trouve en $x = 3$ qui en est un maximum.

Exercice 4.19

On cherche les extrema de la fonction $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x + y$ sous la contrainte $x^2 + y^2 = 1$. Faire d'abord une étude des courbes de niveau de f et de leurs intersections avec le graphe de la contrainte. En déduire les extrema ainsi que leur nature. Vérifier ensuite que cette étude est correcte en étudiant la nature des points critiques du lagrangien.

Correction



- ▷ $f(x, y) = k$ ssi $y = k - x$: les courbes de niveau de f sont des droites parallèles de pente -1 .
- ▷ $x^2 + y^2 = 1$ est l'équation du cercle de centre $(0, 0)$ et rayon 1 .
- ▷ Les courbes de niveau de f qui sont tangentes à la contraintes sont les droites $y = -x - \sqrt{2}$ et $y = -x + \sqrt{2}$ respectivement aux points $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ et $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.
- ▷ En analysant le sens de croissance de f le long de la contrainte, on en déduit que $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ est un minimum et $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ un maximum.

Introduisons le lagrangien :

$$L: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y, \lambda) \mapsto x + y - \lambda(x^2 + y^2 - 1).$$

On cherche les points critiques de L :

$$\nabla L(x, y, \lambda) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 1 - 2\lambda x = 0, \\ 1 - 2\lambda y = 0, \\ 1 - x^2 - y^2 = 0, \end{cases} \iff (x, y, \lambda) \in \left\{ \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right\}$$

On étudie la nature de ces points critiques :

$$\begin{array}{llll} \partial_{xx}L(x, y, \lambda) = -2\lambda & \partial_{yy}L(x, y, \lambda) = -2\lambda & \partial_{xy}L(x, y, \lambda) = 0 & \Delta(x, y, \lambda) = 4\lambda^2 \\ \partial_{xx}L\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2} > 0 & \partial_{yy}L\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2} & \partial_{xy}L\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0 & \Delta\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2 > 0 \\ \partial_{xx}L\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\sqrt{2} < 0 & \partial_{yy}L\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\sqrt{2} & \partial_{xy}L\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0 & \Delta\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2 > 0 \end{array}$$

donc $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ est un minimum et $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ un maximum pour f sous la contrainte $x^2 + y^2 = 1$.

Exercice 4.20

Utiliser la méthode des multiplicateurs de LAGRANGE pour calculer le maximum et le minimum de la fonction f sous la (les) contrainte(s) indiquée(s) :

1. $f(x, y) = x^2 + y^2$ sous la contrainte $xy = 1$
2. $f(x, y) = 3x + y$ sous la contrainte $x^2 + y^2 = 10$
3. $f(x, y) = y^2 - x^2$ sous la contrainte $\frac{1}{4}x^2 + y^2 = 1$
4. $f(x, y) = e^{xy}$ sous la contrainte $x^3 + y^3 = 16$
5. $f(x, y, z) = 2x + 2y + z$ sous la contrainte $x^2 + y^2 + z^2 = 9$
6. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ sous la contrainte $x + y + z = 12$
7. $f(x, y, z, t) = x + y + z + t$ sous la contrainte $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1$
8. $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i$ sous la contrainte $\sum_{i=1}^n x_i^2 = c$
9. $f(x, y, z) = x + 2y$ sous les contraintes $x + y + z = 1$ et $y^2 + z^2 = 4$
10. $f(x, y, z) = 3x - y - 3z$ sous les contraintes $x + y - z = 0$ et $x^2 + 2z^2 = 1$

Correction

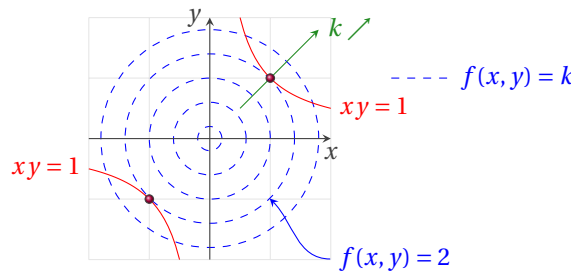
1. Formons le lagrangien

$$L(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 - \lambda(xy - 1)$$

où λ (multiplicateur de LAGRANGE) est une inconnue. Pour que cette fonction ait un extremum il faut que le gradient de L soit nul, autrement dit on cherche les triplets (x, y, λ) tels que

$$\nabla L = \mathbf{0} \iff \begin{pmatrix} 2x - \lambda y \\ 2y - \lambda x \\ 1 - xy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff (x, y, \lambda) \in \{(1, 1, 2), (-1, -1, 2)\}$$

Donc $(1, 1)$ et $(-1, -1)$ sont des *points critiques* de la fonction f sous la contrainte $xy = 1$. Observons que ces points ont été obtenus par une condition nécessaire et comme $\Delta(1, 1, 2) = \Delta(-1, -1, 2) = 0$, rien dans le théorème ne permet de savoir s'il s'agit de maxima, minima ou ni l'un ni l'autre. Étudions alors le signe de la différence $d(h, k) = f(1+h, 1+k) - f(1, 1) = (1+h)^2 + (1+k)^2 - 2$, h et k étant liés par la relation $0 = g(1+h, 1+k) = (1+h)(1+k) - 1$, soit encore $1 + k = 1/(1+h)$. On a par conséquent $d(h, -1 + 1/(1+h)) = h^2(2+h)^2/(1+h)^2 \geq 0$ pour tout $h \in \mathbb{R}$: le point $(1, 1)$ est alors un minimum local de f sous la contrainte g . De la même manière on montre que le point $(-1, -1)$ est un minimum local de f sous la contrainte g . En observant les courbes de niveau ci-dessous on constate qu'il s'agit bien de minima.



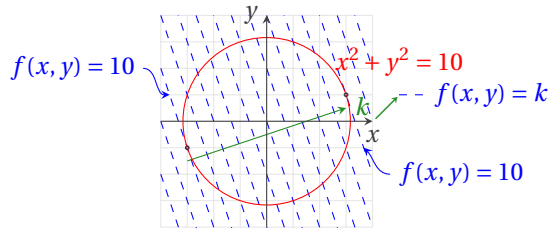
2. Formons le lagrangien

$$L(x, y, \lambda) = 3x + y - \lambda(x^2 + y^2 - 10)$$

où λ (multiplicateur de LAGRANGE) est une inconnue. Pour que cette fonction ait un extremum il faut que le gradient de L soit nul, autrement dit on cherche les triplets (x, y, λ) tels que

$$\nabla L = \mathbf{0} \iff \begin{pmatrix} 3 - 2\lambda x \\ 1 - 2\lambda y \\ 10 - x^2 - y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff (x, y, \lambda) \in \{(3, 1, 1/2), (-3, -1, -1/2)\}$$

Donc $(3, 1)$ et $(-3, -1)$ sont des *points critiques* de la fonction f sous la contrainte $x^2 + y^2 = 10$. Comme $\Delta(3, 1, 1/2) = 1 > 0$ et $\partial_{xx}L(3, 1, 1/2) = -1 < 0$, le point $(3, 1)$ est un maximum ; puisque $\Delta(-3, -1, -1/2) = 1 > 0$ et $\partial_{xx}L(-3, -1, -1/2) = -1 < 0$, le point $(-3, -1)$ est un minimum.



3. Formons le lagrangien

$$L(x, y, \lambda) = y^2 - x^2 - \lambda\left(\frac{1}{4}x^2 + y^2 - 1\right)$$

où λ (multiplicateur de LAGRANGE) est une inconnue. Pour que cette fonction ait un extremum il faut que le gradient de L soit nul, autrement dit on cherche les triplets (x, y, λ) tels que

$$\nabla L = \mathbf{0} \iff \begin{pmatrix} -2x - \lambda x/2 \\ 2y - 2\lambda y \\ 1 - \frac{1}{4}x^2 - y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff (x, y, \lambda) \in \{(0, 1, 1), (0, -1, 1), (2, 0, -4), (-2, 0, -4)\}$$

Donc $(0, 1)$, $(0, -1)$, $(2, 0)$ et $(-2, 0)$ sont des *points critiques* de la fonction f sous la contrainte $\frac{1}{4}x^2 + y^2 = 1$. Observons que ces points ont été obtenus par une condition nécessaire et comme $\Delta(x, y, \lambda) = -(4 + \lambda)(1 - \lambda)$, alors $\Delta(0, 1, 1) = \Delta(0, -1, 1) = \Delta(2, 0, -4) = \Delta(-2, 0, -4) = 0$, rien dans le théorème ne permet de connaître leur nature.

Étudions alors directement le comportement de la fonction au voisinage de ces points en regardant le signe de la fonction

$$d(h, k) = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = (y_0 + k)^2 - (x_0 + h)^2 - y_0^2 + x_0^2,$$

h et k étant liés par $(x_0 + h)^2 + 4(y_0 + k)^2 = 4$, i.e. $g(x_0 + h, y_0 + k) = 0$.

Si $(x_0, y_0) = (0, \pm 1)$ alors $\partial_y g(x_0, y_0) \neq 0$. Dans ce cas l'équation $g(x_0 + h, y_0 + k) = 0$ définit implicitement k en fonction de h au voisinage de $h = 0$: en résolvant $g(x_0 + h, y_0 + k) = 0$ on trouve $(y_0 + k)^2 = 1 - (x_0 + h)^2/4$; en remplaçant l'expression ainsi trouvée dans $d(h, k)$ on trouve la fonction d'une seule variable

$$\tilde{d}(h) = -\frac{5}{4}h^2 \leq 0,$$

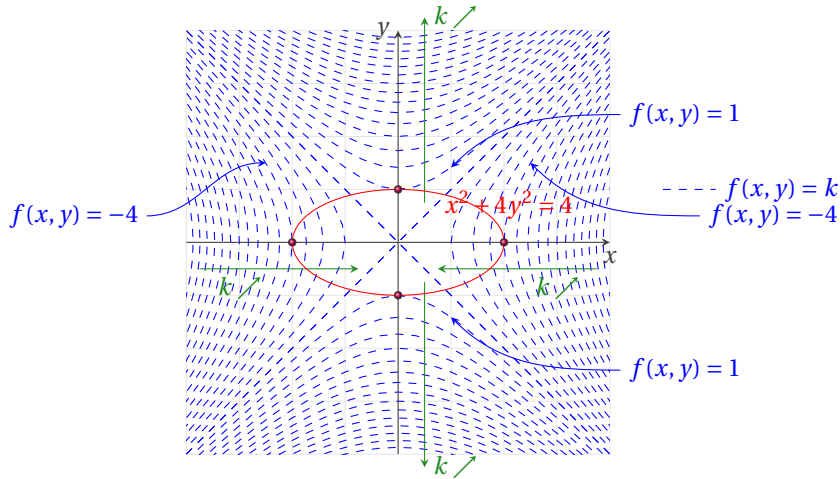
donc les points $(0, \pm 1)$ sont des maxima locaux.

Si $(x_0, y_0) = (\pm 2, 0)$ alors $\partial_x g(x_0, y_0) = 0$ mais $\partial_y g(x_0, y_0) \neq 0$. Dans ce cas l'équation $g(x_0 + h, y_0 + k) = 0$ définit implicitement h en fonction de k au voisinage de $k = 0$: en résolvant $g(x_0 + h, y_0 + k) = 0$ on trouve $(x_0 + h)^2 = 4 - 4(y_0 + k)^2$; en remplaçant l'expression ainsi trouvée dans $d(h, k)$ on trouve la fonction d'une seule variable

$$\tilde{d}(k) = 5k^2 \geq 0,$$

donc les points $(\pm 2, 0)$ sont des minima locaux.

En observant les courbes de niveau ci-dessous on constate que les points $(0, 1)$ et $(0, -1)$ sont des minima et les points $(2, 0)$ et $(-2, 0)$ sont des maxima.



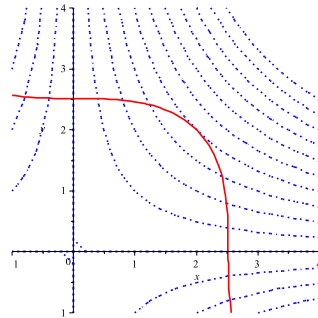
4. Formons le lagrangien

$$L(x, y, \lambda) = e^{xy} - \lambda(x^3 + y^3 - 16)$$

où λ (multiplicateur de LAGRANGE) est une inconnue. Pour que cette fonction ait un extremum il faut que le gradient de L soit nul, autrement dit on cherche les triplets (x, y, λ) tels que

$$\nabla L = \mathbf{0} \iff \begin{pmatrix} ye^{xy} - 3\lambda x^2 \\ xe^{xy} - 3\lambda y^2 \\ 16 - x^3 - y^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff (x, y, \lambda) = (2, 2, e^4/6)$$

Donc $(2, 2)$ est un *point critique* de la fonction f sous la contrainte $x^3 + y^3 = 16$. Observons que ces points ont été obtenus par une condition nécessaire et comme $\Delta(2, 2, e^4/6) < 0$, on ne peut pas conclure sur la nature du point critique. Cependant, en analysant les courbes de niveau, on voit qu'il s'agit d'un maximum.



5. Formons le lagrangien

$$L(x, y, z, \lambda) = 2x + 2y + z - \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 9)$$

où λ (multiplicateur de LAGRANGE) est une inconnue. Pour que cette fonction ait un extremum il faut que le gradient de L soit nul, autrement dit on cherche les points (x, y, z, λ) tels que

$$\nabla L = \mathbf{0} \iff \begin{pmatrix} 2 - 2\lambda x \\ 2 - 2\lambda y \\ 1 - 2\lambda z \\ 16 - x^2 - y^2 - z^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff (x, y, z, \lambda) \in \{(2, 2, 1, 1/2), (-2, -2, -1, -1/2)\}$$

Donc $(2, 2, 1)$ et $(-2, -2, -1)$ sont des *points critiques* de la fonction f sous la contrainte $x^2 + y^2 + z^2 = 9$. Observons que ces points ont été obtenus par une condition nécessaire et on ne peut pas conclure sur leur nature. Cependant, comme $f(2, 2, 1) = 9$ et $f(-2, -2, -1) = -9$, le premier est un maximum tandis que le dernier un minimum.

6. Formons le lagrangien

$$L(x, y, z, \lambda) = x^2 + y^2 + z^2 - \lambda(x + y + z - 12)$$

où λ (multiplicateur de LAGRANGE) est une inconnue. Pour que cette fonction ait un extremum il faut que le

gradient de L soit nul, autrement dit on cherche les points (x, y, z, λ) tels que

$$\nabla L = \mathbf{0} \iff \begin{pmatrix} 2x - \lambda \\ 2y - \lambda \\ 2z - \lambda \\ 12 - x - y - z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff (x, y, z, \lambda) = (4, 4, 4, 2).$$

Donc $(4, 4, 4)$ est un *point critique* de la fonction f sous la contrainte $x + y + z = 12$. Observons que ce point a été obtenu par une condition nécessaire et on ne peut pas conclure sur sa nature. Pour cela, on peut expliciter une variable de la contrainte et étudier l'optimisation libre de la fonction de deux variables ainsi obtenue. Par exemple, on pose $z = 12 - x - y$ et on obtient la fonction $h(x, y) = f(x, y, z = 12 - x - y) = x^2 + y^2 + (12 - x - y)^2 = 2(x^2 + y^2 + xy - 12x - 12y + 72)$. On a

$$\nabla h = \mathbf{0} \iff \begin{pmatrix} 4x + 2y - 24 \\ 4y + 2x - 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff (x, y) = (4, 4).$$

De plus,

$$H_h(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

donc $\Delta H_h(4, 4) > 0$ et $\partial_{xx} h(4, 4) = 2 > 0$: le point $(4, 4)$ est un minimum pour h donc le point $(4, 4, 12 - 4 - 4 = 4)$ est un minimum de f sous la contrainte $x + y + z = 12$.

7. Formons le lagrangien

$$L(x, y, z, t, \lambda) = x + y + z + t - \lambda(x^2 + y^2 + z^2 + t^2 - 1)$$

où λ (multiplicateur de LAGRANGE) est une inconnue. Pour que cette fonction ait un extremum il faut que le gradient de L soit nul, autrement dit on cherche les points (x, y, z, t, λ) tels que

$$\nabla L = \mathbf{0} \iff \begin{pmatrix} 1 - 2\lambda x \\ 1 - 2\lambda y \\ 1 - 2\lambda z \\ 1 - 2\lambda t \\ 1 - x^2 - y^2 - z^2 - t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff (x, y, z, t, \lambda) \in \{(1/2, 1/2, 1/2, 1/2, 1), (-1/2, -1/2, -1/2, -1/2, -1)\}.$$

Donc $(1/2, 1/2, 1/2, 1/2)$ et $(-1/2, -1/2, -1/2, -1/2)$ sont des *points critiques* de la fonction f sous la contrainte $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1$. Observons que ces points ont été obtenus par une condition nécessaire et on ne peut pas conclure sur leur nature.

8. Formons le lagrangien

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda) = \sum_{i=1}^n x_i - \lambda \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - c \right)$$

où λ (multiplicateur de LAGRANGE) est une inconnue. Pour que cette fonction ait un extremum il faut que le gradient de L soit nul, autrement dit on cherche les points $(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda)$ tels que

$$\nabla L = \mathbf{0} \iff \begin{pmatrix} 1 - 2\lambda x_1 \\ 1 - 2\lambda x_2 \\ \vdots \\ 1 - 2\lambda x_n \\ c - (\sum_{i=1}^n x_i^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff (x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda) \in \{(c/n, c/n, \dots, c/n, 1), (-c/n, -c/n, \dots, -c/n, -1)\}.$$

Donc $(c/n, c/n, \dots, c/n)$ et $(-c/n, -c/n, \dots, -c/n)$ sont des *points critiques* de la fonction f sous la contrainte $\sum_{i=1}^n x_i^2 = c$. Observons que ces points ont été obtenus par une condition nécessaire et on ne peut pas conclure sur leur nature.

9. Formons le lagrangien

$$L(x, y, z, \lambda, \mu) = x + 2y - \lambda(x + y + z - 1) - \mu(y^2 + z^2 - 4)$$

où λ et μ (multiplicateurs de LAGRANGE) sont des inconnues. Pour que cette fonction ait un extremum il faut que le

gradient de L soit nul, autrement dit on cherche les points (x, y, z, λ, μ) tels que

$$\nabla L = \mathbf{0} \iff \begin{pmatrix} 1 - \lambda \\ 2 - \lambda - 2\mu y \\ -\lambda - 2\mu z \\ 1 - x - y - z \\ 4 - y^2 - z^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff (x, y, z, \lambda, \mu) \in \left\{ (1, \sqrt{2}, -\sqrt{2}, 1, 1/\sqrt{8}), (1, -\sqrt{2}, \sqrt{2}, 1, -1/\sqrt{8}) \right\}.$$

Donc $(1, \sqrt{2}, -\sqrt{2})$ et $(1, -\sqrt{2}, \sqrt{2})$ sont des *points critiques* de la fonction f sous les contraintes $x + y + z = 1$ et $y^2 + z^2 = 4$. Observons que ces points ont été obtenus par une condition nécessaire et on ne peut pas conclure sur leur nature.

10. Formons le lagrangien

$$L(x, y, z, \lambda, \mu) = 3x - y - 3z - \lambda(x + y - z) - \mu(x^2 + 2z^2 - 1)$$

où λ et μ (multiplicateurs de LAGRANGE) sont des inconnues. Pour que cette fonction ait un extremum il faut que le gradient de L soit nul, autrement dit on cherche les points (x, y, z, λ, μ) tels que

$$\nabla L = \mathbf{0} \iff \begin{pmatrix} 3 - \lambda - 2\mu x \\ -1 - \lambda \\ -3 + \lambda - 2\mu z \\ -x - y + z \\ 1 - x^2 - 2z^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff (x, y, z, \lambda, \mu) \in \left\{ \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -1, -\frac{2}{\sqrt{3}} \right), \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -1, \frac{2}{\sqrt{3}} \right) \right\}.$$

Donc $(-1/\sqrt{3}, 2/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$ et $(1/\sqrt{3}, -2/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3})$ sont des *points critiques* de la fonction f sous les contraintes $x + y = z$ et $x^2 + 2z^2 = 1$. Observons que ces points ont été obtenus par une condition nécessaire et on ne peut pas conclure sur leur nature.

Exercice 4.21

Trouver et classer les points stationnaires des fonctions suivantes

- $f(x, y) = xy$ dans \mathbb{R}^2 sous la contrainte $x^2 + y^2 = 1$,
- $f(x, y) = x^2 + y^2 + 2$ dans \mathbb{R}^2 sous la contrainte $x^2 - 2xy + y^2 = 0$,
- $f(x, y) = (x - y) \ln(4 + x - y)$ sous la contrainte $x^2 + y^2 = 1$.

Correction

- On a $\nabla g(x, y) = (2x, 2y)^T = (0, 0)$ si et seulement si $(x, y) = (0, 0)$ mais $(0, 0)$ ne vérifie pas la contrainte donc on peut appliquer la méthode des multiplicateurs de LAGRANGE. On introduit le lagrangien $L(x, y, \lambda) = xy - \lambda(x^2 + y^2 - 1)$ et on cherche ses points critiques :

$$\nabla L(x, y, \lambda) = \begin{pmatrix} y - 2\lambda x \\ x - 2\lambda y \\ 1 - x^2 - y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff (x, y, \lambda) \in \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2} \right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2} \right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2} \right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2} \right) \right\}.$$

Soit

$$\Delta(x, y, \lambda) \equiv \partial_{xx}L(x, y, \lambda)\partial_{yy}L(x, y, \lambda) - (\partial_{xy}L(x, y, \lambda))^2 = 4\lambda^2 - 1.$$

Comme $\Delta\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{2}\right) = 0$ on ne peut pas établir directement la nature de ces points critiques.

- On cherche les possibles extrema par la méthode des multiplicateurs de LAGRANGE. Si on note $g(x, y) = x^2 - 2xy + y^2$ la contrainte, on a $\partial_x g(x, y) = 2x - 2y$ et $\partial_y g(x, y) = -2x + 2y$ donc le point $(0, 0)$ est une singularité de la contrainte. Cherchons maintenant les points stationnaires du lagrangien :

$$L(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + 2 - \lambda(x^2 - 2xy + y^2).$$

On a

$$L_x(x, y, \lambda) = 2x - \lambda(2x - 2y), \quad L_y(x, y, \lambda) = 2y - \lambda(-2x + 2y), \quad L_\lambda(x, y, \lambda) = -(x^2 - 2xy + y^2),$$

donc le gradient de L s'annule seulement en $(0, 0)$ et $f(0, 0) = 2$. Comme $f(x, y) \geq 2$ en tout point, il s'agit d'un minimum. En revanche il n'y a pas de maximum (ceci ne contredit pas le théorème de WEIERSTRASS car la contrainte $g(x, y) = (x - y)^2 = 0$, i.e. la droite d'équation $y = x$, n'est pas un ensemble borné). En effet, $f(x, y)|_{g(x, y)=0} = f(x, x) = 2x^2 + 2 \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$.

3. Remarquons tout d'abord que la fonction n'est définie que si $y < x + 4$, ce qui est toujours vérifié si on réalise la contrainte. Comme la contrainte $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ a gradient $\nabla g(x, y) = (2x, 2y)$ qui ne s'annule pas lorsque $g(x, y) = 0$, on peut utiliser la méthode des multiplicateurs de LAGRANGE : on définit le lagrangien $L(x, y, \ell) = (x - y) \ln(4 + x - y) - \ell(1 - x^2 - y^2)$ et on cherche les points stationnaires pour L , comme

$$\nabla L(x, y, \ell) = \begin{pmatrix} \ln(4 + x - y) + \frac{x-y}{4+x-y} - 2\ell x \\ -\ln(4 + x - y) - \frac{x-y}{4+x-y} - 2\ell y \\ x^2 + y^2 - 1 \end{pmatrix}$$

et $\nabla L(x, y, \ell) = (0, 0, 0)$ ssi $(x, y) = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$ ou $(x, y) = (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$. Comme $f(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}) = 2/\sqrt{2} \ln(4 + 2/\sqrt{2})$ et $f(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) = -2/\sqrt{2} \ln(4 - 2/\sqrt{2})$, on conclut que $(x, y) = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$ est un maximum lié et $(x, y) = (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ un minimum lié.

Exercice 4.22

Trouver le rectangle de périmètre minimale parmi ceux qui ont surface fixée.

Correction

Appelons $x > 0$ et $y > 0$ respectivement la base et la hauteur d'un rectangle quelconque. Le périmètre est la fonction $2x + 2y$ tandis que la surface est la fonction $s(x, y) = xy$. Il s'agit de minimiser la fonction $p: (\mathbb{R}_+^*)^2 \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ définie par $p(x, y) = 2(x + y)$ sous la contrainte $s(x, y) = 0$ où $s: (\mathbb{R}_+^*)^2 \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ est définie par $s(x, y) = xy - K$ avec $K > 0$ une constante.

Première méthode Soit $L(x, y, \lambda) = p(x, y) - \lambda s(x, y)$. En introduisant le système de LAGRANGE, il s'agit de chercher les solutions $(x, y, \lambda) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \times \mathbb{R}$ de

$$\nabla L(x, y, \lambda) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} 2 - \lambda y = 0, \\ 2 - \lambda x = 0, \\ K - xy = 0, \end{cases} \implies (x, y, \lambda) = \left(\sqrt{K}, \sqrt{K}, \frac{2}{\sqrt{K}} \right).$$

On obtient que le seul point critique est (\sqrt{K}, \sqrt{K}) et $p(\sqrt{K}, \sqrt{K}) = 4\sqrt{K}$. Comme $\Delta(\sqrt{K}, \sqrt{K}, \frac{2}{\sqrt{K}}) = -\frac{4}{\sqrt{K}} < 0$, on ne peut pas établir directement la nature du point critique. Étudions alors le signe de la différence $d(h, k) = p(\sqrt{K} + h, \sqrt{K} + k) - p(\sqrt{K}, \sqrt{K}) = 2(h + k)$, h et k étant liés par la relation $0 = g(\sqrt{K} + h, \sqrt{K} + k) = (\sqrt{K} + h)(\sqrt{K} + k) - K$, soit encore $k = -\sqrt{K}h/(\sqrt{K} + h)$. On a par conséquent $d(h, k(h)) = 2h^2/(\sqrt{K} + h) > 0$ pour tout $h \approx 0$: le point (\sqrt{K}, \sqrt{K}) est alors un minimum local de f sous la contrainte g .

Seconde méthode La contrainte se réécrit $y = \frac{K}{x}$ donc il s'agit de chercher les extrema de la fonction réelle de variable réelle $h: (\mathbb{R}_+^*) \rightarrow \mathbb{R}^+$ définie par

$$h(x) = f\left(x, \frac{K}{x}\right) = 2\left(x + \frac{K}{x}\right).$$

Cherchons d'abord les points critiques :

$$h'(x) = 2 - 2\frac{K}{x^2}$$

et $h'(x) = 0$ ssi $x = \sqrt{K}$. Comme $h''(x) = 4\frac{K}{x^3} > 0$, il s'agit d'un minimum.

Exercice 4.23

Trouver les dimensions d'une boîte rectangulaire ouverte de surface 12 de volume maximale.

Correction

Notons x, y et z les dimensions de la boîte. Il s'agit de maximiser la fonction $f(x, y, z) = xyz$ sous la contrainte $g(x, y, z) = 2xz + 2yz + xy = 12$ avec $x, y, z > 0$ (la face manquante a cotés x et y).

1. **Méthode des multiplicateurs de LAGRANGE** : on cherche les solutions du système³

$$\begin{cases} yz = \lambda(2z + y), \\ xz = \lambda(2z + x), \\ xy = \lambda(2x + 2y), \\ 2xz + 2yz + xy = 12. \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} xyz = \lambda(2xz + xy), \\ xyz = \lambda(2yz + xy), \\ xyz = \lambda(2xz + 2yz), \\ 2xz + 2yz + xy = 12. \end{cases} \implies 2xz + xy = 2yz + xy = 2xz + 2yz \implies x = y = 2z$$

L'unique solution est le point $(x, y, z, \lambda) = (2, 2, 1, 1/2)$ et $f(2, 2, 1) = 4$. Il s'agit bien d'un point critique mais pour établir s'il est un extremum il faut étudier le signe de la différence

$$d(h_1, h_2, h_3) = f(2 + h_1, 2 + h_2, 1 + h_3) - f(2, 2, 1) = (2 + h_1)(2 + h_2)(1 + h_3) - 4,$$

h_1, h_2 et h_3 étant liés par la relation $0 = g(2 + h_1, 2 + h_2, 1 + h_3) - 12$, soit encore

$$(1 + h_3) = \frac{12 - 2(2 + h_1)(2 + h_2)}{2(2 + h_1) + (2 + h_2)}.$$

On a par conséquent

$$\begin{aligned} \tilde{d}(h_1, h_2) &= d(h_1, h_2, h_3(h_1, h_2)) = \frac{(2 + h_1)(2 + h_2)(12 - 2(2 + h_1)(2 + h_2)) - 4(2(2 + h_1) + (2 + h_2))}{2(2 + h_1) + (2 + h_2)} \\ &= -\frac{1}{2(4 + h_1 + h_2)} (4h_1 h_2 + 4h_2^2 + 4h_1 h_2^2 + 4h_1^2 + 4h_1^2 h_2 + h_1^2 h_2^2) \end{aligned}$$

pour tout $h_1, h_2 \approx 0$. Le signe de \tilde{d} est l'opposé du signe de $N(h_1, h_2) = 4h_1 h_2 + 4h_2^2 + 4h_1 h_2^2 + 4h_1^2 + 4h_1^2 h_2 + h_1^2 h_2^2$ mais celui ci est difficile à étudier. Cependant, il est simple de vérifier que $\nabla N(0, 0) = (0, 0)$ et que la matrice Hessienne $H_N(h_1, h_2)$ est semi-définie positive, par conséquent N est convexe et donc $N(h_1, h_2) \geq 0$ pour $h_1, h_2 \approx 0$. On trouve alors $\tilde{d}(h_1, h_2) \leq 0$ et on conclut que $(2, 2, 1)$ est un *maximum* de la fonction f sous la contrainte g .

2. **Méthode de réduction** : la contrainte se réécrit $z(x, y) = \frac{12 - xy}{2(x+y)}$; il s'agit alors de maximiser la fonction $h : (\mathbb{R}_+^*)^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$ définie par $h(x, y) = xy \frac{12 - xy}{2(x+y)}$. Cherchons d'abord les points critiques :

$$\nabla h(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{-y^2(x^2 + 2xy - 12)}{2(x+y)^2} \\ \frac{-x^2(y^2 + 2xy - 12)}{2(x+y)^2} \end{pmatrix}$$

et $\nabla h(x, y) = (0, 0)$ ssi $(x, y) = (2, 2)$. Étudions maintenant ce point en calculant le déterminant de la matrice hessienne de la fonction h :

$$\begin{aligned} h_{xx}(x, y) &= \frac{-y^2(12 + y^2)}{(x + y)^3} & h_{xx}(2, 2) &= -1 < 0, \\ h_{xy}(x, y) &= \frac{-xy(x^2 + y^2 + 3xy - 12)}{(x + y)^3} & h_{xy}(2, 2) &= -\frac{1}{2}, \\ h_{yy}(x, y) &= \frac{-x^2(12 + x^2)}{(x + y)^3} & h_{yy}(2, 2) &= -1, \\ D(2, 2) &= h_{xx}(2, 2)h_{yy}(2, 2) - (h_{xy}(2, 2))^2 = \frac{3}{4} > 0. \end{aligned}$$

On a donc que $(2, 2)$ est bien un maximum.

Exercice 4.24

Une firme produit des appareils dans deux usines différentes. Les coûts totaux de production pour les deux usines sont respectivement :

$$C_1(q) = 200 + 6q + 0.03q^2, \quad C_2(q) = 150 + 10q + 0.02q^2,$$

où q représente le nombre d'appareils produits dans l'usine. La firme s'est engagée à livrer 100 appareils à une entreprise. Les frais de transport par appareil sont de 4 euros pour les livraisons à partir de la première usine et de 2€ pour les livraisons à partir de la seconde usine. Les frais de transport sont supportés par la firme productive. Calculer le nombre d'appareils que doit produire la firme dans chaque usine afin de minimiser le coût total de production compris le coût de transport.

Correction

Deux méthodes possibles :

Méthode de Lagrange : soit q_i le nombre d'appareils produits dans l'usine i .

▷ Contrainte :

$$q_1 + q_2 = 100$$

▷ Coût totale :

$$C(q_1, q_2) = C_1(q_1) + 4q_1 + C_2(q_2) + 2q_2 = 0.03q_1^2 + 0.02q_2^2 + 10q_1 + 12q_2 + 350.$$

▷ Lagrangien :

$$L(q_1, q_2, \ell) = C(q_1, q_2) - \ell(100 - q_1 - q_2) = 0.03q_1^2 + 0.02q_2^2 + 10q_1 + 12q_2 + 350 - \ell(100 - q_1 - q_2).$$

▷ Gradient du lagrangien :

$$\nabla L(q_1, q_2, \ell) = \begin{pmatrix} 0.06q_1 + 10 + \ell \\ 0.04q_2 + 12 + \ell \\ q_1 + q_2 - 100 \end{pmatrix}$$

▷ Points critiques du lagrangien :

$$\nabla L(q_1, q_2, \ell) = (0, 0, 0) \iff (q_1, q_2, \ell) = (60, 40, 13.6).$$

▷ Nature du point critique :

$$\partial_{q_1 q_1} L(60, 40, 13.6) = 0.06 > 0, \quad \partial_{q_2 q_2} L(60, 40, 13.6) = 0.04 > 0, \quad \partial_{q_1 q_2} L(60, 40, 13.6) = 0,$$

et $(\partial_{q_1 q_1} L \partial_{q_2 q_2} L - \partial_{q_1 q_2} L^2)(60, 40, 13.6) = 0.0024 > 0$: il s'agit d'un minimum.

Méthode de réduction : soit q_i le nombre d'appareils produits dans l'usine i .

▷ Contrainte :

$$q_1 + q_2 = 100 \implies q_2 = 100 - q_1.$$

▷ Coût total :

$$\begin{aligned} \tilde{C}(q_1) &= C(q_1, q_2(q_1)) = C_1(q_1) + 4q_1 + C_2(q_2(q_1)) + 2q_2(q_1) = 0.03q_1^2 + 0.02(q_2(q_1))^2 + 10q_1 + 12q_2(q_1) + 350 = \\ &= 0.03q_1^2 + 0.02(100 - q_1)^2 + 10q_1 + 12(100 - q_1) + 350 = \\ &= 0.03q_1^2 + 0.02(10000 - 400q_1 + q_1^2) + 10q_1 + 1200 - 12q_1 + 350 = 0.05q_1^2 - 6q_1 + 1050. \end{aligned}$$

▷ Dérivée du coût total :

$$\tilde{C}'(q_1) = 0.1q_1 - 6$$

▷ Points critiques du coût total :

$$\tilde{C}'(q_1) = 0 \iff q_1 = 60.$$

▷ Nature du point critique :

$$\tilde{C}''(180) = 0.1 > 0,$$

donc il s'agit d'un minimum.

Par conséquent, quand la firme livre 60 appareils de sa première usine et $100 - q_1 = 40$ appareils de sa deuxième, le coût total est minimal sous la contrainte d'une livraison de 100 appareils.

Exercice 4.25

Trouver le parallélépipède (*i.e.* une boîte *fermée*) de volume 8 dont la surface est minimale.

Correction

1. **Méthode des multiplicateurs de LAGRANGE** : on doit minimiser la fonction $f: (\mathbb{R}_*^+)^3 \rightarrow \mathbb{R}_*^+$ définie par $f(x, y, z) = 2(xy + xz + yz)$ sous la contrainte $g(x, y, z) = 0$ où $g: (\mathbb{R}_*^+)^3 \rightarrow \mathbb{R}_*^+$ est définie par $g(x, y, z) = xyz - 8$. En introduisant le système de LAGRANGE, il s'agit de chercher les solutions $(x, y, z, \lambda) \in (\mathbb{R}_*^+)^3 \times \mathbb{R}$ de

$$\begin{cases} 2y + 2z - \lambda yz = 0, & (4.6a) \\ 2x + 2z - \lambda xz = 0, & (4.6b) \\ 2x + 2y - \lambda xy = 0, & (4.6c) \\ xyz - 8 = 0. & (4.6d) \end{cases}$$

On obtient⁴ que le seul point critique est $(2, 2, 2)$. Il s'agit bien d'un point critique mais pour établir s'il est un extremum il faut étudier le signe de la différence

$$d(h_1, h_2, h_3) = f(2 + h_1, 2 + h_2, 2 + h_3) - f(2, 2, 2) = 2((2 + h_1)(2 + h_2) + (2 + h_1)(2 + h_3) + (2 + h_2)(2 + h_3)) - 24,$$

h_1, h_2 et h_3 étant liés par la relation $0 = g(2 + h_1, 2 + h_2, 2 + h_3) - 8$, soit encore

$$(2 + h_3) = \frac{8}{(2 + h_1)(2 + h_2)}.$$

On a par conséquent

$$\tilde{d}(h_1, h_2) = d(h_1, h_2, h_3(h_1, h_2)) = \frac{2}{(2 + h_1)(2 + h_2)} (4h_2^2 + 4h_1h_2 + 4h_1h_2^2 + 4h_1^2 + 4h_1^2h_2 + h_1^2h_2^2)$$

pour tout $h_1, h_2 \geq 0$. Le signe de \tilde{d} est le même que celui de $N(h_1, h_2) = 4h_2^2 + 4h_1h_2 + 4h_1h_2^2 + 4h_1^2 + 4h_1^2h_2 + h_1^2h_2^2$ mais celui ci est difficile à étudier. Cependant, il est simple de vérifier que $\nabla N(0, 0) = (0, 0)$ et que la matrice Hessienne $H_N(h_1, h_2)$ est semi-définie positive, par conséquent N est convexe et donc $N(h_1, h_2) \geq 0$ pour $h_1, h_2 \geq 0$. On trouve alors $\tilde{d}(h_1, h_2) \geq 0$ et on conclut que $(2, 2, 2)$ est un *minimum* de la fonction f sous la contrainte g .

2. **Méthode de réduction :** la contrainte se réécrit $z = \frac{8}{xy}$ donc il s'agit de chercher les extrema de la fonction de deux variables $h : (\mathbb{R}_+^*)^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$ définie par

$$h(x, y) = f\left(x, y, \frac{8}{xy}\right) = 2\left(xy + \frac{8}{y} + \frac{8}{x}\right).$$

Cherchons d'abord les points critiques :

$$\nabla h(x, y) = \begin{pmatrix} 2\left(y - \frac{8}{x^2}\right) \\ 2\left(x - \frac{8}{y^2}\right) \end{pmatrix}$$

et $\nabla h(x, y) = (0, 0)$ ssi $(x, y) = (2, 2)$. Étudions maintenant ce point en calculant le déterminant de la matrice hessienne de la fonction h :

$$\begin{aligned} h_{xx}(x, y) &= \frac{32}{x^3} & h_{xx}(2, 2) &= 4 > 0, \\ h_{xy}(x, y) &= 2 & h_{xy}(2, 2) &= 2, \\ h_{yy}(x, y) &= \frac{32}{y^3} & h_{yy}(2, 2) &= 4, \\ D(2, 2) &= \partial_{xx}h(2, 2)\partial_{yy}h(2, 2) - (\partial_{xy}h(2, 2))^2 = 12 > 0. \end{aligned}$$

On a donc que $(2, 2)$ est bien un minimum.

Exercice 4.26

Soit un cylindre de rayon $r > 0$ et hauteur $h > 0$.

1. Maximiser le volume du solide pour une surface fixée égale à $s\pi$, s étant une constante positive.
2. Minimiser la surface du solide pour un volume fixé égale à $v\pi$, v étant une constante positive.

Correction

La surface et le volume du cylindre en fonction de h et r sont donnés respectivement par

$$S(r, h) = \pi(2r^2 + 2hr), \quad V(r, h) = \pi r^2 h.$$

1. Maximiser le volume du solide pour une surface fixée égale à $s\pi$.

1.1. **Méthode des multiplicateurs de LAGRANGE :** on introduit la fonction lagrangienne

$$\mathcal{L}(r, h, \mu) = V(r, h) - \mu(s\pi - S(r, h)) = \pi(r^2 h - \mu(2r^2 + 2hr - s)).$$

4. Avec les trois soustractions (4.6b)-(4.6a), (4.6c)-(4.6a) et (4.6c)-(4.6b) on obtient $x = y = z$, on insère ce résultat dans (4.6d) et on trouve la solution.

