L1 MATH & MASS

2012/2013

Guide de survie.

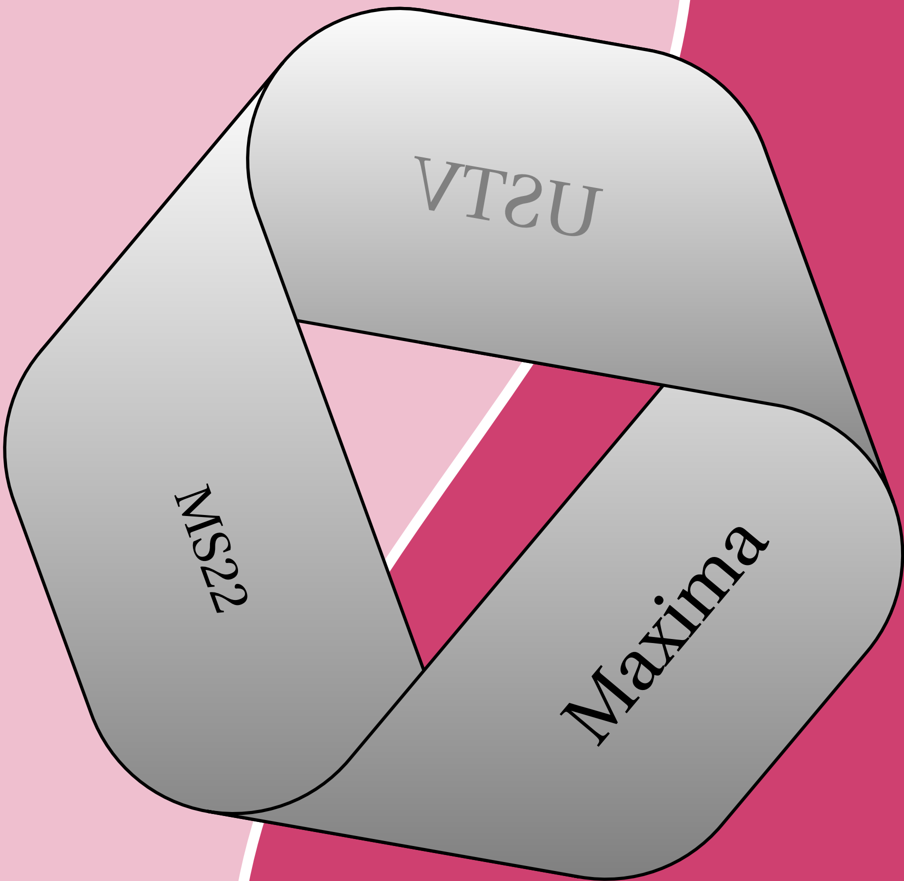


Table des matières

G. Faccanoni

Dernière mise-à-jour
Dimanche 28 avril 2013

Ce notes s'adressent à des étudiants de la première année d'une Licence Mathématiques ou d'une Licence Mathématiques Appliquées et Sciences Sociales. Les notions supposées connues correspondent au programme de la première années : fonctions réelles d'une variable réelle et algèbre linéaire. Ces notes ne dispensent pas des séances de cours ni de TD. Il est d'ailleurs important d'avoir compris et appris les cours avant de suivre les TP.

L'objet de ce aide-mémoire n'est pas de fournir une description systématique des possibilités considérables offertes par `Maxima` mais plutôt de **proposer une collection d'exemples et d'exercices** vu en TD et dont la résolution peut être aidée par un logiciel de calcul formel. L'idée est d'utiliser `Maxima` comme une calculatrice très puissante et donc de pouvoir se concentrer seulement sur la démarche de résolution sans ce soucier des calculs.

De nombreux manuels, parfois très fournis, existent. Ici on a cherché, compte tenu des contraintes de volume horaire, des acquis des étudiants et des exigences pour la suite du cursus, à dégager les points clés permettant de structurer le travail personnel de l'étudiant voire de faciliter la lecture d'autres ouvrages.

On espère que ces exemples puissent donner une inspiration, mais on n'a fait que effleurer un monde très vaste et très fascinant.

Gloria Faccanoni

IMATH Bâtiment U-318
Université du Sud Toulon-Var
Avenue de l'université
83957 LA GARDE - FRANCE

☎ 0033 (0)4 94 14 23 81

✉ gloria.faccanoni@univ-tln.fr
ℹ http://faccanoni.univ-tln.fr

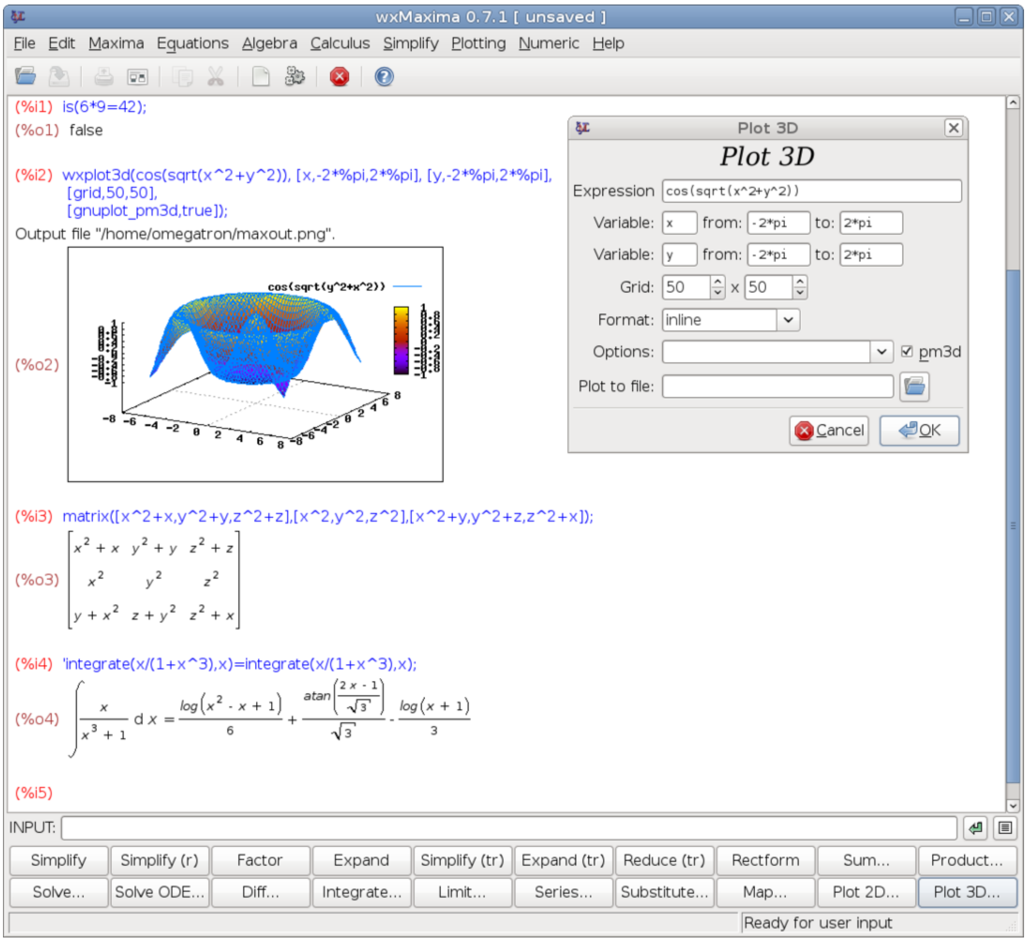
1 Maxima & wxMaxima

Maxima[1] est un logiciel libre, gratuit et multiplateforme qui propose un environnement de calcul formel. Le calcul formel, encore appelé calcul symbolique, donne les moyens de manipuler les nombres, d'effectuer des calculs ou de réaliser des représentations graphiques sophistiquées, mais aussi et surtout de mener des calculs algébriques, de représenter symboliquement des objets mathématiques complexes ou élaborés comme des fonctions, des équations et leurs solutions algébriques, des matrices, et d'obtenir, le cas échéant, des formes closes pour les solutions. Les logiciels de calcul formel, tels Maxima, Maple, Mathematica, MuPAD, Sage, Xcas, Yacas, GAP, PARI/GP, s'opposent ainsi à des logiciels comme Scilab, Octave ou MatLab dont la vocation est de permettre la réalisation de calculs efficaces sur un plan strictement numérique.