On cherche les points critiques de la fonction lagrangienne :

$$\nabla \mathcal{L} = \mathbf{0} \iff \begin{cases} \pi(2rh - 2\mu(2r + h)) = 0, \\ \pi(r^2 - 2\mu r) = 0, \\ \pi(s - 2r^2 - 2hr) = 0, \end{cases} \iff \begin{cases} r = \sqrt{\frac{s}{6}} = \frac{\sqrt{6s}}{6}, \\ h = 2\sqrt{\frac{s}{6}} = \frac{\sqrt{6s}}{3}, \\ \mu = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{s}{6}} = \frac{\sqrt{6s}}{12}. \end{cases}$$

Notons $(r_0, h_0, \mu_0) \equiv \left(\frac{\sqrt{6s}}{6}, \frac{\sqrt{6s}}{3}, \frac{\sqrt{6s}}{12}\right)$ et étudions la nature de ce point critique :

$$\Delta(r, h, \mu) = (\partial_{rr}\mathcal{L})(\partial_{hh}\mathcal{L}) - (\partial_{rh}\mathcal{L})^2 = -(\partial_{rh}\mathcal{L})^2 \leq 0, \quad \forall (r, h, \mu)$$

donc on ne peut pas conclure directement. Étudions alors le signe de la différence $d(\xi_1, \xi_2) = V(r_0 + \xi_1, h_0 + \xi_2) - V(r_0, h_0)$, ξ_1 et ξ_2 étant liés par la relation $s\pi = S(r_0 + \xi_1, h_0 + \xi_2)$, soit encore $\xi_2 = -h_0 - (r_0 + \xi_1) + s/(2(r_0 + \xi_1))$. On a par conséquent $d(\xi_1, \xi_2(\xi_1)) = -\pi\xi_1^2(\xi_1 + 3\sqrt{s}/\sqrt{6}) < 0$ lorsque $\xi_1 \approx 0$: le point (r_0, h_0) est alors un maximum local de V sous la contrainte $S = s\pi$.

1.2. **Méthode de réduction** : on élimine h de la contrainte :

$$\pi(2r^2 + 2hr) = s\pi \iff h = \frac{s}{2r} - r.$$

Il s'agit alors de minimiser la fonction

$$g(r) \equiv V(r, h(r)) = \pi(h(r)r^2) = \pi\left(\frac{s}{2}r - r^3\right).$$

On a

$$g'(r) = \pi\left(\frac{s}{2} - 3r^2\right) = 0 \iff r = \frac{\sqrt{6s}}{6}$$

et $g''(r) = -6\pi r < 0$ donc $r = \frac{\sqrt{6s}}{6}$ est un maximum et $h(r_0) = \frac{\sqrt{6s}}{3}$.

2. Minimiser la surface du solide pour un volume fixé égale à $v\pi$

2.1. **Méthode des multiplicateurs de LAGRANGE** : on introduit la fonction lagrangienne

$$\mathcal{L}(r, h, \mu) = S(r, h) - \mu(v\pi - V(r, h)) = \pi((2r^2 + 2hr) - \mu(v - hr^2)).$$

On cherche les points critique de la fonction lagrangienne :

$$\nabla \mathcal{L} = \mathbf{0} \iff \begin{cases} 2\pi(2r + h + \mu hr) = 0, \\ \pi r(2 + \mu r) = 0, \\ \pi hr^2 = v\pi, \end{cases} \iff \begin{cases} r = \sqrt[3]{\frac{v}{2}}, \\ h = 2\sqrt[3]{\frac{v}{2}}, \\ \mu = -2\sqrt[3]{\frac{2}{v}}. \end{cases}$$

On étudie la nature du point critique trouvé :

$$\Delta(r, h, \mu) = (\partial_{rr}\mathcal{L})(\partial_{hh}\mathcal{L}) - (\partial_{rh}\mathcal{L})^2 = -\pi^2(2 + 2\mu r)^2 \implies \Delta(r_0, h_0, \mu_0) < 0,$$

on ne peut pas conclure directement. Étudions alors le signe de la différence $d(\xi_1, \xi_2) = S(r_0 + \xi_1, h_0 + \xi_2) - S(r_0, h_0)$, ξ_1 et ξ_2 étant liés par la relation $v\pi = V(r_0 + \xi_1, h_0 + \xi_2)$, soit encore $\xi_2 = -h_0 + v/(r_0 + \xi_1)^2$. Sachant que $v = h_0 r_0^2 = 2r_0^3$ et que $h_0 r_0 = 2r_0^2$, on trouve $d(\xi_1, \xi_2(\xi_1)) = 2\pi\xi_1^2(3r_0 + \xi_1)/(r_0 + \xi_1) > 0$ lorsque $\xi_1 \approx 0$: le point (r_0, h_0) est alors un minimum local de S sous la contrainte $V = v\pi$.

2.2. **Méthode de réduction** : on élimine h de la contrainte :

$$\pi hr^2 = v\pi \iff h = \frac{v}{r^2}.$$

Il s'agit alors de minimiser la fonction

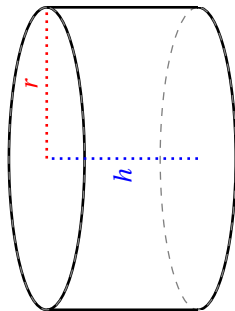
$$g(r) = S(r, h(r)) = \pi(2r^2 + 2h(r)r) = 2\pi\left(r^2 + \frac{v}{r}\right).$$

On a

$$g'(r) = 2\pi\left(2r - \frac{v}{r^2}\right) = 0 \iff r = \sqrt[3]{\frac{v}{2}}$$

et $g''(r) = 2\pi\left(2 + \frac{v}{r^3}\right) > 0$ donc $r = \sqrt[3]{\frac{v}{2}}$ est un minimum et $h\left(\sqrt[3]{\frac{v}{2}}\right) = 2\sqrt[3]{\frac{v}{2}}$.

Soit le cylindre de rayon $r > 0$ et hauteur $h > 0$.



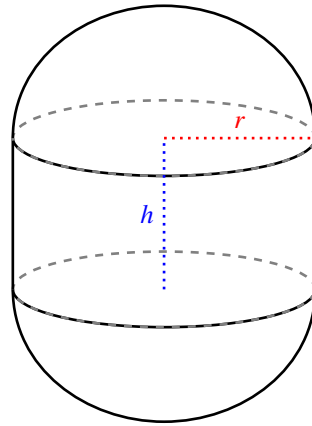
$$V : (\mathbb{R}_+^*)^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad S : (\mathbb{R}_+^*)^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(r, h) \mapsto \pi r^2 h \quad (r, h) \mapsto 2\pi(r^2 + rh)$$

Méthode de LAGRANGE	<p>Maximiser V sous la contrainte $S(r, h) = s\pi$.</p> <p>Lagrangien : $\mathcal{L} : (\mathbb{R}_+^*)^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ défini par $\mathcal{L}(r, h, \lambda) = V(r, h) - \lambda(\nu\pi - S(r, h))$</p> <p>Pts critiques du lagrangien : $\nabla \mathcal{L}(r, h, \lambda) = (0, 0, 0)$ ssi $(r, h, \lambda) = (\kappa, 2\kappa, \kappa/2)$ où $\kappa = \sqrt{s/6}$</p> <p>Étude des pts critiques du lagrangien : $d(\xi_1, \xi_2) = V(\kappa + \xi_1, 2\kappa + \xi_2) - V(\kappa, 2\kappa) < 0$ au voisinage de $(0, 0)$, ξ_1 et ξ_2 étant liés par la relation $S(\kappa + \xi_1, 2\kappa + \xi_2) = \nu\pi$</p> <p>Conclusion : $(\kappa, 2\kappa)$ maximise V sous la contrainte $S = s\pi$.</p>	<p>Minimiser S sous la contrainte $V(r, h) = \nu\pi$.</p> <p>Lagrangien : $\mathcal{L} : (\mathbb{R}_+^*)^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ défini par $\mathcal{L}(r, h, \lambda) = S(r, h) - \lambda(\nu\pi - V(r, h))$</p> <p>Pts critiques du lagrangien : $\nabla \mathcal{L}(r, h, \lambda) = (0, 0, 0)$ ssi $(r, h, \lambda) = (\kappa, 2\kappa, -2\kappa)$ où $\kappa = \sqrt[3]{\nu/2}$</p> <p>Étude des pts critiques du lagrangien : $d(\xi_1, \xi_2) = S(\kappa + \xi_1, 2\kappa + \xi_2) - S(\kappa, 2\kappa) > 0$ au voisinage de $(0, 0)$, ξ_1 et ξ_2 étant liés par la relation $V(\kappa + \xi_1, 2\kappa + \xi_2) = \nu\pi$</p> <p>Conclusion : $(\kappa, 2\kappa)$ minimise S sous la contrainte $V = \nu\pi$.</p>
Méthode de réduction	<p>Contrainte : $S(r, h) = s\pi$ ssi $h = s/(2r) - r$</p> <p>Fonction à maximiser : $g : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ défini par $g(r) = V(r, h(r))$</p> <p>Pts critiques : $g'(r) = 0$ ssi $r = \kappa$ où $\kappa = \sqrt{s/6}$</p> <p>Étude des pts critiques : $g''(\kappa) < 0$</p> <p>Conclusion : $r = \kappa$ maximise g et $h(\kappa) = 2\kappa$ donc $(\kappa, 2\kappa)$ maximise V sous la contrainte $S = s\pi$.</p>	<p>Contrainte : $V(r, h) = \nu\pi$ ssi $h = \nu/r^2$</p> <p>Fonction à minimiser : $g : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ défini par $g(r) = S(r, h(r))$</p> <p>Pts critiques : $g'(r) = 0$ ssi $r = \kappa$ où $\kappa = \sqrt[3]{\nu/2}$</p> <p>Étude des pts critiques : $g''(\kappa) > 0$</p> <p>Conclusion : $r = \kappa$ minimise g et $h(\kappa) = 2\kappa$ donc $(\kappa, 2\kappa)$ minimise S sous la contrainte $V = \nu\pi$.</p>

Exercice 4.27

Soit le solide constitué d'un cylindre de rayon $r > 0$ et hauteur $h > 0$ limité par deux demi-sphères de rayon $r > 0$ comme dans la figure ci-contre.



1. Maximiser le volume du solide pour une surface fixée égale à 16π .
2. Minimiser la surface du solide pour un volume fixé égale à $\frac{32}{3}\pi$.

Rappel : un cylindre de rayon de base R et de hauteur H a volume $\pi R^2 H$ et surface totale $2(\pi R^2) + 2\pi RH$, une sphère de rayon R a volume $\frac{4}{3}\pi R^3$ et surface $4\pi R^2$.

Correction

La surface du solide est la somme de la surface latérale du cylindre $2\pi r h$ et de la surface des deux demi-sphères $4\pi r^2$:

$$S(r, h) = \pi(4r^2 + 2hr).$$

Le volume du solide est la somme du volume du cylindre $\pi r^2 h$ et du volume des deux demi-sphères $\frac{4}{3}\pi r^3$:

$$V(r, h) = \pi \left(hr^2 + \frac{4}{3}r^3 \right).$$

1. Maximiser le volume du solide pour une surface fixée égale à 16π .

1.1. **Méthode des multiplicateurs de LAGRANGE** : on introduit la fonction lagrangienne

$$\mathcal{L}(r, h, \mu) = V(r, h) - \mu(16\pi - S(r, h)) = \pi \left(hr^2 + \frac{4}{3}r^3 \right) - \mu(16\pi - \pi(4r^2 + 2hr)).$$

On cherche les points critiques du lagrangien :

$$\nabla \mathcal{L} = \mathbf{0} \iff \begin{cases} \pi(2hr + 4r^2) - \mu(-\pi(8r + 2h)) = 0, \\ \pi(r^2) - \mu(-\pi 2r) = 0, \\ \pi(4r^2 + 2hr) = 16\pi, \end{cases} \iff \begin{cases} 2hr + 4r^2 + \mu(2h + 8r) = 0, \\ r^2 + \mu 2r = 0, \\ 4r^2 + 2hr = 16, \end{cases} \iff \begin{cases} r = 2, \\ h = 0, \\ \mu = -1. \end{cases}$$

Comme

$$\Delta(r, h, \mu) \equiv (\partial_{rr} \mathcal{L})(\partial_{hh} \mathcal{L}) - (\partial_{rh} \mathcal{L})^2 = -4\pi^2(r + \mu)^2, \quad \Delta(2, 0, -1) < 0,$$

on ne peut pas établir la nature du point critique. Étudions alors le signe de la différence $d(\xi_1, \xi_2) = V(2 + \xi_1, \xi_2) - V(2, 0)$, ξ_1 et ξ_2 étant liés par la relation $0 = S(2 + \xi_1, \xi_2) - 16\pi$, soit encore $\xi_2 = (8 - 2(2 + \xi_1)^2)/(2 + \xi_1)$. On a par conséquent $d(\xi_1, \xi_2(\xi_1)) = \pi \left(-\frac{2}{3}(2 + \xi_1)^3 + 8(2 + \xi_1) - \frac{32}{3} \right) < 0$ lorsque $\xi_1 \approx 0$ (étudier la cubique d'équation $y = -x^3 + 24x - 16$ pour $x \approx 2$) : le point $(2, 0)$ est alors un maximum local de V sous la contrainte $S = 16\pi$.

1.2. **Méthode de réduction** : on élimine h de la contrainte :

$$\pi(4r^2 + 2hr) = 16\pi \iff h = \frac{8}{r} - 2r.$$

Il s'agit alors de maximiser la fonction

$$g(r) = V(r, h(r)) = \pi \left(hr^2 + \frac{4}{3}r^3 \right) = \frac{2}{3}\pi(12r - r^3)$$

On a

$$g'(r) = \frac{2}{3}\pi(12 - 3r^2) = 0 \iff r = 2$$

et $g''(r) = \frac{2}{3}\pi(-6r) < 0$, donc $r = 2$ est un maximum et $h(2) = 0$.

Le solide qui maximise le volume pour une surface donnée est donc une sphère!

2. Minimiser la surface du solide pour un volume fixé égale à $\frac{32}{3}\pi$.

2.1. **Méthode des multiplicateurs de LAGRANGE** : on introduit la fonction lagrangienne

$$\mathcal{L}(r, h, \mu) = S(r, h) - \mu \left(\frac{32}{3} \pi - V(r, h) \right) = \pi \left[(4r^2 + 2hr) - \mu \left(\frac{32}{3} - \left(hr^2 + \frac{4}{3} r^3 \right) \right) \right].$$

On cherche les points critiques de la fonction lagrangienne :

$$\nabla \mathcal{L} = \mathbf{0} \iff \begin{cases} \pi [(8r + 2h) - \mu (-2hr + 4r^2)] = 0, \\ \pi [(2r) - \mu (-r^2)] = 0, \\ \pi \left(hr^2 + \frac{4}{3} r^3 \right) = \frac{32}{3} \pi, \end{cases} \iff \begin{cases} 2h + 8r + \mu(2hr + 4r^2) = 0, \\ 2r + \mu r^2 = 0, \\ hr^2 + \frac{4}{3} r^3 = \frac{32}{3}, \end{cases} \iff \begin{cases} r = 2, \\ h = 0, \\ \mu = -1. \end{cases}$$

On étudie la nature du point critique trouvé :

$$\Delta(r, h, \mu) = (\partial_{rr} \mathcal{L})(\partial_{hh} \mathcal{L}) - (\partial_{rh} \mathcal{L})^2 = -4\pi^2(1 + \mu r)^2 \implies \Delta(2, 0, -1) < 0,$$

on ne peut pas conclure directement. Étudions alors le signe de la différence $d(\xi_1, \xi_2) = S(2 + \xi_1, \xi_2) - S(2, 0)$, ξ_1 et ξ_2 étant liés par la relation $0 = V(2 + \xi_1, \xi_2) - 32\pi/3$, soit encore $\xi_2 = 4(8 - (2 + \xi_1)^3)/(3(2 + \xi_1)^2)$. On a par conséquent $d(\xi_1, \xi_2(\xi_1)) = \frac{4\pi}{3(2 + \xi_1)^2} (3(2 + \xi_1)^4 - 2(2 + \xi_1)^3 + 16) > 0$ lorsque $\xi_1 \approx 0$ (étudier la fonction d'équation $y = 3x^4 - 2x^3 + 16$ pour $x \approx 2$) : le point $(2, 0)$ est alors un minimum local de S sous la contrainte $V = 32\pi/3$.

2.2. **Méthode de réduction** : on élimine h de la contrainte :

$$\pi \left(hr^2 + \frac{4}{3} r^3 \right) = \frac{32}{3} \pi \iff h = \frac{4}{3} \left(\frac{8}{r^2} - r \right).$$

Il s'agit alors de maximiser la fonction

$$g(r) = S(r, h(r)) = \pi(4r^2 + 2hr) = \frac{4}{3} \pi \left(\frac{16}{r} + r^2 \right)$$

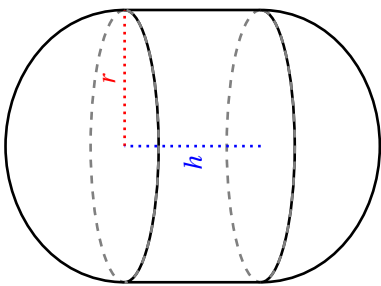
On a

$$g'(r) = \frac{8}{3} \pi \left(r - \frac{8}{r^2} \right) = 0 \iff r = 2$$

et $g''(r) = \frac{8}{3} \pi (1 + 16/r^3) > 0$ donc $r = 2$ est un minimum et $h(2) = 0$.

Le solide qui minimise la surface pour un volume donné est donc une sphère!

Soit le solide constitué d'un cylindre de rayon $r > 0$ et hauteur $h > 0$ limité par deux demi-sphères de rayon $r > 0$



$$V: (\mathbb{R}_+^*)^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(r, h) \mapsto \pi \left(r^2 h + \frac{4}{3} r^3 \right)$$

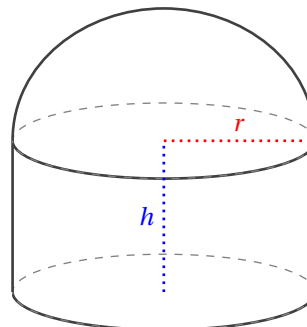
$$S: (\mathbb{R}_+^*)^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(r, h) \mapsto \pi(4r^2 + 2rh)$$

Méthode de LAGRANGE	<p>Maximiser V sous la contrainte $S(r, h) = 16\pi$.</p> <p>Lagrangien : $\mathcal{L}: (\mathbb{R}_+^*)^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ défini par $\mathcal{L}(r, h, \lambda) = V(r, h) - \lambda(12\pi - S(r, h))$</p> <p>Pts critiques du lagrangien : $\nabla \mathcal{L}(r, h, \lambda) = (0, 0, 0)$ ssi $(r, h, \lambda) = (2, 0, -1)$</p> <p>Étude des pts critiques du lagrangien : $d(\xi_1, \xi_2) = V(2 + \xi_1, \xi_2) - V(2, 0) < 0$ au voisinage de $(0, 0)$, ξ_1 et ξ_2 étant liés par la relation $S(2 + \xi_1, \xi_2) = 16\pi$</p> <p>Conclusion : $(2, 0)$ maximise V sous la contrainte $S = 12\pi$.</p>	<p>Minimiser S sous la contrainte $V(r, h) = 32\pi/3$.</p> <p>Lagrangien : $\mathcal{L}: (\mathbb{R}_+^*)^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ défini par $\mathcal{L}(r, h, \lambda) = S(r, h) - \lambda(32\pi/3 - V(r, h))$</p> <p>Pts critiques du lagrangien : $\nabla \mathcal{L}(r, h, \lambda) = (0, 0, 0)$ ssi $(r, h, \lambda) = (2, 0, -1)$</p> <p>Étude des pts critiques du lagrangien : $d(\xi_1, \xi_2) = S(2 + \xi_1, \xi_2) - S(2, 0) > 0$ au voisinage de $(0, 0)$, ξ_1 et ξ_2 étant liés par la relation $V(2 + \xi_1, \xi_2) = 32\pi/3$</p> <p>Conclusion : $(2, 0)$ minimise S sous la contrainte $V = 32\pi/3$.</p>
Méthode de réduction	<p>Contrainte : $S(r, h) = 12\pi$ ssi $h = 8/r - 2r$</p> <p>Fonction à maximiser : $g: \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ défini par $g(r) = V(r, h(r))$</p> <p>Pts critiques : $g'(r) = 0$ ssi $r = 2$</p> <p>Étude des pts critiques : $g''(2) < 0$</p> <p>Conclusion : 2 maximise g et $h(2) = 0$ donc $(2, 0)$ maximise V sous la contrainte $S = 12\pi$.</p>	<p>Contrainte : $V(r, h) = 32\pi/3$ ssi $h = 4(8/r^2 - r)/3$</p> <p>Fonction à minimiser : $g: \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ défini par $g(r) = S(r, h(r))$</p> <p>Pts critiques : $g'(r) = 0$ ssi $r = 2$</p> <p>Étude des pts critiques : $g''(2) > 0$</p> <p>Conclusion : 2 minimise g et $h(2) = 0$ donc $(2, 0)$ minimise S sous la contrainte $V = 32\pi/3$.</p>

Exercice 4.28

Soit le solide constitué d'un cylindre de rayon $r > 0$ et hauteur $h > 0$ surmonté par une demi-sphère de rayon $r > 0$ comme dans la figure ci-contre.



1. Maximiser le volume du solide pour une surface fixée égale à 5π .
2. Minimiser la surface du solide pour un volume fixé égale à $\frac{5}{3}\pi$

Rappel : un cylindre de rayon de base R et de hauteur H a volume $\pi R^2 H$ et surface totale $2(\pi R^2) + 2\pi R H$, une sphère de rayon R a volume $\frac{4}{3}\pi R^3$ et surface $4\pi R^2$.

Correction

La surface du solide est la somme de la surface du disque de base πr^2 avec la surface latérale du cylindre $2\pi r h$ et la surface de la demi-sphère $2\pi r^2$:

$$S(r, h) = \pi(3r^2 + 2hr).$$

Le volume du solide est la somme du volume du cylindre $\pi r^2 h$ et du volume de la demi-sphère $\frac{2}{3}\pi r^3$:

$$V(r, h) = \pi\left(hr^2 + \frac{2}{3}r^3\right).$$

1. Maximiser le volume du solide pour une surface fixée égale à 5π .

1.1. **Méthode des multiplicateurs de LAGRANGE** : on introduit la fonction lagrangienne

$$\mathcal{L}(r, h, \mu) = V(r, h) - \mu(5\pi - S(r, h)) = \pi\left(hr^2 + \frac{2}{3}r^3\right) - \mu(5\pi - \pi(3r^2 + 2hr)).$$

On cherche les points critiques de la fonction lagrangienne :

$$\nabla \mathcal{L} = \mathbf{0} \iff \begin{cases} \pi(2hr + 2r^2) - \mu(-\pi(6r + 2h)) = 0, \\ \pi r^2 - \mu(-\pi(2r)) = 0, \\ \pi(3r^2 + 2hr) = 5\pi, \end{cases} \iff \begin{cases} 2hr + 2r^2 + \mu(6r + 2h) = 0, \\ r^2 + \mu(2r) = 0, \\ 3r^2 + 2hr = 5, \end{cases} \iff \begin{cases} r = h = 1, \\ \mu = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

On étudie la nature du point critique trouvé :

$$\Delta(r, h, \mu) = (\partial_{rr}\mathcal{L})(\partial_{hh}\mathcal{L}) - (\partial_{rh}\mathcal{L})^2 = -4\pi^2(r + \mu)^2 \implies \Delta(1, 1, -1/2) < 0,$$

on ne peut pas conclure directement. Étudions alors le signe de la différence $d(\xi_1, \xi_2) = V(1 + \xi_1, 1 + \xi_2) - V(1, 1)$, ξ_1 et ξ_2 étant liés par la relation $5\pi = S(1 + \xi_1, 1 + \xi_2)$, soit encore $\xi_2 = -\xi_1(8 + 3\xi_1)/(2(1 + \xi_1))$. On a par conséquent $d(\xi_1, \xi_2(\xi_1)) = -5\pi\xi_1^2(3 + \xi_1) < 0$ lorsque $\xi_1 \approx 0$: le point $(1, 1)$ est alors un maximum local de V sous la contrainte $S = 5\pi$.

1.2. **Méthode de réduction** : on élimine h de la contrainte :

$$\pi(3r^2 + 2hr) = 5\pi \iff h = \frac{5}{2r} - \frac{3}{2}r.$$

Il s'agit alors de minimiser la fonction

$$g(r) = V(r, h(r)) = \pi\left(h(r)r^2 + \frac{2}{3}r^3\right) = \pi\left(\frac{5}{2}r - \frac{3}{2}r^3 + \frac{2}{3}r^3\right) = \pi\left(\frac{5}{2}r - \frac{5}{6}r^3\right).$$

On a

$$g'(r) = \pi\left(\frac{5}{2} - \frac{5}{2}r^2\right) = 0 \iff r = 1$$

et $g''(r) = \pi(-5r) < 0$ donc $r = 1$ est un maximum et $h(1) = 1$.

2. Minimiser la surface du solide pour un volume fixé égale à $\frac{5}{3}\pi$

2.1. **Méthode des multiplicateurs de LAGRANGE** : on introduit la fonction lagrangienne

$$\mathcal{L}(r, h, \mu) = S(r, h) - \mu \left(\frac{5}{3}\pi - V(r, h) \right) = \pi(3r^2 + 2hr) - \mu \left(\frac{5}{3}\pi - \pi \left(hr^2 + \frac{2}{3}r^3 \right) \right).$$

On cherche les points critique de la fonction lagrangienne :

$$\nabla \mathcal{L} = \mathbf{0} \iff \begin{cases} \pi(6r + 2h) - \mu(-\pi(2hr + 2r^2)) = 0, \\ \pi(2r) - \mu(-\pi r^2) = 0, \\ \pi(hr^2 + \frac{2}{3}r^3) = \frac{5}{3}\pi, \end{cases} \iff \begin{cases} 6r + 2h + \mu(2hr + 2r^2) = 0, \\ 2r + \mu r^2 = 0, \\ (hr^2 + \frac{2}{3}r^3) = \frac{5}{3}, \end{cases} \iff \begin{cases} r = h = 1, \\ \mu = -2. \end{cases}$$

On étudie la nature du point critique trouvé :

$$\Delta(r, h, \mu) = (\partial_{rr}\mathcal{L})(\partial_{hh}\mathcal{L}) - (\partial_{rh}\mathcal{L})^2 = -4\pi^2(1 + \mu r)^2 \implies \Delta(1, 1, -2) < 0,$$

on ne peut pas conclure directement. Étudions alors le signe de la différence $d(\xi_1, \xi_2) = S(1 + \xi_1, 1 + \xi_2) - S(1, 1)$, ξ_1 et ξ_2 étant liés par la relation $5\pi = 3V(1 + \xi_1, 1 + \xi_2)$, soit encore $\xi_2 = -(-10 + 12\xi_1 + 9\xi_1^2 + 2\xi_1^3)/(3(1 + \xi_1)^2)$. On a par conséquent $d(\xi_1, \xi_2(\xi_1)) = 5\pi(4 + 3\xi_1^2 + \xi_1^3)/(3(1 + \xi_1)) > 0$ lorsque $\xi_1 \approx 0$: le point $(1, 1)$ est alors un minimum local de S sous la contrainte $V = 5\pi/3$.

2.2. **Méthode de réduction** : on élimine h de la contrainte :

$$\pi \left(hr^2 + \frac{2}{3}r^3 \right) = \frac{5}{3}\pi \iff h = \frac{5}{3r^2} - \frac{2}{3}r.$$

Il s'agit alors de minimiser la fonction

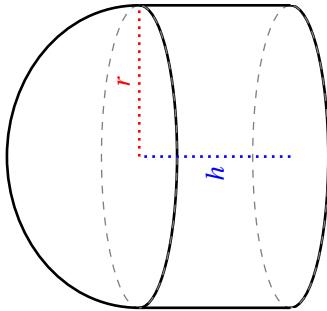
$$g(r) = S(r, h(r)) = \pi(3r^2 + 2h(r)r) = \pi \left(3r^2 + \frac{10}{3r} - \frac{4}{3}r^2 \right) = \pi \left(\frac{10}{3r} + \frac{5}{3}r^2 \right).$$

On a

$$g'(r) = \pi \left(-\frac{10}{3r^2} + \frac{10}{3}r \right) = 0 \iff r = 1$$

et $g''(r) = \pi \left(\frac{20}{3r^3} + \frac{10}{3} \right) > 0$ donc $r = 1$ est un minimum et $h(1) = 1$.

Soit le solide constitué d'un cylindre de rayon $r > 0$ et hauteur $h > 0$ surmonté par une demi-sphère de rayon $r > 0$



$$V: (\mathbb{R}_+^*)^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(r, h) \mapsto \pi \left(r^2 h + \frac{2}{3} r^3 \right)$$

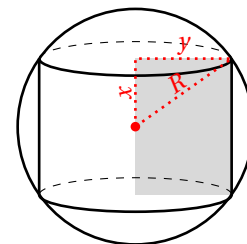
$$S: (\mathbb{R}_+^*)^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(r, h) \mapsto \pi(3r^2 + 2rh)$$

Méthode de Lagrange	<p>Maximiser V sous la contrainte $S(r, h) = 5\pi$.</p> <p>Lagrangien : $\mathcal{L}: (\mathbb{R}_+^*)^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ défini par $\mathcal{L}(r, h, \lambda) = V(r, h) - \lambda(5\pi - S(r, h))$</p> <p>Pts critiques du lagrangien : $\nabla \mathcal{L}(r, h, \lambda) = (0, 0, 0)$ ssi $(r, h, \lambda) = (2, 1, -1/2)$</p> <p>Étude des pts critiques du lagrangien : $d(\xi_1, \xi_2) = V(1 + \xi_1, 1 + \xi_2) - V(1, 1) < 0$ au voisinage de $(0, 0)$, ξ_1 et ξ_2 étant liés par la relation $S(1 + \xi_1, 1 + \xi_2) = 5\pi$</p> <p>Conclusion : $(1, 1)$ maximise V sous la contrainte $S = 5\pi$.</p>	<p>Minimiser S sous la contrainte $V(r, h) = 5\pi/3$.</p> <p>Lagrangien : $\mathcal{L}: (\mathbb{R}_+^*)^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ défini par $\mathcal{L}(r, h, \lambda) = S(r, h) - \lambda(5\pi/3 - V(r, h))$</p> <p>Pts critiques du lagrangien : $\nabla \mathcal{L}(r, h, \lambda) = (0, 0, 0)$ ssi $(r, h, \lambda) = (1, 1, -2)$</p> <p>Étude des pts critiques du lagrangien : $d(\xi_1, \xi_2) = S(1 + \xi_1, 1 + \xi_2) - S(1, 1) > 0$ au voisinage de $(0, 0)$, ξ_1 et ξ_2 étant liés par la relation $V(1 + \xi_1, 1 + \xi_2) = 5\pi/3$</p> <p>Conclusion : $(1, 1)$ minimise S sous la contrainte $V = 5\pi/3$.</p>
Méthode de réduction	<p>Contrainte : $S(r, h) = 5\pi$ ssi $h = 5/(2r) - 3r/2$</p> <p>Fonction à maximiser : $g: \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ défini par $g(r) = V(r, h(r))$</p> <p>Pts critiques : $g'(r) = 0$ ssi $r = 1$</p> <p>Étude des pts critiques : $g''(1) < 0$</p> <p>Conclusion : 1 maximise g et $h(1) = 1$ donc $(1, 1)$ maximise V sous la contrainte $S = 5\pi$.</p>	<p>Contrainte : $V(r, h) = 5\pi/3$ ssi $h = (5/r^2 - 2r)/3$</p> <p>Fonction à minimiser : $g: \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ défini par $g(r) = S(r, h(r))$</p> <p>Pts critiques : $g'(r) = 0$ ssi $r = 1$</p> <p>Étude des pts critiques : $g''(1) > 0$</p> <p>Conclusion : 1 minimise g et $h(1) = 1$ donc $(1, 1)$ minimise S sous la contrainte $V = 5\pi/3$.</p>

Exercice 4.29

Trouver le cylindre de volume maximal inscrit dans une sphère de rayon $R > 0$ fixé...



- ... avec la méthode des multiplicateurs de LAGRANGE (i.e. maximisation d'une fonction $f(x, y)$ sous une contrainte $g(x, y) = 0$) [NB : on se contentera de trouver le point critique];
- ... avec la méthode des extrema libres en éliminant une variable de la contrainte (par exemple en maximisant une fonction $h(x) = f(x, y(x))$) [NB : après avoir trouvé le point critique, établir sa nature].

Suggestion : voir la figure ci-contre pour déduire la contrainte.

Correction

Notons $y > 0$ le rayon de base du cylindre et $x > 0$ sa demi-hauteur.

- Avec la méthode des multiplicateurs de LAGRANGE il s'agit de maximiser la fonction $f(x, y) = 2\pi xy^2$ sous la contrainte $g(x, y) = R^2 - x^2 - y^2 = 0$. On écrit la fonction de LAGRANGE

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y) = 2\pi xy^2 - \lambda(R^2 - x^2 - y^2)$$

et on cherche les points critiques de F :

$$\nabla F(x, y, \lambda) = \begin{pmatrix} 2\pi y^2 + 2\lambda x \\ 4\pi xy + 2\lambda y \\ x^2 + y^2 - R^2 \end{pmatrix}.$$

On a $\nabla F(x, y, \lambda) = \mathbf{0}$ ssi $(x, y, \lambda) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}R, \sqrt{\frac{2}{3}}R, \pi \frac{2}{\sqrt{3}}R\right)$. On étudie la nature du point critique trouvé :

$$\Delta(x, y, \lambda) = (\partial_{xx}F)(\partial_{yy}F) - (\partial_{xy}F)^2 = 4\lambda(2\pi x + \lambda) - 16\pi^2 y^2 \implies \Delta\left(\frac{1}{\sqrt{3}}R, \sqrt{\frac{2}{3}}R, \pi \frac{2}{\sqrt{3}}R\right) = 0,$$

on ne peut pas conclure directement. Étudions alors le signe de la différence $d(\xi_1, \xi_2) = f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}R + \xi_1, \sqrt{\frac{2}{3}}R + \xi_2\right) - f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}R, \sqrt{\frac{2}{3}}R\right)$, ξ_1 et ξ_2 étant liés par la relation $R^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}R + \xi_1\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{2}{3}}R + \xi_2\right)^2$. On a par conséquent $d(\xi_1, \xi_2(\xi_1)) = -\sqrt{3}R\xi_1^2 - \xi_1^3 < 0$ lorsque $\xi_1 \approx 0$: le point $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}R, \sqrt{\frac{2}{3}}R\right)$ est alors un maximum local de f sous la contrainte $g = 0$.

- Avec la méthode des extrema libres il s'agit d'éliminer une variable de la contrainte, par exemple en posant $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ et on maximise la fonction $h(x) = f(x, y(x))$:

$$h(x) = f\left(x, y(x) = \sqrt{R^2 - x^2}\right) = 2\pi x(R^2 - x^2).$$

On cherche d'abord les points critiques :

$$h'(x) = 2\pi(R^2 - 3x^2)$$

et $h'(x) = 0$ ssi $x = \frac{R}{\sqrt{3}}$. On étudie la nature du point critique en étudiant la dérivée seconde :

$$h''(x) = -12\pi x, \quad h''\left(\frac{R}{\sqrt{3}}\right) < 0$$

donc $x = \frac{R}{\sqrt{3}}$ est un maximum.

Exercice 4.30

Trouver trois nombres réels positifs dont le produit vaut 1728 et dont la somme est minimale :

- avec la méthode des multiplicateurs de LAGRANGE (i.e. minimisation d'une fonction $f(x, y, z)$ sous une contrainte $g(x, y, z) = 0$);
- avec la méthode des extrema libres en «éliminant» une variable de la contrainte (en minimisant une fonction $h(x, y) = f(x, y, z(x, y))$); après avoir trouvé le point critique, établir sa nature.

Correction

Il s'agit de minimiser la fonction $f(x, y, z) = x + y + z$ sous la contrainte $g(x, y, z) = xyz - 1728 = 0$.

1. On écrit la fonction de LAGRANGE

$$F(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) - \lambda g(x, y, z) = x + y + z - \lambda(xyz - 1728)$$

et on cherche le(s) point(s) critique(s) de F :

$$\nabla F(x, y, z, \lambda) = \begin{pmatrix} 1 - \lambda yz \\ 1 - \lambda xz \\ 1 - \lambda xy \\ 1728 - xyz \end{pmatrix}.$$

On a $\nabla F(x, y, z, \lambda) = \mathbf{0}$ ssi $(x, y, z, \lambda) = (12, 12, 12, 1/144)$.

Il s'agit bien d'un point critique mais pour établir s'il est un extremum il faut étudier le signe de la différence

$$d(h_1, h_2, h_3) = f(12 + h_1, 12 + h_2, 12 + h_3) - f(12, 12, 12) = h_1 + h_2 + h_3,$$

h_1, h_2 et h_3 étant liés par la relation $0 = g(12 + h_1, 12 + h_2, 12 + h_3) - 1728$, soit encore

$$h_3 = \frac{12(12h_1 + 12h_2 + h_1h_2)}{(12 + h_1)(12 + h_2)}.$$

On a par conséquent

$$\tilde{d}(h_1, h_2) = d(h_1, h_2, h_3(h_1, h_2)) = \frac{12h_1h_2 + 12h_2^2 + h_1h_2^2 + 12h_1^2 + h_1^2h_2}{(12 + h_1)(12 + h_2)}$$

pour tout $h_1, h_2 \approx 0$. Le signe de \tilde{d} est le signe de $N(h_1, h_2) = 12h_1h_2 + 12h_2^2 + h_1h_2^2 + 12h_1^2 + h_1^2h_2$ mais celui ci est difficile à étudier. Cependant, il est simple de vérifier que $\nabla N(0, 0) = (0, 0)$ et que la matrice Hessienne $H_N(h_1, h_2)$ est semi-définie positive, par conséquent N est convexe et donc $N(h_1, h_2) \geq 0$ pour $h_1, h_2 \approx 0$. On trouve alors $\tilde{d}(h_1, h_2) \geq 0$ et on conclut que $(12, 12, 12)$ est un *minimum* de la fonction f sous la contrainte g .

2. On réécrit la contrainte sous la forme $z = \frac{1728}{xy}$ et on l'injecte dans la fonction à minimiser :

$$h(x, y) = f(x, y, z(x, y)) = x + y + z(x, y) = x + y - \frac{1728}{xy}.$$

On cherche d'abord le(s) point(s) critique(s) :

$$\nabla h(x, y) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1728}{x^2y} \\ 1 - \frac{1728}{xy^2} \end{pmatrix}$$

et $\nabla h(x, y) = \mathbf{0}$ ssi $(x, y) = (12, 12)$. On établit la nature du point critique en étudiant le déterminant de la matrice hessienne :

$$\begin{aligned} \partial_{xx}h(x, y) &= \frac{3456}{x^3y}, & \partial_{yy}h(x, y) &= \frac{3456}{xy^3}, & \partial_{xy}h(x, y) &= \frac{1728}{x^2y^2}, \\ \partial_{xx}h(12, 12) &= \frac{1}{6} > 0, & \partial_{yy}h(12, 12) &= \frac{1}{6}, & \partial_{xy}h(12, 12) &= \frac{1}{12} \end{aligned}$$

et $\partial_{xx}h(12, 12)\partial_{yy}h(12, 12) - (\partial_{xy}h(12, 12))^2 = \frac{1}{48} > 0$ donc $(12, 12)$ est un minimum.

Exercice 4.31

Trouver le parallélépipède de volume 1 dont la somme des longueurs des arêtes est minimale.