Comme tous les programmes de calcul formel, Maxima est spécialisé dans les manipulations de symboles. Cependant, il sait également produire des résultats numériques sous forme d'entiers et de fractions de taille arbitraire, ou bien encore de réels à virgule flottante de précision arbitrairement grande (bfloat pour big floats), en plus des flottants «machine», suivant habituellement le standard IEEE 754 sur les ordinateurs actuels.

Il dispose de quelques capacités graphiques, basées sur le logiciel Gnuplot qu'il utilise de manière transparente.

Maxima peut s'utiliser soit en ligne de commandes, soit par l'intermédiaire d'une interface graphique. Il existe plusieurs interfaces graphiques. Pour cette courte présentation, nous utilisons l'interface graphique multiplateforme wxMaxima[2]. Interface moderne et fonctionnelle, qui permet d'entrer une grande partie des commandes à l'aide d'icônes. Ses fonctionnalités d'édition et sa simplicité en font un logiciel idéal pour utiliser Maxima. Elle fonctionne sous toutes les plate-formes.



L'interface de Maxima n'est pas très performante. Les logiciels commerciaux proposent une interface beaucoup plus ergonomique. Cependant, au niveau mathématique, Maxima n'a rien à envier aux logiciels commerciaux.

1. http://maxima.sourceforge.net/
2. http://wxmaxima.sourceforge.net/

1.1 Exemples de calculs réalisés avec Maxima

Avant de passer à une brève présentation du logiciel Maxima et de donner les premiers éléments concrets permettant d'utiliser Maxima pour traiter ses propres exemples, on souhaite montrer rapidement les possibilités offertes par le calcul formel.

La première série d'exemples montre la capacité à faire des calculs symboliques (par opposition à numériques) que tout utilisateur ayant acquis un certain niveau en mathématiques est capable de mener à bien lui-même, mais dont le caractère fastidieux et pénible est incontestable. Les exemples sont emblématiques de situations dans lesquelles il convient de savoir utiliser judicieusement un formulaire et des techniques adaptées au contexte du calcul que l'on doit effectuer. L'obtention du résultat en une fraction de seconde devrait convaincre de l'intérêt d'un logiciel de calcul formel.

Commençons par un calcul classique de limite :

```
'limit((sin(tan(x))-tan(sin(x)))/x^7,x,0)=limit((sin(tan(x))-tan(sin(x)))/x^7,x
➥,0);
```

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\tan(x))-\tan(\sin(x))}{x^7}=-\frac{1}{30}.$$

Poursuivons par un calcul de dérivée tout aussi éloquent :

```
'diff(arcsin(ln(x^3)),x)=diff(arcsin(ln(x^3)),x);
```

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\arcsin(\ln(x^3))=\frac{3}{x\sqrt{1-9\ln^2 x}}.$$

Soulignons d'emblée que l'intérêt du calcul formel ne se limite pas à la possibilité, certes très spectaculaire, d'obtenir des expressions littérales et des formes closes quasi instantanément pour des calculs fastidieux de dérivées, de primitives, de développements limités et la résolution d'équations algébriques ou d'équations différentielles. La deuxième capacité essentielle d'un logiciel de calcul formel consiste à représenter de manière exacte des objets mathématiques, principalement des nombres, que les logiciels de calcul numérique ne peuvent représenter que de manière approchée, donc avec une certaine erreur qui empêche l'exploitation ultérieure de leurs éventuelles propriétés. Dans le calcul d'intégrale suivant :

```
'integrate(atan(x),x,0,1)=integrate(atan(x),x,0,1);
```

$$\int_0^1 \arctan(x)\,\mathrm{d}x=-\frac{2\ln(2)-\pi}{4}$$

Maxima représente le résultat obtenu de manière exacte à l'aide de constantes mathématiques célèbres (au lieu de se limiter à donner une valeur décimale approchée du résultat). Considérons enfin un exemple issu de l'algèbre, où il s'agit de déterminer les racines cubiques de l'unité :

```
S:solve(x^3-1=0);
```

$$x=\frac{\sqrt{3}i-1}{2},\quad x=-\frac{\sqrt{3}i+1}{2},\quad x=1.$$

On remarque que Maxima propose d'emblée une représentation exacte des trois racines cubiques de l'unité sous forme de nombres complexes (l'unité imaginaire étant notée %i). Intéressons-nous à la deuxième racine trouvée :

```
S[2];
```

$$x=-\frac{\sqrt{3}i+1}{2}$$

pour en demander une valeur numérique approchée :

```
float(S[2]);
```

$$x=-0.5(1.732050807568877i+1.0)$$

1.2 Présentation

Prompt Après avoir lancé le logiciel Maxima à travers l'interface graphique, on obtient une feuille de travail vierge. Pour démarrer avec Maxima, il suffit d'écrire une commande : une cellule va apparaître. Si on presse la touche [Enter] il apparaît l'invite (prompt) qui, par défaut, est représentée par le symbole -->. L'utilisateur attentif remarquera que l'invite est précédée par une sorte de symbole qui ressemble à un crochet ouvrant ([), appelé crochet d'exécution.

Caractères de fin de saisie Lorsque l'on utilise Maxima en interagissant directement avec l'interpréteur, l'interaction avec le logiciel consiste en une succession d'instructions saisies par l'utilisateur et de réponses fournies par l'interpréteur. La feuille de travail présente les traces de cette interaction. L'utilisateur doit donc saisir une instruction à côté de l'invite et pour signifier la fin de sa saisie, il lui faut terminer la ligne de commande par le caractère ; ou par le caractère $. L'instruction saisie sera interprétée et exécutée (si la syntaxe est correcte) dès que l'utilisateur aura pressé simultanément les deux touches [Shift ⇑] et [Enter] (si vous appuyé juste sur la touche [Enter] vous passez simplement à la ligne sans évaluer votre expression). Lorsqu'une instruction se finit par ;, l'interpréteur de Maxima exécute l'instruction et, si elle est syntaxiquement valide[3], affiche le résultat obtenu :

```
2+3;
exp(1.0);
```

5

2.718281828459045

En revanche, si l'instruction est terminée par $, Maxima exécute l'instruction de façon muette, c'est-à-dire n'affiche pas le résultat :

```
a:2+3$
'a=a;
```

$a = 5$

Cette façon de procéder est utile pour éviter l'affichage de résultats volumineux comme les contenus de packages ou les objets graphiques sous-jacents aux représentations graphiques.

On remarque que les lignes identifiées avec %i, suivies par un nombre progressif constituent l'invite de commandes. Maxima dit de cette façon qu'il est prêt à exécuter une commande introduite par l'utilisateur. Une fois la commande exécutée, les résultats de l'exécution sont montrés avec l'écriture %o, suivie par le nombre progressif.

Groupement d'instructions Pour saisir plusieurs instructions sur une même ligne et ainsi les passer simultanément à l'interpréteur, il suffit de les séparer par des ; ou des $. Elles sont alors exécutées consécutivement, dans l'ordre où elles ont été présentées, et les résultats, s'il y a lieu, sont affichés l'un sous l'autre en une seule fois par l'interpréteur.

```
1+2;2.0^(1/2);(2*3)^2;
```

3

1.414213562373095

36

On peut aérer la présentation des instructions et passer à la ligne entre chacune d'elles plutôt que de les écrire sur la même ligne. Pour passer à la ligne au sein du même crochet d'exécution sans provoquer l'exécution individuelle d'une instruction au moment du changement de ligne, il faut presser la touche Enter . On remarque qu'au moment où l'on change de ligne, le crochet d'exécution qui précède l'invite s'allonge de manière à englober les différentes lignes d'instructions. Ce repère visuel a pour but de mettre en évidence l'ensemble des instructions adressées simultanément à l'interpréteur lors de la prochaine validation.