Correction

1. Avec la méthode des multiplicateurs de LAGRANGE il s'agit de minimiser la fonction $f(x, y, z) = 4x + 4y + 4z$ sous la contrainte $g(x, y, z) = xyz - 1 = 0$. On écrit la fonction de LAGRANGE

$$F(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) - \lambda g(x, y, z) = 4(x + y + z) - \lambda(xyz - 1)$$

et on cherche le(s) point(s) critique(s) de F :

$$\nabla F(x, y, z, \lambda) = \begin{pmatrix} 4 - \lambda yz \\ 4 - \lambda xz \\ 4 - \lambda xy \\ 1 - xyz \end{pmatrix}.$$

On a $\nabla F(x, y, z, \lambda) = \mathbf{0}$ ssi $(x, y, z, \lambda) = (1, 1, 1, 4)$. Pour établir s'il est un extremum et de quelle nature, il faut étudier le signe de la différence

$$d(h_1, h_2, h_3) = f(1 + h_1, 1 + h_2, 1 + h_3) - f(1, 1, 1) = 4(h_1 + h_2 + h_3),$$

h_1, h_2 et h_3 étant liés par la relation $0 = g(1 + h_1, 1 + h_2, 1 + h_3) - 1$, soit encore

$$h_3 = -\frac{h_1 + h_2 + h_1 h_2}{(1 + h_1)(1 + h_2)}.$$

On a par conséquent

$$\tilde{d}(h_1, h_2) = d(h_1, h_2, h_3(h_1, h_2)) = 4 \frac{h_1 h_2 + h_2^2 + h_1 h_2^2 + h_1^2 + h_1^2 h_2}{(1 + h_1)(1 + h_2)}$$

pour tout $h_1, h_2 \approx 0$. Le signe de \tilde{d} est le signe de $N(h_1, h_2) = h_1 h_2 + h_2^2 + h_1 h_2^2 + h_1^2 + h_1^2 h_2$ mais celui ci est difficile à étudier. Cependant, il est simple de vérifier que $\nabla N(0, 0) = (0, 0)$ et que la matrice Hessienne $H_N(h_1, h_2)$ est semi-définie positive, par conséquent N est convexe et donc $N(h_1, h_2) \geq 0$ pour $h_1, h_2 \approx 0$. On trouve alors $\tilde{d}(h_1, h_2) \geq 0$ et on conclut que $(1, 1, 1)$ est un *minimum* de la fonction f sous la contrainte g .

2. Avec la méthode des extrema libres il s'agit d'éliminer une variable de la contrainte, par exemple en posant $z = \frac{1}{xy}$, et de minimiser ensuite la fonction $h(x, y) = f(x, y, z(x, y))$:

$$h(x, y) = f\left(x, y, \frac{1}{xy}\right) = 4\left(x + y + \frac{1}{xy}\right).$$

On cherche d'abord le(s) point(s) critique(s) :

$$\nabla h(x, y) = \begin{pmatrix} 4 - \frac{4}{x^2 y} \\ 4 - \frac{4}{x y^2} \end{pmatrix}$$

et $\nabla h(x, y) = \mathbf{0}$ ssi $(x, y) = (1, 1)$. On établit la nature du point critique en étudiant le déterminant de la matrice hessienne :

$$\begin{aligned} \partial_{xx} h(x, y) &= \frac{8}{x^3 y}, & \partial_{yy} h(x, y) &= \frac{8}{x y^3}, & \partial_{xy} h(x, y) &= \frac{4}{x^2 y^2}, \\ \partial_{xx} h(1, 1) &= 8 > 0, & \partial_{yy} h(1, 1) &= 8, & \partial_{xy} h(1, 1) &= 4 \end{aligned}$$

et $\partial_{xx} h(1, 1) \partial_{yy} h(1, 1) - (\partial_{xy} h(1, 1))^2 = 48 > 0$ donc $(1, 1)$ est un minimum.

Exercice 4.32

Si un courant électrique I traverse un circuit électrique de résistance R , la quantité de chaleur émise en une unité de temps est proportionnelle à $I^2 R$. Calculer la décomposition du courant I en trois courants I_1, I_2, I_3 à l'aide de trois résistances R_1, R_2, R_3 pour que la chaleur émise soit minimale...

- ... avec la méthode des multiplicateurs de LAGRANGE, i.e. en minimisant la fonction $f(I_1, I_2, I_3) = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + I_3^2 R_3$ sous la contrainte $g(I_1, I_2, I_3) = I_1 + I_2 + I_3 - I$, (on se contentera de trouver le point critique sans en étudier la nature)
- ... en réduisant le problème à une minimisation libre par élimination d'une variable dans la contrainte $I = I_1 + I_2 + I_3$.

Correction

- On maximise le lagrangien $L(I_1, I_2, I_3, \lambda) = f(I_1, I_2, I_3) - \lambda g(I_1, I_2, I_3)$.

Points critiques : $\nabla L(I_1, I_2, I_3, \lambda) = \begin{pmatrix} 2I_1 R_1 - \lambda \\ 2I_2 R_2 - \lambda \\ 2I_3 R_3 - \lambda \\ I - I_1 - I_2 - I_3 \end{pmatrix}$ donc $\nabla L(I_1, I_2, I_3, \lambda) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ si et seulement si

$$(I_1, I_2, I_3, \lambda) = \left(\frac{R_2 R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} I, \frac{R_1 R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} I, \frac{R_1 R_2}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} I, \frac{2R_1 R_2 R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} I \right).$$

Conclusion : $(I_1, I_2, I_3) = \left(\frac{R_2 R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} I, \frac{R_1 R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} I, \frac{R_1 R_2}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} I \right)$ est un extremum de f sous la contrainte $g(I_1, I_2, I_3) = 0$.

2. On maximise $\tilde{f}(I_1, I_2) = f(I_1, I_2, I - I_1 - I_2) = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + (I - I_1 - I_2)^2 R_3$.

Points critiques : $\nabla \tilde{f}(I_1, I_2) = \begin{pmatrix} 2I_1 R_1 - 2(I - I_1 - I_2) R_3 \\ 2I_2 R_2 - 2(I - I_1 - I_2) R_3 \end{pmatrix}$ et l'on a $\nabla \tilde{f}(I_1, I_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ si et seulement si

$$(I_1, I_2) = \left(\frac{R_2 R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} I, \frac{R_1 R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} I \right).$$

Classification : $\partial_{I_1 I_1} \tilde{f}(I_1, I_2) = 2(R_1 + R_3) > 0$, $\partial_{I_2 I_2} \tilde{f}(I_1, I_2) = 2(R_2 + R_3)$ et $\partial_{I_1 I_2} \tilde{f}(I_1, I_2) = 2R_3$, donc $\partial_{I_1 I_1} \tilde{f}(I_1, I_2) \cdot \partial_{I_2 I_2} \tilde{f}(I_1, I_2) - (\partial_{I_1 I_2} \tilde{f}(I_1, I_2))^2 = 4(R_1 + R_3)(R_2 + R_3) - 4R_3^2 > 0$ pour tout $(I_1, I_2) \in \mathbb{R}^2$.

Conclusion : $(I_1, I_2) = \left(\frac{R_2 R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} I, \frac{R_1 R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} I \right)$ est un minimum de \tilde{f} donc

$$(I_1, I_2, I_3) = \left(\frac{R_2 R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} I, \frac{R_1 R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} I, \frac{R_1 R_2}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} I \right)$$

est un minimum de f sous la contrainte $g(I_1, I_2, I_3) = 0$.

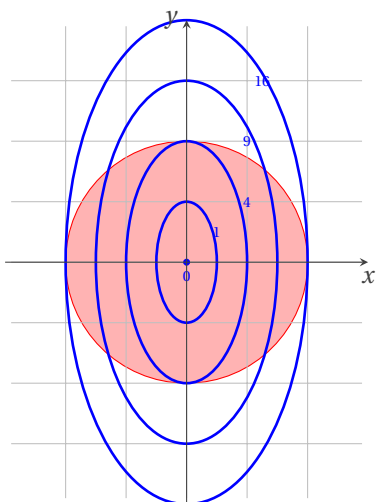
Optimisation dans un fermé : optimisation libre et liée

Exercice 4.33

Déterminer les extrema de la fonction $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = 4x^2 + y^2$ dans le disque $x^2 + y^2 \leq 4$.

Correction

1. Étude graphique :



Dans la figure ci-contre on a tracé les courbes de niveau 0, 1, 4, 9, 16 de f ainsi que le disque. Il semblerait que

- ▷ le point $(0, 0)$ est un minimum global,
- ▷ le point $(2, 0)$ est un maximum global,
- ▷ le point $(-2, 0)$ est un maximum global,
- ▷ le point $(0, 2)$ est un minimum local,
- ▷ le point $(0, -2)$ est un minimum local.

2. Étude de f dans l'ouvert, i.e. l'ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 4\}$:

Recherche des points critiques de f

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 8x \\ 2y \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad \nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 8x = 0 \\ 2y = 0 \end{cases}$$

L'unique point critique de f est le point $(x_0, y_0) = (0, 0)$.

Étude de la nature du point critique par matrice Hessienne

$$\partial_{xx}f(x, y) = 8 \qquad \partial_{yy}f(x, y) = 2 \qquad \partial_{xy}f(x, y) = 0$$

donc

$$H_f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 8 > 0 & 0 \\ 0 & 2 > 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \det(H_f(x_0, y_0)) = 16 > 0.$$

Conclusion : le point $(0, 0)$ est un minimum local de f .

Étude directe de la nature du point critique On n'est pas obligé d'utiliser la matrice Hessienne pour établir la nature du point (x_0, y_0) . En effet, il suffit d'étudier le signe de la fonction distance au voisinage du point critique :

$$d(h, k) \equiv f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = 4(x_0 + h)^2 + (y_0 + k)^2 - 4x_0^2 - y_0^2 = 4h^2 + k^2 \geq 0 \quad \text{pour } (h, k) \simeq (0, 0).$$

Puisque $d(h, k) \geq 0$, on conclut que le point (x_0, y_0) est un minimum local de f .

Conclusion : $(0, 0)$ est un minimum local de f et $f(0, 0) = 0$; comme $f(x, y) > f(0, 0)$ pour tout $(x, y) \neq (0, 0)$, on conclut que $(0, 0)$ est un minimum global de f .

3. Étude de f sur le bord, i.e. dans l'ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 4\}$:

Soit $g(x, y) = x^2 + y^2 - 4$ et $\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y) = 4x^2 + y^2 - \lambda(x^2 + y^2 - 4)$.

Recherche des points critiques de \mathcal{L}

$$\nabla \mathcal{L}(x, y, \lambda) = \begin{pmatrix} 8x - 2\lambda x \\ 2y - 2\lambda y \\ 4 - x^2 - y^2 \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad \nabla \mathcal{L}(x, y, \lambda) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 2x(4 - \lambda) = 0, \\ 2y(1 - \lambda) = 0, \\ x^2 + y^2 = 4. \end{cases}$$

Les points critiques de \mathcal{L} sont les points

$$(x_1, y_1, \lambda_1) = (2, 0, 4), \quad (x_2, y_2, \lambda_2) = (-2, 0, 4), \quad (x_3, y_3, \lambda_3) = (0, 2, 1), \quad (x_4, y_4, \lambda_4) = (0, -2, 1).$$

Étude de la nature des points critiques

On a

$$\partial_{xx}\mathcal{L}(x, y, \lambda) = 8 - 2\lambda \qquad \partial_{yy}\mathcal{L}(x, y, \lambda) = 2 - 2\lambda \qquad \partial_{xy}\mathcal{L}(x, y, \lambda) = 0$$

donc

$$\begin{aligned} \partial_{xx}\mathcal{L}(x_1, y_1, \lambda_1) \times \partial_{yy}\mathcal{L}(x_1, y_1, \lambda_1) - (\partial_{xy}\mathcal{L}(x_1, y_1, \lambda_1))^2 &= 0, \\ \partial_{xx}\mathcal{L}(x_2, y_2, \lambda_2) \times \partial_{yy}\mathcal{L}(x_2, y_2, \lambda_2) - (\partial_{xy}\mathcal{L}(x_2, y_2, \lambda_2))^2 &= 0, \\ \partial_{xx}\mathcal{L}(x_3, y_3, \lambda_3) \times \partial_{yy}\mathcal{L}(x_3, y_3, \lambda_3) - (\partial_{xy}\mathcal{L}(x_3, y_3, \lambda_3))^2 &= 0, \\ \partial_{xx}\mathcal{L}(x_4, y_4, \lambda_4) \times \partial_{yy}\mathcal{L}(x_4, y_4, \lambda_4) - (\partial_{xy}\mathcal{L}(x_4, y_4, \lambda_4))^2 &= 0. \end{aligned}$$

Conclusion : la méthode du lagrangien permet seulement de trouver les candidats extrema de f sous la contrainte g mais ne permet pas de conclure s'ils sont effectivement des extrema.

Étude directe de la nature des points critiques On n'est pas obligé d'utiliser la sous-matrice Hessienne de \mathcal{L} pour établir la nature des points critiques. En effet, il suffit d'étudier le signe de la fonction distance

$$d_i(h, k) \equiv f(x_i + h, y_i + k) - f(x_i, y_i), \quad i = 1, 2, 3, 4$$

pour $(h, k) \simeq (0, 0)$ et $g(x_i + h, y_i + k) = 0$:

$$\begin{aligned} \triangleright d_i(h, k) &= 4(x_i + h)^2 + (y_i + k)^2 - 4x_i^2 - y_i^2 \\ \triangleright g_i(x_i + h, y_i + k) &= (x_i + h)^2 + (y_i + k)^2 - 4 \end{aligned}$$

\triangleright si $\partial_y g(x_i, y_i) \neq 0$ alors l'équation $g(x_i + h, y_i + k) = 0$ définit implicitement k en fonction de h au voisinage de $h = 0$: en résolvant $g(x_i + h, y_i + k) = 0$ on trouve $(y_i + k)^2 = 4 - (x_i + h)^2$; en remplaçant l'expression ainsi trouvée dans $d_i(h, k)$ on trouve la fonction d'une seule variable

$$\tilde{d}_i(h) = 3(x_i + h)^2 + 4 - 4x_i^2 - y_i^2$$

- ▷ si $\partial_x g(x_i, y_i) \neq 0$ alors l'équation $g(x_i + h, y_i + k) = 0$ définit implicitement h en fonction de k au voisinage de $k = 0$: en résolvant $g(x_i + h, y_i + k) = 0$ on trouve $(x_i + h)^2 = 4 - (y_i + k)^2$; en remplaçant l'expression ainsi trouvée dans $d_i(h, k)$ on trouve la fonction d'une seule variable

$$\tilde{d}_i(k) = 16 - 3(y_i + k)^2 - 4x_i^2 - y_i^2$$

Conclusion :

- ▷ $\tilde{d}_1(k) = -3k^2 \leq 0$ donc le point (x_1, y_1) est un minimum local de f sous la contrainte g ,
- ▷ $\tilde{d}_2(k) = -3k^2 \leq 0$ donc le point (x_2, y_2) est un minimum local de f sous la contrainte g ,
- ▷ $\tilde{d}_3(h) = 3h^2 \geq 0$ donc le point (x_3, y_3) est un maximum local de f sous la contrainte g ,
- ▷ $\tilde{d}_4(h) = 3h^2 \geq 0$ donc le point (x_4, y_4) est un maximum local de f sous la contrainte g .

Conclusion : les points $(\pm 2, 0)$ sont des minima locaux de f sous la contrainte g et $f(\pm 2, 0) = 16$; les points $(0, \pm 2)$ sont des maxima locaux (et donc globaux) de f sous la contrainte g et $f(0, \pm 2) = 4$.

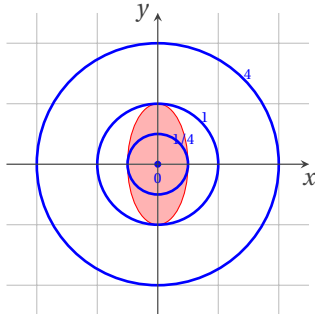
Exercice 4.34

On se propose de déterminer les extrema de la fonction $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^2 + y^2$ dans l'ensemble $\mathcal{E} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x^2 + y^2 \leq 1\}$.

1. Étudier la nature des points critiques de f lorsque $(x, y) \in \mathring{\mathcal{E}} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x^2 + y^2 < 1\}$.
2. Étudier la nature des points critiques du lagrangien, i.e. de f lorsque $(x, y) \in \partial\mathcal{E} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x^2 + y^2 = 1\}$.
3. En déduire les maxima et minima globaux de f dans \mathcal{E} .

Correction

La fonction étant de classe \mathcal{C}^∞ (somme de fonctions \mathcal{C}^∞) sur \mathcal{E} fermé borné, on peut appliquer le théorème de WEIERSTRASS et affirmer que f atteint son minimum global (au moins en un point du compact \mathcal{E}) et son maximum global (au moins en un point du compact \mathcal{E}). Ces points sont à chercher parmi les minima et maxima locaux de f sur \mathcal{E} , c'est-à-dire parmi les minima et maxima locaux de f dans l'ouvert $\mathring{\mathcal{E}}$ (i.e. optimisation libre d'une fonction \mathcal{C}^∞ sur un ouvert) et parmi les minima et maxima locaux de f sur le bord $\partial\mathcal{E}$ (i.e. optimisation liée d'une fonction \mathcal{C}^∞ sous une contrainte \mathcal{C}^∞).



Dans la figure ci-contre on a tracé les courbes de niveau 0, 0.25, 1 et 4 de f ainsi que l'ensemble \mathcal{E} . Il semblerait que

- ▷ le point $(0, 0)$ est un minimum global,
- ▷ le point $(0, 1)$ est un maximum global,
- ▷ le point $(0, -1)$ est un maximum global,
- ▷ le point $(1/2, 0)$ est un minimum local,
- ▷ le point $(-1/2, 0)$ est un minimum local.

1. Considérons l'ensemble $\mathring{\mathcal{E}} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x^2 + y^2 < 1\}$.

Recherche des points critiques de f

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad \nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 2x = 0, \\ 2y = 0. \end{cases}$$

L'unique point critique de f est le point $(x_0, y_0) = (0, 0)$.

Étude de la nature du point critique

Méthode 1 :

$$\partial_{xx}f(x, y) = 2 \qquad \partial_{yy}f(x, y) = 2 \qquad \partial_{xy}f(x, y) = 0$$

donc

$$H_f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \det(H_f(x_0, y_0)) = 4 > 0.$$

Conclusion : $(0, 0)$ est un minimum local de f dans $\mathring{\mathcal{E}}$.

Méthode 2 : On n'est pas obligé d'utiliser la matrice Hessienne pour établir la nature du point (x_0, y_0) . En effet, il suffit d'étudier le signe de la fonction distance au voisinage du point critique :

$$d(h, k) \equiv f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = h^2 + k^2 \quad \text{pour } (h, k) \simeq (0, 0).$$

Puisque $d(h, k) \leq 0$ pour $(h, k) \simeq (0, 0)$, on conclut que le point (x_0, y_0) est un minimum local.

Conclusion $f(x, y) > f(0, 0)$ pour tout $(x, y) \in \mathcal{E} \setminus \{(0, 0)\}$ donc $(0, 0)$ est un minimum global et le maximum global, dont l'existence est assurée par le théorème de WEIERSTRASS, est atteint en un ou plusieurs points du bord du domaine.

2. Considérons l'ensemble $\partial\mathcal{E} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x^2 + y^2 = 1\}$. Pour chercher les candidats extrema de f sur le bord du domaine, on utilise la méthode du lagrangien : soit $g(x, y) = 4x^2 + y^2 - 1$ et $\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y) = x^2 + y^2 - \lambda(4x^2 + y^2 - 1)$.

Recherche des points critiques de \mathcal{L}

$$\nabla\mathcal{L}(x, y, \lambda) = \begin{pmatrix} 2x - 8\lambda x \\ 2y - 2\lambda y \\ 1 - 4x^2 - y^2 \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad \nabla\mathcal{L}(x, y, \lambda) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x(1 - 4\lambda) = 0, \\ y(1 - \lambda) = 0, \\ 4x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

Les points critiques de \mathcal{L} sont les points

$$(x_1, y_1, \lambda_1) = (0, 1, 1), \quad (x_2, y_2, \lambda_2) = (0, -1, 1), \quad (x_3, y_3, \lambda_3) = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4}\right), \quad (x_4, y_4, \lambda_4) = \left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4}\right).$$

Conclusion partielle : étant donné que $f(0, \pm 1) = 1$, $f(\pm 1/2, 0) = 1/4$ et que le maximum global, dont l'existence est assurée par le théorème de WEIERSTRASS, est atteint en un ou plusieurs points du bord du domaine, on peut conclure que les points $(0, 1)$ et $(0, -1)$ sont des maxima globaux. En revanche, il faut encore étudier les points $(0, 1/2)$ et $(0, -1/2)$ qui peuvent être des minima locaux, des maxima locaux ou ne pas être des extrema.

Étude de la nature des points critiques À la lumière de la conclusion précédente, il suffit d'étudier la nature des deux points critiques $(0, 1/2)$ et $(0, -1/2)$. Cependant, dans un souci d'exhaustivité, on effectue l'analyse pour chacun des quatre points critiques du lagrangien. On a

$$\partial_{xx}\mathcal{L}(x, y, \lambda) = 2(1 - 4\lambda) \quad \partial_{yy}\mathcal{L}(x, y, \lambda) = 2(1 - \lambda) \quad \partial_{xy}\mathcal{L}(x, y, \lambda) = 0$$

donc $\partial_{xx}\mathcal{L}(x_i, y_i, \lambda_i) \times \partial_{yy}\mathcal{L}(x_i, y_i, \lambda_i) - (\partial_{xy}\mathcal{L}(x_i, y_i, \lambda_i))^2 = 0$ pour $i = 1, 2, 3, 4$: la méthode du lagrangien permet juste de trouver les candidats extrema de f sous la contrainte g mais ne permet pas de conclure sur leur nature. On étudie alors le comportement de f au voisinage de chaque point critique en restant sur le bord $\partial\mathcal{E}$. Pour cela, on étudie le signe de la fonction distance définie par

$$d_i(h, k) \equiv f(x_i + h, y_i + k) - f(x_i, y_i), \quad i = 1, 2, 3, 4$$

pour $(h, k) \simeq (0, 0)$ et $g_i(x_i + h, y_i + k) = 0$:

$$\begin{aligned} \triangleright d_i(h, k) &= (x_i + h)^2 + (y_i + k)^2 - x_i^2 - y_i^2 \\ \triangleright g_i(x_i + h, y_i + k) &= 4(x_i + h)^2 + (y_i + k)^2 - 1 \end{aligned}$$

Pour étudier le signe de la fonction d_i avec h et k liés par la relation $g_i(x_i + h, y_i + k) = 0$, on essaye d'exprimer h en fonction de k ou réciproquement k en fonction de h à partir de la relation $g_i(x_i + h, y_i + k) = 0$. Cela nécessite l'emploi du théorème des fonctions implicites dont il faudra vérifier les hypothèses avant d'exprimer une variable en fonction de l'autre. Ainsi :

\triangleright si $\partial_y g_i(x_i, y_i) \neq 0$ alors l'équation $g_i(x_i + h, y_i + k) = 0$ définit implicitement k en fonction de h au voisinage de $h = 0$: en résolvant $g_i(x_i + h, y_i + k) = 0$ on trouve $(y_i + k)^2 = 1 - 4(x_i + h)^2$; en remplaçant l'expression ainsi trouvée dans $d_i(h, k)$ on trouve la fonction d'une seule variable

$$\tilde{d}_i(h) = 1 - 3(x_i + h)^2 - x_i^2 - y_i^2;$$

on remarque que si $\partial_y g_i(x_i, y_i) = 0$, on peut toujours résoudre l'équation $g_i(x_i + h, y_i + k) = 0$ et on trouve $(x_i + h)^2 = (1 - (y_i + k)^2)/4$; en remplaçant l'expression ainsi trouvée dans $d_i(h, k)$ on trouve la fonction d'une seule variable $\delta_i(k) \equiv d_i(h(k), k) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}(y_i + k)^2 - x_i^2 - y_i^2$, cependant l'étude du signe de cette fonction n'est d'aucune utilité car on a violé les hypothèses du théorème des fonctions implicites ;

▷ si $\partial_x g_i(x_i, y_i) \neq 0$ alors l'équation $g_i(x_i + h, y_i + k) = 0$ définit implicitement h en fonction de k au voisinage de $k = 0$: en résolvant $g_i(x_i + h, y_i + k) = 0$ on trouve $(x_i + h)^2 = (1 - (y_i + k)^2)/4$; en remplaçant l'expression ainsi trouvée dans $d_i(h, k)$ on trouve la fonction d'une seule variable

$$\tilde{d}_i(k) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}(y_i + k)^2 - x_i^2 - y_i^2;$$

on remarque que si $\partial_x g_i(x_i, y_i) = 0$, on peut toujours résoudre l'équation $g_i(x_i + h, y_i + k) = 0$ et on trouve $(y_i + h)^2 = 1 - 4(x_i + k)^2$; en remplaçant l'expression ainsi trouvée dans $d_i(h, k)$ on trouve la fonction d'une seule variable $\delta_i(h) \equiv d_i(h, k(h)) = 1 - 3(x_i + h)^2 - x_i^2 - y_i^2$, cependant l'étude du signe de cette fonction n'est d'aucune utilité car on a violé les hypothèses du théorème des fonctions implicites.

Conclusion :

- ▷ $\tilde{d}_1(h) = -3h^2 \leq 0$ donc le point (x_1, y_1) est un maximum, (on remarque que $\delta_1(k) = 3k(k + 2)/4$ qui change de signe) ;
- ▷ $\tilde{d}_2(h) = -3h^2 \leq 0$ donc le point (x_2, y_2) est un maximum, (on remarque que $\delta_2(k) = 3k(k - 2)/4$ qui change de signe) ;
- ▷ $\tilde{d}_3(k) = \frac{3}{4}k^2 \geq 0$ donc le point (x_3, y_3) est un minimum, (on remarque que $\delta_3(h) = 3h(h + 1)$ qui change de signe) ;
- ▷ $\tilde{d}_4(k) = \frac{3}{4}k^2 \geq 0$ donc le point (x_4, y_4) est un minimum, (on remarque que $\delta_4(h) = 3h(h - 1)$ qui change de signe).

Conclusion : les points $(0, 1)$ et $(0, -1)$ sont des maxima de f sous la contrainte g et $f(0, \pm 1) = 1$, les points $(1/2, 0)$ et $(-1/2, 0)$ sont des minima de f sous la contrainte g et $f(\pm 1/2, 0) = 1/4$.

3. $(0, 0)$ est le minimum global et les points $(0, 1)$ et $(0, -1)$ sont les maxima globaux, autrement dit

$$f(0, 0) \leq f(x, y) \leq f(0, \pm 1) \quad \forall (x, y) \in \mathcal{E}.$$

Exercice 4.35

Dans le plan, on considère l'ensemble

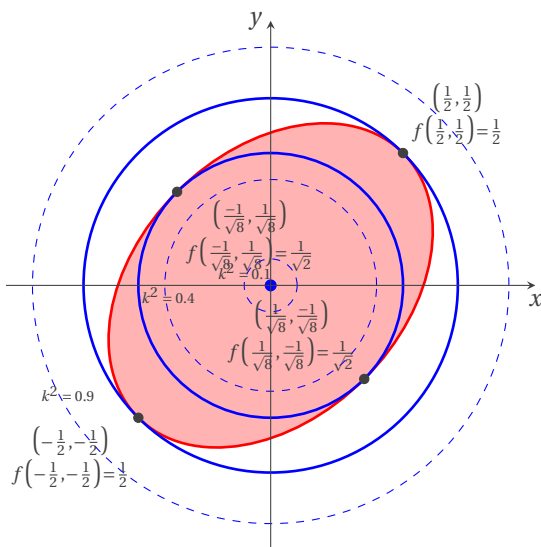
$$\mathcal{E} = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x^2 + 3y^2 - 2xy \leq 1 \}.$$

Parmi les points de cet ensemble, déterminer ceux qui sont les plus éloignés de l'origine (c'est-à-dire les points qui maximisent leur distance au point $(x, y) = (0, 0)$).

Correction

Il s'agit de trouver le maximum de la fonction $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = (x - 0)^2 + (y - 0)^2$ dans le compact \mathcal{E} . Comme \mathcal{E} est un fermé borné, le théorème de WEIERSTRASS garantit que f atteint son maximum et son minimum dans \mathcal{E} .

1. Étude graphique :



Dans la figure ci-contre on a colorié l'ensemble \mathcal{E} qui est une ellipse de centre $(0, 0)$ et d'équation

$$\left(\frac{X}{1/\sqrt{2}} \right)^2 + \left(\frac{Y}{1/2} \right)^2 = 1$$

avec

$$\begin{cases} x = X \cos(\pi/4) - Y \sin(\pi/4), \\ y = X \sin(\pi/4) + Y \cos(\pi/4). \end{cases}$$

Parmi les courbes de niveau k de f (qui sont des cercles de centre $(0, 0)$ et rayon \sqrt{k}) on cherche celles qui sont tangentes à l'ensemble \mathcal{E} ; il s'agit des courbes de niveau $1/2$ et $1/\sqrt{2}$.

On peut alors voir que

- ▷ le point $(0, 0)$ est un minimum global,
- ▷ le point $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ est un maximum global,
- ▷ le point $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ est un maximum global,
- ▷ le point $(\frac{1}{\sqrt{8}}, \frac{-1}{\sqrt{8}})$ est un minimum local,
- ▷ le point $(\frac{-1}{\sqrt{8}}, \frac{1}{\sqrt{8}})$ est un minimum local.

2. Considérons l'ensemble $\mathcal{E} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x^2 + 3y^2 - 2xy < 1\}$.

Recherche des points critiques de f

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad \nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 2x = 0, \\ 2y = 0. \end{cases}$$

L'unique point critique de f est le point $(x_0, y_0) = (0, 0)$ qui appartient bien à \mathcal{E} . Comme $f(x, y) > f(0, 0)$ pour tout $(x, y) \neq (0, 0)$, ce point est un minimum global de f .

Conclusion : le maximum de f appartient au bord de l'ensemble \mathcal{E} .

3. Considérons l'ensemble $\partial\mathcal{E} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x^2 + 3y^2 - 2xy = 1\}$. Soit $g(x, y) = 3x^2 + 3y^2 - 2xy - 1$ et $\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y) = x^2 + y^2 - \lambda(3x^2 + 3y^2 - 2xy - 1)$.

Recherche des points critiques de \mathcal{L}

$$\nabla \mathcal{L}(x, y, \lambda) = \begin{pmatrix} 2x - \lambda(6x - 2y) \\ 2y - \lambda(6y - 2x) \\ 1 - 3x^2 - 3y^2 + 2xy \end{pmatrix}$$

donc

$$\nabla \mathcal{L}(x, y, \lambda) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x(1 - 3\lambda) = -\lambda y, \\ y(1 - 3\lambda) = -\lambda x, \\ 3x^2 + 3y^2 - 2xy = 1, \end{cases} \iff \begin{cases} (x - y)(1 - 4\lambda) = 0, \\ (x + y)(1 - 2\lambda) = 0, \\ 3x^2 + 3y^2 - 2xy = 1. \end{cases}$$

Les points critiques de \mathcal{L} sont les points

$$(x_1, y_1, \lambda_1) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad (x_2, y_2, \lambda_2) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad (x_3, y_3, \lambda_3) = \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}, -\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{4}\right), \quad (x_4, y_4, \lambda_4) = \left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{4}\right).$$

Étude de la nature des points critiques On a

$$\partial_{xx}\mathcal{L}(x, y, \lambda) = 2 - 6\lambda \quad \partial_{yy}\mathcal{L}(x, y, \lambda) = 2 - 6\lambda \quad \partial_{xy}\mathcal{L}(x, y, \lambda) = 2\lambda$$

donc $\partial_{xx}\mathcal{L}(x_i, y_i, \lambda_i) \times \partial_{yy}\mathcal{L}(x_i, y_i, \lambda_i) - (\partial_{xy}\mathcal{L}(x_i, y_i, \lambda_i))^2 = 32(\lambda_i - 1/2)(\lambda_i - 1/4) = 0$ pour $i = 1, 2, 3, 4$.
Conclusion : la méthode du lagrangien permet juste de trouver les candidats extrema de f sous la contrainte g mais ne permet pas de conclure.

On étudie alors le signe de la fonction distance

$$d_i(h, k) \equiv f(x_i + h, y_i + k) - f(x_i, y_i) = (x_i + h)^2 + (y_i + k)^2 - x_i^2 - y_i^2, \quad i = 1, 2, 3, 4$$

pour $(h, k) \simeq (0, 0)$ et $g(x_i + h, y_i + k) = 0$, i.e. $3(x_i + h)^2 + 3(y_i + k)^2 - 2(x_i + h)(y_i + k) = 1$. Si $\partial_y g(x_i, y_i) \neq 0$ alors l'équation $g(x_i + h, y_i + k) = 0$ définit implicitement k en fonction de h au voisinage de $h = 0$:

$$\partial_y g(x_i, y_i) = 2(3y_i - x_i) \neq 0, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

En résolvant $g(x_i + h, y_i + k) = 0$ on trouve

$$k = -y_i + \begin{cases} \frac{(x_i + h) + \sqrt{3 - 8(x_i + h)^2}}{3} & \text{si } i = 1, 4, \\ \frac{(x_i + h) - \sqrt{3 - 8(x_i + h)^2}}{3} & \text{si } i = 2, 3. \end{cases}$$

En remplaçant l'expression ainsi trouvée dans $d_i(h, k)$ on trouve la fonction d'une seule variable

$$\tilde{d}_i(h) = \begin{cases} (x_i + h)^2 + \left(\frac{(x_i + h) + \sqrt{3 - 8(x_i + h)^2}}{3} \right)^2 & \text{si } i = 1, 4; \\ (x_i + h)^2 + \left(\frac{(x_i + h) - \sqrt{3 - 8(x_i + h)^2}}{3} \right)^2 & \text{si } i = 2, 3. \end{cases}$$

En étudiant les quatre fonctions \tilde{d}_i lorsque $h \approx 0$ on a :

- ▷ $\tilde{d}_1(h) \leq 0$ si $h \approx 0$ donc le point (x_1, y_1) est un maximum,
- ▷ $\tilde{d}_2(h) \leq 0$ donc le point (x_2, y_2) est un maximum,
- ▷ $\tilde{d}_3(h) \geq 0$ donc le point (x_3, y_3) est un minimum,
- ▷ $\tilde{d}_4(h) \geq 0$ donc le point (x_4, y_4) est un minimum.

Conclusion : les points $(1/2, 1/2)$ et $(-1/2, -1/2)$ sont des maxima de f sous la contrainte g et f vaut $1/2$, les points $(-1/\sqrt{8}, 1/\sqrt{8})$ et $(1/\sqrt{8}, -1/\sqrt{8})$ sont des minima de f sous la contrainte g et f vaut $1/\sqrt{2}$.

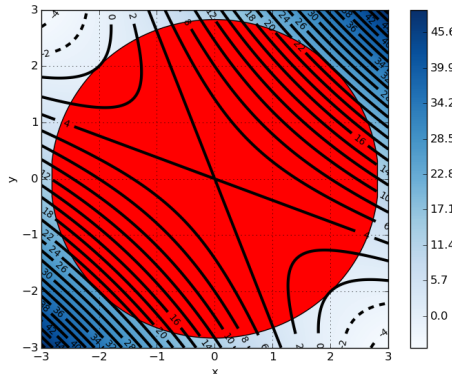
4. $(0, 0)$ est le minimum global et les points $(1/2, 1/2)$ et $(-1/2, -1/2)$ sont les maxima globaux, autrement dit

$$f(0, 0) \leq f(x, y) \leq f(1/2, 1/2) = f(-1/2, -1/2) \quad \forall (x, y) \in \mathcal{E}.$$

Exercice 4.36 (Optimisation dans un fermé : optimisation libre et liée)

On se propose de déterminer les extrema de la fonction $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = 4 + x^2 + y^2 + 3xy$ dans le disque $x^2 + y^2 \leq 8$.

1. Étude graphique : dans la figure ci-dessous on a tracé des courbes de niveau de f ainsi que le disque. En déduire l'emplacement et la nature des 5 points critiques.



2. Étude dans l'ouvert $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 8\}$: montrer qu'il existe un seul point critique et en étudier la nature.
3. Étude du bord du disque $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 8\}$: en utilisant la méthode des multiplicateurs de Lagrange, montrer qu'il existe quatre points critiques sous contrainte et étudier la nature d'un des quatre.

Correction

1. Étude graphique :

Étude dans l'ouvert.

- ▷ Le point $(0, 0)$ est un point selle et $f(0, 0) = 4$.

Étude sur le bord. On étudie les points du bord où la courbe définie par l'équation $g(x, y) = 0$ est tangente à une courbe de niveau, *i.e.* une courbe d'équation $f(x, y) = \kappa$:

- ▷ le point $(2, -2)$ est un minimum global et $f(2, -2) = 0$,
- ▷ le point $(-2, 2)$ est un minimum global et $f(-2, 2) = 0$,
- ▷ le point $(2, 2)$ est un maximum global et $f(2, 2) = 24$,
- ▷ le point $(-2, -2)$ est un maximum global et $f(-2, -2) = 24$.

2. Étude de f dans l'ouvert, *i.e.* l'ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 8\}$:

Recherche des points critiques de f

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x+3y \\ 2y+3x \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad \nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x = -3y/2 \\ x = -2y/3 \end{cases}$$

L'unique point critique de f est le point $(x_0, y_0) = (0, 0)$.

Étude de la nature du point critique en utilisant la matrice Hessienne de f

$$\partial_{xx}f(x, y) = 2 \qquad \partial_{yy}f(x, y) = 2 \qquad \partial_{xy}f(x, y) = 3$$

et $\det(H_f(x_0, y_0)) = 4 - 9 < 0$.

Conclusion : le point $(0, 0)$ est un point selle de f .

Étude directe de la nature du point critique On n'est pas obligé d'utiliser la matrice Hessienne pour établir la nature du point (x_0, y_0) . En effet, il suffit d'étudier le signe de la fonction distance au voisinage du point critique :

$$\begin{aligned} d(h, k) &\equiv f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = 4 + (x_0 + h)^2 + (y_0 + k)^2 + 3(x_0 + h)(y_0 + k) - 4 - x_0^2 - y_0^2 - 3x_0y_0 \\ &= h^2 + k^2 + 3hk = (h + k)^2 + hk \quad \text{pour } (h, k) \simeq (0, 0). \end{aligned}$$

Puisque $d(h, h) = 5h^2 \geq 0$ et $d(h, -h) = -h^2 \leq 0$, on conclut que le point (x_0, y_0) est un point selle de f .

Conclusion : $(0, 0)$ est un point selle de f et $f(0, 0) = 4$.

3. Étude de f sur le bord, i.e. dans l'ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 8\}$:

Soit $g(x, y) = x^2 + y^2 - 8$ et $\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y) = 4 + x^2 + y^2 + 3xy - \lambda(x^2 + y^2 - 8)$.

Recherche des points critiques de \mathcal{L}

$$\nabla \mathcal{L}(x, y, \lambda) = \begin{pmatrix} 2x+3y-2\lambda x \\ 2y+3x-2\lambda y \\ 8-x^2-y^2 \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad \nabla \mathcal{L}(x, y, \lambda) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 2x(1-\lambda) + 3y = 0, \\ 2y(1-\lambda) + 3x = 0, \\ x^2 + y^2 = 8. \end{cases}$$

Les points critiques de \mathcal{L} sont les points

$$(x_1, y_1, \lambda_1) = (2, -2, -1/2), \quad (x_2, y_2, \lambda_2) = (-2, 2, -1/2), \quad (x_3, y_3, \lambda_3) = (2, 2, 1/2), \quad (x_4, y_4, \lambda_4) = (-2, -2, 1/2).$$

Étude de la nature des points critiques en utilisant une sous-matrice de la matrice Hessienne de \mathcal{L} On a

$$\partial_{xx}\mathcal{L}(x, y, \lambda) = 2 - 2\lambda \qquad \partial_{yy}\mathcal{L}(x, y, \lambda) = 2 - 2\lambda \qquad \partial_{xy}\mathcal{L}(x, y, \lambda) = 3$$

donc

$$\begin{aligned} &\partial_{xx}\mathcal{L}(x_1, y_1, \lambda_1) \times \partial_{yy}\mathcal{L}(x_1, y_1, \lambda_1) - (\partial_{xy}\mathcal{L}(x_1, y_1, \lambda_1))^2 = 0, \\ &\partial_{xx}\mathcal{L}(x_2, y_2, \lambda_2) \times \partial_{yy}\mathcal{L}(x_2, y_2, \lambda_2) - (\partial_{xy}\mathcal{L}(x_2, y_2, \lambda_2))^2 = 0, \\ &\partial_{xx}\mathcal{L}(x_3, y_3, \lambda_3) \times \partial_{yy}\mathcal{L}(x_3, y_3, \lambda_3) - (\partial_{xy}\mathcal{L}(x_3, y_3, \lambda_3))^2 < 0, \\ &\partial_{xx}\mathcal{L}(x_4, y_4, \lambda_4) \times \partial_{yy}\mathcal{L}(x_4, y_4, \lambda_4) - (\partial_{xy}\mathcal{L}(x_4, y_4, \lambda_4))^2 < 0. \end{aligned}$$

Conclusion : dans ce cas la méthode du lagrangien permet seulement de trouver les candidats extrema de f sous la contrainte g mais ne permet pas de conclure s'ils sont effectivement des extrema.