Commentaires Ce qui se trouve entre /* et */ n'est pas pris en compte par l'interpréteur, comme le montre l'exemple suivant :

```
1+2; /*un premier calcul tres simple*/
/*2.0^(1/2); cette ligne n'est pas prise en compte*/
(2*3)^2;
```

3

36

Variables et affectation Effectuer des calculs élaborés demande de conserver des résultats intermédiaires afin d'y accéder ultérieurement, d'où le besoin de variables. Une variable est un emplacement en mémoire auquel est attachée une étiquette (le nom de la variable) qui permet d'accéder à son contenu. L'affectation assigne une valeur à une variable : elle établit une correspondance entre une étiquette et une valeur.

Affectation : variable *vs* fonction Maxima utilise «:» pour affecter une valeur à une variable (par exemple la commande a:3; affecte la valeur 3 à la variable a) et «:=» pour définir une fonction (par exemple la commande f(x):=x^2; définie la fonction $x \mapsto f(x) = x^2$). Pour affecter une fonction définie par morceaux on peut utiliser la commande block comme dans l'exemple qui suit

```
k1(x):=-sqrt(-x);
k2(x):=sqrt(x);
k(x) := block ([], if (x < 0) then return (k1(x)) else return (k2(x)));
plot2d(k,[x,-1,1]);
```

3. Si l'instruction n'est pas syntaxiquement valide, l'interpréteur affiche un message d'erreur ; les messages d'erreur sont assez explicites et donnent une bonne indication de la nature de l'erreur rencontrée.

qui donne

$$k_1(x) = -\sqrt{-x}, \qquad k_2(x) = \sqrt{x}, \qquad k(x) = \begin{cases} k_1(x) & \text{si } x < 0, \\ k_2(x) & \text{si } x 0. \end{cases}$$

ou encore

```
k1(x):=x*1.25;
k21(x):=0;
k22(x):=x*3-6;
k2(x):=block ([], if (x < 2) then return (k21(x)) else return (k22(x)));
j(x) :=block ([], if (x < 0) then return (k1(x)) else return (k2(x)));
```

Si on a défini une expression, on peut définir une fonction à l'aide de la commande `f(x):=''(expression)` ou `define('f(x),expr)`. Par exemple

```
expr:logcontract(integrate(2/(x^2-1),x));
f(x):=''(expr);
f(5);
define('g(x),expr);
g(5);
```

donne

$$\log\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$
$$f(x) = \log\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$
$$\log\left(\frac{2}{3}\right)$$
$$g(x) = \log\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$
$$\log\left(\frac{2}{3}\right)$$

Noms de variables Un nom de variable licite est un mot qui commence par une lettre suivie d'un nombre fini de caractères, lettres, chiffres ou _ (underscore), autres que les caractères qui jouent un rôle particulier dans le langage (%, :, ;, =, $ ...) de sorte que l'ensemble forme un mot n'apparaissant pas dans les mots réservés ou les mots protégés du langage Maxima [4]. Par ailleurs, Maxima distingue les majuscules des minuscules ; ainsi, `a` et `A` ne désignent pas la même variable comme le montre l'exemple suivant :

```
a:10;
a;
A;
```

10

10

A

Noms de variables fondés sur des lettres grecques Maxima permet d'utiliser des noms de variables comportant des lettres grecques. Pour obtenir une lettre grecque, il faut saisir son nom, le pretty-printer la présentera selon la calligraphie usuelle :

```
alpha:1.5632$ 'alpha=alpha;
```

$\alpha = 1.5632$

Remarquons que la notation π désigne habituellement la constante trigonométrique dont une valeur décimale approchée est $3,14$ et la notation γ désigne habituellement la constante d'Euler ; cet usage a été adopté aussi dans Maxima et la constante trigonométrique est désignée par le mot-clé `%pi` et la constante d'Euler par le mot-clé `%gamma`.

Opérateur *dito* Le symbole `%` désigne l'opérateur dito qui permet d'obtenir le dernier résultat calculé par l'interpréteur (lorsqu'il existe) :

4. Par exemple ne peuvent pas être utilisé comme nom de variable les mots `integrate`, `next`, `from`, `diff`, `in`, `at`, `limit`, `sum`, `for`, `and`, `elseif`, `then`, `else`, `do`, `or`, `if`, `unless`, `product`, `while`, `thru`, `step` ; ou encore `cos`, ...

```
a:1+2*3;
%;
```

7

7

On peut utiliser `%i1` ou `%o1` qui peuvent être utilisées comme toute autre variable. Il convient de ne pas abuser du recours à l'opérateur dito. Il est à peine moins rapide et beaucoup plus recommandable d'affecter un résultat intermédiaire à une variable afin de pouvoir s'en servir autant de fois que nécessaire par la suite, en étant certain d'évoquer la valeur que l'on souhaite.

Constantes numériques usuelles et fonctions Une liste des constantes usuellement utilisées dans `Maxima` :

- ▷ `%gamma` constante d'Euler
- ▷ `%e` constante de Néper e
- ▷ `%pi` nombre π
- ▷ `%phi` nombre d'or $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$
- ▷ `%i` unité imaginaire $i = \sqrt{-1}$
- ▷ `inf` infinis réel positif $+\infty$
- ▷ `minf` infinis réel négatif $-\infty$
- ▷ `infinity` infinis complex

Pour les estimer il suffit d'utiliser la commande `float(nom_de_le_constante)`.

Une liste des fonctions usuellement utilisées dans `Maxima`

- ▷ `sin` sinus, `cos` cosinus, `tan` tangente, `cot` cotangente, `sec` secante, `csc` cosecante, `asin` arcsinus, `acos` arccosinus, `atan` arctangente, `acot` arccotangente, `asec` arcsecante, `acsc` arccosecante,
- ▷ `sinh` sinus hyperbolique, `cosh` cosinus hyperbolique, `tanh` tangente hyperbolique, `asinh` arcsinus hyperbolique, `acosh` arccosinus hyperbolique, `atanh` arctangente hyperbolique,
- ▷ `log` logarithme naturel, `log10` logarithme décimale,`exp` exponentiel
- ▷ `sqrt` racine carrée
- ▷ `abs` valeur absolue
- ▷ `float` conversion en floating point
- ▷ `entier` partie entière d'un réel

Nombres complexes L'unité imaginaire i est indiquée par `%i`. Exemple d'utilisation des nombres complexes :

```
z1:3+5*%i;
z2:-2+6*%i;
z1+z2;
z1-z2;
expand(z1*z2);
expand(z1^2);
```

Avec les nombres complexes on peut utiliser les fonctions suivantes :

- ▷ `cabs` renvoie le module d'un nombre complexe
- ▷ `carg` renvoie l'argument d'un nombre complexe
- ▷ `rectform` renvoie la forme algébrique d'un nombre complexe
- ▷ `polarform` renvoie la forme exponentielle d'un nombre complexe
- ▷ `realpart` extrait la partie réelle d'un nombre complexe
- ▷ `imagpart` extrait la partie imaginaire d'un nombre complexe
- ▷ `conjugate` calcule le conjugué d'un nombre complexe
- ▷ `demoivre` transforme une exponentielle complexe en nombre complexe

Exemples :

```
z1:sqrt(3)+%i;
cabs(z1);
carg(z1);
z2:sqrt(2)-%i*sqrt(2);
-z2;
conjugate(z2);
expand(z2*conjugate(z2));
rectform(z1/z2);
rectform(sqrt(z1));
polarform(z1);
polarform(z2);
demoivre(%e^(%i*x)+%e^(-%i*x));
```

Commandes inertes Certaines commandes `Maxima` existent sous deux formes : une forme active (nom de commande) et une forme inerte (nom de commande identique mais commençant par un `'`). La commande active conduit `Maxima` à lancer un calcul pour proposer un résultat immédiatement. L'homologue inerte d'une commande active ne déclenche pas de calcul mais a pour effet d'activer le pretty-printer afin de produire un affichage du calcul en question selon une présentation conforme aux habitudes de la calligraphie mathématique. Cette fonctionnalité permet une présentation plus agréable des résultats et une description explicite des étapes intervenant dans la résolution d'un problème. Les commandes qui existent sous les deux formes sont `diff` (qui sert à calculer la dérivée, éventuellement partielle, d'une expression algébrique), `integrate` (qui sert à calculer des primitives ou des intégrales) et `limit` (qui sert à calculer des limites).

Nettoyage de la mémoire de travail Lors d'une session assez longue, il peut s'avérer judicieux de nettoyer complètement la mémoire de travail afin de récupérer de l'espace mémoire et de reprendre proprement les définitions des objets et variables utilisés. Une telle réinitialisation s'obtient avec la commande `kill(all)`

```
a:3;
b:5;
a;
b;
kill(all);
a;
b;
```

3

5

3

5

done

a

b

Insistons sur le fait que *la présentation des instructions à l'écran n'est pas nécessairement fidèle à l'ordre de leur exécution.* En effet, l'utilisateur constatera rapidement que l'interface classique lui permet de se déplacer dans la feuille de travail avec les touches [←], [→], [↑] et [↓] ou avec la souris et de modifier une instruction et de la valider à nouveau, quel que soit son emplacement sur la feuille. En particulier, si `kill(all)` provoque l'effacement des connaissances (variables ou fonctions définies par l'utilisateur) de la mémoire de travail, il demeure sans effet sur le contenu de la feuille de travail de sorte que l'utilisateur continue, après l'appel à `kill(all)`, de voir s'afficher exactement la même chose qu'avant l'appel (alors que, juste après l'appel, la mémoire de travail est vierge de toute connaissance...).

Désaffecter une variable Nous venons de voir comment réinitialiser toute la mémoire de travail du système et donc comment désaffecter toutes les variables utilisées au cours d'une session. Cependant on souhaite parfois désaffecter une seule ou quelques variables définies au cours de la session. Un moyen de désaffecter une variable est de lui affecter sa version inerte comme dans l'exemple :

```
a:3;
a;
a:'a;
a;
```

3

3

a

a

Utilisation de l'aide en ligne Pour obtenir de l'aide à propos d'une fonction il suffit de sélectionner la fonction et appuyer sur la touche [F1].

Parenthèses, crochets, accolades Pour entourer une expression de parenthèses ou crochets ou guillemets, sélectionnez-là et tapez « `(` » ou « `[` » « `{` ».

Arrêter l'exécution Si un calcul est trop long à évaluer, on peut essayer les commandes «Maxima → Interrompre» ou «Maxima → Redémarrer Maxima».

1.3 Commandes usuelles

Calculs symboliques, numériques, arithmétique

▷ `factor` factorise un nombre ou un polynôme ;

```
factor(30!);
factor(x^2 + x -6);
```

$2^{26}\, 3^{14}\, 5^7\, 7^4\, 11^2\, 13^2\, 17\, 19\, 23\, 29$

$(x-2)(x+3)$

Pour des factorisations plus complexes, il existe la commande `scanmap(commande,expression)`, qui permet d'appliquer récursivement la commande indiquée à l'expression donnée en argument ;

```
factor(sin(x^2-1));
scanmap(factor,sin(x^2-1));
```

$\sin(x^2-1)$

$\sin((x-1)(x+1))$

▷ `expand` développe une expression ; par exemple

```
expand((x+3)^4);
```

$x^4+12\,x^3+54\,x^2+108\,x+81$

▷ `divide` calcule le quotient et le reste de la division euclidienne ;

```
divide(100,7);
divide(3693,3);
divide(x^3-1,x-1);
divide(x^4+x^2-3,x^2+1);
```

$[14,2]$

$[1231,0]$

$[x^2+x+1,0]$

$[x^2,-3]$

▷ `partfrac(fraction, variable)` décompose une fraction en éléments simples ;

```
partfrac((x^2+8*x+4)/(x^2-4),x);
```

$$\frac{2}{x+2}+\frac{6}{x-2}+1$$

▷ `ratsimp` simplifie des expressions rationnelles ;

```
ratsimp((x^2-1)/(x+1));
```

$x-1$

Par défaut, la commande `ratsimp` ne simplifie pas les expressions contenant des racines carrées. Mettre l'option `algebraic` à `true` permet d'imposer les simplifications ;

```
q1:1/(sqrt(5)-1);

ratsimp(q1);

algebraic:true;

ratsimp(q1);
```

$\frac{1}{\sqrt{5}-1}$

$\frac{1}{\sqrt{5}-1}$

true

$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$

▷ `trigsimp` simplifie des expressions trigonométrique ;

```
trigsimp(2*cos(x)^2 + sin(x)^2);
```

$\cos^2(x)+1$

Par défaut, `Maxima` donne la valeur exacte de quelques valeurs notables. Le package `ntrig` permet d'obtenir des résultat supplémentaires ;

```
cos(%pi/4);

cos(%pi/5);

load(ntrig);

cos(%pi/5);
```

$\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$

/usr/share/maxima/5.21.1/share/trigonometry/ntrig.mac

$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$

▷ `trigexpand` développe des expressions trigonométrique ;

```
trigexpand(sin(2*x)+cos(2*x));
```

$-\sin^2(x)+2\cos(x)\sin(x)+\cos^2(x)$

▷ `exponentialize` exprime des expressions trigonométrique en forme exponentielle ;

```
exponentialize(cos(x));

exponentialize(tanh(x));
```

$\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$

$\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

▷ `logcontract` développe des expressions logarithmiques ;

```
logcontract(log(x)+log(x+1));
logcontract(log(x)-log(x+1));
logcontract(10*log(x+1));
```

$$\log(x^2+x)$$
$$\log\left(\frac{x}{x+1}\right)$$
$$\log(x^{10})$$

- ▷ `sum(exp,i,a,b)` est la somme $\sum_{i=a}^{b}$ exp, `simpsum` calcule cette somme ;

```
sum(k, k, 1, n);

%,simpsum;

sum(1/k^4, k, 1, inf), simpsum;
```

$$\sum_{k=1}^{n} k$$
$$\frac{n(n+1)}{2}$$
$$\frac{\pi^4}{90}$$

On peut ainsi générer un polynôme à partir des coefficients :

```
c:[5,4,3,2];
sum(c[i+1]*x^i,i,0,length(c)-1);
```

$$\frac{2}{x+2}+\frac{6}{x-2}+1$$

- ▷ Le package `solve_rec` permet dans certains cas d'exprimer, dans le cas d'une suite récurrente linéaire, le terme d'ordre n en fonction de n. Pour cela, on dispose de la fonction
  `solve_rec(définition suite récurrence,suite,valeur d'un terme)` :

```
solve_rec(u(n)=n*u(n-1)/(1+n),u(n));
solve_rec(u(n)=n*u(n-1)/(1+n),u(n),u(1)=2);
solve_rec(u(n)=u(n-1)+u(n-2),u(n));
solve_rec(u(n)=u(n-1)+u(n-2),u(n),u(0)=0,u(1)=1);
```

donne

$$u_n=\frac{k_1}{n+1}$$
$$u_n=\frac{4}{n+1}$$
$$u_n=(-1)^n\frac{(\sqrt{5}-1)^n k_1}{2^n}+\frac{(\sqrt{5}+1)^n k_2}{2^n}$$
$$u_n=\frac{(\sqrt{5}+1)^n}{2^n\sqrt{5}}-(-1)^n\frac{(\sqrt{5}-1)^n}{2^n\sqrt{5}}$$