Étude directe de la nature des points critiques On n'est pas obligé d'utiliser la sous-matrice Hessienne de \mathcal{L} pour établir la nature des points critiques. En effet, il suffit d'étudier le signe de la fonction distance

$$d_i(h, k) \equiv f(x_i + h, y_i + k) - f(x_i, y_i), \quad i = 1, 2, 3, 4$$

pour $(h, k) \simeq (0, 0)$ et $g(x_i + h, y_i + k) = 0$:

- ▷ $d_i(h, k) = (x_i + h)^2 + (y_i + k)^2 + 3(x_i + h)(y_i + k) - x_i^2 - y_i^2 - 3x_iy_i$
- ▷ $g_i(x_i + h, y_i + k) = (x_i + h)^2 + (y_i + k)^2 - 8$

- ▷ puisque $\partial_y g(x_i, y_i) \neq 0$, le théorème des fonctions implicites garantit que l'équation $g(x_i + h, y_i + k) = 0$ définit implicitement k en fonction de h au voisinage de $h = 0$: en résolvant $g(x_i + h, y_i + k) = 0$ on trouve $(y_i + k)^2 = 8 - (x_i + h)^2$; en remplaçant l'expression ainsi trouvée dans $d_i(h, k)$ on trouve la fonction d'une seule variable

$$\tilde{d}_i(h) = \begin{cases} (x_i + h)^2 + (8 - (x_i + h)^2) + 3(x_i + h)\sqrt{8 - (x_i + h)^2} - x_i^2 - y_i^2 - 3x_i y_i & \text{si } y_i + k \geq 0, \\ (x_i + h)^2 + (8 - (x_i + h)^2) - 3(x_i + h)\sqrt{8 - (x_i + h)^2} - x_i^2 - y_i^2 - 3x_i y_i & \text{si } y_i + k \leq 0, \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 8 + 3(x_i + h)\sqrt{8 - (x_i + h)^2} - x_i^2 - y_i^2 - 3x_i y_i & \text{si } y_i = 2 \text{ i.e. si } i = 1 \text{ ou } 4, \\ 8 - 3(x_i + h)\sqrt{8 - (x_i + h)^2} - x_i^2 - y_i^2 - 3x_i y_i & \text{si } y_i = -2 \text{ i.e. si } i = 2 \text{ ou } 3. \end{cases}$$

Conclusion :

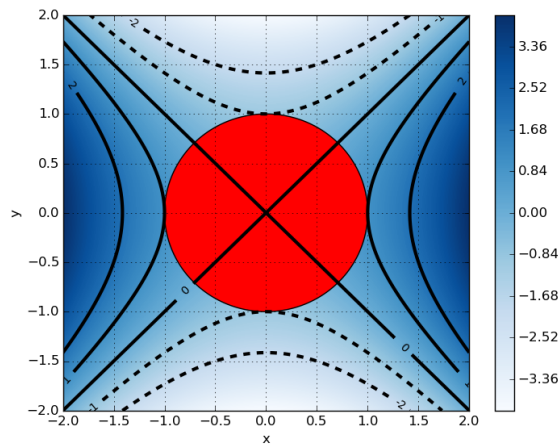
- ▷ $\tilde{d}_1(h) = -3(2 + h)\sqrt{8 - (2 + h)^2} + 12 = 12 - 3(2 + h)\sqrt{4 - 4h - h^2} \geq 0$ si $h \approx 0$ donc le point (x_1, y_1) est un minimum local de f sous la contrainte g ,
- ▷ $\tilde{d}_2(h) = 3(-2 + h)\sqrt{8 - (-2 + h)^2} + 12 = 12 + 3(-2 + h)\sqrt{4 + 4h - h^2} \geq 0$ si $h \approx 0$ donc le point (x_2, y_2) est un minimum local de f sous la contrainte g ,
- ▷ $\tilde{d}_3(h) = 3(2 + h)\sqrt{8 - (2 + h)^2} - 12 = -12 + 3(2 + h)\sqrt{4 - 4h - h^2} \leq 0$ si $h \approx 0$ donc le point (x_3, y_3) est un maximum local de f sous la contrainte g ,
- ▷ $\tilde{d}_4(h) = -3(-2 + h)\sqrt{8 - (-2 + h)^2} - 12 = -12 - 3(-2 + h)\sqrt{4 + 4h - h^2} \leq 0$ si $h \approx 0$ donc le point (x_4, y_4) est un maximum local de f sous la contrainte g .

Conclusion : les points $(2, -2)$ et $(-2, 2)$ sont des minima locaux de f sous la contrainte g et $f(2, -2) = f(-2, 2) = 0$; les points $(2, 2)$ et $(-2, -2)$ sont des maxima locaux de f sous la contrainte g et $f(2, 2) = f(-2, -2) = 24$.

🔪 Exercice 4.37 (Optimisation dans un fermé : optimisation libre et liée)

On se propose de déterminer les extrema de la fonction $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^2 - y^2$ dans le disque $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.

1. Étude **graphique** : dans la figure ci-dessous on a tracé les courbes de niveau $-2; -1; 0; 1; 2$ de f ainsi que le disque. En déduire l'emplacement et la nature des 5 points critiques.



2. Étude dans l'**ouvert** $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$: montrer qu'il existe un seul point critique et en étudier la nature.
3. Étude du **bord** du disque $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$:
 - 3.1. en utilisant la méthode des **multiplicateurs de Lagrange**, montrer qu'il existe quatre points critiques sous contrainte et étudier la nature d'un des quatre ;
 - 3.2. en posant $x = \cos(\vartheta)$ et $y = \sin(\vartheta)$, écrire $\tilde{f}(\vartheta) = f(\cos(\vartheta), \sin(\vartheta))$ et utiliser la méthode de **réduction** pour montrer qu'il existe quatre points critiques sous contrainte et en étudier la nature.

Correction

1. Étude graphique :

Étude dans l'ouvert.

▷ Le point $(0, 0)$ est un point selle et $f(0, 0) = 0$.

Étude sur le bord. On étudie les points du bord où la courbe définie par l'équation $x^2 + y^2 = 1$ est tangente à une courbe de niveau, *i.e.* une courbe d'équation $f(x, y) = \kappa$:

- ▷ le point $(0, -1)$ est un minimum global et $f(0, -1) = -1$,
- ▷ le point $(0, 1)$ est un minimum global et $f(0, 1) = -1$,
- ▷ le point $(-1, 0)$ est un maximum global et $f(-1, 0) = 1$,
- ▷ le point $(1, 0)$ est un maximum global et $f(1, 0) = 1$.

2. Étude de f dans l'ouvert, *i.e.* l'ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$:

Recherche des points critiques de f

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x \\ -2y \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad \nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

L'unique point critique de f est le point $(x_0, y_0) = (0, 0)$.

Étude de la nature du point critique en utilisant la matrice Hessienne de f

$$\partial_{xx}f(x, y) = 2 \qquad \partial_{yy}f(x, y) = -2 \qquad \partial_{xy}f(x, y) = 0$$

et $\det(H_f(x_0, y_0)) = -4 < 0$.

Conclusion : le point $(0, 0)$ est un point selle de f .

Étude directe de la nature du point critique On n'est pas obligé d'utiliser la matrice Hessienne pour établir la nature du point (x_0, y_0) . En effet, il suffit d'étudier le signe de la fonction distance au voisinage du point critique :

$$\begin{aligned} d(h, k) &\equiv f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = (x_0 + h)^2 - (y_0 + k)^2 - x_0^2 + y_0^2 \\ &= h^2 - k^2 \quad \text{pour } (h, k) \simeq (0, 0). \end{aligned}$$

Puisque $d(h, 0) = h^2 \geq 0$ et $d(0, k) = -k^2 \leq 0$, on conclut que le point (x_0, y_0) est un point selle de f .

Conclusion : $(0, 0)$ est un point selle de f et $f(0, 0) = 0$.

3. Étude de f sur le bord, *i.e.* dans l'ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$:

3.1 Méthode de Lagrange. Soit $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ et $\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y) = x^2 - y^2 - \lambda(x^2 + y^2 - 1)$.

Recherche des points critiques de \mathcal{L}

$$\begin{aligned} \nabla \mathcal{L}(x, y, \lambda) &= \begin{pmatrix} 2x - 2\lambda x \\ -2y - 2\lambda y \\ 1 - x^2 - y^2 \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad \nabla \mathcal{L}(x, y, \lambda) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \iff \begin{cases} 2x(1 - \lambda) = 0, \\ 2y(-1 - \lambda) = 0, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases} & \iff \begin{cases} x = 0 \\ 2y(-1 - \lambda) = 0, \\ x^2 + y^2 = 1, \end{cases} & \iff \begin{cases} x = 0 \\ 2y(-1 - \lambda) = 0, \\ y = \pm 1, \end{cases} & \iff (x, y, \lambda) = (0, \pm 1, 1) \\ & \iff \begin{cases} \lambda = 1 \\ 2y(-1 - \lambda) = 0, \\ x^2 + y^2 = 1, \end{cases} & \iff \begin{cases} \lambda = 1 \\ y = 0, \\ x^2 + y^2 = 1, \end{cases} & \iff (x, y, \lambda) = (\pm 1, 0, 1) \end{aligned}$$

Les points critiques de \mathcal{L} sont les points

$$(x_1, y_1, \lambda_1) = (0, -1, 1), \quad (x_2, y_2, \lambda_2) = (0, 1, 1), \quad (x_3, y_3, \lambda_3) = (-1, 0, 1), \quad (x_4, y_4, \lambda_4) = (1, 0, 1).$$

Étude de la nature des points critiques en utilisant une sous-matrice de la matrice Hessienne de \mathcal{L}

On a

$$\partial_{xx}\mathcal{L}(x, y, \lambda) = 2 - 2\lambda \qquad \partial_{yy}\mathcal{L}(x, y, \lambda) = -2 - 2\lambda \qquad \partial_{xy}\mathcal{L}(x, y, \lambda) = 0$$

donc

$$\partial_{xx}\mathcal{L}(x_1, y_1, \lambda_1) \times \partial_{yy}\mathcal{L}(x_1, y_1, \lambda_1) - (\partial_{xy}\mathcal{L}(x_1, y_1, \lambda_1))^2 = -4(1 - \lambda_1^2) = 0,$$

$$\begin{aligned} \partial_{xx}\mathcal{L}(x_2, y_2, \lambda_2) \times \partial_{yy}\mathcal{L}(x_2, y_2, \lambda_2) - (\partial_{xy}\mathcal{L}(x_2, y_2, \lambda_2))^2 &= -4(1 - \lambda_2^2) = 0, \\ \partial_{xx}\mathcal{L}(x_3, y_3, \lambda_3) \times \partial_{yy}\mathcal{L}(x_3, y_3, \lambda_3) - (\partial_{xy}\mathcal{L}(x_3, y_3, \lambda_3))^2 &= -4(1 - \lambda_3^2) = 0, \\ \partial_{xx}\mathcal{L}(x_4, y_4, \lambda_4) \times \partial_{yy}\mathcal{L}(x_4, y_4, \lambda_4) - (\partial_{xy}\mathcal{L}(x_4, y_4, \lambda_4))^2 &= -4(1 - \lambda_4^2) = 0. \end{aligned}$$

Conclusion : dans ce cas la méthode du lagrangien permet seulement de trouver les candidats extrema de f sous la contrainte g mais ne permet pas de conclure s'ils sont effectivement des extrema.

Étude directe de la nature des points critiques On n'est pas obligé d'utiliser la sous-matrice Hessienne de \mathcal{L} pour établir la nature des points critiques. En effet, il suffit d'étudier le signe de la fonction distance

$$d_i(h, k) \equiv f(x_i + h, y_i + k) - f(x_i, y_i), \quad i = 1, 2, 3, 4$$

pour $(h, k) \simeq (0, 0)$ et $g(x_i + h, y_i + k) = 0$:

- ▷ $d_i(h, k) = (x_i + h)^2 - (y_i + k)^2 - x_i^2 + y_i^2$
- ▷ $g_i(x_i + h, y_i + k) = (x_i + h)^2 + (y_i + k)^2 - 1$
- ▷ si $\partial_y g(x_i, y_i) \neq 0$, i.e. si $i = 1$ ou 2 , le théorème des fonctions implicites garantit que l'équation $g(x_i + h, y_i + k) = 0$ définit implicitement k en fonction de h au voisinage de $h = 0$: en résolvant $g(x_i + h, y_i + k) = 0$ on trouve $(y_i + k)^2 = 1 - (x_i + h)^2$; en remplaçant l'expression ainsi trouvée dans $d_i(h, k)$ on trouve la fonction d'une seule variable

$$\tilde{d}_i(h) = (x_i + h)^2 - (1 - (x_i + h)^2) - x_i^2 + y_i^2 = h^2 - (1 - h^2) = 2h^2 - 1 \leq 0 \text{ lorsque } h \simeq 0$$

- ▷ si $\partial_x g(x_i, y_i) \neq 0$, i.e. si $i = 3$ ou 4 , le théorème des fonctions implicites garantit que l'équation $g(x_i + h, y_i + k) = 0$ définit implicitement h en fonction de k au voisinage de $k = 0$: en résolvant $g(x_i + h, y_i + k) = 0$ on trouve $(x_i + h)^2 = 1 - (y_i + k)^2$; en remplaçant l'expression ainsi trouvée dans $d_i(h, k)$ on trouve la fonction d'une seule variable

$$\tilde{d}_i(k) = (1 - (y_i + k)^2) - (y_i + k)^2 - x_i^2 + y_i^2 = (1 - k^2) - k^2 = 1 - 2k^2 \geq 0 \text{ lorsque } k \simeq 0$$

Conclusion :

- ▷ le point (x_1, y_1) est un minimum local de f sous la contrainte g ,
- ▷ le point (x_2, y_2) est un minimum local de f sous la contrainte g ,
- ▷ le point (x_3, y_3) est un maximum local de f sous la contrainte g ,
- ▷ le point (x_4, y_4) est un maximum local de f sous la contrainte g .

Conclusion : les points $(0, -1)$ et $(0, 1)$ sont des minima locaux de f sous la contrainte g et $f(0, -1) = f(0, 1) = -1$; les points $(-1, 0)$ et $(1, 0)$ sont des maxima locaux de f sous la contrainte g et $f(-1, 0) = f(1, 0) = 1$.

3.2 Méthode de réduction.

Le bord du disque de rayon 1 centré en $(0, 0)$ peut être paramétré comme suit :

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\} = \left\{ \vartheta \in [0; 2\pi[\mid \begin{cases} x = \cos(\vartheta), \\ y = \sin(\vartheta), \end{cases} \right\}$$

Notons \tilde{f} la restriction de f au bord du disque :

$$\tilde{f}(\vartheta) = f(\cos(\vartheta), \sin(\vartheta)) = \cos^2(\vartheta) - \sin^2(\vartheta) = \cos(2\vartheta).$$

On peut alors étudier les variations de cette fonction. On obtient qu'elle a un maximum égale à 1 lorsque 2ϑ est égal à 0 (modulo 2π), un minimum égale à -1 lorsque 2ϑ vaut π (modulo 2π). La fonction f atteint donc son maximum 1 aux points $(1, 0)$ et $(-1, 0)$, et son minimum -1 aux points $(0, 1)$ et $(0, -1)$.

Exercice 4.38

Soit $\mathcal{E} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 16x^4 + y^4 \leq 1\}$. On se propose de déterminer les extrema de la fonction

$$\begin{aligned} f: \mathcal{E} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto x^4 + 16y^4 \end{aligned}$$

1. Étudier la nature des points critiques de f lorsque $(x, y) \in \mathring{\mathcal{E}} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 16x^4 + y^4 < 1\}$.

2. Étudier la nature des points critiques du lagrangien, *i.e.* de f lorsque $(x, y) \in \partial\mathcal{E} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 16x^4 + y^4 = 1\}$.
3. En déduire les maxima et minima globaux de f dans \mathcal{E} .

Correction

La fonction étant de classe \mathcal{C}^∞ (somme de fonctions \mathcal{C}^∞) sur \mathcal{E} fermé borné, on peut appliquer le théorème de WEIERSTRASS et affirmer que f atteint son minimum global (au moins en un point du compact \mathcal{E}) et son maximum global (au moins en un point du compact \mathcal{E}). Ces points sont à chercher parmi les minima et maxima locaux de f sur \mathcal{E} , c'est-à-dire parmi les minima et maxima locaux de f dans l'ouvert $\mathring{\mathcal{E}}$ (*i.e.* optimisation libre d'une fonction \mathcal{C}^∞ sur un ouvert) et parmi les minima et maxima locaux de f sur le bord $\partial\mathcal{E}$ (*i.e.* optimisation liée d'une fonction \mathcal{C}^∞ sous une contrainte \mathcal{C}^∞).

1. Considérons l'ensemble $\mathring{\mathcal{E}} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 16x^4 + y^4 < 1\}$.

Recherche des points critiques de f

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 4x^3 \\ 64y^3 \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad \nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x^3 = 0, \\ y^3 = 0. \end{cases}$$

L'unique point critique de f est le point $(x_0, y_0) = (0, 0)$.

Étude de la nature du point critique

$$\partial_{xx}f(x, y) = 12x^2 \qquad \partial_{yy}f(x, y) = 192y^2 \qquad \partial_{xy}f(x, y) = 0$$

donc

$$H_f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \det(H_f(x_0, y_0)) = 0.$$

Comme l'étude de la matrice Hessienne ne permet pas d'établir la nature du point (x_0, y_0) , on étudie directement le signe de la fonction distance au voisinage du point critique :

$$d(h, k) \equiv f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = h^4 + 16k^4 \quad \text{pour } (h, k) \simeq (0, 0).$$

Puisque $d(h, k) \geq 0$ pour $(h, k) \simeq (0, 0)$, on conclut que le point (x_0, y_0) est un minimum local.

Conclusion sur l'ouvert : $f(x, y) > f(0, 0)$ pour tout $(x, y) \in \mathcal{E} \setminus \{(0, 0)\}$ donc $(0, 0)$ est un minimum global.

2. Considérons l'ensemble $\partial\mathcal{E} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 16x^4 + y^4 = 1\}$. Pour chercher les candidats extrema de f sur le bord du domaine, on utilise la méthode du lagrangien : soit $g(x, y) = 16x^4 + y^4 - 1$ et $\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y) = x^4 + 16y^4 - \lambda(16x^4 + y^4 - 1)$.

Recherche des points critiques de \mathcal{L}

$$\nabla \mathcal{L}(x, y, \lambda) = \begin{pmatrix} 4x^3 - 64\lambda x^3 \\ 192y^3 - 4\lambda y^3 \\ 1 - 16x^4 - y^4 \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad \nabla \mathcal{L}(x, y, \lambda) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 4x^3(1 - 16\lambda) = 0, \\ 4y^3(16 - \lambda) = 0, \\ 16x^4 + y^4 = 1. \end{cases}$$

Les points critiques de \mathcal{L} sont les points

$$(x_1, y_1, \lambda_1) = (0, 1, 16), \quad (x_2, y_2, \lambda_2) = (0, -1, 16), \quad (x_3, y_3, \lambda_3) = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{16}\right), \quad (x_4, y_4, \lambda_4) = \left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{16}\right).$$

Conclusion partielle : étant donné que $f(0, \pm 1) = 16$, $f(\pm 1/2, 0) = 1/16$ et que le maximum global, dont l'existence est assurée par le théorème de WEIERSTRASS, est atteint en un ou plusieurs points du bord du domaine, on peut conclure que les points $(0, 1)$ et $(0, -1)$ sont des maxima globaux. En revanche, il faut encore étudier les points $(0, 1/2)$ et $(0, -1/2)$ qui peuvent être des minima locaux, des maxima locaux ou ne pas être des extrema.

Étude de la nature des points critiques À la lumière de la conclusion partielle précédente, il suffit d'étudier la nature des deux points critiques $(0, 1/2)$ et $(0, -1/2)$. Cependant, dans un souci d'exhaustivité, on effectue l'analyse pour chacun des quatre points critiques du lagrangien. On a

$$\partial_{xx}\mathcal{L}(x, y, \lambda) = 12x^2(1 - 16\lambda) \qquad \partial_{yy}\mathcal{L}(x, y, \lambda) = 12y^2(16 - \lambda) \qquad \partial_{xy}\mathcal{L}(x, y, \lambda) = 0$$

donc $\partial_{xx}\mathcal{L}(x_i, y_i, \lambda_i) \times \partial_{yy}\mathcal{L}(x_i, y_i, \lambda_i) - (\partial_{xy}\mathcal{L}(x_i, y_i, \lambda_i))^2 = 0$ pour $i = 1, 2, 3, 4$: la méthode du lagrangien permet juste de trouver les candidats extrema de f sous la contrainte g mais ne permet pas de conclure. On

étudie alors le comportement de f au voisinage de chaque point critique en restant sur le bord $\partial\mathcal{E}$. Pour cela, on étudie le signe de la fonction distance définie par

$$d_i(h, k) \equiv f(x_i + h, y_i + k) - f(x_i, y_i), \quad i = 1, 2, 3, 4$$

pour $(h, k) \simeq (0, 0)$ et $g(x_i + h, y_i + k) = 0$:

- ▷ $d_i(h, k) = (x_i + h)^4 + 16(y_i + k)^4 - x_i^2 - 16y_i^2$
- ▷ $g_i(x_i + h, y_i + k) = 16(x_i + h)^4 + (y_i + k)^4 - 1$

Pour étudier le signe de la fonction d_i avec h et k liés par la relation $g_i(x_i + h, y_i + k) = 0$, on essaye d'exprimer h en fonction de k ou réciproquement k en fonction de h à partir de la relation $g_i(x_i + h, y_i + k) = 0$. Cela nécessite l'emploi du théorème des fonctions implicites dont il faudra vérifier les hypothèses avant d'exprimer une variable en fonction de l'autre. Ainsi :

- ▷ si $\partial_y g_i(x_i, y_i) \neq 0$ alors l'équation $g_i(x_i + h, y_i + k) = 0$ définit implicitement k en fonction de h au voisinage de $h = 0$: en résolvant $g_i(x_i + h, y_i + k) = 0$ on trouve $(y_i + k)^4 = 1 - 16(x_i + h)^4$; en remplaçant l'expression ainsi trouvée dans $d_i(h, k)$ on trouve la fonction d'une seule variable

$$\tilde{d}_i(h) = 16 - 15(x_i + h)^4 - x_i^4 - 16y_i^4;$$

on remarque que si $\partial_y g_i(x_i, y_i) = 0$, on peut toujours résoudre l'équation $g_i(x_i + h, y_i + k) = 0$ et on trouve $(x_i + h)^2 = (1 - (y_i + k)^2)/4$; en remplaçant l'expression ainsi trouvée dans $d_i(h, k)$ on trouve la fonction d'une seule variable $\delta_i(k) \equiv d_i(h(k), k) = \frac{1}{16} + \frac{255}{16}(y_i + k)^4 - x_i^4 - 16y_i^4$, cependant l'étude du signe de cette fonction n'est d'aucune utilité car on a violé les hypothèses du théorème des fonctions implicites ;

- ▷ si $\partial_x g_i(x_i, y_i) \neq 0$ alors l'équation $g_i(x_i + h, y_i + k) = 0$ définit implicitement h en fonction de k au voisinage de $k = 0$: en résolvant $g_i(x_i + h, y_i + k) = 0$ on trouve $(x_i + h)^4 = (1 - (y_i + k)^4)/16$; en remplaçant l'expression ainsi trouvée dans $d_i(h, k)$ on trouve la fonction d'une seule variable

$$\tilde{d}_i(k) = \frac{1}{16} + \frac{255}{16}(y_i + k)^4 - x_i^4 - 16y_i^4;$$

on remarque que si $\partial_x g_i(x_i, y_i) = 0$, on peut toujours résoudre l'équation $g_i(x_i + h, y_i + k) = 0$ et on trouve $(y_i + h)^4 = 1 - 16(x_i + k)^4$; en remplaçant l'expression ainsi trouvée dans $d_i(h, k)$ on trouve la fonction d'une seule variable $\delta_i(h) \equiv d_i(h, k(h)) = 16 - 15(x_i + h)^4 - x_i^4 - 16y_i^4$, cependant l'étude du signe de cette fonction n'est d'aucune utilité car on a violé les hypothèses du théorème des fonctions implicites.

Conclusion partielle :

- ▷ $\tilde{d}_1(h) = -15h^4 \leq 0$ donc le point (x_1, y_1) est un maximum,
- ▷ $\tilde{d}_2(h) = -15h^4 \leq 0$ donc le point (x_2, y_2) est un maximum,
- ▷ $\tilde{d}_3(k) = \frac{255}{16}k^4 \geq 0$ donc le point (x_3, y_3) est un minimum,
- ▷ $\tilde{d}_4(k) = \frac{255}{16}k^4 \geq 0$ donc le point (x_4, y_4) est un minimum.

Conclusion sur le bord : les points $(0, 1)$ et $(0, -1)$ sont des maxima de f sous la contrainte g et $f(0, \pm 1) = 16$, les points $(1/2, 0)$ et $(-1/2, 0)$ sont des minima de f sous la contrainte g et $f(\pm 1/2, 0) = 1/16$.

3. $(0, 0)$ est le minimum global et les points $(0, 1)$ et $(0, -1)$ sont les maxima globaux, autrement dit

$$0 = f(0, 0) \leq f(x, y) \leq f(0, \pm 1) = 16 \quad \forall (x, y) \in \mathcal{E}.$$

Exercice 4.39

Quel point du cercle d'équation $x^2 + y^2 \leq 1$ minimise la distance à la droite d'équation $y = 4 - \sqrt{3}x$?

Correction

En se rappelant la formule pour la distance d'un point (x, y) d'une droite d'équation $ax + by + c = 0$, il s'agit de minimiser la fonction

$$f(x, y) = \frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|\sqrt{3}x + y - 4|}{2}$$

dans $\mathcal{D} = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$. Comme $\sqrt{3}x + y - 4 < 0$ pour tout point de \mathcal{D} , il s'agit alors de minimiser la fonction

$$d(x, y) = \frac{4 - \sqrt{3}x - y}{2}.$$

Les extrema se trouvent soit dans $\overset{\circ}{\mathcal{D}}$ soit sur $\partial\mathcal{D}$. Comme $\nabla d(x, y) = (-\sqrt{3}, -1) \neq (0, 0)$, il n'y a pas d'extrema dans $\overset{\circ}{\mathcal{D}}$. Il faut alors les chercher sur $\partial\mathcal{D}$. Pour cela on exprime $\partial\mathcal{D}$ sous forme paramétrique $x = \cos(\vartheta)$ et $y = \sin(\vartheta)$ pour $\vartheta \in [0; 2\pi]$. La restriction de d à cette courbe donne la fonction d'une seule variable

$$h(\vartheta) = d(x(\vartheta), y(\vartheta)) = \frac{4 - \sqrt{3} \cos(\vartheta) - \sin(\vartheta)}{2}.$$

Comme $h'(\vartheta) = \sin(\vartheta - \frac{\pi}{6})$ on a que $h'(\vartheta) = 0$ ssi $\vartheta = \frac{\pi}{6}$ ou $\vartheta = \frac{7\pi}{6}$. Il faut comparer la valeur de h en ces points avec la valeur en 0 et en 2π :

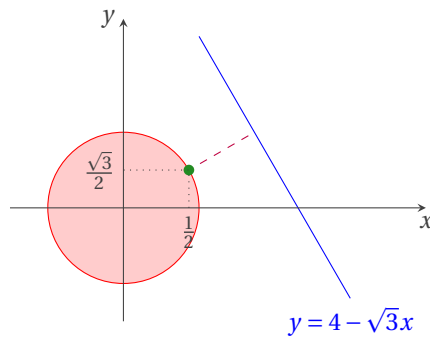
$$h(0) = h(2\pi) = \frac{4 - \sqrt{3}}{2}, \quad h\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1, \quad h\left(\frac{7\pi}{6}\right) = 3.$$

On conclut que le point qui minimise la distance correspond à $\vartheta = \frac{\pi}{6}$, c'est-à-dire le point $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$.

Remarquons que, une fois établi que les extrema se trouvent sur la courbe d'équation $x^2 + y^2 = 1$, cela revient à calculer le minimum de d sous la contrainte $g(x, y) = 0$ avec $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. On peut alors utiliser la méthode des multiplicateurs de LAGRANGE : on introduit le lagrangien $L(x, y, \ell) = \frac{4 - \sqrt{3}x - y}{2} - \ell(x^2 + y^2 - 1)$, on calcul son gradient

$$\nabla L = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} - 2\ell x \\ -\frac{1}{2} - 2\ell y \\ 1 - x^2 - y^2 \end{pmatrix},$$

comme $\nabla L(x, y, \ell) = (0, 0, 0)$ ssi $(x, y) = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ ou $(x, y) = (-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$, et comme $d(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}) < d(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$, on conclut que $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ est le minimum.



Exercice 4.40

On cherche les extrema de la fonction $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ dans le disque $x^2 + y^2 \leq 1$.

Étude dans l'ouvert $x^2 + y^2 < 1$: déterminer le point critique de f dans $x^2 + y^2 < 1$ et en établir la nature.

Étude sur le bord $x^2 + y^2 = 1$: déterminer les points critiques du lagrangien $\mathcal{L}(x, y, \lambda) \equiv f(x, y) - \lambda(x^2 + y^2 - 1)$ et en établir la nature.

Quels sont les minimum et maximum absolus de f dans le disque $x^2 + y^2 \leq 1$?

Correction

Le disque $x^2 + y^2 \leq 1$ est un ensemble fermé borné et la fonction f est continue, pour le théorème de WEIERSTRASS il existe un maximum et un minimum absolus de f dans le disque.

1. Étude de $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ dans le disque $x^2 + y^2 < 1$:

Points critiques $\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 4y \end{pmatrix}$ et

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 2x = 0, \\ 4y = 0, \end{cases} \iff (x, y) = (0, 0)$$

Nature des points critiques $D(x, y) = \partial_{xx}f(x, y)\partial_{yy}f(x, y) - (\partial_{xy}f(x, y))^2 = 2 \times 4 - 0^2 = 8$. Comme $D(0, 0) > 0$, le point $(0, 0)$ est un minimum local.

2. Étude sur le bord $x^2 + y^2 = 1$:

Points critiques $\nabla \mathcal{L}(x, y, \lambda) = \begin{pmatrix} 2x - 2\lambda x \\ 4y - 2\lambda y \\ 1 - x^2 - y^2 \end{pmatrix}$ et

$$\nabla \mathcal{L}(x, y, \lambda) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 2x - 2\lambda x = 0, \\ 4y - 2\lambda y = 0, \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \iff (x, y, \lambda) \in \{(0, 1, 2), (0, -1, 2), (1, 0, 1), (-1, 0, 1)\}$$

Nature des points critiques $D(x, y, \lambda) = \partial_{xx}\mathcal{L}(x, y, \lambda)\partial_{yy}\mathcal{L}(x, y, \lambda) - (\partial_{xy}\mathcal{L}(x, y, \lambda))^2 = 2(1 - \lambda) \times 2(2 - \lambda) - 0^2 = 4(1 - \lambda)(2 - \lambda)$. Comme $D(0, 1, 2) = D(0, -1, 2), D(1, 0, 1) = D(-1, 0, 1) = 0$, on ne peut pas établir la nature de ces points critiques en utilisant le lagrangien. Étudions alors directement le comportement de la fonction au voisinage de ces points en regardant le signe de la fonction

$$d(h, k) = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = (x_0 + h)^2 + 2(y_0 + k)^2 - x_0^2 - 2y_0^2,$$

h et k étant liés par $(x_0 + h)^2 + (y_0 + k)^2 = 1$.

Si $(x_0, y_0) = (0, \pm 1)$ alors $\partial_y g(x_0, y_0) \neq 0$. Dans ce cas l'équation $g(x_0 + h, y_0 + k) = 0$ définit implicitement k en fonction de h au voisinage de $h = 0$: en résolvant $g(x_0 + h, y_0 + k) = 0$ on trouve $(y_0 + k)^2 = 1 - (x_0 + h)^2$; en remplaçant l'expression ainsi trouvée dans $d(h, k)$ on trouve la fonction d'une seule variable

$$\tilde{d}(h) = -h^2 \leq 0,$$

donc les points $(0, \pm 1)$ sont des maxima locaux.

Si $(x_0, y_0) = (\pm 1, 0)$ alors $\partial_x g(x_0, y_0) = 0$ mais $\partial_y g(x_0, y_0) \neq 0$. Dans ce cas l'équation $g(x_0 + h, y_0 + k) = 0$ définit implicitement h en fonction de k au voisinage de $k = 0$: en résolvant $g(x_0 + h, y_0 + k) = 0$ on trouve $(x_0 + h)^2 = 1 - (y_0 + k)^2$; en remplaçant l'expression ainsi trouvée dans $d(h, k)$ on trouve la fonction d'une seule variable

$$\tilde{d}(k) = k^2 \geq 0,$$

donc les points $(\pm 1, 0)$ sont des minima locaux.

Étant donné que $f(0, 0) = 0, f(1, 0) = f(-1, 0) = 1$ et $f(0, 1) = f(0, -1) = 2$, on conclut que $(0, 0)$ est le minimum absolu et $(0, \pm 1)$ sont les maxima absolus de f dans le disque $x^2 + y^2 \leq 1$.

Exercice 4.41

Étudier et classer les points stationnaires des fonctions suivantes

- $f(x, y) = xy\sqrt{1 - x^2 - y^2}$ dans son domaine de définition,
- $f(x, y) = x^2 + y^2 - x - y$ dans l'ensemble $\mathcal{D} = \{(x, y) \mid |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$.

Correction

- $f(x, y) = xy\sqrt{1 - x^2 - y^2}$ est définie sur le disque $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ à valeur dans \mathbb{R} ; les extrema peuvent être soit dans $\mathring{\mathcal{D}}$ soit sur le bord $\partial\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$.

Cherchons d'abord les points critiques dans $\mathring{\mathcal{D}}$:

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{y(1-2x^2-y^2)}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \\ \frac{x(1-x^2-2y^2)}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \end{pmatrix}$$

et $\nabla f(x, y) = (0, 0)$ ssi

$$(x, y) \in \left\{ (0, 0), (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}), (1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}), (-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}), (-1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}) \right\}.$$

Étudions maintenant séparément chacun de ces points en calculant au préalable le déterminant de la matrice hessienne de la fonction f en un point quelconque :

$$\begin{aligned} \partial_{xx}f(x, y) &= \frac{-xy(3 - 2x^2 - 3y^2)}{\sqrt{(1 - x^2 - y^2)^3}}, \\ \partial_{xy}f(x, y) &= \frac{1 - 3x^2 + 3x^2y^2 - 3y^2 + 2x^4 + 2y^4}{\sqrt{(1 - x^2 - y^2)^3}}, \end{aligned}$$

$$\partial_{yy}f(x, y) = \frac{-xy(3 - 3x^2 - 2y^2)}{\sqrt{(1 - x^2 - y^2)^3}},$$

$$D(x, y) = \partial_{xx}f(x, y)\partial_{yy}f(x, y) - (\partial_{xy}f(x, y))^2.$$

On a alors

(x_0, y_0)	$\partial_{xx}f(x_0, y_0)$	$\partial_{xy}f(x_0, y_0)$	$\partial_{yy}f(x_0, y_0)$	$D(x_0, y_0)$	
$(0, 0)$	0	1	0	-1	SELLE
$(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$	$-\frac{4}{\sqrt{3}}$	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$	$-\frac{4}{\sqrt{3}}$	4	MAX
$(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$	$\frac{4}{\sqrt{3}}$	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\frac{4}{\sqrt{3}}$	4	MIN
$(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$	$\frac{4}{\sqrt{3}}$	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\frac{4}{\sqrt{3}}$	4	MIN
$(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$	$-\frac{4}{\sqrt{3}}$	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$	$-\frac{4}{\sqrt{3}}$	4	MAX

La fonction n'est pas dérivable sur $\partial\mathcal{D}$ mais on peut étudier la nature de ces points en observant que f est nulle sur les axes, positive dans le premier et le troisième quadrant, négative dans le deuxième et quatrième quadrant donc $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$ et $(0, -1)$ sont des points de SELLE, les points $(x, \sqrt{1 - x^2})$ avec $x > 0$ et les points $(x, -\sqrt{1 - x^2})$ avec $x < 0$ sont des MIN, les points $(x, \sqrt{1 - x^2})$ avec $x < 0$ et les points $(x, -\sqrt{1 - x^2})$ avec $x > 0$ sont des MAX.

2. L'ensemble \mathcal{D} un fermé borné et la fonction f est continue, pour le théorème de WEIERSTRASS il existe un maximum et un minimum de f dans \mathcal{D} . On suit la «recette» pour le calcul de ces valeurs :

- ▷ on cherche dans $\mathring{\mathcal{D}}$: les points critiques de f doivent annuler le gradient de f ; on a $\nabla f(x, y) = (2x - 1, 2y - 1) = (0, 0)$ ssi $(x, y) = (1/2, 1/2)$ et $f(1/2, 1/2) = -1/2$;
- ▷ on cherche sur $\partial\mathcal{D}$: on doit considérer quatre segments
 - ▷ $S_1 = \{(x, y) \mid x = 1, |y| \leq 1\}$: $h_1(y) = f|_{S_1} = y^2 - y$ pour $y \in [-1; 1]$, $h'_1(y) = 2y - 1 = 0$ ssi $y = 1/2$ et $h_1(1/2) = -1/4$; de plus, $h_1(-1) = 2$ et $h_1(1) = 0$; donc le MAX de h_1 vaut 2 et le MIN vaut $-1/4$;
 - ▷ $S_2 = \{(x, y) \mid x = -1, |y| \leq 1\}$: $h_2(y) = f|_{S_2} = 2 + y^2 - y$ pour $y \in [-1; 1]$, $h'_2(y) = 2y - 1 = 0$ ssi $y = 1/2$ et $h_2(1/2) = 7/4$; de plus, $h_2(-1) = 4$ et $h_2(1) = 2$; donc le MAX de h_2 vaut 4 et le MIN vaut $7/4$;
 - ▷ $S_3 = \{(x, y) \mid y = 1, |x| \leq 1\}$: $h_3(x) = f|_{S_3} = x^2 - x$ pour $x \in [-1; 1]$, $h'_3(x) = 2x - 1 = 0$ ssi $x = 1/2$ et $h_3(1/2) = -1/4$; de plus, $h_3(-1) = 2$ et $h_3(1) = 0$; donc le MAX de h_3 vaut 2 et le MIN vaut $-1/4$;
 - ▷ $S_4 = \{(x, y) \mid y = -1, |x| \leq 1\}$: $h_4(x) = f|_{S_4} = 2 + x^2 - x$ pour $x \in [-1; 1]$, $h'_4(x) = 2x - 1 = 0$ ssi $x = 1/2$ et $h_4(1/2) = 7/4$; de plus, $h_4(-1) = 4$ et $h_4(1) = 2$; donc le MAX de h_4 vaut 4 et le MIN vaut $7/4$.

En résumé, les candidats sont :

(x_0, y_0)	$(1/2, 1/2)$	$(1, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, 1/2)$	$(1/2, 1)$	$(-1, 1/2)$	$(1/2, -1)$	$(-1, -1)$
$f(x_0, y_0)$	$-1/2$	2	2	$-1/4$	$-1/4$	$7/4$	$7/4$	4

On conclut que le MAX absolu est 4 obtenu en $(-1, -1)$ et le MIN absolu est $-1/2$ obtenu en $(1/2, 1/2)$.

Problèmes d'optimisation sur un fermé : optimisation libre et liée

Exercice 4.42

Une société d'expédition doit construire un entrepôt de la forme d'un parallélépipède et de capacité 4000 m^3 . Cette construction ne nécessite pas de fondations ni de sol, son coût est de 20 € le mètre carré pour le toit et de 160 € le mètre carré pour les parois. Quelles dimensions de l'entrepôt minimisent le coût de construction ?

Correction

Notons $x > 0$, $y > 0$ et $z > 0$ les dimensions de l'entrepôt (la largeur, la longueur et la hauteur respectivement). Il s'agit de minimiser la fonction $f(x, y, z) = 160(2xz + 2yz) + 20xy$ sous la contrainte $g(x, y, z) = xyz - 4000$ avec $x, y, z > 0$ (la face manquante du parallélépipède est le planché qui a pour cotés x et y). Pour trouver les dimensions optimales on peut utiliser l'une des deux méthodes suivantes.