Résolution d'équations et systèmes On utilise la commande `solve` ;

```
solve(x^2-4,x);
```

$$[x=-2,x=2]$$

et pour sélectionner la deuxième solution on peut utiliser

```
%2
```

$$x=2$$

Autres exemples :

```
solve(x^3=1,x);
trigsimp(solve([cos(x)^2-x=2-sin(x)
    ➥^2], [x]));
solve([x-2*y=14,x+3*y=9],[x,y]);
```

$$\left[x=\frac{\sqrt{3}\,i-1}{2},x=-\frac{\sqrt{3}\,i+1}{2},x=1\right]$$
$$[x=-1]$$
$$[[x=12,y=-1]]$$

Il est préférable d'affecter l'ensemble des solutions et d'accéder à une des valeurs par `[n]` ; par exemple pour sélectionner la première solution de l'équation $x^2=4$ on écrira

```
sol:solve(x^2-4,x);
sol[1];
```

$$[x=-2,x=2]$$
$$x=-2$$

Substituer une valeur à une variable La fonction `subst(valeur,variable,expression)` remplace dans `expression` la `variable` par `valeur` ;

```
eq:2*x^2+1/x-(x+1)^3/(1-x);

subst(3,x,eq);
```

$$2x^2+\frac{1}{x}-\frac{(x+1)^3}{1-x}$$
$$\frac{151}{3}$$

Substituer une variable à une autre variable La fonction `ratsubst(variableNEW,variableOLD,expression)` remplace dans `expression` la `variableOLD` par `variableNEW` ;

```
eq:2*x^2+1/x-(x+1)^3/(1-x);

ratsubs(y,1-x,eq);
```

$$2x^2+\frac{1}{x}-\frac{(x+1)^3}{1-x}$$
$$\frac{3y^4-13y^3+24y^2-23y+8}{y^2-y}$$

Si a est tel que $a^2=1+a$, on veut simplifier l'expression $y=(a+1)^5$. Pour cela, la commande `fullratsubst(expression)`, du package `lrats`, est à utiliser ;

```
y:(a+1)^5;
load(lrats);
fullratsubst(1+a,a^2,y);
```

$(a+1)^5$

/usr/share/maxima/5.21.1/share/simplification/lrats.mac

$55a+34$

Hypothèses On peut imposer une condition pour permettre à `Maxima` de simplifier une expression ;

```
abs((x-1)*x*(x+1));
assume(x<-1);
abs((x-1)*x*(x+1));
```

$|x-1|\,|x|\,|x+1|$

$[x<-1]$

$-(x-1)*x*(x+1)$

Vecteurs et Listes On définit un vecteur (resp. une liste) en donnant ses coordonnées (resp. éléments) entre crochets ;

```
u:[1,2,3];
v:[-1,2,3];
u+v;
u-v
```

$[1,2,3]$

$[-1,2,3]$

$[0,4,6]$

$[2,0,0]$

On peut générer automatiquement le éléments du vecteur ou de la liste par `makelist` ;

```
makelist(n^2,n,3,7);
```

$[9,16,25,36,49]$

On peut appliquer une fonction à tous les éléments d'une liste ;

```
a: [1, 2, 3, 4, 5];
f(x):=x^2;
map(f,a);
```

$[1,2,3,4,5]$

$f(x)=x^2$

$[1,4,9,16,25]$

Le produit scalaire de deux vecteurs se note avec un point précédé et suivi d'un espace ;

```
u . v;
```

12

Pour calculer un produit vectoriel, il faut charger le package `vect` et utiliser la commande «~» qu'il faut évaluer par la commande `express` ;

```
load(vect);
express([a,b,c]~[d,e,f]);
```

/usr/share/maxima/5.21.1/share/vector/vect.mac

$[bf-ce,cd-af,ae-bd]$

Matrices On définit une matrice avec `matrix` et en donnant les entrées ligne par ligne :

```
M:matrix([1,2],[3,4]);
```

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix}$$

On peut aussi générer automatiquement une matrice avec `genmatrix(suite utilisée, nombre de lignes, nombre de colonnes)` :

```
f[i,j]:=i^2+j^2;

genmatrix(f,2,4);

genmatrix(a,3,2);
```

$$f_{i,j} := i^2 + j^2$$

$$\begin{bmatrix}2 & 5 & 10 & 17\\5 & 8 & 13 & 20\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\a_{21} & a_{22}\\a_{31} & a_{32}\end{bmatrix}$$

Pour extraire une ligne d'une matrice on met entre crochets le numéro de la ligne, pour extraire une colonne on utilise la fonction `col(matrice, numéro de la colonne)` :

```
M[2];

col(M,2);
```

$$[3,4]$$

$$\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}$$

Pour transposer une matrice on utilise la fonction `transpose` :

```
transpose(M);
```

$$\begin{bmatrix}1 & 3\\2 & 4\end{bmatrix}$$

Pour une matrice donnée, on peut calculer son rang, si elle est carrée on peut calculer son déterminant et, s'il est non nul, calculer la matrice inverse :

```
rank(M);

determinant(M);

MM:invert(M);

MM:M^^(-1);
```

$$2$$

$$-2$$

$$\begin{bmatrix}-2 & 1\\\frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}-2 & 1\\\frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

Calculons le produit pour vérifier. On utilise le produit non commutatif symbolisé par `.`, un point :

```
M . MM;
```

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$$

Les valeurs propres et leur multiplicité s'obtiennent avec `eigenvalues`

```
eigenvalues(M);
```

$$\left[\left[-\frac{\sqrt{33}-5}{2}, \frac{\sqrt{33}+5}{2}\right], [1,1]\right]$$

On vérifie qu'il s'agit bien des solutions du polynôme caractéristique donné par `charpoly`

```
solve(charpoly(M,x)=0,x);
```

$$\left[-\frac{\sqrt{33}-5}{2}, \frac{\sqrt{33}+5}{2}\right]$$

Pour calculer la puissance quatrième de $\mathbb{M}$ on utilise

```
M^^4;
```

$$\begin{bmatrix}199 & 290\\435 & 634\end{bmatrix}$$

La fonction `echelon` renvoie une matrice triangulaire supérieure obtenue avec des combinaisons élémentaires de lignes et de colonnes avec des éléments diagonaux égaux à 1 (utile pour la résolution de systèmes linéaires par la méthode de Gauss) :

```
echelon(M);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Systèmes linéaires Pour résoudre un système linéaire on utilise la commande
`linsolve([eq1,eq2,...,eqN],[x1,x2,...,xN])`

```
linsolve([x1+2*x2+3*x3+4*x4=25,
          -x2+x3-x4=5,2*x1+3*x3=19,
          x1+2*x2+2*x3=20],
         [x1,x2,x3,x4]);
```

$$x_1 = -2, \quad x_2 = \frac{10}{3}, \quad x_3 = \frac{23}{3}, \quad x_4 = -\frac{2}{3}$$

On peut utiliser la notation matricielle et l'exemple précédent se réécrit :

```
A:matrix([1, 2,3, 4],
         [0,-1,1,-1],
         [2, 0,3, 0],
         [1, 2,2, 0]);

b:matrix([25],
         [ 5],
         [19],
         [20]);

A^^-1 . b;
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 25 \\ 5 \\ 19 \\ 20 \end{bmatrix}$$

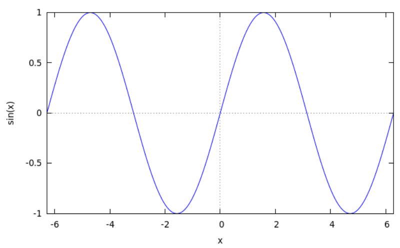
$$\begin{bmatrix} -2 \\ {}^{10}/_{3} \\ {}^{23}/_{3} \\ -{}^{2}/_{3} \end{bmatrix}$$

Graphe de $x \mapsto f(x)$ Pour représenter le graphe de $x \mapsto f(x)$ pour $x \in [a;b]$ on utilise la commande
`plot2d(f(x),[x,a,b])`

```
f:sin(x);
plot2d(f,[x,-2*%pi,2*%pi]);
```

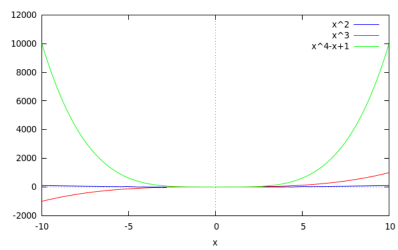
ou

```
f(x):=sin(x);
plot2d(f(x),[x,-2*%pi,2*%pi]);
```

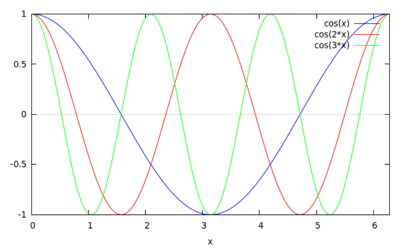


On peut afficher plusieurs graphiques :

```
plot2d([x^2, x^3, x^4 -x +1],
       [x,-10,10]);
```




```
plot2d( makelist(cos(n*x),n,1,3),
        [x,0,2*%pi]);
```



Graphe de $t \mapsto (x(t), y(t))$ Pour tracer une courbe paramétrée on utilisera la commande
`plot2d([['parametric,x(t),y(t)]],[t,a,b])`

```
plot2d([['parametric, cos(t), sin(t)]], [t,0,2*%pi]);
```

trace le cercle de rayon unitaire centré en $(0,0)$.

Graphe de fonctions définies implicitement Pour visualiser le graphe d'une fonction définie implicitement par une équation $f(x,y)=0$ on charge la librairie `implicit_plot` et on utilise la commande `implicit_plot(f(x,y),[x,a,b],[y,c,d])`. Par exemple

```
load(implicit_plot)$
implicit_plot (x^2 = y^3 - 3*y + 1, [x, -4, 4], [y, -4, 4]);
```

Objets graphiques On peut utiliser la commande `draw2d(color=nom_couleur,obj_f,color=nom_couleur,obg_g)` où `obg_` est un objet graphique comme dans l'exemple

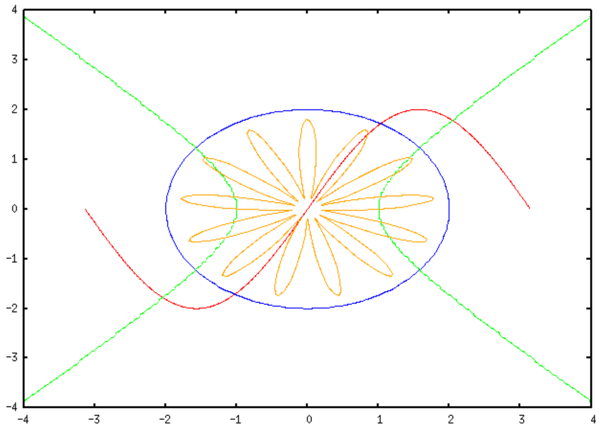
```
g1:explicit(2*sin(x),x,-%pi,%pi);

g2:parametric(2*sin(phi),2*cos(phi),phi,0,2*%pi);

g3:implicit(x^2-y^2=1,x,-4,4,y,-4,4);

g4:polar(1+0.8*sin(13*t),t,0,2*%pi);

draw2d(nticks=200,
       color=red,g1,
       color=blue,g2,
       color=green,g3,
       color=orange,g4);
```



ou encore

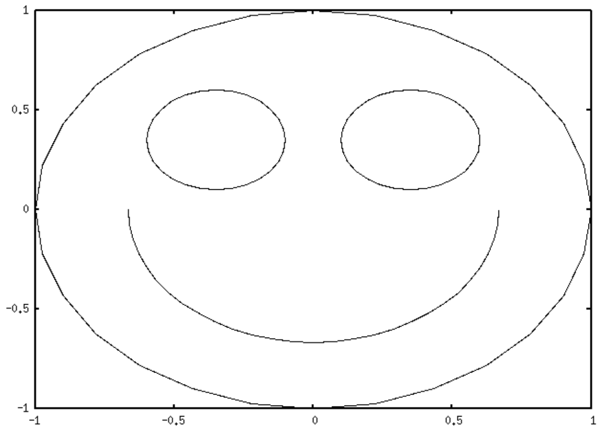
```
c1:parametric(cos(t),sin(t),t,-%pi,%pi);

c2:parametric(cos(t)*2/3,sin(t)*2/3,t,-%pi,0);

c3:parametric(-0.35+0.25*cos(t),0.35+0.25*sin(t),t,-%pi,%pi);

c4:parametric( 0.35+0.25*cos(t),0.35+0.25*sin(t),t,-%pi,%pi);

draw2d(c1,c2,c3,c4);
```



Limites de $x \mapsto f(x)$ Pour calculer la limite $\lim_{x\to x_0} f(x)$ on utilise la commande `limit(f(x),x,x_0)`. Par exemple

```
f:exp(x)$
'limit(f,x,0)=limit(f,x,0);
'limit(f,x,inf)=limit(f,x,inf);
'limit(f,x,minf)=limit(f,x,minf);
```

$$\lim_{x\to 0} e^x = 1,$$
$$\lim_{x\to +\infty} e^x = \infty,$$
$$\lim_{x\to -\infty} e^x = 0.$$

On peut indiquer aussi la direction : la commande `limit(f(x),x,x_0,minus)` calcule $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ tandis que la commande `limit(f(x),x,x_0,plus)` calcule $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$.

```
f:1/x$
'limit(f,x,0,plus)=limit(f,x,0,plus);
'limit(f,x,0,minus)=limit(f,x,0,minus);
```

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty,$$
$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty.$$

Formule de Taylor & développements en série Pour calculer le développement de TAYLOR à l'ordre n au voisinage de x_0

de la fonction $f(x)$ on utilise la commande `taylor(f(x),x,x_0,n)`.

```
taylor(sqrt(1+x),x,0,4);
```

$$1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}-\frac{5x^4}{128}+\dots$$

La fonction `tlimit` effectue aussi le calcul d'une limite, mais en utilisant les développements en série de TAYLOR. Cela peut quelquefois donner une solution que la fonction `limit` est incapable de trouver.

Dérivées et extrema Pour calculer la dérivée première de $f(x)$ par rapport à x on utilise la commande `diff(f(x),x)`.

```
f:x^2*exp(x);
'diff(f,x)
    =diff(f,x);
```

```
f(x):=x^2*exp(x);
'diff(f(x),x)
    =diff(f(x),x);
```

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^2e^x)=(x^2+2x)e^x.$$

Pour les dérivées d'ordre n on utilise la commande `diff(f(x),x,n)` ;

```
f(x):=x^5+1/x;

diff(f(x),x,1);

diff(f(x),x,2);
```

$$f(x)=x^5+\frac{1}{x}$$

$$5x^4-\frac{1}{x^2}$$

$$20x^3+\frac{2}{x^3}$$

Pour définir la fonction dérivée d'une fonction f et pouvoir la réutiliser on utilise `define`. Par exemple, pour calculer les extrema d'une fonction on calcule d'abord les points stationnaire et on en étudie la nature en évaluant le signe de la dérivée seconde.

```
f(x):=x^3-3*x+1;
define(d1f(x),diff(f(x),'x));
define(d2f(x),diff(d1f(x),'x));
pts_critiques:solve(d1f(x)=0);
for i:1 thru length(pts_critiques) do
    print("f''(",rhs(pts_critiques[i]),")=",d2f(rhs(pts_critiques[i])));
```

donne

$$f(x)=x^3-3x+1$$
$$f'(x)=3x^2-3$$
$$f''(x)=6x$$
$$f''(-1)=-6$$
$$f''(1)=6$$

Primitives Pour calculer une primitive on utilise la commande `integrate(f(x),x)` qui intègre $f(x)$ par rapport à x ou retourne une expression intégrale (la forme nominale) si elle ne peut accomplir l'intégration.

```
f:x^2*exp(x);
'integrate(f,x);
If:ev(%,nouns);
If:integrate(f,x);
```

$$\int x^2e^x\,\mathrm{d}x$$

$$(x^2-2x+2)e^x.$$

Pour vérifier qu'il s'agit bien d'une primitive, on calcul sa dérivée et on vérifie si on obtient la fonction de départ :

```
expand(diff(If,x));
```

$$x^2e^x.$$

Intégrales Pour calculer une intégrale définie on utilise la commande `integrate(f(x),x,a,b)` qui intègre $f(x)$ par rapport à x entre a et b.

```
f:x^2*exp(x);
'integrate(f, x,-2,0)=integrate(f, x
   ➥,-2,0);
```

$$\int_{-2}^{0}x^2e^x\,\mathrm{d}x=2-10e^{-2}.$$

On peut calculer les intégrales impropres :

```
integrate (1/x^2, x, 1, inf);
integrate (1/x, x, 1, inf);
```

1

defint : integral is divergent.