Méthode de Lagrange. Introduisons le lagrangien :

$$L: (\mathbb{R}_+^*)^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y, z, \lambda) \mapsto f(x, y, z) - \lambda g(x, y, z)$$

Il s'agit de chercher les solutions (x, y, z, λ) de $\nabla L(x, y, z, \lambda) = (0, 0, 0, 0)^T$:

$$\begin{cases} 20y + 320z - \lambda yz = 0, & (4.7a) \\ 20x + 320z - \lambda xz = 0, & (4.7b) \\ 320x + 320y - \lambda xy = 0, & (4.7c) \\ xyz = 4000. & (4.7d) \end{cases}$$

Avec les trois soustractions (4.7b)-(4.7a), (4.7c)-16×(4.7a) et (4.7c)-16×(4.7b) on obtient $x = y = 16z$, on insère ce résultat dans (4.7d) et on trouve que le seul point critique est $(40, 40, 5/2, 16)$.

Il reste à étudier sa nature. Pour cela, étudions le signe de la différence

$$d(u, v, w) \equiv f\left(40 + u, 40 + v, \frac{5}{2} + w\right) - f\left(40, 40, \frac{5}{2}\right) = 1600u + 1600v + 25600w + 320uw + 320vw + 20uv,$$

u, v et w étant liés par la relation $(40 + u)(40 + v)\left(\frac{5}{2} + w\right) = 4000$, soit encore

$$w(u, v) = -\frac{5}{2} \frac{40u + 40v + uv}{(40 + u)(40 + v)}.$$

On a alors

$$\tilde{d}(u, v) \equiv d(u, v, w(u, v)) = \frac{20}{(40 + u)(40 + v)} h(u, v)$$

avec

$$h(u, v) \equiv 1600u^2 + 1600v^2 + 1600uv + 80uv^2 + 80u^2v + u^2v^2.$$

On s'intéresse au signe de \tilde{d} lorsque $(u, v) \simeq (0, 0)$, i.e. au signe de h lorsque $(u, v) \simeq (0, 0)$. On vérifie facilement que $(0, 0)$ est un minimum local de h car

$$\nabla h(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad H_h(0, 0) = \begin{pmatrix} 3200 & 1600 \\ 1600 & 3200 \end{pmatrix}, \quad \det(H_h(0, 0)) > 0.$$

Comme $(0, 0)$ est un minimum local de h , alors $h(0, 0) \leq h(u, v)$ pour tout $(u, v) \simeq (0, 0)$. Comme $h(0, 0) = 0$, cela signifie que $h(u, v) \geq 0$ pour tout $(u, v) \simeq (0, 0)$ et donc $\tilde{d}(u, v) \geq \tilde{d}(0, 0)$ pour tout $(u, v) \simeq (0, 0)$: le point $(40, 40, 5/2)$ est alors un minimum local de f sous la contrainte $xyz = 4000$.

Méthode de réduction. La contrainte se réécrit $z = \frac{4000}{xy}$ donc il s'agit de chercher les extrema libres de la fonction de deux variables $h: (\mathbb{R}_+^*)^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$ définie par

$$h(x, y) = f\left(x, y, \frac{4000}{xy}\right) = 20\left(xy + \frac{64000}{y} + \frac{64000}{x}\right).$$

Cherchons d'abord les points critiques de h :

$$\nabla h(x, y) = \begin{pmatrix} 20\left(y - \frac{64000}{x^2}\right) \\ 20\left(x - \frac{64000}{y^2}\right) \end{pmatrix}$$

et $\nabla h(x, y) = (0, 0)^T$ ssi $(x, y) = (40, 40)$. Étudions maintenant ce point en calculant le déterminant de la matrice hessienne de la fonction h :

$$\begin{aligned} h_{xx}(x, y) &= \frac{2560000}{x^3} & h_{xx}(40, 40) &= 40 > 0, \\ h_{xy}(x, y) &= 20 & h_{xy}(40, 40) &= 20, \\ h_{yy}(x, y) &= \frac{2560000}{y^3} & h_{yy}(40, 40) &= 40, \\ D(40, 40) &\equiv \partial_{xx}h(40, 40)\partial_{yy}h(40, 40) - (\partial_{xy}h(40, 40))^2 = 1200 > 0. \end{aligned}$$

On a donc que $(40, 40)$ est bien un minimum et $z(40, 40) = 5/2$.

Exercice 4.43

Un glacier produit deux types de glace, la glace A et la glace B . Si en une semaine il produit x kilogrammes de glace de

type A et y kilogrammes de glace de type B , le coût total est

$$c(x, y) = 600 + 200x + 200y - 2x^2y.$$

Peut-il minimiser le coût hebdomadaire en produisant les deux types de glace en une quantité inférieure ou égale à 300 kilogrammes? Pour répondre à cette question on analyse d'abord le cas d'une utilisation à pleine capacité du laboratoire et on étudie ensuite si cette stratégie est la meilleure possible.

1. En supposant qu'il désire utiliser à pleine capacité son laboratoire, trouver la répartition de la production permettant de minimiser le coût. Prouver qu'il s'agit bien d'un minimum absolu.
2. Le glacier s'interroge sur la pertinence de vouloir utiliser à pleine capacité son laboratoire. Il se demande si la solution qu'il obtiendrait sans cette contrainte serait plus intéressante. Aidez-le à répondre à cette question en trouvant s'il existe une solution qui minimise le coût sans cette contrainte. La solution obtenue est-elle réalisable?
3. En exploitant les résultats obtenus aux points précédents, suggériez-vous au glacier de diminuer la production totale hebdomadaire ou d'utiliser à pleine capacité son laboratoire?

Correction

Il s'agit de minimiser la fonction

$$c: \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}_+$$

$$(x, y) \mapsto 600 + 200x + 200y - 2x^2y$$

où

$$\mathcal{E} = \{(x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2 \mid x + y \leq 300\}.$$

Recherche sur le bord.

- ▷ Si on ne produit que de la glace de type A , *i.e.* $y = 0$, alors le coût total est $a(x) \equiv c(x, 0) = 600 + 200x$ qui est minimal pour $x = 0$ avec $c(0, 0) = 600$ et maximale pour $x = 300$ avec $c(300, 0) = 1200$.
- ▷ Si on ne produit que de la glace de type B , *i.e.* $x = 0$, alors le coût total est $b(y) \equiv c(0, y) = 600 + 200y$ qui est minimal pour $y = 0$ avec $c(0, 0) = 600$ et maximale pour $y = 300$ avec $c(0, 300) = 1200$.
- ▷ Il s'agit maintenant de résoudre le problème

$$\text{minimiser } c(x, y) \text{ sous la contrainte } x + y = 300.$$

Pour cela, on peut utiliser l'une des deux méthodes suivantes :

Méthode 1 On maximise $\tilde{c}(x) = c(x, 300 - x) = 600 + 200x + 200(300 - x) - 2x^2(300 - x) = 60600 - 600x^2 + 2x^3$.

Points critiques $\tilde{c}'(x) = -1200x + 6x^2 = 6x(x - 200)$, $\tilde{c}'(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$ ou $x = 200$.

Classification $\tilde{c}''(x) = -1200 + 12x$, $\tilde{c}''(0) = -1200 < 0$ et $\tilde{c}''(200) = 1200 > 0$.

Conclusion $x = 0$ est un maximum de \tilde{c} ; $x = 200$ est un minimum de \tilde{c} et $y(x) = 300 - x = 100$. Pour minimiser le coût le glacier doit produire 200 kilogrammes de glace de type A et 100 kilogrammes de glace de type B pour un coût hebdomadaire de -7939400 €.

Méthode 2 On maximise le lagrangien $L(x, y, \lambda) = c(x, y) - \lambda(x + y - 300) = 600 + 200x + 200y - 2x^2y - \lambda(x + y - 300)$.

Points critiques $\nabla L(x, y, \lambda) = \begin{pmatrix} 200 - 4xy - \lambda \\ 200 - 2x^2 - \lambda \\ 300 - x - y \end{pmatrix}$, $\nabla L(x, y, \lambda) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ si et seulement si $(x, y, \lambda) = (200, 100, -79800)$.

Classification Soit $D(x, y, \lambda) \equiv \partial_{xx}L(x, y, \lambda)\partial_{yy}L(x, y, \lambda) - (\partial_{xy}L(x, y, \lambda))^2 = -16x^2$. On a $D(200, 100, -79800) < 0$: on ne peut pas conclure directement.

Étudions alors le signe de la différence

$$d(h, k) \equiv c(200 + h, 100 + k) - c(200, 100) = 8000000 + 200(h + k) - 2(200 + h)^2(100 + k)^2$$

h et k étant liés par la relation $(200 + h) + (100 + k) = 300$, soit encore $k = -h$. On a alors $\tilde{d}(h) = d(h, -h) = 2h^2(300 + h) \geq 0$ lorsque $h \approx 0$: le point $(200, 100)$ est alors un minimum local de c sous la contrainte $x + y = 300$.

Conclusion $(x, y) = (200, 100)$ est un minimum de c sous la contrainte $x + y = 300$ avec $c(200, 100) = -7939400$ €

Recherche dans l'ouvert. On minimise d'abord $c(x, y)$ sans contraintes et on vérifie à posteriori si la solution obtenue appartient à l'ensemble \mathcal{E} .

Points critiques $\nabla c(x, y) = \begin{pmatrix} 200 - 4xy \\ 200 - 2x^2 \end{pmatrix}$, $\nabla c(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ si et seulement si $(x, y) = (10, 5)$.

Classification $D(x, y) = \partial_{xx}c(x, y)\partial_{yy}c(x, y) - (\partial_{xy}c(x, y))^2 = (-4y) \times (0) - (-4x)^2 = -16x^2$ donc $D(10, 5) < 0$.

Conclusion $(x, y) = (10, 5)$ est un point-selle de c . La solution obtenue, bien que réalisable car $10 + 5 < 300$ (i.e. $(10, 5) \in \mathcal{E}$), ne minimise pas le coût.

Conclusion Pour une rente optimale on conseil au glacier d'utiliser à pleine capacité son laboratoire en produisant 200 kilogrammes de glace de type A et 100 kilogrammes de glace de type B.

Exercice 4.44

Une entreprise fabrique deux modèles de vélos de montagne : le modèle X est plus abordable et se vend 500 € l'unité, tandis que le modèle Y se vend 1000 € l'unité. Les coûts totaux de fabrication (en €) sont exprimés par la fonction $c(x, y) = 5x^2 + 5y^2 - \frac{5}{2}xy + 10000$ où x est le nombre de vélos du modèle X et y est le nombre de vélos du modèle Y , produits mensuellement. On suppose que chaque vélo produit peut être vendu sur le marché.

1. Écrire $(x, y) \mapsto p$ la fonction des profits totaux mensuels.
2. La capacité de production de l'entreprise est de 150 vélos par mois. En supposant que l'entreprise désire utiliser à pleine capacité son usine, trouver la répartition de la production mensuelle permettant de maximiser les profits (on utilisera la méthode que l'on préfère). Prouvez qu'il s'agit bien d'un maximum absolu et donnez la valeur du profit mensuel.
3. Le patron de l'entreprise s'interroge sur la pertinence de vouloir produire à pleine capacité. Il se demande si la solution qu'il obtiendrait sans cette contrainte serait plus intéressante. Aidez-le à répondre à cette question en trouvant la solution qui maximise les profits sans cette contrainte. Prouvez qu'il s'agit bien d'un maximum absolu et donnez la valeur du profit mensuel. La solution obtenue est-elle réalisable pour l'entreprise ?

Correction

1. La fonction des profits totaux mensuels est $p(x, y) = 500x + 1000y - c(x, y) = 500x + 1000y - 5x^2 - 5y^2 + \frac{5}{2}xy - 10000$.
2. On veut produire 150 vélos par mois ce qui donne la contrainte $x + y = 150$. Il s'agit alors de résoudre le problème

maximiser $p(x, y)$ sous la contrainte $x + y = 150$.

Pour cela, on peut utiliser l'une de deux méthodes suivantes :

Méthode 1 On maximise $\tilde{p}(x) = p(x, 150 - x) = -5x^2 - 5(150 - x)^2 + 500x + 1000(150 - x) + \frac{5}{2}x(150 - x) - 10000 = -\frac{25}{2}x^2 + 1375x + 47500$.

Points critiques $\tilde{p}'(x) = -25x + 1375$, $\tilde{p}'(x) = 0$ si et seulement si $x = 55$.

Classification $\tilde{p}''(x) = -25$, $\tilde{p}''(55) < 0$.

Conclusion $x = 55$ est un maximum de \tilde{p} donc $(x, y) = (55, 95)$ est un maximum de p sous la contrainte $x + y = 155$ avec $p(55, 95) = 65312,50$ €

Méthode 2 On maximise le lagrangien $L(x, y, \lambda) = p(x, y) - \lambda(x + y - 150) = 500x + 1000y - c(x, y) = 500x + 1000y - 5x^2 - 5y^2 + \frac{5}{2}xy - 10000 - \lambda(x + y - 150)$.

Points critiques $\nabla L(x, y, \lambda) = \begin{pmatrix} 500 - 10x + \frac{5}{2}y - \lambda \\ 1000 - 10y + \frac{5}{2}x - \lambda \\ 150 - x - y \end{pmatrix}$, $\nabla L(x, y, \lambda) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ si et seulement si $(x, y, \lambda) = (55, 95, \frac{375}{2})$.

Classification Soit $D(x, y, \lambda) \equiv \partial_{xx}L(x, y, \lambda)\partial_{yy}L(x, y, \lambda) - (\partial_{xy}L(x, y, \lambda))^2 = (-10) \times (-10) - (5/2)^2$. On a $D(55, 95, \frac{375}{2}) > 0$, $\partial_{xx}L(55, 95, \frac{375}{2}) < 0$ et $\partial_{yy}L(55, 95, \frac{375}{2}) < 0$.

Conclusion $(x, y) = (55, 95)$ est un maximum de p sous la contrainte $x + y = 155$ avec $p(55, 95) = 65312,50$ €.

3. On maximise le profit $p(x, y)$ sans contraintes.

Points critiques $\nabla p(x, y) = \begin{pmatrix} 500 - 10x + \frac{5}{2}y \\ 1000 - 10y + \frac{5}{2}x \end{pmatrix}$, $\nabla p(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ si et seulement si $(x, y) = (80, 120)$.

Classification $D(x, y) = \partial_{xx}p(x, y)\partial_{yy}p(x, y) - (\partial_{xy}p(x, y))^2 = (-10) \times (-10) - (5/2)^2$, $D(80, 120) > 0$ et $\partial_{xx}p(80, 120) < 0$.

Conclusion $(x, y) = (80, 120)$ est un maximum de p avec $p(80, 120) = 70000$ €

La solution obtenue n'est pas réalisable pour l'entreprise car elle dépasse la capacité de 150 vélos.

Exercice 4.45

Au ministère de l'agriculture, on a établi que le profit annuel (en €) pour les fermes cultivant des germes de soja et des pistaches est exprimé par la fonction

$$p(x, y) = 600x + 800y - x^2 - 2y^2 - 2xy$$

où x représente le nombre d'acres plantés en germes de soja et y le nombre d'acres planté en pistaches.

1. Un fermier possède une terre de 500 acres. En supposant qu'il désire utiliser à pleine capacité ses terres, trouver la répartition de la production permettant de maximiser son profit. Prouver qu'il s'agit bien d'un maximum absolu.
2. Le fermier s'interroge sur la pertinence de vouloir cultiver à pleine capacité ses terres. Il se demande si la solution qu'il obtiendrait sans cette contrainte serait plus intéressante. Aidez-le à répondre à cette question en trouvant la solution qui maximise le profit sans cette contrainte. Prouvez qu'il s'agit bien d'un maximum absolu. La solution obtenue est-elle réalisable ?
3. En exploitant les résultats obtenus au point précédent, suggériez-vous au fermier de diminuer la surface totale consacrée à ces deux cultures ou d'utiliser à pleine capacité ses terres ?

Correction

1. On veut cultiver 500 acres ce qui donne la contrainte $x + y = 500$. Il s'agit alors de résoudre le problème

maximiser $p(x, y)$ sous la contrainte $x + y = 500$.

Pour cela, on peut utiliser l'une des deux méthodes suivantes :

Méthode 1 On maximise $\tilde{p}(x) = p(x, 500 - x) = 600x + 800(500 - x) - x^2 - 2(500 - x)^2 - 2x(500 - x) = 800x - 100000 - x^2$.

Points critiques $\tilde{p}'(x) = 800 - 2x$, $\tilde{p}'(x) = 0$ si et seulement si $x = 400$.

Classification $\tilde{p}''(x) = -2$, $\tilde{p}''(400) < 0$.

Conclusion $x = 400$ est un maximum de \tilde{p} donc $(x, y) = (400, 100)$ est un maximum de p sous la contrainte $x + y = 500$.

Méthode 2 On maximise le lagrangien $L(x, y, \lambda) = p(x, y) - \lambda(x + y - 500) = 600x + 800y - x^2 - 2y^2 - 2xy - \lambda(x + y - 500)$.

Points critiques $\nabla L(x, y, \lambda) = \begin{pmatrix} 600 - 2x - 2y - \lambda \\ 800 - 4y - 2x - \lambda \\ 500 - x - y \end{pmatrix}$, $\nabla L(x, y, \lambda) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ si et seulement si $(x, y, \lambda) = (400, 100, -400)$.

Classification Soit $D(x, y, \lambda) \equiv \partial_{xx}L(x, y, \lambda)\partial_{yy}L(x, y, \lambda) - (\partial_{xy}L(x, y, \lambda))^2 = (-10) \times (-10) - (5/2)^2$.

On a $D(400, 100, -400) > 0$, $\partial_{xx}L(400, 100, -400) < 0$ et $\partial_{yy}L(400, 100, -400) < 0$.

Conclusion $(x, y) = (400, 100)$ est un maximum de p sous la contrainte $x + y = 500$ avec $p(400, 100) = 60000$ €. Il s'agit d'un maximum absolu car on maximise une fonction concave sur un domaine convexe (contrainte affine). L'interprétation économique que l'on peut donner au multiplicateur de LAGRANGE $\lambda = -400$ est la suivante : en ne cultivant pas tous les champs (*i.e.* en ne cultivant pas la totalité de ses 500 acres de champs), le fermier augmenterait ses profits, à cause du signe négatif du multiplicateur. C'est ce qu'on va voir au point suivant.

2. On maximise le profit $p(x, y)$ sans contraintes.

Points critiques $\nabla p(x, y) = \begin{pmatrix} 600 - 2x - 2y \\ 800 - 4y - 2x \end{pmatrix}$, $\nabla p(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ si et seulement si $(x, y) = (200, 100)$.

Classification $D(x, y) = \partial_{xx}p(x, y)\partial_{yy}p(x, y) - (\partial_{xy}p(x, y))^2 = (-2) \times (-4) - (-2)^2$, $D(200, 100) > 0$ et $\partial_{xx}p(200, 100) < 0$.

Conclusion $(x, y) = (200, 100)$ est un maximum de p . La solution obtenue est réalisable pour le fermier car elle ne dépasse pas les 500 acres.

3. Comme $p(400, 100) = 60000$ € $<$ $p(200, 100) = 100000$ €, il est plus rentable pour le fermier de diminuer la surface totale consacrée à ces deux cultures plutôt que d'utiliser à pleine capacité ses terres (il cultive alors 300 acres de champs).

Exercice 4.46

Une grande brasserie veut allouer un budget de 500000 € à la publicité au cours des six prochains mois. Les annonces publicitaires seront présentées dans deux médias : la télévision et les journaux. Les profits générés par cette campagne sont estimés par la fonction suivante :

$$p(x, y) = -x^2 - y^2 + 500x + 1000y$$

où x représente le montant investi dans la publicité dans les journaux (en milliers de €) et y montant investi dans la publicité à la télévision (en milliers de €).

1. En considérant que le budget est totalement dépensé, déterminer l'allocation aux deux médias qui permette de maximiser les profits de la brasserie. Quel est le profit maximum obtenu ? Vérifier que le point stationnaire est un maximum absolu.
2. La brasserie s'interroge sur la pertinence de vouloir utiliser la totalité du budget. Elle se demande si la solution qu'elle obtiendrait sans cette contrainte serait plus intéressante. Aidez-la à répondre à cette question en trouvant la solution qui maximise les profits sans cette contrainte. Prouvez qu'il s'agit bien d'un maximum absolu. La solution obtenue est-elle réalisable ?
3. En exploitant les résultats obtenus aux point précédent, suggériez-vous à la brasserie de diminuer le budget consacré à la publicité ou d'utiliser la totalité du budget alloué ?

Correction

1. On veut utiliser 500 000 € ce qui donne la contrainte $x + y = 500$. Il s'agit alors de résoudre le problème

maximiser $p(x, y)$ sous la contrainte $x + y = 500$.

Pour cela, on peut utiliser l'une des deux méthodes suivantes :

Méthode 1 On maximise $\tilde{p}(x) = p(x, 500 - x) = -x^2 - (500 - x)^2 + 500x + 1000(500 - x) = -2x^2 + 500x + 250000$.

Points critiques $\tilde{p}'(x) = 500 - 4x$, $\tilde{p}'(x) = 0$ si et seulement si $x = 125$.

Classification $\tilde{p}''(x) = -4$, $\tilde{p}''(125) < 0$.

Conclusion $x = 125$ est un maximum (absolu) de \tilde{p} donc $(x, y) = (125, 375)$ est un maximum (absolu) de p sous la contrainte $x + y = 500$.

Méthode 2 On maximise le lagrangien $L(x, y, \lambda) = p(x, y) - \lambda(x + y - 500) = -x^2 - 2y^2 + 500x + 1000y - \lambda(x + y - 500)$.

Points critiques $\nabla L(x, y, \lambda) = \begin{pmatrix} 500 - 2x - \lambda \\ 1000 - 2y - 2x - \lambda \\ 500 - x - y \end{pmatrix}$, $\nabla L(x, y, \lambda) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ si et seulement si $(x, y, \lambda) = (125, 375, 250)$.

Classification Soit $D(x, y, \lambda) \equiv \partial_{xx}L(x, y, \lambda)\partial_{yy}L(x, y, \lambda) - (\partial_{xy}L(x, y, \lambda))^2 = (-2) \times (-2) - (0)^2$.

On a $D(125, 375, 250) > 0$, $\partial_{xx}L(125, 375, 250) < 0$ et $\partial_{yy}L(125, 375, 250) < 0$.

Conclusion $(x, y) = (125, 375)$ est un maximum de p sous la contrainte $x + y = 500$ avec $p(125, 375) = 281\,250$ €. Il s'agit d'un maximum absolu car on maximise une fonction concave sur un domaine convexe (contrainte affine). L'interprétation économique que l'on peut donner au multiplicateur de LAGRANGE $\lambda = 250$ est la suivante : si les dépenses en publicité augmentent de 1000 €, les profits augmenteront de 250 €. Ce n'est donc pas rentable, même si le signe du multiplicateur de LAGRANGE est positif, car les unités relatives à la contrainte sont en milliers de €, ce qui amènerait une perte de 750 € dans l'éventualité où une augmentation d'une unité sur la contrainte de publicité se produisait.

2. On maximise le profit $p(x, y)$ sans contraintes.

Points critiques $\nabla p(x, y) = \begin{pmatrix} -2x + 500 \\ -2y + 1000 \end{pmatrix}$, $\nabla p(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ si et seulement si $(x, y) = (250, 500)$.

Classification $D(x, y) = \partial_{xx}p(x, y)\partial_{yy}p(x, y) - (\partial_{xy}p(x, y))^2 = (-2) \times (-2) - (0)^2$, $D(250, 500) > 0$ et $\partial_{xx}p(250, 500) < 0$.

Conclusion $(x, y) = (250, 500)$ est un maximum de p et $p(250, 500) = 312\,500$ €. La solution obtenue n'est pas réalisable car elle dépasse les 500 milliers de €.

3. Il convient à la brasserie d'utiliser la totalité du budget alloué.

Exercice 4.47

Un industriel produit simultanément 2 biens A et B dont il a le monopole de la production et de la vente dans un pays. Soit x la quantité produite du premier bien et y la quantité produite du second. Les prix p_A et p_B auxquels il vend respectivement les bien A et B sont fonction des quantités écoulées selon les relations $p_A(x) = 28 - 3x$ et $p_B(y) = 22 - 2y$. Le coût de production total des quantités x et y est la fonction $c(x, y) = x^2 + 3y^2 + 4xy$. Le bénéfice de l'entreprise si elle vend les quantités x et y est donc la fonction

$$b(x, y) = xp_A(x) + yp_B(y) - c(x, y).$$

1. L'industriel peut produire simultanément au mieux 5 biens. En supposant que l'entreprise désire utiliser à pleine capacité son usine, trouver la répartition de la production mensuelle permettant de maximiser le bénéfice de l'entreprise (on utilisera la méthode d'élimination ou réduction et on prouvera qu'il s'agit bien d'un maximum absolu). Donner la valeur maximale du bénéfice ainsi que les prix de vente de chacun des biens.
2. L'industriel s'interroge sur la pertinence de vouloir produire à pleine capacité. Il se demande si la solution qu'il obtiendrait sans cette contrainte serait plus intéressante. Aidez-le à répondre à cette question en trouvant la solution qui maximise le bénéfice sans cette contrainte. Prouvez qu'il s'agit bien d'un maximum absolu et donnez la valeur du bénéfice. La solution obtenue est-elle réalisable pour l'industriel ?

Correction

1. On veut produire 5 biens ce qui donne la contrainte $x + y = 5$. Il s'agit alors de résoudre le problème

maximiser $b(x, y)$ sous la contrainte $x + y = 5$.

On maximise $\tilde{b}(x) = b(x, 5 - x) = -4x^2 - 5(5 - x)^2 + 28x + 22(5 - x) - 4x(5 - x) = -5x^2 + 36x - 15$.

Points critiques $\tilde{b}'(x) = -10x + 36$, $\tilde{b}'(x) = 0$ si et seulement si $x = \frac{18}{5}$.

Classification $\tilde{b}''(x) = -10$, $\tilde{b}''\left(\frac{18}{5}\right) < 0$.

Conclusion $x = \frac{18}{5}$ est un maximum de \tilde{b} donc $(x, y) = \left(\frac{18}{5}, \frac{7}{5}\right)$ est un maximum de b sous la contrainte $x + y = 5$ avec $b\left(\frac{18}{5}, \frac{7}{5}\right) = \frac{249}{5} = 49,8$

2. On maximise le profit $b(x, y)$ sans contraintes.

Points critiques $\nabla b(x, y) = \begin{pmatrix} -8x - 4y + 28 \\ -10y - 4x + 22 \end{pmatrix}$, $\nabla b(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ si et seulement si $(x, y) = (3, 1)$.

Classification $\det(H_b)(x, y) = \partial_{xx}b(x, y)\partial_{yy}b(x, y) - (\partial_{xy}b(x, y))^2 = (-8) \times (-10) - (-4)^2 = 64$, $\det(H_b)(3, 1) > 0$ et $\partial_{xx}b(3, 1) < 0$.

Conclusion $(x, y) = (3, 1)$ est un maximum de b avec $b(3, 1) = 53$

La solution obtenue est réalisable pour l'industriel car elle ne dépasse pas la capacité de 5 biens et elle est préférable car $b(3, 1) = 53 > b\left(\frac{18}{5}, \frac{7}{5}\right) = \frac{249}{5} = 49,8$.

Exercice 4.48

Un industriel produit simultanément 2 biens A et B dont il a le monopole de la production et de la vente dans un pays. Soit x la quantité produite du premier bien et y la quantité produite du second. Les prix p_A et p_B auxquels il vend respectivement les biens A et B sont fonction des quantités écoulées selon les relations $p_A(x) = 33 - 4x$ et $p_B(y) = 27 - y$. Le coût de production total des quantités x et y est la fonction $c(x, y) = x^2 + 3y^2 + xy$. Le bénéfice de l'entreprise si elle vend les quantités x et y est donc la fonction

$$b(x, y) = xp_A(x) + yp_B(y) - c(x, y).$$

1. L'industriel peut produire simultanément au mieux 5 biens. En supposant que l'entreprise désire utiliser à pleine capacité son usine, trouver la répartition de la production mensuelle permettant de maximiser le bénéfice de l'entreprise (on utilisera la méthode d'élimination ou réduction et on prouvera qu'il s'agit bien d'un maximum absolu). Donner la valeur maximale du bénéfice ainsi que les prix de vente de chacun des biens.
2. L'industriel s'interroge sur la pertinence de vouloir produire à pleine capacité. Il se demande si la solution qu'il obtiendrait sans cette contrainte serait plus intéressante. Aidez-le à répondre à cette question en trouvant la solution qui maximise le bénéfice sans cette contrainte. Prouvez qu'il s'agit bien d'un maximum absolu et donnez la valeur du bénéfice. La solution obtenue est-elle réalisable pour l'industriel ?

Correction

1. On veut produire 5 biens ce qui donne la contrainte $x + y = 5$. Il s'agit alors de résoudre le problème

maximiser $b(x, y)$ sous la contrainte $x + y = 5$.

Pour cela, on peut utiliser l'une de deux méthodes suivantes :

Méthode 1 On maximise $\tilde{b}(x) = b(x, 5 - x) = -5x^2 - 4(5 - x)^2 - x(5 - x) + 33x + 27(5 - x) = -8x^2 + 41x + 35$.

Points critiques $\tilde{b}'(x) = -16x + 41$, $\tilde{b}'(x) = 0$ si et seulement si $x = \frac{41}{16}$.

Classification $\tilde{b}''(x) = -16$, $\tilde{b}''\left(\frac{41}{16}\right) < 0$.

Conclusion $x = \frac{41}{16}$ est un maximum de \tilde{b} donc $(x, y) = (\frac{41}{16}, \frac{39}{16})$ est un maximum de b sous la contrainte $x + y = 5$ avec $b(\frac{41}{16}, \frac{39}{16}) = \frac{2801}{32} = 87,53125$

Méthode 2 On maximise le lagrangien $L(x, y, \lambda) = b(x, y) - \lambda(x + y - 5) = -5x^2 - 4y^2 - xy + 33x + 27y - \lambda(x + y - 5)$.

Points critiques $\nabla L(x, y, \lambda) = \begin{pmatrix} -10x - y + 33 - \lambda \\ -8y - x + 27 - \lambda \\ 5 - x - y \end{pmatrix}$, $\nabla L(x, y, \lambda) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ si et seulement si $(x, y, \lambda) = (\frac{41}{16}, \frac{39}{16}, -\frac{495}{16})$.

Classification Soit $D(x, y, \lambda) \equiv \partial_{xx}L(x, y, \lambda)\partial_{yy}L(x, y, \lambda) - (\partial_{xy}L(x, y, \lambda))^2 = (-10) \times (-8) - (-1)^2$. On a $D(\frac{41}{16}, \frac{39}{16}, -\frac{495}{16}) > 0$, $\partial_{xx}L(\frac{41}{16}, \frac{39}{16}, -\frac{495}{16}) < 0$ et $\partial_{yy}L(\frac{41}{16}, \frac{39}{16}, -\frac{495}{16}) < 0$.

Conclusion $(x, y) = (\frac{41}{16}, \frac{39}{16})$ est un maximum de b sous la contrainte $x + y = 5$ avec $b(\frac{41}{16}, \frac{39}{16}) = \frac{2801}{32} = 87,53125$

2. On maximise le profit $b(x, y)$ sans contraintes.

Points critiques $\nabla b(x, y) = \begin{pmatrix} -10x - y + 33 \\ -8y - x + 27 \end{pmatrix}$, $\nabla b(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ si et seulement si $(x, y) = (3, 3)$.

Classification $\det(H_b)(x, y) = \partial_{xx}b(x, y)\partial_{yy}b(x, y) - (\partial_{xy}b(x, y))^2 = (-10) \times (-8) - (-1)^2 = 79$, $\det(H_b)(3, 3) > 0$ et $\partial_{xx}b(3, 3) < 0$.

Conclusion $(x, y) = (3, 3)$ est un maximum de b avec $b(3, 3) = 90$

La solution obtenue n'est pas réalisable pour l'industriel car elle dépasse la capacité de 5 biens.

Annexe A.

Approximations : polynômes de Taylor & développements limités

Il est souvent plus avantageux de remplacer des fonctions compliquées par des fonctions plus simples qui les approchent.

A.1 Définition (Linéarisation)

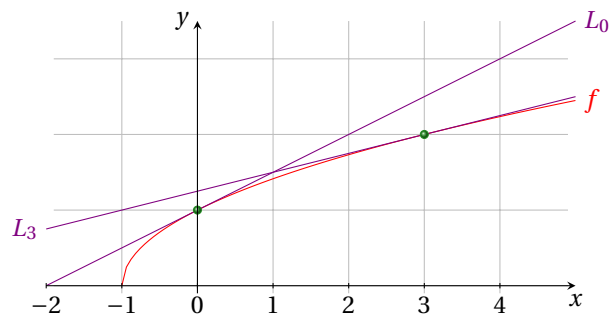
Si on approche une fonction f au voisinage d'un point x_0 au moyen d'une fonction affine $L(x) = q + mx$, il est naturel de choisir la fonction L dont le graphe est tangent au graphe de la fonction f en x_0 :

$$L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

C'est ce qu'on appelle la linéarisation de f en x_0 . Dans certains cas on mentionne explicitement le point auquel la linéarisation est obtenue et on note la linéarisation de f en x_0 par L_{x_0} .

ATTENTION

La linéarisation d'une fonction dépend du point auquel on linéarise la fonction. Par exemple, la linéarisation de la fonction $f(x) = \sqrt{1+x}$ en 0 donne $L_0(x) = 1 + x/2$ (car $f'(x) = 1/(2\sqrt{1+x})$ et $L_0(x) = f(0) + f'(0)x = 1 + x/2$) tandis que la linéarisation en 3 donne $L_3(x) = (5+x)/4$. La linéarisation L_0 fournit une meilleure approximation de f tant que $x < 1$, la linéarisation L_3 devient meilleure lorsque $x > 1$. En $x = 1$, les deux linéarisations fournissent la même valeur.



A.2 Définition (Notation)

Lorsqu'elle est évaluée en x_0 , la linéarisation de la fonction f en x_0 coïncide avec la fonction f . Lorsque x reste proche de x_0 , la linéarisation de L_{x_0} fournit une approximation de f . On note

$$f(x) \simeq L(x) \quad \text{lorsque } x \simeq x_0.$$

Le signe \simeq signifie "est approximativement égal à" sans que l'on attache ici de sens plus précis à cette notation.

EXEMPLE

La dérivée de $f(x) = (1+x)^n$ est égale à $f'(x) = n(1+x)^{n-1}$. La linéarisation de f à l'origine est donc égale à $L_0(x) = f(0) + f'(0)x = 1 + nx$ est on a

$$(1+x)^n \simeq 1 + nx \quad \text{lorsque } x \simeq 0.$$

Cette formule particulièrement simple à retenir est valable pour des valeurs quelconques de n . Elle permet de calculer rapidement des approximations de racines et de puissances de nombres *proches de l'unité*. Ainsi, par exemple

$$\sqrt[3]{1.2} = (1+0.2)^{0.3} \simeq 1 + \frac{0.2}{3} = 1.0\bar{6}.$$

La même formule permet d'évaluer immédiatement 1.002^{100} à 1.2 (la valeur exacte est 1.221...).

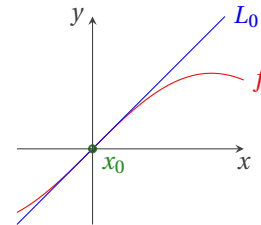
EXEMPLE

La linéarisation de la fonction sin à l'origine est $L_0(x) = x$, donc

$$\sin(x) \simeq x \quad \text{lorsque } x \simeq 0.$$

C'est la linéarisation que l'on effectue pour résoudre l'équation du pendule en physique.

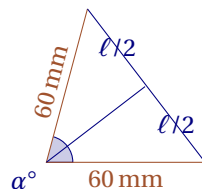
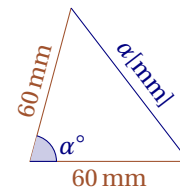
La qualité de cette approximation peut être également appréciée au moyen de quelques valeurs :



x	-0.2	-0.1	-0.05	0	0.05	0.1	0.2
$f(x) = \sin(x)$	-0.1986	-0.0998	-0.0499	0	0.0499	0.0998	0.1986
$L_0(x) = x$	-0.2	-0.1	-0.05	0	0.05	0.1	0.2

Estimer la mesure d'un angle sans utiliser de rapporteur On veut mesurer un angle $\alpha \in [0^\circ; 90^\circ]$ mais on n'a pas de rapporteur d'angle.

Sur chacun des côtés de l'angle on va alors marquer un trait à 60 mm du sommet et on mesure ensuite la distance (en millimètres) entre les traits : on obtient une approximation parfaitement acceptable de la mesure de l'angle en degrés ! Comment est-il possible ?



On considère un angle α et on procède tel qu'indiqué : en marquant les côtés de l'angle à la même distance (ici, 60 mm), on dessine un triangle isocèle.

Et comme c'est un triangle isocèle, la bissectrice de l'angle α sera aussi une médiatrice. Ainsi, en n'oubliant pas que

$$1^\circ = \frac{\pi}{180}$$

on observe la relation suivante dans les triangles rectangles formés par la bissectrice/médiatrice et dans laquelle α est exprimé en degrés

$$\sin\left(\frac{\pi}{180} \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\frac{\ell}{2}}{60}$$

i.e.

$$\sin\left(\frac{\pi}{360} \alpha\right) = \frac{\ell}{120}.$$

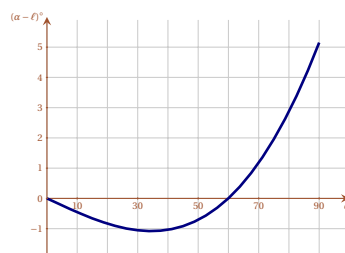
Pour de petits angles (exprimés en radian), on a

$$\sin(\vartheta) \simeq \vartheta$$

ce qui donne comme première approximation

$$\frac{\pi}{360} \alpha \simeq \frac{\ell}{120}$$

et en utilisant $\pi \simeq 3$ on obtient $\alpha \simeq \ell$. Est-ce que l'approximation est fiable ? Le graphique suivant montre la relation entre α (abscisses) et $\alpha - \ell$ (ordonnées).



On remarque que pour des angles entre 0° et (environ) 75° , l'erreur est de moins de 2° . Après 75° , ça se gâte un peu, et l'erreur culmine avec un maximum d'environ 5° lorsque l'angle est près d'un angle droit. Cependant, toutes proportions gardées, l'erreur de 5° reste quand même relativement petite pour cette approximation très économique.

Source : <http://www.thedudeminds.net/?p=5917>

La linéarisation d'une fonction f en un point x_0 est un polynôme de degré inférieur ou égal à 1 tel que

$$\begin{cases} L(x_0) = f(x_0), \\ L'(x_0) = f'(x_0). \end{cases}$$

Les polynômes de TAYLOR généralisent cette construction pour des polynômes de degrés quelconques.

A.3  **Définition (Polynôme de TAYLOR)**

Le polynôme de TAYLOR d'ordre n généré par f au point x_0 est le (seul) polynôme P_n de degré inférieur ou égal à n qui satisfait les conditions

$$P_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0) \quad \text{pour } k = 0, 1, \dots, n,$$

i.e. le polynôme

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k.$$

Le graphe du polynôme de TAYLOR d'une fonction f en x_0 est une courbe polynomiale tangente au graphe de f en x_0 .

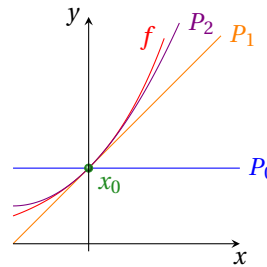
 **Remarque**

Soit la fonction $f(x) = x^2 + 1$. On a $f'(x) = 2x$, $f''(x) = 2$ et $f^{(k)}(x) = 0$ lorsque $k \geq 3$. Les polynômes de TAYLOR d'ordre 0, 1 et 2 générés par f à l'origine s'obtiennent par $P_0(x) = P_1(x) = 1$ et $P_2(x) = P_k(x) = f(x)$ lorsque $k \geq 3$: les polynômes de TAYLOR d'ordre ≥ 2 sont tous égaux à $1 + x^2$. C'est la raison pour laquelle on définit un *polynôme de TAYLOR d'ordre n et non pas de degré n* : le degré d'un polynôme de TAYLOR peut être inférieur à son ordre.

 **EXEMPLE**

Le polynôme de TAYLOR d'ordre n généré au point 0 par la fonction $f(x) = e^x$ est

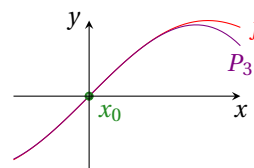
$$P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots + \frac{x^n}{n!}.$$



 **EXEMPLE**

Le polynôme de TAYLOR d'ordre 4 généré au point 0 par le fonction $f(x) = \sin(x)$ est

$$P_n(x) = x - \frac{x^3}{6}$$



La qualité de l'approximation des fonctions circulaires par leurs polynômes de TAYLOR est excellente.