Équations différentielles ordinaires du premier ordre Pour calculer la solution d'une équation différentielle du premier ordre on utilise la commande `ode2(edo,y,x)` où `edo` est une équation différentielle de la variable dépendante y et de la variable indépendante x. Si, de plus, on a une condition $y(x_0) = y_0$, on utilise la commande `ic1(sol,x=x_0,y=y_0)` où `sol` est la solution calculée par la commande `edo2`.

```
edo:'diff(y,x)+(3*x^2+1)*y-x^2*exp(-x
   ➥);

solgen:ode2(edo,y,x);

ic1(solgen,x=0,y=1);
```

$$y'(x) + (3x^2+1)\,y(x) = x^2 e^{-x}$$

$$y(x) = \left(\frac{e^{x^3}}{3} + C\right) e^{-x^3-x}$$

$$y(x) = \left(\frac{e^{x^3}}{3} + 2\right) e^{-x^3-x}.$$

Pour afficher le champ de vecteur de l'équation différentielle $y'(x) = f(x, y(x))$ et la solution qui passe par le point (x_0, y_0) on utilise la commande `plotdf(f(x,y(x)),[trajectory_at,x_0,y_0])` après avoir chargé la librairie `plotdf` :

```
load("plotdf")$
plotdf(-x*y+2*x,[trajectory_at,0,3])$
```

Équations différentielles ordinaires du seconde ordre Pour calculer la solution d'une équation différentielle du seconde ordre on utilise la commande `ode2(edo,y,x)` où `edo` est une équation différentielle de la variable dépendante y et de la variable indépendante x. Si, de plus, on a deux conditions $y(x_0) = A$ et $y'(x_0) = B$, on utilise la commande `ic2(sol, ➥x=x_0,y=A,dy=B)` où `sol` est la solution calculée par la commande `edo2`. Par exemple

```
edo:'diff(y,x,2)+2*'diff(y,x)+y=(1-x)
   ➥*exp(-x);

solgen:ode2(edo,y,x);

ic2(solgen,x=0,y=1,dy=2);
expand(%);
```

$$y''(x) + 2y'(x) + y(x) = (1-x)e^{-x}$$

$$y(x) = (C_1 + C_2 x)\,e^{-x} - \frac{x^3 - 3x^2}{6}e^{-x}$$

$$y(x) = \left(-\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 3x + 1\right)e^{-x}$$

2 Exercices résolus à l'aide de Maxima

2.1 Algèbre linéaire

2.1.1 Nombres complexes et Factorisation de Polynômes

Exercice 2.1

Trouver toutes les solutions complexes des équations suivantes (pour chaque équation, les racines sont indiquées à droite) :

1. $z^2 = 2$ .... $z_0 = \sqrt{2}$ et $z_1 = -\sqrt{2}$,
2. $z^2 = 3i$ .... $z_0 = \sqrt{3}e^{i\pi/4}$ et $z_1 = \sqrt{3}e^{i5\pi/4}$,
3. $z^2 = 2+3i$ .... $z_0 = \sqrt{\frac{2+\sqrt{13}}{2}} + i\sqrt{\frac{-2+\sqrt{13}}{2}}$ et $z_1 = -z_0$,
4. $z^2 - 2iz + 2 - 4i = 0$ .... $z_0 = 1+3i$ et $z_1 = -1-i$,
5. $z^2 + 2z + (1-2i) = 0$ .... $z_0 = i$ et $z_1 = -2-i$,
6. $z^2 + 2(1+i)z - 5(1+2i) = 0$ .... $z_0 = 2+i$ et $z_1 = -4-3i$,
7. $z^2 - (5+3i)z + 7i + 4 = 0$.......... $z_0 = 3+2i$ et $z_1 = 2+i$,
8. $z^2 - \sqrt{3}z - i = 0$ .... $z_0 = \frac{\sqrt{3}+2+i}{2}$ et $z_1 = \frac{\sqrt{3}-2-i}{2}$,
9. $z^2 + z + 1 = 0$ .... $z_0 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ et $z_1 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$,
10. $z^2 - (1+2i)z + i - 1 = 0$.......... $z_0 = i$ et $z_1 = 1+i$,
11. $z^2 - (5-14i)z - 2(5i+12) = 0$ .... $z_0 = 5-12i$ et $z_1 = -2i$,
12. $z^2 - (3+4i)z - 1 + 5i = 0$.......... $z_0 = 2+3i$ et $z_1 = 1+i$,
13. $4z^2 - 2z + 1 = 0$.......... $z_0 = \frac{1-\sqrt{3}i}{4}$ et $z_1 = \frac{1+\sqrt{3}i}{4}$,
14. $z^2 - (11-5i)z + 24 - 27i = 0$.......... $z_0 = 6-3i$ et $z_1 = 5-2i$,
15. $z^4 + 2z^2 + 4 = 0$ .... $z_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$, $z_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$, $z_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ et $z_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$,
16. $z^3 - i = 6(z+i)$ .... $z_0 = i$, $z_1 = i$ et $z_2 = i\frac{-1-\sqrt{3}}{2}$ et $z_3 = i\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$,
17. $z^3 + 3z - 2i = 0$.......... $z_0 = z_1 = i$ et $z_2 = -2i$.

Correction.

```
solve(z^2=2);
solve(z^2=3*%i); polarform(%); rectform(%);
solve(z^2=2+3*%i); rectform(%);
solve(z^2-2*%i*z+2-4*%i); rectform(%);
solve(z^2+2*z+(1-2*%i)); rectform(%);
solve(z^2+2*(1+%i)*z-5*(1+2*%i)); rectform(%);
solve(z^2-(5+3*%i)*z+(4+7*%i)); rectform(%);
solve(z^2-sqrt(3)*z-%i); rectform(%);
solve(z^2+z+1);
solve(z^2-(1+2*%i)*z+%i-1);
solve(z^2-(5-14*%i)*z-2*(5*%i+12)); rectform(%);
solve(z^2-(3+4*%i)*z+1*(-1+5*%i)); rectform(%);
solve(4*z^2-2*z+1);
solve(z^2-(11-5*%i)*z+24-27*%i); rectform(%);
solve(z^4+2*z^2+4); rectform(%);
solve(z^3-%i=6*(z+%i)); rectform(%);
solve(z^3+3*z-2*%i); rectform(%);
```

Exercice 2.2 *Division euclidienne*

Effectuer la division euclidienne de f par g dans les cas suivants

1. $f(x) = 7x^4 - x^3 + 2x - 4$ et $g(x) = x^2 - 3x + 5$,
2. $f(x) = x^5 - x^4 - x + 1$ et $g(x) = x^2 - 2x + 1$.

Correction.