 **EXEMPLE**

Le polynôme de TAYLOR d'ordre n généré au point 0 par le fonction $f(x) = (1 - x)^m$, $m > n$ est

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k.$$

Comme

$$f^{(k)}(x) = m(m-1) \dots (m-(k-1))(1-x)^{m-k} = \frac{m!}{(m-k)!} (1-x)^{m-k} = \binom{m}{k} k! (1-x)^{m-k}$$

on trouve

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{m}{k} x^k.$$

A.4 Proposition

Le polynôme de TAYLOR d'ordre n généré au point x_0 par un polynôme f de degré $m \leq n$ coïncide avec f quel que soit x_0 .

A.5 Propriété

Soit f et g deux fonctions n fois dérivables en un point x_0 et P_f et P_g leurs polynômes de TAYLOR d'ordre n en x_0 . Alors

1. le polynôme de TAYLOR d'ordre n généré par la **somme** $f + g$ au point x_0 est le polynôme $P_f + P_g$;
2. le polynôme de TAYLOR d'ordre n généré par la **soustraction** $f - g$ au point x_0 est le polynôme $P_f - P_g$;
3. le polynôme de TAYLOR d'ordre n généré par le **produit** fg au point x_0 est la somme des termes de degré inférieur ou égaux à n du polynôme $P_f P_g$;
4. le polynôme de TAYLOR d'ordre n généré par la **composition** $f(g(x))$ au point x_0 est la somme des termes de degré inférieur ou égaux à n du polynôme $P_f(P_g(x))$;
5. si $P_f(x_0) \neq 0$ alors le polynôme de TAYLOR d'ordre n généré par la **division** g/f au point x_0 est l'unique polynôme Q_n d'ordre n , obtenu par la technique de la division selon les puissances croissantes, vérifiant $P_g = P_f Q_n + o((x-x_0)^n)$;¹
6. le polynôme de TAYLOR d'ordre $n-1$ généré par f' au point x_0 est le polynôme P'_f .

EXEMPLE (SOMME)

Sachant que le polynôme de TAYLOR d'ordre 3 généré par $\sin(x)$ à l'origine est égal à $x - x^3/6$, on peut conclure que le polynôme de TAYLOR d'ordre 3 généré par $4x + 3x^2 - \sin(x)$ à l'origine est égal à $4x + 3x^2 - (x - x^3/6)$, i.e. $P_3(x) = 3x + 3x^2 + x^3/6$.

EXEMPLE (PRODUIT)

Sachant que le polynôme de TAYLOR d'ordre 3 généré par e^x à l'origine est égal à $1 + x + x^2/2 + x^3/6$, on peut conclure que le polynôme de TAYLOR d'ordre 3 généré par $(x + 2x^2 - x^3)e^x$ à l'origine est donné par le polynôme obtenu par la somme des termes de degré inférieur ou égaux à 3 du produit $(x + 2x^2 - x^3)(1 + x + x^2/2 + x^3/6)$, i.e. $P_3(x) = x + 3x^2 + 3x^3/2$.

Sachant que le polynôme de TAYLOR d'ordre n généré par $1/(1-x)$ à l'origine est égal à $1 + x + x^2 + \dots + x^n$, on peut conclure que le polynôme de TAYLOR d'ordre n généré par $x^2/(1-x)$ à l'origine est égal à $x^2 + \dots + x^n$.

EXEMPLE (COMPOSITION)

Sachant que le polynôme de TAYLOR d'ordre n généré par $1/(1-x) = (1-x)^{-1}$ à l'origine est égal à $1 + x + x^2 + \dots + x^n$, on peut conclure que le polynôme de TAYLOR d'ordre n généré par $1/(1-(-x)) = (1-(-x))^{-1}$ à l'origine est égal à $1 + (-x) + (-x)^2 + \dots + (-x)^n$, i.e. $1 - x + x^2 + \dots + (-1)^n x^n$ et que le polynôme de TAYLOR d'ordre n généré par $1/(1+x^2)$ à l'origine est égal à $1 + (-x^2) + (-x^2)^2 + \dots + (-x^2)^n$, i.e. $1 - x^2 + x^4 + \dots + (-1)^n x^{2n}$.

EXEMPLE

On veut calculer les polynômes de TAYLOR d'ordre 4 à l'origine générés par les fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} suivantes :

- | | | |
|---------------------|------------------------------|-------------------------------|
| 1. $f(x) = e^x$ | 3. $s(x) = f(x) + g(x)$ | 5. $c(x) = f(g(x))$ |
| 2. $g(x) = \sin(x)$ | 4. $p(x) = f(x) \times g(x)$ | 6. $d(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$ |

Par définition de polynôme de TAYLOR on a

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{6}x^3 + \frac{f^{(iv)}(0)}{24}x^4 \quad \text{lorsque } x \approx 0.$$

1. *Théorème sur la division selon les puissances croissantes* : soient A et B deux polynômes tels que $B(0) \neq 0$. Pour tout entier n , il existe un couple et un seul de polynômes (Q_n, R_n) vérifiant : $A = BQ_n + x^{n+1}R_n$, avec Q_n de degré inférieur ou égale à n .

1. $f(x) = e^x$

$$\begin{array}{ll} f(x) = e^x & f(0) = 1 \\ f'(x) = e^x & f'(0) = 1 \\ f''(x) = e^x & f''(0) = 1 \\ f'''(x) = e^x & f'''(0) = 1 \\ f^{(iv)}(x) = e^x & f^{(iv)}(0) = 1 \end{array}$$

donc

$$e^x \simeq P_f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} \quad \text{lorsque } x \simeq 0.$$

2. $g(x) = \sin(x)$

$$\begin{array}{ll} g(x) = \sin(x) & g(0) = 0 \\ g'(x) = \cos(x) & g'(0) = 1 \\ g''(x) = -\sin(x) & g''(0) = 0 \\ g'''(x) = -\cos(x) & g'''(0) = -1 \\ g^{(iv)}(x) = \sin(x) & g^{(iv)}(0) = 0 \end{array}$$

donc

$$\sin(x) \simeq P_g(x) = x - \frac{x^3}{6} \quad \text{lorsque } x \simeq 0.$$

3. $s(x) = f(x) + g(x)$

En utilisant la définition :

$$\begin{array}{ll} s(x) = e^x + \sin(x) & s(0) = 1 \\ s'(x) = e^x + \cos(x) & s'(0) = 2 \\ s''(x) = e^x - \sin(x) & s''(0) = 1 \\ s'''(x) = e^x - \cos(x) & s'''(0) = 0 \\ s^{(iv)}(x) = e^x + \sin(x) & s^{(iv)}(0) = 1 \end{array}$$

donc

$$e^x + \sin(x) \simeq P_s(x) = 1 + 2x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \quad \text{lorsque } x \simeq 0.$$

En utilisant la propriété de la somme :

$$e^x + \sin(x) \simeq P_s(x) = P_f(x) + P_g(x) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}\right) + \left(x - \frac{x^3}{6}\right) = 1 + 2x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \quad \text{lorsque } x \simeq 0.$$

4. $p(x) = f(x) \times g(x)$

En utilisant la définition :

$$\begin{array}{ll} p(x) = e^x \sin(x) & p(0) = 0 \\ p'(x) = e^x (\sin(x) + \cos(x)) & p'(0) = 1 \\ p''(x) = 2e^x \cos(x) & p''(0) = 2 \\ p'''(x) = 2e^x (\cos(x) - \sin(x)) & p'''(0) = 2 \\ p^{(iv)}(x) = -4e^x \sin(x) & p^{(iv)}(0) = 0 \end{array}$$

donc

$$e^x \sin(x) \simeq P_p(x) = x + x^2 + \frac{x^3}{3} \quad \text{lorsque } x \simeq 0.$$

En utilisant la propriété du produit :

$$e^x \sin(x) \simeq P_p(x) = \text{termes de degré inférieur ou égal à 4 du produit } P_f(x) \times P_g(x)$$

$$\begin{aligned}
&= \text{termes de degré inférieur ou égal à 4 du produit } \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}\right) \left(x - \frac{x^3}{6}\right) \\
&= \text{termes de degré inférieur ou égal à 4 de } \left(x + x^2 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{24} - \frac{x^6}{36} - \frac{x^7}{144}\right) \\
&= x + x^2 + \frac{x^3}{3} \quad \text{lorsque } x \approx 0.
\end{aligned}$$

5. $c(x) = f(g(x))$

En utilisant la définition :

$$\begin{aligned}
c(x) &= e^{\sin(x)} & c(0) &= 1 \\
c'(x) &= \cos(x)e^{\sin(x)} & c'(0) &= 1 \\
c''(x) &= (\cos^2(x) - \sin(x))e^{\sin(x)} & c''(0) &= 1 \\
c'''(x) &= (\cos^2(x) - 3\sin(x) - 1)\cos(x)e^{\sin(x)} & c'''(0) &= 0 \\
c^{(iv)}(x) &= (\sin(x) - 4\cos^2(x) + 3\sin^2(x) - 6\sin(x)\cos^2(x) + \cos^4(x))e^{\sin(x)} & c^{(iv)}(0) &= -3
\end{aligned}$$

donc

$$e^{\sin(x)} \simeq P_c(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} \quad \text{lorsque } x \approx 0.$$

En utilisant la propriété de la composition :

$$\begin{aligned}
e^{\sin(x)} \simeq P_c(x) &= \text{termes de degré inférieur ou égal à 4 de } \left(1 + \left(x - \frac{x^3}{6}\right) + \frac{\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^2}{2} + \frac{\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^3}{6} + \frac{\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^4}{24}\right) \\
&= \text{termes de degré inférieur ou égal à 4 de } \left(1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} - \frac{x^5}{12} - \frac{x^6}{72} + \frac{x^7}{72} + \frac{x^8}{144} - \frac{x^9}{1296} - \frac{x^{10}}{1296} + \frac{x^{12}}{31104}\right) \\
&= 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} \quad \text{lorsque } x \approx 0.
\end{aligned}$$

6. $d(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$

En utilisant la définition :

$$\begin{aligned}
d(x) &= \frac{\sin(x)}{e^x} & d(0) &= 0 \\
d'(x) &= \frac{\cos(x) - \sin(x)}{e^x} & d'(0) &= 1 \\
d''(x) &= \frac{-2\cos(x)}{e^x} & d''(0) &= -2 \\
d'''(x) &= \frac{2\sin(x) + 2\cos(x)}{e^x} & d'''(0) &= 2 \\
d^{(iv)}(x) &= \frac{-4\sin(x)}{e^x} & d^{(iv)}(0) &= 0
\end{aligned}$$

donc

$$\frac{\sin(x)}{e^x} \simeq P_d(x) = x - x^2 + \frac{x^3}{3} \quad \text{lorsque } x \approx 0.$$

En utilisant la technique de la division selon les puissances croissantes : si f et g ont au point x_0 un développement limité à l'ordre n et si $f(x_0) \neq 0$, le polynôme d'approximation de g/f à l'ordre n s'obtient en divisant suivant les puissances croissantes à l'ordre n le polynôme d'approximation de g par celui de f en ne gardant que les termes de degré inférieur ou égal à n :

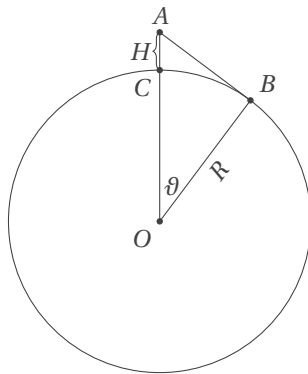
$$\frac{g(x)}{f(x)} \simeq P_d(x) = \text{termes de degré inférieur ou égal à } n \text{ de la division selon les puissances croissantes de } \frac{P_g}{P_f}$$

donc

x	$-\frac{1}{6}x^3$	1	$+x$	$+\frac{1}{2}x^2$	$+\frac{1}{6}x^3$	$+\frac{1}{24}x^4$
$-x$	$-x^2$	x	$-x^2$	$+\frac{1}{3}x^3$		
$-x^2$	$-\frac{2}{3}x^3$	$-x^2$	$-\frac{2}{3}x^3$	$-\frac{1}{6}x^4$		
x^2	$+x^3$	x^2	$+x^3$	$+\frac{1}{2}x^4$		
	$\frac{1}{3}x^3$		$\frac{1}{3}x^3$	$+\frac{1}{3}x^4$		
	$-\frac{1}{3}x^3$		$-\frac{1}{3}x^3$	$-\frac{1}{3}x^4$		
	0					

EXEMPLE

On veut déterminer la limite de visibilité depuis un point d'altitude H au-dessus du niveau de la mer. Du point A on voit jusqu'au point B .



L'on a

$$\cos(\vartheta) = \frac{OB}{OA} = \frac{R}{R+H} = \frac{1}{1+\frac{H}{R}}$$

Pour une altitude «raisonnable», $\frac{H}{R}$ est petit et ϑ également ($R \approx 6371$ km). On utilise les deux équivalences

$$\cos(\vartheta) \approx 1 - \frac{\vartheta^2}{2}, \quad \frac{1}{1+\frac{H}{R}} = \left(1 + \frac{H}{R}\right)^{-1} \approx 1 - \frac{H}{R},$$

qui conduisent à $\vartheta \approx \sqrt{2\frac{H}{R}}$. On conclut que la distance CB à la surface de la Terre, c'est-à-dire la longueur de l'arc de cercle, est $\ell = R\vartheta = \sqrt{2RH}$. Par exemple, du sommet de la tour Eiffel ($H = 324$ m) on peut voir à une distance de 66 kilomètres.

L'utilisation d'un polynôme de TAYLOR d'ordre n d'une fonction f en x_0 pour approcher f à proximité de x_0 induit une erreur qui est d'autant plus élevée que le graphe de la fonction s'écarte du graphe de f . L'erreur commise n'est nulle partout que lorsque la fonction f est un polynôme de degré inférieur ou égal à n . Lorsqu'on dispose d'une borne sur la dérivée $(n+1)$ -ème de f , il est possible de borner l'erreur. De plus, lorsque l'on utilise un polynôme de TAYLOR d'ordre de plus en plus grand pour approcher f , on s'attend à ce que l'approximation s'améliore.

A.6 Théorème (Erreur d'approximation)

Soit $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction $n+1$ fois dérivable et soit P_n le polynôme de TAYLOR d'ordre n généré par f en x_0 . Si $|f^{(n+1)}(x)| \leq M$ pour tous les x dans $[a; b]$, alors

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} M$$

pour tous les x dans $[a; b]$.

EXEMPLE

La linéarisation de $f(x) = \sin(x)$ en $x = 0$ donne $\sin(x) \approx x$. Quelle est la précision de cette approximation lorsque $|x| \leq 0.5$? Comme $\max_{|x| \leq 0.5} |f''(x)| = \max_{|x| \leq 0.5} |-\sin(x)| = \sin(0.5)$, une application directe du théorème permet d'écrire

$$|\sin(x) - x| \leq \frac{(0.5)^2}{2} \sin(0.5) \leq 0.06$$

pour tous les x dans $[-0.5; 0.5]$.

 EXEMPLE

Le polynôme d'ordre 2 généré par la fonction $f(x) = 1/(1-x)$ à l'origine est donné par

$$P_2(x) = 1 + x + x^2.$$

Considérons ces fonctions sur l'intervalle $[0; 0.1]$. La fonction f''' est dérivable sur cet intervalle et $\max_{x \in [0; 0.1]} |f'''(x)| = \max_{x \in [0; 0.1]} |6/(1-x)^4| = 6/(1-0.1)^4 = M$. Par conséquent

$$|f(x) - P_2(x)| \leq \frac{(0.1-0)^{2+1}}{(2+1)!} 6/(1-0.1)^4 \leq 0.00152$$

pour tous les x dans $[0; 0.1]$.

A.7  **Définition (Développement limité.)**

f admet un développement limité à l'ordre n en x_0 , et on le note $DL_n(x_0)$, si $\mathcal{D}_f \cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\setminus \{x_0\} \neq \emptyset$ pour tout $\delta > 0$ et s'il existe un polynôme P_n de degré $\leq n$ tel que

$$f(x) = P_n(x - x_0) + (x - x_0)^n \varepsilon(x - x_0),$$

où ε est une fonction de $\mathcal{D}_f \cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\setminus \{0\}$ à valeur dans \mathbb{R} telle que $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$. Au lieu de $(x - x_0)^n \varepsilon(x - x_0)$ on écrit souvent $o((x - x_0)^n)$.

Lorsqu'il existe, le polynôme P_n est unique.

A.8  **Théorème (de TAYLOR-YOUNG)**

Si f et toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre n sont définies et continues en tout point d'un intervalle ouvert I contenant x_0 alors f admet un développement limité à l'ordre n en x_0 donné par la formule

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + (x - x_0)^n \varepsilon(x - x_0).$$

 **ATTENTION**

On dit qu'une fonction f admet un développement limité à l'ordre n (entier naturel) au point x_0 s'il existe un polynôme P de degré au plus n tel que

$$f(x) = P(x - x_0) + o((x - x_0)^n) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)$$

au voisinage de x_0 .

Si f est n fois continûment dérivable sur un intervalle I avec n entier positif ou nul, alors pour tout point $x_0 \in I$, f a un développement limité au point x_0 donné par la formule de Taylor-Young

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n).$$

Il est tentant de penser que la réciproque est vraie, c'est-à-dire qu'une fonction qui admet un développement limité à l'ordre n en un point x_0 est dérivable n fois en ce point. C'est effectivement le cas si $n = 0$ ou $n = 1$. Dans le premier cas, le développement limité s'écrit juste $f(x) = a_0 + o(1)$ et donc $a_0 = f(a)$ par définition d'un $o(1)$. Si $n = 1$ et $f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + o(x - x_0)$, alors $a_0 = f(a)$ pour la même raison, et par suite :

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - a} = a_1 + o(1)$$

ce qui implique que l'accroissement fini a une limite égale à a_1 , ainsi f est bien dérivable en x_0 et $a_1 = f'(x_0)$. Mais la réciproque est fautive pour $n \geq 2$, autrement dit une fonction peut admettre un développement limité à l'ordre $n \geq 2$ bien qu'elle ne soit pas n fois continûment dérivable.

 EXEMPLE

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{pour } x \neq 0, \\ 0 & \text{pour } x = 0. \end{cases}$$

On veut calculer le développement limité à l'ordre 1 puis à l'ordre 2 en 0 de f et montrer que f n'admet pas de développement limité à l'ordre 3 en 0.

Commençons par calculer les dérivées de f :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{pour } x \neq 0 \\ 0 & \text{pour } x = 0 \end{cases} \quad \text{et } \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0 = f(0);$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{pour } x \neq 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - 0}{x - 0} = 0 & \text{pour } x = 0 \end{cases} \quad \text{et } \lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right) \text{ n'existe pas.}$$

Par conséquent f est continue mais f' n'est pas continue en $x = 0$. Cela implique que f n'admet pas de dérivée seconde en 0.

On peut utiliser la formule de TAYLOR-YOUNG pour calculer le développement limité de f en 0 à l'ordre 1 :

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + o(x) = 0 + o(x).$$

En revanche, comme f n'admet pas de dérivée seconde en 0, on ne peut pas utiliser la formule de TAYLOR-YOUNG pour calculer le développement limité de f en 0 à l'ordre 2. Cependant, ce développement limité existe est pour le calculer il suffit de remarquer que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2} = 0,$$

c'est-à-dire $f(x) = o(x^2)$: le développement limité de f en 0 à l'ordre 2 est donc $f(x) = 0 + o(x^2)$.

On montre enfin qu'il n'existe pas de développement limité de f en 0 à l'ordre 3 car la limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x^3}$$

n'existe pas.

A.9 Définition (Prépondérance)

Soit f et g deux applications de \mathcal{D} vers \mathbb{R} et soit $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. On dit que f est négligeable devant g au voisinage de x_0 s'il existe un voisinage \mathcal{V} de x_0 et une fonction $\varphi : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall x \in \mathcal{V} \cap \mathcal{D}, \quad f(x) = g(x)\varphi(x), \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = 0.$$

On note alors $f = o(g)$.

Si g ne s'annule pas dans un voisinage de x_0 , cette définition est équivalente à

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

EXEMPLE

$$\ln(x) \underset{+\infty}{=} o(x^\alpha), \quad \ln(x) \underset{0^+}{=} o(x^{-\alpha}), \quad x^\alpha \underset{+\infty}{=} o(e^x), \quad |x|^\alpha \underset{-\infty}{=} o(e^{-x}).$$

A.10 Propriété

- ▷ $f = o(1) \iff \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$
- ▷ $f = o(f_1)$ et $g = o(g_1) \implies fg = o(f_1g_1)$
- ▷ $f = o(h)$ et $g = o(h) \implies f + g = o(h)$
- ▷ $f = o(f_1) \implies f^n = o(f_1^n), n \in \mathbb{N}$

▷ $f = o(f_1) \implies f^\alpha = o(f_1^\alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ si f et f_1 sont strictement positives au voisinage de x_0

▷ $f \sim g \iff f - g = o(g)$

⚠ ATTENTION

▷ $f = o(f_1)$ et $g = o(g_1) \not\Rightarrow f + g = o(f_1 + g_1)$

▷ $f = o(f_1) \not\Rightarrow e^f = o(e^{f_1})$

▷ $f = o(f_1) \not\Rightarrow \ln(f) = o(\ln(f_1))$

A.11 📖 Définition (Asymptotes)

Soit f définie sur un intervalle $]A, +\infty[$ (ou $] -\infty, A[$). On dit que f admet un développement limité généralisé à l'ordre n en $a = +\infty$ (ou en $a = -\infty$) s'il existe un polynôme P tel que $f(x) = P(1/x) + o(1/x^n)$ au voisinage de ce point. L'expression $P(1/x)$ n'est pas un polynôme, mais a des propriétés similaires. Dans la pratique, on peut obtenir un développement limité de $f(x)$ en $a = +\infty$ (ou en $a = -\infty$) en posant $x = 1/t$ (de sorte que t tend vers 0, avec un signe fixe) et en tentant de développer $f(1/t)$ au voisinage de 0.

Lorsque x et $f(x)$ tendent vers l'infini, on obtient une asymptote oblique (si elle existe) en effectuant un développement limité au voisinage de l'infini :

$$\frac{f(x)}{x} = a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^k} + o\left(\frac{1}{x^k}\right)$$

où $\frac{c}{x^k}$ est le premier terme non nul après $\frac{b}{x}$. Dans ce cas, la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à la courbe représentative de f . Et la position relative de la courbe et de l'asymptote résulte du signe de $\frac{c}{x^k}$ lorsque x tend vers l'infini.

A.12 📖 Définition (Équivalence)

Soit f et g deux applications de \mathcal{D} vers \mathbb{R} et soit $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. On dit que f est équivalente à g au voisinage de x_0 s'il existe un voisinage \mathcal{V} de x_0 et une fonction $\varphi: \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall x \in \mathcal{V} \cap \mathcal{D}, \quad f(x) = g(x)[1 + \varphi(x)], \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = 0.$$

On note alors $f \underset{x_0}{\sim} g$.

Si g ne s'annule pas dans un voisinage de x_0 , cette définition est équivalente à

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

🔍 EXEMPLE

▷ Soit $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$, ($a_n \neq 0$) une fonction polynomiale, alors

$$P(x) \underset{+\infty}{\sim} a_nx^n, \quad P(x) \underset{-\infty}{\sim} a_nx^n, \quad P(x) \underset{0}{\sim} a_0 \text{ si } a_0 \neq 0.$$

▷ Soit $F(x) = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_px^p}$, ($a_n \neq 0$ et $b_p \neq 0$) une fonction rationnelle, alors

$$F(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{a_nx^n}{b_px^p}, \quad F(x) \underset{-\infty}{\sim} \frac{a_nx^n}{b_px^p}, \quad F(x) \underset{0}{\sim} \frac{a_0}{b_0} \text{ si } a_0, b_0 \neq 0.$$

▷ Fonctions trigonométriques :

$$\sin(x) \underset{0}{\sim} x, \quad \tan(x) \underset{0}{\sim} x, \quad 1 - \cos(x) \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{2}.$$

▷ Fonctions logarithmes, exponentielles, puissance :

$$\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x, \quad e^x - 1 \underset{0}{\sim} x, \quad a^x - 1 \underset{0}{\sim} x \ln(a) \quad (a > 0), \quad (1+x)^\alpha - 1 \underset{0}{\sim} \alpha x \quad (\alpha \in \mathbb{R}).$$

A.13  **Théorème**

Soit f et g deux applications de \mathcal{D} vers \mathbb{R} et soit $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ et si $f \sim_{x_0} g$, alors $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell$.

Ce résultat est fondamentale car il permet de remplacer une limite par une limite plus simple.

 **ATTENTION**

Si deux fonctions ont même limite, elles ne sont pas nécessairement équivalentes. Par exemple, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2$ mais $x \mapsto x$ et $x \mapsto x^2$ ne sont pas équivalentes en $+\infty$.

A.14  **Propriété**

- ▷ $f \sim f_1$ et $g \sim g_1 \implies fg \sim f_1 g_1$
- ▷ $f \sim f_1 \implies \frac{1}{f} \sim \frac{1}{f_1}$ si f et f_1 ne s'annulent pas au voisinage de x_0
- ▷ $f \sim f_1$ et $g \sim g_1 \implies \frac{f}{g} \sim \frac{f_1}{g_1}$ si g et g_1 ne s'annulent pas au voisinage de x_0
- ▷ $f \sim f_1 \implies f^n \sim f_1^n, n \in \mathbb{N}$
- ▷ $f \sim f_1 \implies f^\alpha \sim f_1^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$ si f et f_1 sont strictement positives au voisinage de x_0

 **ATTENTION**

- ▷ $f \sim f_1$ et $g \sim g_1 \not\Rightarrow f + g \sim f_1 + g_1$
- ▷ $f \sim f_1 \not\Rightarrow e^f \sim e^{f_1}$
- ▷ $f \sim f_1 \not\Rightarrow \ln(f) \sim \ln(f_1)$



Exercice A.1 (Développements limités usuels — à apprendre par cœur)

Calculer les développements limités à l'ordre n au voisinage de l'origine des fonctions suivantes :

$$\begin{array}{cccc}
 e^x & (1+x)^\alpha & \sin(x) & \cos(x) \\
 \frac{1}{1+x} & \frac{1}{1-x} & \ln(1+x) & \ln(1-x)
 \end{array}$$

Correction

Toutes les fonctions données sont dérivable n fois au voisinage de l'origine, d'après le théorème de TAYLOR-YOUNG on a alors

$$f(x) = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{6}x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n).$$

$$e^x = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{k=n} \binom{\alpha}{k} x^k + o(x^n) = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6}x^3 + \dots + \binom{\alpha}{n}x^n + o(x^n)$$

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{k=n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{k=n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{k=n} (-1)^k x^k + o(x^n) = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{k=n} x^k + o(x^n) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + o(x^n)$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{k=n} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + o(x^n) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$\ln(1-x) = -\sum_{k=1}^{k=n} \frac{x^k}{k} + o(x^n) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots - \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

Exercice A.2 (Développements limités usuels)

Calculer les développements limités à l'ordre n au voisinage de l'origine des fonctions suivantes :

$$\begin{array}{ccc}
 \sqrt{1+x} & \sqrt{1-x} & \frac{1}{\sqrt{1+x}} \\
 \arcsin(x) & \arccos(x) & \arctan(x) \\
 \sinh(x) & \cosh(x) & \tanh(x)
 \end{array}$$

Correction

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128} + o(x^4)$$

$$\sqrt{1-x} = 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128} + o(x^4)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} - \frac{5x^3}{16} + \frac{5x^4}{128} + o(x^4)$$

$$\arcsin(x) = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \dots + \left(\frac{-1}{n} \right) \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$$

$$\arccos(x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(x)$$

$$\arctan(x) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+1}) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$$

$$\sinh(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}) = x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\cosh(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\tanh(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} - \frac{17x^7}{315} + o(x^8)$$

Exercice A.3 (Somme et produit de développements limités)

Calculer les développements limités suivants au point 0 :

- $\frac{1}{1-x} - e^x$ à l'ordre 3,
- $\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}$ à l'ordre 4,
- $\sin(x) \cos(2x)$ à l'ordre 5,
- $\cos(x) \ln(1+x)$ à l'ordre 4,
- $(x^3+1)\sqrt{1-x}$ à l'ordre 3,
- $\ln^2(x+1)$ à l'ordre 4.

Correction

- $\frac{1}{1-x} - e^x = (1+x+x^2+x^3+o(x^3)) - (1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)) = \frac{x^2}{2} + \frac{5}{6}x^3 + o(x^3)$
- $\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x} = (1-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}-\frac{x^3}{16}-\frac{5x^4}{128}+o(x^4)) + (1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}-\frac{5x^4}{128}+o(x^4)) + o(x^4) = 2+x-\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{8}-\frac{5}{64}x^4+o(x^4)$
- $\sin(x) \cos(2x) = (x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^5)) (1-\frac{(2x)^2}{2}+\frac{(2x)^4}{24}+o(x^5)) = x-\frac{13}{6}x^3+\frac{121}{120}x^5+o(x^5)$
- $\cos(x) \ln(1+x) = (1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)) (x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+o(x^4)) = x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}+o(x^4)$
- $(x^3+1)\sqrt{1-x} = (x^3+1) (1-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}-\frac{x^3}{16}+o(x^3)) = 1-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{15}{16}x^3+o(x^3)$
- $\ln^2(x+1) = (\ln(x+1)) (\ln(x+1)) = (x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)) (x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)) = x^2-x^3+\frac{11}{12}x^4+o(x^4)$

Exercice A.4 (Composition de développements limités)

Calculer les développements limités suivants au point 0 :

- $\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)$ à l'ordre 4,
- $e^{\sin(x)}$ à l'ordre 4,
- $(\cos(x))^{\sin(x)}$ à l'ordre 5.

Correction

- $\frac{\sin(x)}{x} = \frac{x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^5)}{x} = 1-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}+o(x^4)$. On note $u = -\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}+o(x^4) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$, alors $\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right) = \ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + o(u^2) = \left(-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}+o(x^4)\right) - \frac{\left(-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}+o(x^4)\right)^2}{2} + o(x^4) = \left(-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}+o(x^4)\right) - \frac{\frac{x^4}{36}+o(x^4)}{2} + o(x^4) = -\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \frac{x^4}{72} + o(x^4) = -\frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{180} + o(x^4)$
- $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$. On note $u = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$, alors $e^{\sin(x)} = e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + \frac{u^4}{24} + o(u^4)$. Comme $u = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$, alors $u^2 = x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)$, $u^3 = x^3 + o(x^4)$ et $u^4 = x^4 + o(x^4)$ et on trouve $e^{\sin(x)} = 1 + \left(x - \frac{x^3}{6}\right) + \frac{\left(x^2 - \frac{x^4}{3}\right)}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) = 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + o(x^4)$
- $(\cos(x))^{\sin(x)} = \exp((\sin(x)) \ln(\cos(x)))$. Comme $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)$, on pose $u = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$, alors $\ln(\cos(x)) = \ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + \frac{u^5}{5} + o(u^5)$. Comme $u = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)$, alors $u^2 = \frac{x^4}{4} + o(x^5)$ et $u^3 = u^4 = u^5 = o(x^5)$, donc $\ln(\cos(x)) = \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)\right) - \frac{\left(\frac{x^4}{4} + o(x^5)\right)^2}{2} + o(x^5) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^5)$. Sachant que $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)$ on en déduit $(\sin(x)) \ln(\cos(x)) = -\frac{x^3}{2} + o(x^5)$. On pose alors $v = -\frac{x^3}{2} + o(x^5) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$, et l'on a $\exp((\sin(x)) \ln(\cos(x))) = \exp(v) = 1 + v + \frac{v^2}{2} + o(v^2) = 1 - \frac{x^3}{2} + o(x^5)$.

Exercice A.5 (Division de développements limités)

Calculer les développements limités suivants au point 0 :

- 1. $x \mapsto \frac{\sinh^2(t)}{1-\cos(t)}$ à l'ordre 4,
- 2. $\frac{1}{1+x+x^2}$ à l'ordre 4,
- 3. $\tan(x)$ à l'ordre 5,
- 4. $\frac{\sin(x)-1}{\cos(x)+1}$ à l'ordre 2,
- 5. $\frac{\ln(1+x)}{\sin(x)}$ à l'ordre 3.

Correction

1. $\sinh(t) = t + \frac{t^3}{6} + \frac{t^5}{120} + o(t^6)$ et $1 - \cos(t) = \frac{t^2}{2} - \frac{t^4}{24} + \frac{t^6}{720} + o(t^7)$ donc

$$\frac{\sinh^2(t)}{1 - \cos(t)} = \frac{\left(t + \frac{t^3}{6} + \frac{t^5}{120} + o(t^6)\right)^2}{\frac{t^2}{2} - \frac{t^4}{24} + \frac{t^6}{720} + o(t^7)} = \frac{t^2 + \frac{t^4}{3} + \frac{2t^6}{45} + o(t^7)}{\frac{t^2}{2} \left(1 - \frac{t^2}{12} + \frac{t^4}{360} + o(t^5)\right)} = \frac{2 + \frac{2t^2}{3} + \frac{4t^4}{45} + o(t^5)}{1 - \frac{t^2}{12} + \frac{t^4}{360} + o(t^5)}$$

Maintenant on peut utiliser deux méthodes :

1.1. la première utilise le développement limité de $\frac{1}{1-A}$ avec $A = \frac{t^2}{12} - \frac{t^4}{360} + o(t^5)$:

$$\begin{aligned} \frac{\sinh^2(t)}{1 - \cos(t)} &= \frac{2 + \frac{2t^2}{3} + \frac{4t^4}{45} + o(t^5)}{1 - A} \\ &= \left(2 + \frac{2t^2}{3} + \frac{4t^4}{45} + o(t^5)\right) (1 + A + A^2 + o(A^2)) \\ &= \left(2 + \frac{2t^2}{3} + \frac{4t^4}{45} + o(t^5)\right) \left(1 + \frac{t^2}{12} - \frac{t^4}{360} + o(t^5) + \frac{t^4}{144}\right) \\ &= 2 + \frac{5}{6}t^2 + \frac{11}{72}t^4 + o(t^4); \end{aligned}$$

1.2. la deuxième méthode (qu'on utilisera dans la suite de cet exercice) applique la technique de la division suivant les puissances croissantes : si f et g ont au point a un développement limité à l'ordre n et si $g(a) \neq 0$, le polynôme d'approximation de f/g à l'ordre n s'obtient en divisant suivant les puissances croissantes à l'ordre n le polynôme d'approximation de f par celui de g . Ici $f(x) = 2 + \frac{2t^2}{3} + \frac{4t^4}{45}$ et $g(x) = 1 - \frac{t^2}{12} + \frac{t^4}{360}$ et on pose la division suivant les puissances croissantes en ne gardant que les termes de degré inférieur ou égal à 4 :

$2 + \frac{2}{3}t^2 + \frac{4}{45}t^4$	$1 - \frac{1}{12}t^2 + \frac{1}{360}t^4$
$-2 + \frac{1}{6}t^2 - \frac{1}{180}t^4$	$2 + \frac{5}{6}t^2 + \frac{11}{72}t^4$
$+ \frac{5}{6}t^2 + \frac{1}{12}t^4$	
$- \frac{5}{6}t^2 + \frac{5}{72}t^4$	
$+ \frac{11}{72}t^4$	
$- \frac{11}{72}t^4$	
0	

On conclut que $\frac{\sinh^2(t)}{1-\cos(t)} = 2 + \frac{5}{6}t^2 + \frac{11}{72}t^4 + o(t^4)$.

2. Ici $f(x) = 1$ et $g(x) = 1 + x + x^2$ et on pose la division suivant les puissances croissantes en ne gardant que les termes de degré inférieur ou égal à 4 :

1	$1 + x + x^2$
$-1 - x - x^2$	$1 - x + x^3 - x^4$
$x + x^2 + x^3$	
x^3	
$-x^3 - x^4 + o(x^4)$	
$x^4 + o(x^4)$	
$-x^4 + o(x^4)$	
$o(x^4)$	

Le développement limité de $\frac{1}{1+x+x^2}$ au point 0 à l'ordre 4 est donc $1 - x + x^3 - x^4 + o(x^4)$

3. $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + o(x^5)}{1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^5)}$. Ici $f(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + o(x^5)$ et $g(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^5)$ et on pose la division suivant les puissances croissantes en ne gardant que les termes de degré inférieur ou égal à 5 :

$$\begin{array}{r|l} \begin{array}{r} x \\ -x \\ \hline \frac{1}{3}x^3 \\ -\frac{1}{3}x^3 \\ \hline \frac{2}{15}x^5 \\ -\frac{2}{15}x^5 \\ \hline o(x^5) \end{array} & \begin{array}{l} -\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + o(x^5) \\ +\frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{24}x^5 + o(x^5) \\ \hline -\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x^5 + o(x^5) \\ +\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{6}x^5 + o(x^5) \\ \hline \frac{2}{15}x^5 + o(x^5) \\ -\frac{2}{15}x^5 + o(x^5) \\ \hline o(x^5) \end{array} \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^5) \\ x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 \end{array} \right.$$

Le développement limité de $\tan(x)$ au point 0 à l'ordre 5 est donc $x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5)$

4. $\frac{\sin(x)-1}{\cos(x)+1} = \frac{-1+x+o(x^2)}{2+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}$. Ici $f(x) = -1 + x + o(x^2)$ et $g(x) = 2 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$ et on pose la division suivant les puissances croissantes en ne gardant que les termes de degré inférieur ou égal à 2 :

$$\begin{array}{r|l} \begin{array}{r} -1 + x \\ +1 \\ \hline x \\ -x \\ \hline -\frac{1}{4}x^2 \\ -\frac{1}{4}x^2 \\ \hline o(x^2) \end{array} & \begin{array}{l} +o(x^2) \\ +o(x^2) \\ \hline +o(x^2) \\ +o(x^2) \\ \hline +o(x^2) \\ +o(x^2) \\ \hline o(x^2) \end{array} \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} 2 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \\ -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x^2 \end{array} \right.$$

Le développement limité de $\frac{\sin(x)-1}{\cos(x)+1}$ au point 0 à l'ordre 2 est donc $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$

5. $\frac{\ln(1+x)}{\sin(x)} = \frac{x(-1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x^2+o(x^2))}{x(1-\frac{1}{6}x^2+o(x^2))}$. Ici $f(x) = -1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 + o(x^2)$ et $g(x) = 1 - \frac{1}{6}x^2 + o(x^2)$ et on pose la division suivant les puissances croissantes en ne gardant que les termes de degré inférieur ou égal à 2 :

$$\begin{array}{r|l} \begin{array}{r} -1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 \\ -1 \\ \hline -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2 \\ \frac{1}{2}x \\ \hline \frac{1}{2}x^2 \\ -\frac{1}{2}x^2 \\ \hline o(x^2) \end{array} & \begin{array}{l} +o(x^2) \\ +o(x^2) \\ \hline +o(x^2) \\ +o(x^2) \\ \hline +o(x^2) \\ +o(x^2) \\ \hline o(x^2) \end{array} \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} 1 - \frac{1}{6}x^2 + o(x^2) \\ 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2 \end{array} \right.$$

Le développement limité de $\frac{\ln(1+x)}{\sin(x)}$ au point 0 à l'ordre 2 est donc $1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$.

Exercice A.6

Développer dans le voisinage de zéro les fonctions suivantes :

- $x \mapsto \sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}$ à l'ordre 3,
- $x \mapsto \ln(1+3x)$ à l'ordre 3,
- $x \mapsto (1 - \cos(x)) \ln(1+x^2)$ à l'ordre plus bas,
- $x \mapsto (\sin(x^2))(e^{-x} - 1)$ à l'ordre plus bas,
- $x \mapsto e^x - 1 + \sin(x) - 2x - \frac{x^2}{2}$ à l'ordre 4,
- $x \mapsto (1 + \sin(x))^{\frac{1}{x}}$ à l'ordre 2,
- $x \mapsto \frac{e^x}{\cos(x)}$ à l'ordre 3,
- $x \mapsto \frac{\cos(x)}{e^x}$ à l'ordre 3,
- $x \mapsto \frac{e^x}{(\sin(x))/x}$ à l'ordre 3.

Correction

Comme

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5),$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4),$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3),$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2),$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + o(x^3),$$

$$\sqrt{1-x} = 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16} + o(x^3),$$

donc

$$1. \sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} = \left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + o(x^3)\right) - \left(1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16} + o(x^3)\right) = x + \frac{x^3}{8} + o(x^3);$$

$$2. \ln(1+3x) = (3x) - \frac{(3x)^2}{2} + \frac{(3x)^3}{3} + o(x^3) = 3x - \frac{9x^2}{2} + 9x^3 + o(x^3);$$

$$3. (1 - \cos(x)) \ln(1+x^2) = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^5)\right) \left(x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4)\right) = \frac{x^4}{2} + o(x^4);$$

$$4. (\sin(x^2))(e^{-x} - 1) = \left(x^2 - \frac{x^6}{6} + o(x^8)\right) \left(-x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) = -x^3 + o(x^3).$$

5. À partir des développements limités des fonctions e^x et $\sin(x)$ en 0 à l'ordre 4

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4),$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4),$$

$$\text{on conclut que } f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} - 1 + x - \frac{x^3}{6} - 2x - \frac{x^2}{2} + o(x^4) = \frac{x^4}{24} + o(x^4).$$

6. On réécrit d'abord la fonction $g(x)$ sous forme exponentielle :

$$(1 + \sin(x))^{\frac{1}{x}} = e^{x^{-1} \ln(1 + \sin(x))}.$$

On commence par déterminer le développement limité en 0 à l'ordre 2 de $x \mapsto x^{-1} \ln(1 + \sin(x))$. Comme on divise par x , il faut déterminer le développement limité à l'ordre 3 de $x \mapsto \ln(1 + \sin(x))$. Or,

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4),$$

donc

$$\ln(1 + \sin(x)) = \ln\left(1 + x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right).$$

On pose $u = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$. Comme $\lim_{x \rightarrow 0} u = 0$ et

$$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + o(u^3),$$

on en déduit que

$$\ln(1 + \sin(x)) = \left(x - \frac{x^3}{6}\right) - \frac{1}{2} \left(x - \frac{x^3}{6}\right)^2 + \frac{1}{3} \left(x - \frac{x^3}{6}\right)^3 + o(x^3) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

d'où

$$x^{-1} \ln(1 + \sin(x)) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + o(x^2).$$

On a donc

$$e^{x^{-1} \ln(1 + \sin(x))} = e e^{-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + o(x^2)}.$$

On pose $v = -\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + o(x^2)$. Comme $\lim_{x \rightarrow 0} v = 0$ et

$$e^v = 1 + v + \frac{v^2}{2} + o(v^2),$$

on en déduit que

$$(1 + \sin(x))^{\frac{1}{x}} = e^{x^{-1} \ln(1 + \sin(x))} = e \left[1 + \left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6}\right) + \frac{1}{2} \left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6}\right)^2 + o(x^2) \right] = e - \frac{e}{2}x + \frac{7e}{24}x^2 + o(x^2).$$

7. À partir du DL donné dans le tableau $\cos(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)$, on trouve le DL en zéro de $\frac{1}{\cos(x)}$ (en utilisant le DL

en zéro de $\frac{1}{1-x}$:

$$\frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)} \stackrel{u = \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)}{=} 1 + u + o(u^2) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3).$$

En multipliant ce résultat par le DL donné dans le tableau $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$ on obtient finalement

$$1 + x + x^2 + \frac{2}{3}x^3 + o(x^3).$$

8. À partir du DL donné dans le tableau $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$, on trouve le DL en zéro de $\frac{1}{e^x}$ (en utilisant le DL en zéro de $\frac{1}{1+x}$) :

$$\frac{1}{e^x} = \frac{1}{1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)} \stackrel{u = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)}{=} 1 - u + u^2 + o(u^3) = 1 - x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3).$$

En multipliant ce résultat par le DL donné dans le tableau $\cos(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)$ on obtient finalement

$$1 - x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3).$$

9. À partir du DL donné dans le tableau $\cos(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)$, on trouve le DL en zéro de $\frac{1}{\cos(x)}$ (en utilisant le DL en zéro de $\frac{1}{1-x}$) :

$$\frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)} \stackrel{u = \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)}{=} 1 + u + o(u^2) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3).$$

En multipliant ce résultat par le DL donné dans le tableau $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$ on obtient finalement

$$1 + x + x^2 + \frac{2}{3}x^3 + o(x^3).$$

Exercice A.7

Calculer le développement limité à l'ordre 3 au point 0 de

$$f(x) = \arctan\left(\frac{x}{x+2}\right)$$

de trois façons :

1. par la formule de TAYLOR-YOUNG
2. par composition de développements limités
3. en commençant par calculer le développement limité de f' .

Correction

1. Pour utiliser la formule de TAYLOR-YOUNG on doit d'abord calculer les dérivées de f jusqu'à l'ordre 3 en 0 :

$$\begin{aligned} f(x) &= \arctan\left(\frac{x}{x+2}\right) & f(0) &= 0 \\ f'(x) &= \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{x+2}\right)^2} \frac{2}{(x+2)^2} = \frac{1}{x^2 + 2x + 2} & f'(0) &= \frac{1}{2} \\ f''(x) &= -2 \frac{x+1}{(x^2 + 2x + 2)^2} & f''(0) &= \frac{-1}{2} \\ f'''(x) &= 2 \frac{3x^2 + 6x + 2}{(x^2 + 2x + 2)^3} & f'''(0) &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

d'où le développement limité

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{6}x^3 + o(x^3) = \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12} + o(x^3)$$

2. Comme $u(x) \equiv \frac{x}{x+2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$, on a

$$\begin{aligned} f(x) &= \arctan(u(x)) = u(x) - \frac{(u(x))^3}{3} + o(u^3) \\ &= \frac{x}{x+2} - \frac{x^3}{3(x+2)^3} + o(x^3) \\ &= 2x \frac{x^2 + 6x + 6}{3(x^3 + 6x^2 + 12x + 8)} + o(x^3) \end{aligned}$$

En effectuant la division selon les puissances croissantes et en s'arrêtant à $o(x^2)$ car le résultat sera multiplié par x on a

6	+6x	+x ²	o(x ²)	8 + 12x + 6x ² + x ³
-6	-9x	- $\frac{9}{2}$ x ²	o(x ²)	$\frac{3}{4} - \frac{3}{8}x + \frac{1}{8}x^2$
	-3x	- $\frac{7}{2}$ x ²	o(x ²)	
	+3x	+ $\frac{9}{2}$ x ²	o(x ²)	
		x ²	o(x ²)	
		-x ²	o(x ²)	
			o(x ²)	

ainsi

$$f(x) = \frac{2x}{3} \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{8}x + \frac{1}{8}x^2 \right) + o(x^3) = \frac{x}{12} (6 - 3x + x^2) + o(x^3) = \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12} + o(x^3).$$

3. $f'(x) = \frac{1}{x^2+2x+2}$ et le développement limité de f' au point 0 à l'ordre 2 peut être calculé par la division selon les puissances croissantes :

1			o(x ²)	2 + 2x + x ²
-1	-x	- $\frac{1}{2}$ x ²	o(x ²)	$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x^2$
	-x	- $\frac{1}{2}$ x ²	o(x ²)	
	x	+x ²	o(x ²)	
		$\frac{1}{2}$ x ²	o(x ²)	
		- $\frac{1}{2}$ x ²	o(x ²)	
			o(x ²)	

ainsi

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x^2 \right) dx + o(x^3) = \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12} + o(x^3).$$

Exercice A.8

1. Écrire le DL à l'ordre 2 au voisinage de 0 de la fonction $f(x) = \frac{1}{1+x}$.
2. **En déduire** le DL à l'ordre 3 au voisinage de 0 de la fonction $g(x) = \ln(1+x)$. (Suggestion : calculer $g'(x)$.)
3. **En déduire** le DL à l'ordre 3 au voisinage de 0 de la fonction $h(x) = \ln(1-x)$.
4. **En déduire** $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$

Correction

1. $f(x) = 1 - x + x^2 + o(x^2)$.
2. $g(x) = \int_0^x f(t) dt = \int_0^x (1 - t + t^2 + o(t^2)) dt = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$.
3. $h(x) = g(-x) = (-x) - \frac{(-x)^2}{2} + \frac{(-x)^3}{3} + o(x^3) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$.
4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} (\ln(1+x) - \ln(1-x)) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \right) - \left(-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3) \right) \right)$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(2x + \frac{2}{3}x^3 + o(x^3) \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(2 + \frac{2}{3}x^2 + o(x^2) \right) = 2$

Exercice A.9

1. Écrire le DL à l'ordre 2 au voisinage de 0 de la fonction $f(x) = \frac{1}{1-x}$.

2. **En déduire** le DL à l'ordre 3 au voisinage de 0 de la fonction $g(x) = \ln(1-x)$. (Suggestion : qui est-ce $g'(x)$?)
3. **En déduire** le DL à l'ordre 3 au voisinage de 0 de la fonction $h(x) = \ln(1+x)$.
4. **En déduire** $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$

Correction

1. $f(x) = 1 + x + x^2 + o(x^2)$.
2. $g(x) = -\int_0^x f(t) dt = -\int_0^x (1 + t + t^2 + o(t^2)) dt = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$.
3. $h(x) = g(-x) = -(-x) - \frac{(-x)^2}{2} - \frac{(-x)^3}{3} + o(x^3) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$.
4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} (\ln(1-x) - \ln(1+x)) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\left(-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) - \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) \right)$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(-2x - \frac{2}{3}x^3 + o(x^3)\right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(-2 - \frac{2}{3}x^2 + o(x^2)\right) = -2$

Exercice A.10

1. Calculer le développement limité en $x = 0$ à l'ordre 3 de $\ln(1 + \sin^2(x))$. En déduire la limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin^2(x))}{2x^2}$.
2. Calculer le développement limité en $x = 0$ à l'ordre 3 de $\ln(1 + x \cos^2(x))$. En déduire la limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x \cos^2(x))}{4x}$.
3. Calculer le développement limité en $x = 0$ à l'ordre 3 de $\ln(1 - \sin^2(x))$. En déduire la limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - \sin^2(x))}{2x^2}$.
4. Calculer le développement limité en $x = 0$ à l'ordre 3 de $\ln(1 - x \cos^2(x))$. En déduire la limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - x \cos^2(x))}{3x}$.
5. Calculer le développement limité en $x = 0$ à l'ordre 3 de $\ln(1 - \sin^2(x))$. En déduire la limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - \sin^2(x))}{7x^2}$.

Correction

1. Étant donné que

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$$

alors

$$\sin^2(x) = x^2 + o(x^4).$$

Comme $x^2 + o(x^4) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ et comme le développement limité de $\ln(1 + u)$ en $u = 0$ est

$$\ln(1 + u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{u^n}{n} + o(u^n)$$

on conclut que

$$\ln(1 + \sin^2(x)) = x^2 + o(x^4).$$

Donc

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin^2(x))}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}.$$

2. Étant donné que

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^4)$$

alors

$$\cos^2(x) = 1 - x^2 + o(x^4).$$

Comme $x \cos^2(x) = x - x^3 + o(x^4) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ et comme le développement limité de $\ln(1 + u)$ en $u = 0$ est

$$\ln(1 + u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{u^n}{n} + o(u^n)$$

on conclut que

$$\ln(1 + x \cos^2(x)) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{2}{3}x^3 + o(x^4).$$

Donc

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x \cos^2(x))}{4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{4x} = \frac{1}{4}.$$

3. Étant donné que

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$$

alors

$$\sin^2(x) = x^2 + o(x^4).$$

Comme $\sin^2(x) = x^2 + o(x^4) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ et comme le développement limité de $\ln(1 - u)$ en $u = 0$ est

$$\ln(1 - u) = -u - \frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + \dots - \frac{u^n}{n} + o(u^n)$$

on conclut que

$$\ln(1 - \sin^2(x)) = -x^2 + o(x^4).$$

Donc

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - \sin^2(x))}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^2}{2x^2} = -\frac{1}{2}.$$

4. Étant donné que

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^4)$$

alors

$$\cos^2(x) = 1 - x^2 + o(x^4).$$

Comme $x \cos^2(x) = x - x^3 + o(x^4) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ et comme le développement limité de $\ln(1 - u)$ en $u = 0$ est

$$\ln(1 - u) = -u - \frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + \dots - \frac{u^n}{n} + o(u^n)$$

on conclut que

$$\ln(1 - x \cos^2(x)) = -x - \frac{x^2}{2} + \frac{2}{3}x^3 + o(x^4).$$

Donc

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - x \cos^2(x))}{4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{4x} = -\frac{1}{4}.$$

5. Étant donné que

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$$

alors

$$\sin^2(x) = x^2 + o(x^4).$$

Comme $\sin^2(x) = x^2 + o(x^4) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ et comme le développement limité de $\ln(1 - u)$ en $u = 0$ est

$$\ln(1 - u) = -u - \frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + \dots - \frac{u^n}{n} + o(u^n)$$

on conclut que

$$\ln(1 - \sin^2(x)) = -x^2 + o(x^4).$$

Donc

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - \sin^2(x))}{7x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^2}{7x^2} = -\frac{1}{7}.$$

Exercice A.11

1. Écrire le DL de $\cos(x)$ et de e^{2x} en 0 à l'ordre 2. En déduire le DL de $\frac{\cos(x)}{e^{2x}}$ en 0 à l'ordre 2. Écrire le DL de $\ln(1 + u)$ en

0 à l'ordre 2. En déduire le DL de $\ln\left(\frac{\cos(x)}{e^{2x}}\right)$ en 0 à l'ordre 2. Calculer

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(\frac{\cos(x)}{e^{2x}}\right) + 2x}{x^2}.$$

2. Écrire le DL de $\cos(2x)$ et de e^x en 0 à l'ordre 2. En déduire le DL de $\frac{\cos(2x)}{e^x}$ en 0 à l'ordre 2. Écrire le DL de $\ln(1+u)$ en 0 à l'ordre 2. En déduire le DL de $\ln\left(\frac{\cos(2x)}{e^x}\right)$ en 0 à l'ordre 2. Calculer

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(\frac{\cos(2x)}{e^x}\right) + x}{x^2}.$$

3. Écrire le DL de $\sin(2x)$ et de e^{2x} en 0 à l'ordre 2. En déduire le DL de $\frac{\sin(2x)}{e^{2x}}$ en 0 à l'ordre 2. Écrire le DL de $\ln(1+u)$ en 0 à l'ordre 1. En déduire le DL de $\ln\left(\frac{\sin(2x)}{2xe^{2x}}\right)$ en 0 à l'ordre 1. Calculer

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(\frac{\sin(2x)}{2xe^{2x}}\right) + 2x}{x}.$$

Correction

1. $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ et $e^{2x} = 1 + 2x + 2x^2 + o(x^2)$ lorsque $x \approx 0$. On pose la division suivant les puissances croissantes en ne gardant que les termes de degré inférieur ou égal à 2 :

$$\begin{array}{r|l} 1 & -\frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \\ -1 & -2x \quad -2x^2 + o(x^2) \\ \hline & -2x \quad -\frac{5}{2}x^2 + o(x^2) \\ & 2x \quad +4x^2 + o(x^2) \\ \hline & \frac{3}{2}x^2 + o(x^2) \\ & -\frac{3}{2}x^2 + o(x^2) \\ \hline & o(x^2) \end{array} \quad \begin{array}{l} 1 + 2x + 2x^2 + o(x^2) \\ \hline 1 - 2x + \frac{3}{2}x^2 \end{array}$$

Donc $\frac{\cos(x)}{e^{2x}} = \frac{1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)}{1 + 2x + 2x^2 + o(x^2)} = 1 - 2x + \frac{3}{2}x^2 + o(x^2)$ lorsque $x \approx 0$.

$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + o(u^2)$ lorsque $u \approx 0$ donc $\ln\left(\frac{\cos(x)}{e^{2x}}\right) = -2x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$ lorsque $x \approx 0$. Notons que dans ce cas il n'est pas nécessaire de calculer d'abord le DL de $\frac{\cos(x)}{e^{2x}}$ mais il suffit le DL de $\cos(x)$ car $\ln\left(\frac{\cos(x)}{e^{2x}}\right) = \ln(\cos(x)) - \ln(e^{2x}) = \ln(\cos(x)) - 2x = \ln\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) - 2x = -\frac{x^2}{2} + o(x^2) - 2x$ lorsque $x \approx 0$.

Le DL précédent permet de calculer facilement la limite donnée :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(\frac{\cos(x)}{e^{2x}}\right) + 2x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) + 2x}{x^2} = -\frac{1}{2}.$$

2. $\cos(2x) = 1 - 2x^2 + o(x^2)$ et $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$ lorsque $x \approx 0$. On pose la division suivant les puissances

croissantes en ne gardant que les termes de degré inférieur ou égal à 2 :

$$\begin{array}{r|l} \begin{array}{r} 1 \qquad -2x^2 \quad +o(x^2) \\ -1 \quad -x \quad -\frac{1}{2}x^2 \quad +o(x^2) \\ \hline -x \quad -\frac{5}{2}x^2 \quad +o(x^2) \\ x \quad +x^2 \quad +o(x^2) \\ \hline -\frac{3}{2}x^2 \quad +o(x^2) \\ \frac{3}{2}x^2 \quad +o(x^2) \\ \hline o(x^2) \end{array} & \begin{array}{l} 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \\ \hline 1 - x - \frac{3}{2}x^2 \end{array} \end{array}$$

Donc $\frac{\cos(2x)}{e^x} = \frac{1 - 2x^2 + o(x^2)}{1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)} = 1 - x - \frac{3}{2}x^2 + o(x^2)$ lorsque $x \approx 0$.

$\ln(1 + u) = u - \frac{u^2}{2} + o(u^2)$ lorsque $u \approx 0$ donc $\ln\left(\frac{\cos(2x)}{e^x}\right) = -x - 2x^2 + o(x^2)$ lorsque $x \approx 0$. Notons que dans ce cas il n'est pas nécessaire de calculer d'abord le DL de $\frac{\cos(2x)}{e^x}$ mais il suffit le DL de $\cos(2x)$ car $\ln\left(\frac{\cos(2x)}{e^x}\right) = \ln(\cos(2x)) - \ln(e^x) = \ln(\cos(2x)) - x = \ln(1 - 2x^2 + o(x^2)) - x = -2x^2 + o(x^2) - x$ lorsque $x \approx 0$.

Le DL précédent permet de calculer facilement la limite donnée :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(\frac{\cos(x)}{e^{2x}}\right) + x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x - 2x^2 + o(x^2) + x}{x^2} = -2.$$

3. $\sin(2x) = 2x + o(x^2)$ et $e^{2x} = 1 + 2x + 2x^2 + o(x^2)$ lorsque $x \approx 0$. On pose la division suivant les puissances croissantes en ne gardant que les termes de degré inférieur ou égal à 2 :

$$\begin{array}{r|l} \begin{array}{r} 2x \qquad \qquad +o(x^2) \\ -2x \quad -4x^2 \quad +o(x^2) \\ \hline -4x^2 \quad +o(x^2) \\ +4x^2 \quad +o(x^2) \\ \hline o(x^2) \end{array} & \begin{array}{l} 1 + 2x + 2x^2 + o(x^2) \\ \hline 2x - 4x^2 \end{array} \end{array}$$

Donc $\frac{\sin(2x)}{e^{2x}} = \frac{2x + o(x^2)}{1 + 2x + 2x^2 + o(x^2)} = 2x - 4x^2 + o(x^2)$ lorsque $x \approx 0$.

$\ln(1 + u) = u + o(u)$ lorsque $u \approx 0$ donc $\ln\left(\frac{\sin(2x)}{2xe^{2x}}\right) = \ln\left(\frac{2x - 4x^2 + o(x^2)}{2x}\right) = \ln(1 - 2x + o(x)) = -2x + o(x)$ lorsque $x \approx 0$.

Le DL précédent permet de calculer facilement la limite donnée :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(\frac{\sin(2x)}{2xe^{2x}}\right) + 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2x + o(x) + 2x}{x} = 0.$$

Exercice A.12 (Développements limités au point $x_0 \neq 0$)

Calculer les développements limités suivants :

1. \sqrt{x} au point 2 à l'ordre 3,
2. $\sin(x)$ au point $\frac{\pi}{3}$ à l'ordre 3,
3. $\cos(x)$ au point $\frac{\pi}{6}$ à l'ordre 3,
4. $\frac{\ln(x)}{(1+x)^2}$ en 1 à l'ordre 2.
5. x^3 au point $x = 1$ à l'ordre 4,
6. x^3 au point $x = -1$ à l'ordre 4,
7. x^3 au point $x = -2$ à l'ordre 4,
8. x^3 au point $x = 2$ à l'ordre 4,
9. x^3 au point $x = -3$ à l'ordre 4,
10. $x^4 - 1$ au point -1 à l'ordre 3,
11. $x^4 + 1$ au point 1 à l'ordre 3.

Correction

Soit f une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} et $x_0 \in \mathbb{R}$. Si f et toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre n sont définies et continues en tout point d'un intervalle ouvert contenant x_0 alors f admet un développement limité à l'ordre n en x_0 donné par la formule

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + (x-x_0)^n \varepsilon(x-x_0).$$

- On pose $h = x - 2$, alors $x = h + 2$ et on a $\sqrt{x} = \sqrt{2+h} = \sqrt{2}\sqrt{1+\frac{h}{2}}$. On se rappelle que, pour $u \rightarrow 0$, on peut écrire $\sqrt{1+u} = 1 + \frac{u}{2} - \frac{u^2}{8} + \frac{u^3}{16} + o(u^3)$; ici $u = \frac{h}{2}$ donc $\sqrt{x} = \sqrt{2+h} = \sqrt{2}\sqrt{1+\frac{h}{2}} = \sqrt{2}\sqrt{1+u} = \sqrt{2}\left(1 + \frac{u}{2} - \frac{u^2}{8} + \frac{u^3}{16} + o(u^3)\right) = \sqrt{2}\left(1 + \frac{h}{4} - \frac{h^2}{32} + \frac{h^3}{128} + o(h^3)\right) = \sqrt{2}\left(1 + \frac{(x-2)}{4} - \frac{(x-2)^2}{32} + \frac{(x-2)^3}{128} + o((x-2)^3)\right)$
- Pour calculer le développement limité de $\sin(x)$ en $\frac{\pi}{3}$ à l'ordre 3 on utilise la formule de Taylor :

$$f(x) = \sum_a^{k=n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + o((x-a)^k).$$

Ici $n = 3$, $a = \frac{\pi}{3}$ et $f(x) = \sin(x)$ d'où

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin(x), & f(a) &= \frac{\sqrt{3}}{2}; \\ f'(x) &= \cos(x), & f'(a) &= \frac{1}{2}; \\ f''(x) &= -\sin(x), & f''(a) &= -\frac{\sqrt{3}}{2}; \\ f'''(x) &= -\cos(x), & f'''(a) &= -\frac{1}{2}; \end{aligned}$$

donc

$$\sin(x) \underset{\pi/3}{=} \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{4}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 - \frac{1}{12}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3 + o\left(\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3\right).$$

- Pour calculer le développement limité de $\cos(x)$ en $\frac{\pi}{6}$ à l'ordre 3 on utilise la formule de Taylor-Young :

$$f(x) = \sum_a^{k=n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + o((x-a)^k).$$

Ici $n = 3$, $a = \frac{\pi}{6}$ et $f(x) = \cos(x)$ d'où

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos(x), & f(a) &= \frac{\sqrt{3}}{2}; \\ f'(x) &= -\sin(x), & f'(a) &= -\frac{1}{2}; \\ f''(x) &= -\cos(x), & f''(a) &= -\frac{\sqrt{3}}{2}; \\ f'''(x) &= \sin(x), & f'''(a) &= \frac{1}{2}; \end{aligned}$$

donc

$$\cos(x) \underset{\pi/6}{=} \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - \frac{\sqrt{3}}{4}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^2 + \frac{1}{12}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^3 + o\left(\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^3\right).$$

- On pose $y = x - 1$. Alors $\frac{\ln(x)}{(1+x)^2} = \frac{\ln(1+y)}{(2+y)^2}$. Comme $\lim_{x \rightarrow 1} y = 0$, on calcul le développement limité de $\frac{\ln(1+y)}{(2+y)^2}$ en zéro. Or,

$$\begin{aligned} \ln(1+y) &= y - \frac{1}{2}y^2 + o(y^2), \\ (2+y)^{-2} &= \frac{1}{4}\left(1 + \frac{y}{2}\right)^{-2} = \frac{1}{4}\left(1 - 2\frac{y}{2} + \frac{(-2)(-2-1)}{2} \frac{y^2}{2^2} + o(y^2)\right) = \frac{1}{4}\left(1 - y + \frac{3}{2}y^2 + o(y^2)\right), \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{1}{4} \left(1 - (x-1) + \frac{3}{2}(x-1)^2 + o((x-1)^2) \right).$$

5. $n = 4$, $f(x) = x^3$ et $x_0 = 1$ donc

$$\begin{aligned} f(x) &= f(1) \frac{(x-1)^0}{0!} + f'(1) \frac{(x-1)^1}{1!} + f''(1) \frac{(x-1)^2}{2!} + f^{(3)}(1) \frac{(x-1)^3}{3!} + f^{(4)}(1) \frac{(x-1)^4}{4!} \\ &= 1 + 3(x-1) + 3(x-1)^2 + (x-1)^3. \end{aligned}$$

6. $n = 4$, $f(x) = x^3$ et $x_0 = -1$ donc

$$\begin{aligned} f(x) &= f(-1) \frac{(x+1)^0}{0!} + f'(-1) \frac{(x+1)^1}{1!} + f''(-1) \frac{(x+1)^2}{2!} + f^{(3)}(-1) \frac{(x+1)^3}{3!} + f^{(4)}(-1) \frac{(x+1)^4}{4!} \\ &= -1 + 3(x+1) - 3(x+1)^2 + (x+1)^3. \end{aligned}$$

7. $n = 4$, $f(x) = x^3$ et $x_0 = -2$ donc

$$\begin{aligned} f(x) &= f(-2) \frac{(x+2)^0}{0!} + f'(-2) \frac{(x+2)^1}{1!} + f''(-2) \frac{(x+2)^2}{2!} + f^{(3)}(-2) \frac{(x+2)^3}{3!} + f^{(4)}(-2) \frac{(x+2)^4}{4!} \\ &= -8 + 12(x+2) - 6(x+2)^2 + (x+2)^3. \end{aligned}$$

8. $n = 4$, $f(x) = x^3$ et $x_0 = 2$ donc

$$\begin{aligned} f(x) &= f(2) \frac{(x-2)^0}{0!} + f'(2) \frac{(x-2)^1}{1!} + f''(2) \frac{(x-2)^2}{2!} + f^{(3)}(2) \frac{(x-2)^3}{3!} + f^{(4)}(2) \frac{(x-2)^4}{4!} \\ &= 8 + 12(x-2) + 6(x-2)^2 + (x-2)^3. \end{aligned}$$

9. $n = 4$, $f(x) = x^3$ et $x_0 = -3$ donc

$$\begin{aligned} f(x) &= f(-3) \frac{(x+3)^0}{0!} + f'(-3) \frac{(x+3)^1}{1!} + f''(-3) \frac{(x+3)^2}{2!} + f^{(3)}(-3) \frac{(x+3)^3}{3!} + f^{(4)}(-3) \frac{(x+3)^4}{4!} \\ &= -27 + 27(x+3) - 9(x+3)^2 + (x+3)^3. \end{aligned}$$

10. Selon la formule de Taylor, le développement limité à l'ordre n au point x_0 de f peut être calculé selon la formule

$$DL_n(x_0) = \sum_{k=0}^{k=n} f^{(k)}(x_0) \frac{(x-x_0)^k}{k!} + o((x-x_0)^n). \text{ Ici } f(x) = x^4 - 1, x_0 = -1 \text{ et}$$

$$\begin{array}{ll} f^{(0)}(x) = x^4 - 1 & f^{(0)}(-1) = 0, \\ f^{(i)}(x) = 4x^3 & f^{(i)}(-1) = -4, \\ f^{(ii)}(x) = 12x^2 & f^{(ii)}(-1) = 12, \\ f^{(iii)}(x) = 24x & f^{(iii)}(-1) = -24, \end{array}$$

donc

$$\begin{aligned} x^4 - 1 &= f^{(0)}(-1) \frac{(x+1)^0}{0!} + f^{(i)}(-1) \frac{(x+1)^1}{1!} + f^{(ii)}(-1) \frac{(x+1)^2}{2!} + f^{(iii)}(-1) \frac{(x+1)^3}{3!} + o((x+1)^3) \\ &= 0 \frac{1}{1} + (-4) \frac{(x+1)}{1} + 12 \frac{(x+1)^2}{2} + (-24) \frac{(x+1)^3}{6} + o((x+1)^3) \\ &= -4(x+1) + 6(x+1)^2 - 4(x+1)^3 + o((x+1)^3). \end{aligned}$$

11. Selon la formule de Taylor, le développement limité à l'ordre n au point x_0 de f peut être calculé selon la formule

$$DL_n(x_0) = \sum_{k=0}^{k=n} f^{(k)}(x_0) \frac{(x-x_0)^k}{k!} + o((x-x_0)^n). \text{ Ici } f(x) = x^4 + 1, x_0 = 1 \text{ et}$$

$$\begin{array}{ll} f^{(0)}(x) = x^4 + 1 & f^{(0)}(1) = 2, \\ f^{(i)}(x) = 4x^3 & f^{(i)}(1) = 4, \\ f^{(ii)}(x) = 12x^2 & f^{(ii)}(1) = 12, \end{array}$$

$$f^{(iii)}(x) = 24x$$

$$f^{(iii)}(1) = 24,$$

donc

$$\begin{aligned} x^4 + 1 &= f^{(0)}(1) \frac{(x-1)^0}{0!} + f^{(i)}(1) \frac{(x-1)^1}{1!} + f^{(ii)}(1) \frac{(x-1)^2}{2!} + f^{(iii)}(1) \frac{(x-1)^3}{3!} + o((x-1)^3) \\ &= 2 \frac{1}{1} + 4 \frac{(x-1)}{1} + 12 \frac{(x-1)^2}{2} + 24 \frac{(x-1)^3}{6} + o((x-1)^3) \\ &= 2 + 4(x-1) + 6(x-1)^2 + 4(x-1)^3 + o((x-1)^3). \end{aligned}$$

Exercice A.13 (Développements limités généralisés)

Calculer les développements limités suivants :

1. $f(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x}}$ en $+\infty$ à l'ordre 3,
2. $f(x) = \frac{x}{x-1} \sqrt{x^2+1}$ en $-\infty$ et en $+\infty$ à l'ordre 1,
3. $f(x) = e^{2/x}$ en $+\infty$ à l'ordre 3,
4. $f(x) = e^{3/x}$ en $+\infty$ à l'ordre 3,
5. $f(x) = e^{-2/x}$ en $-\infty$ à l'ordre 3,
6. $f(x) = e^{-1/x}$ en $-\infty$ à l'ordre 3,
7. $f(x) = e^{4/x}$ en $+\infty$ à l'ordre 3,
8. $f(x) = \frac{x^2-x}{1+x}$ en $+\infty$ à l'ordre 2,
9. $f(x) = \frac{\sqrt{3+x+x^2} - \sqrt{2-x+x^2}}{x}$ en $+\infty$ à l'ordre 2.

Correction

Soit f définie sur un intervalle $]A, +\infty[$ (ou $] -\infty, A[$). On dit que f admet un développement limité généralisé à l'ordre n en $a = +\infty$ (ou en $a = -\infty$) s'il existe un polynôme P tel que $f(x) = P(1/x) + o(1/x^n)$ au voisinage de ce point. L'expression $P(1/x)$ n'est pas un polynôme, mais a des propriétés similaires. Dans la pratique, on peut obtenir un développement limité de $f(x)$ en $a = +\infty$ (ou en $a = -\infty$) en posant $x = 1/t$ (de sorte que t tend vers 0, avec un signe fixe) et en tentant de développer $f(1/t)$ au voisinage de 0.

1. On pose $u = \frac{1}{x}$, ainsi $u \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$. Alors $\frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{x+2}{x}} = \sqrt{1 + \frac{2}{x}} = \sqrt{1+2u} = 1 + \frac{2u}{2} - \frac{(2u)^2}{8} + \frac{(2u)^3}{16} + o(u^3) = 1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{2x^3} + o(x^{-3})$
2. \triangleright Développement limité asymptotique en $+\infty$: on pose $y = \frac{1}{x}$ et on remarque que $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 0^+$. Alors

$$\begin{aligned} \ell^+(y) &= \frac{1}{y} \frac{y}{1-y} \sqrt{\frac{1+y^2}{y^2}} \stackrel{(y>0)}{=} \frac{1}{y(1-y)} \sqrt{1+y^2} \\ &= \frac{1}{y} (1+y+y^2+o(y^2)) \left(1 + \frac{y^2}{2} + o(y^2)\right) = \frac{1}{y} + 1 + \frac{3}{2}y + o(y^2) \end{aligned}$$

d'où

$$\ell(x) = x + 1 + \frac{3}{2} \frac{1}{x} + o(x^{-1}).$$

On en déduit que le graphe de la fonction ℓ admet la droite d'équation $y = x + 1$ comme asymptote en $+\infty$.

- \triangleright Développement limité asymptotique en $-\infty$: on pose encore $y = \frac{1}{x}$ et on remarque que $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = 0^-$. Alors

$$\begin{aligned} \ell^-(y) &= \frac{1}{y} \frac{y}{1-y} \sqrt{\frac{1+y^2}{y^2}} \stackrel{(y<0)}{=} -\frac{1}{y(1-y)} \sqrt{1+y^2} \\ &= -\frac{1}{y} (1+y+y^2+o(y^2)) \left(1 + \frac{y^2}{2} + o(y^2)\right) = \frac{1}{y} + 1 + \frac{3}{2}y + o(y^2) \end{aligned}$$

d'où

$$\ell(x) = -x - 1 - \frac{3}{2} \frac{1}{x} + o(x^{-1}).$$

On en déduit que le graphe de la fonction ℓ admet la droite d'équation $y = -x - 1$ comme asymptote en $-\infty$.

3. $f(x) = e^{2/x}$, $n = 3$ et $a = +\infty$ donc

$$e^{2/x} = e^{2t} = e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{6} + o(y^3) = 1 + 2t + \frac{4t^2}{2} + \frac{8t^3}{6} + o(t^3) = 1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{4}{3x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

4. $f(x) = e^{3/x}$, $n = 3$ et $a = +\infty$ donc

$$e^{3/x} = e^{3t} = e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{6} + o(y^3) = 1 + 3t + \frac{9t^2}{2} + \frac{27t^3}{6} + o(t^3) = 1 + \frac{3}{x} + \frac{9}{2x^2} + \frac{9}{2x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

5. $f(x) = e^{-2/x}$, $n = 3$ et $a = -\infty$ donc

$$e^{-2/x} = e^{-t} = e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{6} + o(y^3) = 1 - t + \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{6} + o(t^3) = 1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{2x^2} - \frac{4}{3x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

6. $f(x) = e^{-1/x}$, $n = 3$ et $a = -\infty$ donc

$$e^{-1/x} = e^{-t} = e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{6} + o(y^3) = 1 - t + \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{6} + o(t^3) = 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{6x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

7. $f(x) = e^{4/x}$, $n = 3$ et $a = \infty$ donc

$$e^{4/x} = e^t = e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{6} + o(y^3) = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + o(t^3) = 1 + \frac{4}{x} + \frac{8}{x^2} + \frac{32}{3x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

8. On pose $y = \frac{1}{x}$. Il s'agit de calculer le développement limité en zéro à l'ordre 3 de la fonction $r(y) = \frac{1-y}{y(1+y)}$.

Or, $\frac{1-y}{1+y} = (1-y)(1-y+y^2-y^3+o(y^3))$ donc $r(y) = \frac{1}{y} - 2y + 2y^2 - 2y^3 + o(y^3)$ et finalement $f(x) = x - 2 + \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2} + o(x^{-2})$.

9.

$$\begin{aligned} f(1/t) &= t \left(\sqrt{3 + \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2}} - \sqrt{2 - \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2}} \right) \\ &= \sqrt{3t^2 + t + 1} - \sqrt{2t^2 - t + 1} \\ &= (1-A)^{1/2} - (1-B)^{1/2} \quad \text{avec } A = -t - 3t^2 \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0, B = t - 2t^2 \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0 \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}A + \frac{1}{8}A^2 + o(A^2) \right) - \left(1 - \frac{1}{2}B + \frac{1}{8}B^2 + o(B^2) \right) \\ &= \left(1 + \frac{1}{2}t + \frac{3}{2}t^2 + \frac{1}{8}t^2 + o(t^2) \right) - \left(1 - \frac{1}{2}t + t^2 + \frac{1}{8}t^2 + o(t^2) \right) \\ &= t + \frac{1}{2}t^2 + o(t^2) \\ &= \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + o(1/x^2). \end{aligned}$$

Exercice A.14 (Calculs de limites)

Calculer les limites suivantes

- $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \cos(x)}{\sin(x)} \right)$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\arctan x - \sin(x)}{\tan x - \arcsin x} \right)$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\cosh \frac{1}{x^2} \right)^{x^2}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos(x) - e^x}{\arcsin x - x^2} \right)$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x - \sin(x)} + \frac{1}{x - \sinh x} \right)$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} \ln \frac{\sin(x)}{x} \right)$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{7}{x} \right)^x$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)} \right)$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)(\tanh x - x)}{\ln(1+x)}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3 + x + 1} - \sqrt{x^2 + x}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin(x)}{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(\tan x - \sin(x)) - x^3}{x^5}$
- $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin(x) - \sin a}{x - a}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - x \cos(x)}{x - \sin(x)}$
- $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\cos(x))^{\frac{\pi}{2} - x}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin(x)}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\cosh(x) + \cos(x) - 2)}{\sinh(x) + \sin(x) - 2x}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh(x) + \sin(x) - 2x}{x(\cosh(x) + \cos(x) - 2)}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\cosh(x) + \cos(x) - 2)}{\tanh(x) + \tan(x) - 2x}$
- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \ln(x)}{x^2 - 1}$
- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3x+1} + \sqrt{2-x} - \sqrt{2x+7}}{x^2 + x - 2}$
- $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{1-3x} + \sqrt{x+2} - \sqrt{7-2x}}{x^2 - x - 2}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3 + x + 1} - \sqrt{x^2 + x}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(2x)}{e^x - 1 - x}$

Correction

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{\sin(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x + o(x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{1 + o(x)} = 0$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - \sin(x)}{\tan x - \arcsin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) - \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)}{\left(x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) - \left(x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{x^3}{6} + o(x^3)}{\frac{x^3}{6} + o(x^3)} = -1$$

$$3. \text{ On pose } u = \frac{1}{x^2}, \text{ alors } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\cosh\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)^{x^2} = \lim_{u \rightarrow 0} (\cosh(u))^{1/u} = \lim_{u \rightarrow 0} \exp\left(\frac{\ln(\cosh(u))}{u}\right) = \lim_{u \rightarrow 0} \exp\left(\frac{\ln\left(\frac{e^u + e^{-u}}{2}\right)}{u}\right)$$

$$= \lim_{u \rightarrow 0} \exp\left(\frac{\ln\left(1 + \frac{u^2}{2} + o(u^2)\right)}{u}\right) = \lim_{u \rightarrow 0} \exp\left(\frac{\frac{u^2}{2} + o(u^2)}{u}\right) = \lim_{u \rightarrow 0} \exp\left(\frac{u}{2} + o(u)\right) = 1$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - e^x}{\arcsin x - x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) - \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)}{(x + o(x)) - x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1 - x + o(x)}{1 + x + o(x)} = -1$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x - \sin(x)} + \frac{1}{x - \sinh x}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3}{x^3 + o(x^3)} + \frac{3}{x^3 + o(x^3)}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6}{x^3 + o(x^3)} \text{ n'existe pas car } \frac{1}{x^3} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \pm \infty$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \ln \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \ln \frac{x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \ln \left(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)\right) = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + u + o(u))}{-6u} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u + o(u)}{-6u} = -\frac{1}{6}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{7}{x}\right)^x = \lim_{u \rightarrow 0} (1 + 7u)^{1/u} = \lim_{u \rightarrow 0} \exp\left(\frac{\ln(1 + 7u)}{u}\right) = \lim_{v \rightarrow 0} \exp\left(\frac{7 \ln(1 + v)}{v}\right) = \lim_{v \rightarrow 0} \exp\left(\frac{7(v - v^2/2 + o(v^2))}{v}\right)$$

$$= \lim_{v \rightarrow 0} \exp(7(1 - v/2 + o(v))) = e^7$$

$$8. \text{ Comme } \frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)} = \frac{\ln(1+x) - x}{x \ln(1+x)} = \frac{x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) - x}{x^2 + o(x^2)} \text{ d'où } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)}\right) = -\frac{1}{2}.$$

9. En déterminant les développements limités en 0 à l'ordre 3 des fonctions $x \mapsto \sin(x)$, $x \mapsto \ln(1+x)$ et $x \mapsto \tanh(x)$ on obtient

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)(\tanh(x) - x)}{\ln(1+x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x + o(x))(-\frac{x^3}{3} + o(x^3))}{x + o(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + o(1))(-\frac{x^3}{3} + o(x^3))}{1 + o(1)} = 0.$$

$$10. \text{ Comme } (1+x)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{\ln(1+x)}{x}} \text{ et en utilisant le développement limité de } \ln(1+x) \text{ en } 0 \text{ on a } (1+x)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x}} = e^{1 - \frac{x}{2} + o(x)} \text{ d'où } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x} = -\frac{e}{2}.$$

11. On note $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + x + 1} - \sqrt{x^2 + x}$. On réécrit d'abord la fonction comme

$$f(x) = x \left[\left(1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)^{\frac{1}{3}} - \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}} \right].$$

On pose $y = \frac{1}{x}$. Alors

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3 + x + 1} - \sqrt{x^2 + x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{(1 + y^2 + y^3)^{\frac{1}{3}} - (1 + y)^{\frac{1}{2}}}{y}.$$

En utilisant le développement limité de $(1+y)^\alpha$ en 0 on a

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{(1 + y^2 + y^3)^{\frac{1}{3}} - (1 + y)^{\frac{1}{2}}}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1 + o(y) - 1 - \frac{y}{2} + o(y)}{y} = -\frac{1}{2}.$$

12. En utilisant les développements limités on a :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin(x)}{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)}{1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - 1 - x - \frac{x^2}{2} + o(x^3)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^3}{6} + o(x^3)}{\frac{x^3}{6} + o(x^3)} = 1.$$

13. En utilisant les développements limités on a :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(\tan(x) - \sin(x)) - x^3}{x^5} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} - x + \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{120} + o(x^5)\right) - x^3}{x^5} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^5}{4} + o(x^5)}{x^5} = \frac{1}{4}.$$

14. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin(x) - \sin(a)}{x - a} = \cos(a)$. (On s'aperçoit que c'est la définition de la dérivée de $\sin(x)$ en $x = a$.)

15. En utilisant les développements limités on a :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - x \cos(x)}{x - \sin(x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - x \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)}{x - x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^3}{2} + o(x^3)}{\frac{x^3}{6} + o(x^3)} = 3. \end{aligned}$$

16. On pose $y = \frac{\pi}{2} - x$, alors

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\cos(x))^{\frac{\pi}{2} - x} &= \lim_{y \rightarrow 0} (\cos(\frac{\pi}{2} - y))^y = \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} (\sin(y))^y = \lim_{y \rightarrow 0} e^{y \ln(\sin(y))} = \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} e^{y \ln\left(y - \frac{y^3}{6} + o(y^3)\right)} = \lim_{y \rightarrow 0} e^{y \ln\left(y(1 - \frac{y^2}{6} + o(y^2))\right)} = \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} e^{y \ln y} e^{y \ln\left(1 - \frac{y^2}{6} + o(y^2)\right)} = \lim_{y \rightarrow 0} e^{y \ln y} e^{y\left(-\frac{y^2}{6} + o(y^2)\right)} = \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} e^{y \ln y} e^{-\frac{y^3}{6} + o(y^3)} = 1. \end{aligned}$$

17. Pour calculer la limite donnée on peut utiliser les développements limités :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin(x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - 1 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - 2x + o(x^3)}{x - x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\frac{x^3}{6} + o(x^3)}{\frac{x^3}{6} + o(x^3)} = 2. \end{aligned}$$

Sinon on peut utiliser la règle de L'Hôpital car

$$\begin{aligned} n(x) &= e^x - e^{-x} - 2x, & \lim_{x \rightarrow 0} n(x) &= 0; \\ d(x) &= x - \sin(x), & \lim_{x \rightarrow 0} d(x) &= 0. \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} n'(x) &= e^x + e^{-x} - 2, & \lim_{x \rightarrow 0} n'(x) &= 0; \\ d'(x) &= 1 - \cos(x), & \lim_{x \rightarrow 0} d'(x) &= 0; \\ n''(x) &= e^x - e^{-x}, & \lim_{x \rightarrow 0} n''(x) &= 0; \\ d''(x) &= \sin(x), & \lim_{x \rightarrow 0} d''(x) &= 0; \\ n'''(x) &= e^x + e^{-x}, & \lim_{x \rightarrow 0} n'''(x) &= 2; \\ d'''(x) &= \cos(x), & \lim_{x \rightarrow 0} d'''(x) &= 1; \end{aligned}$$

donc

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{n'''(x)}{d'''(x)} = 2.$$

18. $\sinh(x) + \sin(x) - 2x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - 2x + o(x^5)$

$$\cosh(x) + \cos(x) - 2 = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - 2 + o(x^4)$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh(x) + \sin(x) - 2x}{x(\cosh(x) + \cos(x) - 2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{60} + o(1)}{\frac{1}{12} + o(1)} = \frac{1}{5}.$$

$$19. \cosh(x) + \cos(x) - 2 = 1 + \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{24} + 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - 2 + o(x^4)$$

$$\sinh(x) + \sin(x) - 2x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - 2x + o(x^5)$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\cosh(x) + \cos(x) - 2)}{\sinh(x) + \sin(x) - 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{12} + o(1)}{\frac{1}{60} + o(1)} = 5.$$

$$20. \cosh(x) + \cos(x) - 2 = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - 2 + o(x^4) = \frac{x^4}{12} + o(x^4),$$

$$\tanh(x) + \tan(x) - 2x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} - 2x + o(x^5) = \frac{4x^5}{15} + o(x^5),$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\cosh(x) + \cos(x) - 2)}{\tanh(x) + \tan(x) - 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{12} + o(1)}{\frac{4}{15} + o(1)} = \frac{5}{16}.$$

$$21. \text{ On pose } y = x - 1 \text{ Alors } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \ln(x)}{x^2 - 1} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{(1+y) \ln(1+y)}{y(2+y)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{(1+y) \left(y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + o(y^3) \right)}{y(2+y)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1 + \frac{y}{2} - \frac{y^2}{6} + o(y^2)}{2(1 + \frac{y}{2})} = \frac{1}{2}.$$

22. Soit $f(x) = \sqrt{3x+1} + \sqrt{2-x} - \sqrt{2x+7}$ et $g(x) = x^2 + x - 2$. f et g sont continues sur $]0; 2[$, dérivables sur $]0; 2[$ et $f(1) = g(1) = 0$. On a

$$f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x+1}} - \frac{1}{2\sqrt{2-x}} - \frac{1}{\sqrt{2x+7}}, \quad g'(x) = 2x + 1$$

$$\text{d'où } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{g'(x)} = -\frac{1}{36}. \text{ On en déduit que } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{g(x)} = -\frac{1}{36}.$$

23. Soit $f(x) = \sqrt{1-3x} + \sqrt{x+2} - \sqrt{7-2x}$ et $g(x) = x^2 - x - 2$. f et g sont continues sur $]-2; 0[$, dérivables sur $]-2; 0[$ et $f(-1) = g(-1) = 0$. On a

$$f'(x) = -\frac{3}{2\sqrt{1-3x}} + \frac{1}{2\sqrt{x+2}} + \frac{1}{\sqrt{7-2x}}, \quad g'(x) = 2x - 1$$

$$\text{d'où } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f'(x)}{g'(x)} = -\frac{1}{36}. \text{ On en déduit que } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{g(x)} = -\frac{1}{36}.$$

24. On commence par factoriser le terme dominant (comme on s'intéresse à la limite lorsque x tend vers $+\infty$, on peut supposer $x > 0$) :

$$f(x) = \sqrt[3]{x^3 + x + 1} - \sqrt{x^2 + x} = \sqrt[3]{x^3 \left(1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right)} - \sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x} \right)} = x \left[\sqrt[3]{1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}} - \sqrt{1 + \frac{1}{x}} \right].$$

On peut alors écrire

$$g(t) = f(1/t) = \frac{1}{t} \left[\left(1 + t^2 + t^3 \right)^{\frac{1}{3}} - \left(1 + t \right)^{\frac{1}{2}} \right] = \frac{1}{t} \left[\left(1 + o(t) \right) - \left(1 + \frac{t}{2} + o(t) \right) \right] = \frac{1}{t} \left[-\frac{t}{2} + o(t) \right] = -\frac{1}{2} + o(1).$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\frac{1}{2}.$$

25. Pour calculer la limite donnée on peut utiliser les développements limités :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(2x)}{e^x - 1 - x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - 1 + \frac{(2x)^2}{2} + o(x^2)}{1 + x + \frac{x^2}{2} - 1 - x + o(x^2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 + o(x^2)}{\frac{x^2}{2} + o(x^2)} = 4. \end{aligned}$$

Sinon on peut utiliser la règle de l'HÔPITAL car

$$n(x) = 1 - \cos(2x), \quad \lim_{x \rightarrow 0} n(x) = 0;$$

$$d(x) = e^x - 1 - x, \quad \lim_{x \rightarrow 0} d(x) = 0.$$

On a

$$n'(x) = 2 \sin(2x), \quad \lim_{x \rightarrow 0} n'(x) = 0;$$

$$d'(x) = e^x - 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} d'(x) = 0;$$

$$n''(x) = 4 \cos(2x), \quad \lim_{x \rightarrow 0} n''(x) = 4;$$

$$d''(x) = e^x,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} d''(x) = 1;$$

donc

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(2x)}{e^x - 1 - x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{n''(x)}{d''(x)} = 4.$$

Exercice A.15

Écrire

- ▷ le développement limité de $\sin(x)$ en 0 à l'ordre 3 ;
- ▷ le développement limité de e^{2x} en 0 à l'ordre 3.

Puis calculer

- ▷ le développement limité de $f(x) = \sin(x) \times e^{2x}$ en 0 à l'ordre 3.
- ▷ le développement limité de $g(x) = \frac{\sin(x)}{e^{2x}}$ en 0 à l'ordre 3.

Correction

On commence par écrire

- ▷ le développement limité de $\sin(x)$ en 0 à l'ordre 3 :

$$\sin(x) =_0 x - \frac{x^3}{6} + o(x^3);$$

- ▷ le développement limité de e^{2x} en 0 à l'ordre 3 :

$$e^{2x} =_0 1 + (2x) + \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^3}{6} + o(x^3) = 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + o(x^3);$$

On peut alors facilement calculer

- ▷ le développement limité de $f(x) = e^{2x} \sin(x)$ en 0 à l'ordre 3 :

$$\begin{aligned} f(x) &= \left[x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right] \times \left[1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + o(x^3) \right] = \\ &= x - \frac{x^3}{6} + 2x^2 + 2x^3 + o(x^3) = \\ &= x + 2x^2 + \frac{11}{6}x^3 + o(x^3); \end{aligned}$$

- ▷ le développement limité de $g(x) = \frac{\sin(x)}{e^{2x}}$ en 0 à l'ordre 3 :

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)}{1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + o(x^3)} \stackrel{u=2x+2x^2+\frac{4}{3}x^3+o(x^3)}{=} \\ &= \frac{x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)}{1 + u} = \\ &= \left[x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right] [1 - u + u^2 - u^3 + o(u^3)] = \\ &= \left[x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right] \left[1 - (2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3) + (2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3)^2 - (2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3)^3 + o(x^3) \right] = \\ &= \left[x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right] \left[1 - 2x - 2x^2 - \frac{4}{3}x^3 + 4x^2 + x^3 - 8x^3 + o(x^3) \right] = \\ &= \left[x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right] [1 - 2x + 2x^2 - 8x^3 + o(x^3)] = \\ &= x - 2x^2 + \frac{11}{6}x^3 + o(x^3). \end{aligned}$$

Exercice A.16

On considère la fonction $f(x) = x + \sqrt{x^2 + x}$.

- ▷ Écrire le développement limité de $\sqrt{1 + \frac{1}{x}}$ en $\pm\infty$ à l'ordre 3.
- ▷ En déduire le développement asymptotique de f à l'ordre 2 en $-\infty$ et en $+\infty$.
- ▷ Écrire les équations des asymptotes pour f en $-\infty$ et en $+\infty$.

Correction

On considère la fonction $f(x) = x + \sqrt{x^2 + x}$. On remarque que

$$f(x) = \begin{cases} x \left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x}}\right), & \text{si } x \geq 0, \\ x \left(1 - \sqrt{1 + \frac{1}{x}}\right), & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

- ▷ Pour écrire le développement limité de $\sqrt{1 + \frac{1}{x}}$ en $\pm\infty$ à l'ordre 3 on commence par se ramener à un développement limité en 0 en posant $y = 1/x$: il s'agit alors de calculer le développement limité de $\sqrt{1 + y}$ en 0 à l'ordre 3

$$\sqrt{1 + y} \underset{0}{=} 1 + \frac{1}{2}y - \frac{1}{8}y^2 + o(y^2)$$

d'où

$$\sqrt{1 + \frac{1}{x}} \underset{\infty}{=} 1 + \frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^2} + o(x^{-2})$$

- ▷ On en déduit le développement asymptotique de f à l'ordre 2

(i) en $-\infty$:

$$f(x) \underset{-\infty}{=} x \left(-\frac{1}{2x} + \frac{1}{8x^2} + o(x^{-2}) \right) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{8x} + o(x^{-1})$$

(ii) en $+\infty$:

$$f(x) \underset{+\infty}{=} x \left(2 + \frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^2} + o(x^{-2}) \right) = 2x + 1 - \frac{1}{4x} + o(x^{-1})$$

- ▷ On en déduit les équations des asymptotes pour f en

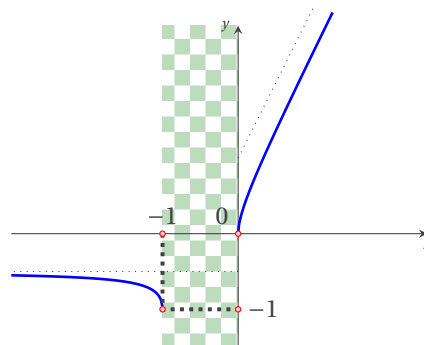
(i) en $-\infty$:

$$y = -\frac{1}{2}$$

(ii) en $+\infty$:

$$y = 2x + 1.$$

En effet, le graphe de la fonction est le suivant :

**Exercice A.17**

1. Écrire le développement limité généralisé de $\cos\left(\frac{1}{2x}\right)$ en $+\infty$ à l'ordre 3.
2. Écrire le développement limité généralisé de $\sqrt{2 + \frac{1}{x}}$ en $+\infty$ à l'ordre 3.

- En déduire le développement limité généralisé de $f(x) = \frac{\cos(\frac{1}{2x})}{\sqrt{2 + \frac{1}{x}}}$ en $+\infty$ à l'ordre 3.
- Écrire l'équation de l'asymptote de f en $+\infty$.

Correction

Soit f définie sur un intervalle $]A, +\infty[$. On dit que f admet un développement limité généralisé à l'ordre n en $a = +\infty$ s'il existe un polynôme P tel que $f(x) = P(1/x) + o(1/x^n)$ au voisinage de ce point. L'expression $P(1/x)$ n'est pas un polynôme, mais a des propriétés similaires. Dans la pratique, on peut obtenir un développement limité de $f(x)$ en $a = +\infty$ en posant $x = 1/t$ (de sorte que t tend vers 0, avec un signe fixe) et en tentant de développer $f(1/t)$ au voisinage de 0.

- Soit $t = \frac{1}{2x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$. Alors

$$\cos\left(\frac{1}{2x}\right) = \cos(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^3) = 1 - \frac{1}{8x^2} + o(x^{-3})$$

- Soit $t = \frac{1}{2x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$. Alors

$$\sqrt{2 + \frac{1}{x}} = \sqrt{2} \sqrt{1 + \frac{1}{2x}} = \sqrt{2} \sqrt{1 + t} = \sqrt{2} \left(1 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{8} + \frac{t^3}{16} + o(t^3)\right) = \sqrt{2} \left(1 + \frac{1}{4x} - \frac{1}{32x^2} + \frac{1}{128x^3} + o(x^{-3})\right)$$

- Soit $t = \frac{1}{2x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$. Alors

$$\frac{\cos(\frac{1}{2x})}{\sqrt{2}\sqrt{1 + \frac{1}{2x}}} = \frac{1 - \frac{t^2}{2} + o(t^3)}{\sqrt{2}\left(1 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{8} + \frac{t^3}{16} + o(t^3)\right)}$$

Comme

1	$-\frac{1}{2}t^2$	$o(t^3)$		$1 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}t^2 + \frac{1}{16}t^3 + o(t^3)$	
-1	$-\frac{1}{2}t$	$+\frac{1}{8}t^2$	$-\frac{1}{16}t^3$	$o(t^3)$	$1 - \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}t^2 - \frac{1}{16}t^3 + o(t^3)$
	$-\frac{1}{2}t$	$-\frac{3}{8}t^2$	$-\frac{1}{16}t^3$	$o(t^3)$	
	$\frac{1}{2}t$	$+\frac{1}{4}t^2$	$+\frac{1}{32}t^3$	$o(t^3)$	
	$-\frac{1}{8}t^2$	$-\frac{1}{32}t^3$	$o(t^3)$		
	$\frac{1}{8}t^2$	$+\frac{1}{16}t^3$	$o(t^3)$		
		$\frac{1}{16}t^3$	$o(t^3)$		
		$-\frac{1}{16}t^3$	$o(t^3)$		
			$o(t^3)$		

alors

$$\frac{1 - \frac{t^2}{2} + o(t^3)}{\sqrt{2}\left(1 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{8} + \frac{t^3}{16} + o(t^3)\right)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}t^2 - \frac{1}{16}t^3 + o(t^3)\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{1}{4x} - \frac{1}{32x^2} - \frac{1}{128x^3} + o(x^{-3})\right)$$

- L'équation de l'asymptote de f en $+\infty$ est $y = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Exercice A.18

- Écrire le développement limité généralisé de $\sin\left(\frac{1}{2x}\right)$ en $+\infty$ à l'ordre 3.
- Écrire le développement limité généralisé de $\sqrt{1 + \frac{1}{2x}}$ en $+\infty$ à l'ordre 3.

3. En déduire le développement limité généralisé de $f(x) = \frac{x \sin\left(\frac{1}{2x}\right)}{\sqrt{1 + \frac{1}{2x}}}$ en $+\infty$ à l'ordre 3.
4. Écrire l'équation de l'asymptote de f en $+\infty$.

Correction

Soit f définie sur un intervalle $]A, +\infty[$. On dit que f admet un développement limité généralisé à l'ordre n en $a = +\infty$ s'il existe un polynôme P tel que $f(x) = P(1/x) + o(1/x^n)$ au voisinage de ce point. L'expression $P(1/x)$ n'est pas un polynôme, mais a des propriétés similaires. Dans la pratique, on peut obtenir un développement limité de $f(x)$ en $a = +\infty$ en posant $x = 1/t$ (de sorte que t tend vers 0, avec un signe fixe) et en tentant de développer $f(1/t)$ au voisinage de 0.

1. Soit $t = \frac{1}{2x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$. Alors

$$\sin\left(\frac{1}{2x}\right) = \sin(t) = t - \frac{t^3}{6} + o(t^4) = \frac{1}{2x} - \frac{1}{48x^3} + o(x^{-4})$$

2. Soit $t = \frac{1}{2x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$. Alors

$$\sqrt{1 + \frac{1}{2x}} = \sqrt{1+t} = 1 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{8} + \frac{t^3}{16} + o(t^3) = 1 + \frac{1}{4x} - \frac{1}{32x^2} + \frac{1}{128x^3} + o(x^{-3})$$

3. Soit $t = \frac{1}{2x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$. Alors

$$\frac{x \sin\left(\frac{1}{2x}\right)}{\sqrt{1 + \frac{1}{2x}}} = \frac{\sin(t)}{2t\sqrt{1+t}} = \frac{t - \frac{t^3}{6} + o(t^4)}{2t\left(1 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{8} + \frac{t^3}{16} + o(t^3)\right)} = \frac{1 - \frac{t^2}{6} + o(t^3)}{2 + t - \frac{t^2}{4} + \frac{t^3}{8} + o(t^3)}$$

Comme

1	$-\frac{1}{6}t^2$	$o(t^3)$		$2 + t - \frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{8}t^3 + o(t^3)$	
-1	$-\frac{1}{2}t$	$-\frac{1}{8}t^2$	$-\frac{1}{16}t^3$	$o(t^3)$	$\frac{1}{2} - \frac{1}{4}t + \frac{5}{48}t^2 - \frac{11}{96}t^3 + o(t^3)$
	$-\frac{1}{2}t$	$+\frac{5}{24}t^2$	$-\frac{1}{16}t^3$	$o(t^3)$	
	$\frac{1}{2}t$	$+\frac{1}{4}t^2$	$-\frac{1}{16}t^3$	$o(t^3)$	
	$\frac{5}{24}t^2$	$-\frac{1}{8}t^3$	$o(t^3)$	$o(t^3)$	
	$-\frac{5}{24}t^2$	$-\frac{5}{48}t^3$	$o(t^3)$	$o(t^3)$	
		$-\frac{11}{48}t^3$	$o(t^3)$	$o(t^3)$	
		$\frac{11}{48}t^3$	$o(t^3)$	$o(t^3)$	
		$o(t^3)$	$o(t^3)$	$o(t^3)$	

alors

$$\frac{1 - \frac{t^2}{6} + o(t^3)}{2 + t - \frac{t^2}{4} + \frac{t^3}{8} + o(t^3)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}t + \frac{5}{48}t^2 - \frac{11}{96}t^3 + o(t^3) = \frac{1}{2} - \frac{1}{8x} + \frac{5}{192x^2} - \frac{11}{768x^3} + o(x^{-3})$$

4. L'équation de l'asymptote de f en $+\infty$ est $y = \frac{1}{2}$.

Exercice A.19

- a) Écrire le développement limité de $\sin(2x)$ et de $\cos(2x)$ en 0 à l'ordre 3 ; en déduire le développement limité de $\tan(2x) = \frac{\sin(2x)}{\cos(2x)}$ en 0 à l'ordre 3 soit en utilisant le développement limité en $u = 0$ de la fonction $u \mapsto \frac{1}{1+u}$ soit en appliquant la technique de la division suivant les puissances croissantes.

Suggestion : comme on connaît le développement limité de $\tan(x)$ en 0 à l'ordre 3, il est facile de calculer le développement limité de $\tan(2x)$ et de vérifier qu'on a bien fait les calculs.

- b) En utilisant le développement limité de $\ln(1+z)$ en 0 à l'ordre 3 et le développement limité de $\tan(2x)$ en 0 à l'ordre 3 calculé au point a), déterminer le développement limité de $\ln(1+\tan(2x))$ en 0 à l'ordre 3.
- c) En utilisant le développement limité de $\arcsin(x)$ en 0 à l'ordre 3 et le développement limité de $\ln(1+\tan(2x))$ en 0 à l'ordre 3 calculé au point b), calculer

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+\tan(2x)) + 2x(x-1)}{\arcsin(x) - x}.$$

Correction

- a) Comme $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ et $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$, les développements limités de $\sin(2x)$ et $\cos(2x)$ en 0 à l'ordre 3 sont

$$\sin(2x) = (2x) - \frac{(2x)^3}{6} + o((2x)^3) = 2x - \frac{4x^3}{3} + o(x^3), \quad \cos(2x) = 1 - \frac{(2x)^2}{2} + o((2x)^3) = 1 - 2x^2 + o(x^3);$$

on peut alors utiliser deux méthodes pour calculer le développement limité de $\tan(2x) = \frac{\sin(2x)}{\cos(2x)}$ en 0 à l'ordre 3 :

- ▷ la première méthode utilise le développement limité de $\frac{1}{1+u}$:

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{2x - \frac{4x^3}{3} + o(x^3)}{1 - 2x^2 + o(x^3)} \stackrel{u = -2x^2 + o(x^3)}{=} \\ &= \frac{2x - \frac{4x^3}{3} + o(x^3)}{1 + u} = \\ &= \left[2x - \frac{4x^3}{3} + o(x^3) \right] [1 - u + u^2 - u^3 + o(u^3)] = \\ &= \left[2x - \frac{4x^3}{3} + o(x^3) \right] [1 - (-2x^2) + (-2x^2)^2 - (-2x^2)^3 + o(x^3)] = \\ &= \left[2x - \frac{4x^3}{3} + o(x^3) \right] [1 + 2x^2 + o(x^3)] = \\ &= 2x + \frac{8}{3}x^3 + o(x^3). \end{aligned}$$

- ▷ la deuxième méthode applique la technique de la division suivant les puissances croissantes : si f et g ont au point a un développement limité à l'ordre n et si $g(a) \neq 0$, le polynôme d'approximation de f/g à l'ordre n s'obtient en divisant suivant les puissances croissantes à l'ordre n le polynôme d'approximation de f par celui de g . Ici $f(x) = 2x - \frac{4x^3}{3}$ et $g(x) = 1 - 2x^2$ et on pose la division suivant les puissances croissantes en ne gardant que les termes de degré inférieur ou égal à 3 :

$$\begin{array}{r|l} 2x & -\frac{4}{3}x^3 & 1 & -2x^2 \\ -2x & +4x^3 & 2x & \frac{8}{3}x^3 \\ \hline & \frac{8}{3}x^3 & & \\ & -\frac{8}{3}x^3 & & \\ \hline & 0 & & \end{array}$$

Le développement limité de $\tan(2x)$ à l'ordre 3 en $x = 0$ est donc $2x + \frac{8}{3}x^3 + o(x^3)$.

- ▷ Pour vérifier nos calculs on va utiliser le développement limité de $\tan(z)$: comme $\tan(z) = z + \frac{z^3}{3} + o(z^3)$, le développement limité de $\tan(2x)$ en 0 à l'ordre 3 est bien $\tan(2x) = 2x + \frac{8x^3}{3} + o(x^3)$.

- b) Étant donné que les développements limités en $u = 0$ à l'ordre 3 de $\ln(1+u)$ et $\tan(2u)$ sont

$$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + o(u^3), \quad \tan(2u) = 2u + \frac{8u^3}{3} + o(u^3),$$

on en déduit le développement limité en $x = 0$ à l'ordre 3 de $\ln(1 + \tan(2x))$:

$$\begin{aligned}\ln(1 + \tan(2x)) &= \ln \left(1 + 2x + \underbrace{\frac{8x^3}{3} + o(x^3)}_{=z \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0} \right) \\ &= \ln(1 + z) \\ &= z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + o(z^3)\end{aligned}$$

si on remplace $z = 2x + \frac{8x^3}{3} + o(x^3)$ on a

$$\begin{aligned}&= 2x + \frac{8x^3}{3} - \frac{\left(2x + \frac{8x^3}{3}\right)^2}{2} + \frac{\left(2x + \frac{8x^3}{3}\right)^3}{3} + o(x^3) \\ &= 2x + \frac{8x^3}{3} - \frac{4x^2}{2} + \frac{8x^3}{3} + o(x^3) \\ &= 2x - 2x^2 + \frac{16}{3}x^3 + o(x^3).\end{aligned}$$

c) Étant donné que les développements limités en $u = 0$ à l'ordre 3 de $\arcsin(u)$ et $\ln(1 + \tan(2u))$ sont

$$\arcsin(u) = u + \frac{u^3}{6} + o(u^3) \qquad \ln(1 + \tan(2u)) = 2u - 2u^2 + \frac{16}{3}u^3 + o(u^3)$$

on a

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \tan(2x)) + 2x(x-1)}{\arcsin(x) - x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - 2x^2 + \frac{16}{3}x^3 + o(x^3) + 2x^2 - 2x}{x + \frac{x^3}{6} + o(x^3) - x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{16}{3}x^3 + o(x^3)}{\frac{x^3}{6} + o(x^3)} = 32.$$

🔪 Exercice A.20

1. Soit $f(x) := \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\ln(x)}$. Quel est son domaine de définition ? Est-elle prolongeable par continuité en 0 ?
2. Soit $f(x) := \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\ln(x)}$. Quel est son domaine de définition ? Est-elle prolongeable par continuité en 1 ?

Correction

1. Pour que f soit bien définie il faut que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, x vérifie le système suivant

$$\begin{cases} 1+x \neq 0, \\ \frac{1-x}{1+x} > 0, \\ x > 0, \end{cases}$$

donc $\mathcal{D}_f =]0; 1[$. De plus

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\ln(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\ln(x) \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)}$$

et

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)}{1/\ln(x)} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \frac{-(1+x)-(1-x)}{(1-x)^2}}{1/(x \ln^2(x))} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-2x \ln^2(x)(1+x)}{(1-x)^3} \\ &= \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-2(1+x)}{(1-x)^3}\right) \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln^2(x)\right) = -2 \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln^2(x) = 0\end{aligned}$$

donc

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = e^0 = 1.$$

2. Pour que f soit bien définie il faut que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, x vérifie le système suivant

$$\begin{cases} 1+x \neq 0, \\ \frac{1+x}{1-x} > 0, \\ x > 0, \end{cases}$$

donc $\mathcal{D}_f =]0; 1[$. De plus

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^{\ln(x)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} e^{\ln(x) \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)} = e^{\lim_{x \rightarrow 1^-} \ln(x) \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}$$

et

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}{1/\ln(x)} &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\left(\frac{1-x}{1+x}\right) \frac{(1-x)+(1+x)}{(1-x)^2}}{1/(x \ln^2(x))} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x \ln^2(x)}{(1-x)^2} \\ &= \left(\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-2x}{1+x} \right) \left(\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\ln^2(x)}{1-x} \right) = -1 \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2 \ln(x)}{-x} = 0 \end{aligned}$$

donc

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = e^0 = 1.$$

ATTENTION

On sait que, pour qu'une fonction admette un développement limité d'ordre n au voisinage de 0, il est suffisant qu'elle soit n fois dérivable en 0. Les exercices suivants montrent que ce n'est pas nécessaire.

Exercice A.21

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} 2 + 3x + 4x^2 + x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ 2 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Montrez que f admet, au voisinage de 0, un développement limité d'ordre 2 et que, pourtant, $f''(0)$ n'existe pas.

Correction

Puisque $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$, on peut écrire

$$f(x) = 2 + 3x + 4x^2 + o(x^2)$$

ce qui, par définition, montre que f admet un développement limité d'ordre 2 au voisinage de 0.

D'autre part,

$$f'(x) = \begin{cases} 3 + 8x + 3x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - x \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} 3 + 4x + x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 3 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Mais $f''(0)$ n'existe pas car le quotient

$$\frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = 8 + 3x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

n'a pas de limite quand x tend vers 0.

Exercice A.22

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } x > 0, \\ 0, & \text{si } x = 0, \\ x^3 \ln|x|, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue en 0.

2. Calculer $f'(x)$ pour $x \neq 0$, puis $f'(0)$.
3. Étudier la continuité de f' en 0.
4. Est-ce que $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$?
5. Calculer la dérivée seconde $f''(0)$ si elle existe.
6. Peut-on utiliser la formule de TAYLOR-YOUNG pour écrire le développement limité de f en 0 à l'ordre 2 ? Pourquoi ?
7. Écrire le développement limité de f en 0 à l'ordre 2 s'il existe.

Correction

L'application $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ se réécrit

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } x > 0, \\ 0, & \text{si } x = 0, \\ x^3 \ln(-x), & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

1. f est continue en 0 car

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0 = f(0)$$

et

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x^3 \ln(-x) = 0 = f(0).$$

2. Comme

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - 0}{x - 0} = 0$$

et

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^3 \ln(-x) - 0}{x - 0} = 0$$

la dérivée de f est l'application $f': \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - x \cos\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } x > 0, \\ 0, & \text{si } x = 0, \\ 3x^2 \ln(-x) + x^2, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

3. f' est continue en $x = 0$ car

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 3x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - x \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0 = f'(0)$$

et

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 3x^2 \ln(-x) + x^2 = 0 = f'(0),$$

donc $f(x) = f(0) + x f'(0) + o(x) = o(x)$.

4. $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ car elle est continue, dérivable et sa dérivée est continue.
5. La dérivée seconde de f en $x = 0$ n'existe pas car

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - x \cos\left(\frac{1}{x}\right) - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(3x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) \right)$$

n'existe pas.

6. On ne peut pas utiliser la formule de TAYLOR-YOUNG pour écrire le développement limité de f en 0 à l'ordre 2 car $f''(0)$ n'existe pas.
7. Puisque $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x \ln|x| = 0$, on peut écrire

$$f(x) = x^2 \varepsilon(x) = o(x^2), \quad \text{avec } \varepsilon(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \\ x \ln|x| & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

ce qui, par définition, montre que f admet un développement limité d'ordre 2 au voisinage de 0.

Exercice A.23 (Gravitation et approximation)

À l'altitude z , la norme du champ de gravitation de la Terre est la fonction

$$g: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$$

$$z \mapsto \frac{GM}{(R+z)^2}$$

où G est la constante de gravitation, M la masse de la Terre et R le rayon de la Terre. Si $z \ll R$, donner en fonction de z et R une expression approchée de $g(z)$ en utilisant un développement limité au second ordre en z/R .

Correction

Posons $u = z/R \approx 0$ si $z \ll R$. On a $\tilde{g}(u) = (1+u)^{-2}GM/R^2$. Le développement limité de \tilde{g} à l'ordre 2 au voisinage de 0 est

$$\tilde{g}(u) = \frac{GM}{R^2} (1 - 2u + 3u^2 + o(u^2)).$$

Une expression approchée de g pour $z \ll R$ est alors

$$g(z) = \frac{GM}{R^4} (R^2 - 2zR + 3z^2 + o(z^2)).$$

Exercice A.24

Soit k une constante positive. Calculer le polynôme de TAYLOR en 0 à l'ordre n de k^x . En déduire le polynôme de TAYLOR en 0 à l'ordre $n-1$ de $\frac{k^x-1}{x}$. En déduire ensuite que $m(\sqrt[m]{k}-1) \approx \ln(k)$ lorsque m est grand.

Correction

▷ $k^x = e^{cx}$ avec $c = \ln(k)$ donc $\frac{dn(k^x)}{dx^n} = \frac{dn(e^{cx})}{dx^n} = c^n e^{cx} = c^n k^x$. On a alors

$$k^x \approx \sum_{j=0}^n \frac{\ln^j(k)}{j!} x^j \quad \text{si } x \approx 0.$$

Par conséquence $\frac{k^x-1}{x} \approx \sum_{j=1}^n \frac{\ln^j(k)}{j!} x^{j-1}$ si $x \approx 0$ (attention aux indices de la somme).

▷ En posant $m = \frac{1}{x}$ on trouve

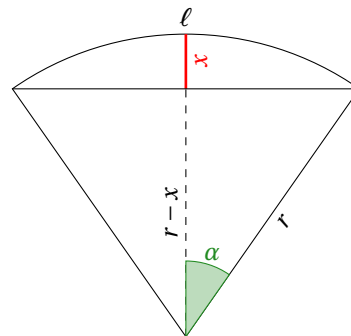
$$m(\sqrt[m]{k}-1) \approx \sum_{j=1}^n \frac{\ln^j(k)}{j! m^{j-1}} \quad \text{si } m \rightarrow +\infty.$$

Pour $n = 1$ on a alors $m(\sqrt[m]{k}-1) \approx \ln(k)$.

Exercice A.25

Considérons un secteur circulaire de rayon r et angle 2α , avec α petit.

- ▷ Exprimer x en fonction de $\cos(\alpha)$. Utiliser un développement limité en 0 à l'ordre 3 de $\cos(\alpha)$ pour approcher x par un polynôme en α et r .
- ▷ En approchant la Terre par une sphère de rayon $r = 6360$ km, utiliser le résultat ainsi obtenu pour estimer de combien un arc de $\ell = 100$ km s'écarte de sa corde (i.e. estimer x).



Correction

$$r - x = r \cos(\alpha)$$

et

$$\cos(\alpha) \approx \frac{\cos(0)}{0!} (\alpha-0)^0 + \frac{-\sin(0)}{1!} (\alpha-0)^1 + \frac{-\cos(0)}{2!} (\alpha-0)^2 + \frac{\sin(0)}{3!} (\alpha-0)^3 = 1 - \frac{1}{2} \alpha^2 \quad \text{lorsque } \alpha \approx 0$$

donc

$$x \simeq \frac{r\alpha^2}{2} \quad \text{lorsque } \alpha \simeq 0.$$

Si $\ell = 100$ km alors $\alpha = \frac{\ell}{r} = \frac{100}{6360} = \frac{5}{318} \simeq 0$ donc $x \simeq \frac{6360 \times 100^2}{2 \times 6360^2} = \frac{125}{159} \simeq 0.79$ km.

Exercice A.26

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^2 .

1. Écrire le DL en x_0 de f à l'ordre 2.
2. Écrire le DL en x_0 de f' à l'ordre 1.
3. Calculer

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}{x - x_0}.$$

4. En prenant $x = x_0 \pm h$, calculer

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - 2f(x_0) + f(x_0 - h)}{h^2}.$$

Correction

1. $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2)$
2. $f'(x) = f'(x_0) + f''(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$
3. $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0) + o(x - x_0)$ ainsi

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{[f'(x_0) + f''(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)] - [f'(x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0) + o(x - x_0)]}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0) + o(x - x_0)}{x - x_0} = \frac{f''(x_0)}{2}. \end{aligned}$$

4. $f(x_0 \pm h) = f(x_0) \pm hf'(x_0) + h^2 \frac{f''(x_0)}{2} + o(h^2)$ donc

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - 2f(x_0) + f(x_0 - h)}{h^2} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f(x_0) + hf'(x_0) + h^2 \frac{f''(x_0)}{2} + o(h^2)] - 2f(x_0) + [f(x_0) - hf'(x_0) + h^2 \frac{f''(x_0)}{2} + o(h^2)]}{h^2} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 f''(x_0) + o(h^2)}{h^2} = f''(x_0). \end{aligned}$$

Exercice A.27

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^3 .

1. Écrire le DL en x_0 de f à l'ordre 3.
2. En prenant $x = x_0 \pm 2h$, en déduire $f(x_0 + 2h) - f(x_0 - 2h)$.
En prenant $x = x_0 \pm h$, en déduire $f(x_0 - h) - f(x_0 + h)$.
3. En déduire

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - h) - f(x_0 + h) + \frac{1}{2}f(x_0 + 2h) - \frac{1}{2}f(x_0 - 2h)}{h^3}.$$

Correction

1. $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{6}(x - x_0)^3 + o((x - x_0)^3)$
2. En prenant $x = x_0 \pm h$ on a

$$f(x_0 \pm h) = f(x_0) \pm hf'(x_0) + h^2 \frac{f''(x_0)}{2} \pm h^3 \frac{f'''(x_0)}{6} + o(h^3)$$

et en prenant $x = x_0 \pm 2h$ on a

$$\begin{aligned} f(x_0 \pm 2h) &= f(x_0) \pm 2hf'(x_0) + (2h)^2 \frac{f''(x_0)}{2} \pm (2h)^3 \frac{f'''(x_0)}{6} + o(h^3) \\ &= f(x_0) \pm 2hf'(x_0) + 2h^2 f''(x_0) \pm 4h^3 \frac{f'''(x_0)}{3} + o(h^3) \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} f(x_0 + 2h) - f(x_0 - 2h) &= \left[f(x_0) + 2hf'(x_0) + 2h^2 f''(x_0) + 4h^3 \frac{f'''(x_0)}{3} \right] \\ &\quad - \left[f(x_0) - 2hf'(x_0) + 2h^2 f''(x_0) - 4h^3 \frac{f'''(x_0)}{3} \right] + o(h^3) \\ &= 4hf'(x_0) + 8h^3 \frac{f'''(x_0)}{3} + o(h^3) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} f(x_0 - h) - f(x_0 + h) &= \left[f(x_0) - hf'(x_0) + h^2 \frac{f''(x_0)}{2} - h^3 \frac{f'''(x_0)}{6} \right] - \left[f(x_0) + hf'(x_0) + h^2 \frac{f''(x_0)}{2} + h^3 \frac{f'''(x_0)}{6} \right] + o(h^3) \\ &= -2hf'(x_0) - h^3 \frac{f'''(x_0)}{3} + o(h^3) \end{aligned}$$

3. Ainsi

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - h) - f(x_0 + h) + \frac{1}{2}(f(x_0 + 2h) - f(x_0 - 2h))}{h^3} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2hf'(x_0) - h^3 \frac{f'''(x_0)}{3} + 2hf'(x_0) + 4h^3 \frac{f'''(x_0)}{3} + o(h^3)}{h^3} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^3 f'''(x_0) + o(h^3)}{h^3} = f'''(x_0). \end{aligned}$$