1. $f(x) = (7x^2 + 20x + 25)g(x) + (-23x - 129)$:

```
f(x):=7*x^4-x^3+2*x-4;
g(x):=x^2-3*x+5;
divide(f(x),g(x));
```

2. $f(x) = (x^3 + x^2 + x + 1)g(x)$:

```
f(x):=x^5-x^4-x+1;
g(x):=x^2-2*x+1;
divide(f(x),g(x));
```

Exercice 2.3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que $P(x) = x^{n+1} + x^n - 2x^{n-1} + nx - n$ est divisible par $(x-1)$.

Correction. Un polynôme P est divisible par $(x-1)$ si $x = 1$ est racine de P, donc il suffit de vérifier que $P(1) = 0$. En effet, $P(x) = \left(x^n + n + 2x^{n-1}\right)(x-1)$:

```
P(x):=x^(n+1)+x^n-2*x^(n-1)+n*x-n;
P(1);
divide(P(x),x-1);
```

Exercice 2.4 *Multiplicité*

Calculer la multiplicité de la racine x_0 de P dans les cas suivants :

- ▷ $x_0 = 1$ et $P(x) = x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 2$,
- ▷ $x_0 = i$ et $P(x) = x^3 - ix^2 + x - i$.

Correction.

- ▷ $x_0 = 1$ a multiplicité 3 et $P(x) = (x-1)^3 Q(x)$ avec Q polynôme de degré 1 non divisible par $(x-1)$:

```
P:x^4-x^3-3*x^2+5*x-2; subst(x=1,P);
P1:diff(P,x); subst(x=1,P1);
P2:diff(P1,x); subst(x=1,P2);
P3:diff(P2,x); subst(x=1,P3);
Q:divide(P,(x-1)^3);
factor(P);
```

$$\begin{aligned} P(x) &= x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 2 & P(1) &= 0 \\ P'(x) &= 4x^3 - 3x^2 - 6x + 5 & P'(1) &= 0 \\ P''(x) &= 12x^2 - 6x - 6 & P''(1) &= 0 \\ P'''(x) &= 24x - 6 & P'''(1) &= 18 \end{aligned}$$

- ▷ $x_0 = i$ a multiplicité 2 et $P(x) = (x-i)^2 Q(x)$ avec Q polynôme de degré 1 non divisible par $(x-i)$:

```
P:x^3-%i*x^2+x-%i; subst(x=%i,P);
P1:diff(P,x); subst(x=%i,P1);
P2:diff(P1,x); subst(x=%i,P2);
Q:divide(P,(x-%i)^2);
factor(P);
```

$$\begin{aligned} P(x) &= x^3 - ix^2 + x - i & P(1) &= 0 \\ P'(x) &= 3x^2 - 2ix + 1 & P'(1) &= 0 \\ P''(x) &= 6x - 2i & P''(1) &= 4i \end{aligned}$$

Exercice 2.5

On considère le polynôme

$$P(x) := x^5 - 2x^4 + x^3 + x^2 - 2x + 1.$$

1. Écrire la formule de Taylor de P en 1. Montrer que 1 est une racine de P et en déterminer son ordre de multiplicité.
2. Factoriser P sur $\mathbb{R}$.
3. Factoriser P sur $\mathbb{C}$.

Correction.

1. Pour un polynôme P de degré 5, la formule de Taylor en 1 s'écrit

$$P(x) = \sum_{k=0}^{k=5} P^{(k)}(1)\frac{(x-1)^k}{k!}.$$

On calcul alors les dérivées $P^{(k)}(x)$ pour $k = 0, \dots, 5$ et on les évalue en 1 :

```
P:x^5-2*x^4+x^3+x^2-2*x+1; subst(x=1,
   ➥P);
P1:diff(P,x); subst(x=1,P1);
P2:diff(P1,x); subst(x=1,P2);
P3:diff(P2,x); subst(x=1,P3);
P4:diff(P3,x); subst(x=1,P4);
P5:diff(P4,x); subst(x=1,P5);
```

$$\begin{aligned}
P(x) &= x^5-2x^4+x^3+x^2-2x+1 & P(1) &= 0\\
P'(x) &= 5x^4-8x^3+3x^2+2x-2 & P'(1) &= 0\\
P''(x) &= 20x^3-24x^2+6x+2 & P''(1) &= 4\\
P'''(x) &= 60x^2-48x+6 & P'''(1) &= 18\\
P^{IV}(x) &= 120x-48 & P^{IV}(1) &= 72\\
P^{V}(x) &= 120 & P^{V}(1) &= 120
\end{aligned}$$

La formule de Taylor en 1 s'écrit alors

$$P(x) = 4\frac{(x-1)^2}{2} + 18\frac{(x-1)^3}{6} + 72\frac{(x-1)^4}{24} + 120\frac{(x-1)^5}{120} = (x-1)^2\left(x^3+1\right).$$

Ceci implique que 1 est une racine de P de multiplicité 2.

2. On pose $Q(x) = x^3 + 1$. Une racine réelle évidente de Q est -1. En effectuant la division euclidienne de Q par $(x+1)$ on obtient

```
divide(P,x+1);
```

$$Q(x) = (x+1)(x^2-x+1).$$

Étant donné que $x^2 - x + 1$ ne se factorise pas sur $\mathbb{R}$, on conclut que la factorisation de P sur $\mathbb{R}$ est

```
factor(P);
```

$$P(x) = (x-1)^2(x+1)(x^2-x+1).$$

3. Pour factoriser P sur $\mathbb{C}$ il ne reste que factoriser le polynôme $x^2 - x + 1$ sur $\mathbb{C}$.

```
solve(x^2-x+1);
```

$$x_1 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{\pi}{3}}, \quad x_2 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{5\pi}{3}}.$$

On conclut que la factorisation de P sur $\mathbb{C}$ est

$$P(x) = (x-1)^2(x+1)(x-e^{i\frac{\pi}{3}})(x-e^{i\frac{5\pi}{3}}).$$

Exercice 2.6

On considère le polynôme

$$P(x) := x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 2.$$

1. Montrer que $x = 1$ est une racine du polynôme et en déterminer son ordre de multiplicité.
2. Factoriser P à l'aide de la formule de Taylor.

Correction.

1. On a

```
P:x^4-x^3-3*x^2+5*x-2; subst(x=1,P);
P1:diff(P,x); subst(x=1,P1);
P2:diff(P1,x); subst(x=1,P2);
P3:diff(P2,x); subst(x=1,P3);
P4:diff(P3,x); subst(x=1,P4);
```

$$\begin{aligned}
P(x) &= x^4-x^3-3x^2+5x-2 & P(1) &= 0\\
P'(x) &= 4x^3-3x^2-6x+5 & P'(1) &= 0\\
P''(x) &= 12x^2-6x-6 & P(1) &= 0\\
P'''(x) &= 24x-6 & P'''(1) &= 18\\
P^{IV}(x) &= 24 & P^{IV}(1) &= 24
\end{aligned}$$

On en déduit que $x=1$ est une racine de multiplicité 3.

2. Pour un polynôme P de degré 4, la formule de Taylor en 1 s'écrit
$$P(x)=\sum_{k=0}^{k=4} P^{(k)}(1)\frac{(x-1)^k}{k!}.$$
La formule de Taylor en 1 s'écrit alors
$$P(x)=18\frac{(x-1)^3}{3!}+24\frac{(x-1)^4}{4!}=3(x-1)^3+(x-1)^4=(x-1)^3\left(x+2\right).$$
```
factor(P);
```

2.1.2 Calcul matriciel

Exercice 2.7

Calculer $\mathbb{A}+\mathbb{B}+\mathbb{C}$, $\mathbb{AB}$, $\mathbb{A}^{-1}$, $\mathbb{B}^{-1}$, dét($\mathbb{A}$), dét($\mathbb{B}$), dét($\mathbb{C}$) où $\mathbb{A}=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$, $\mathbb{B}=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$, $\mathbb{C}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$.

Correction.

```
A:matrix([1,2],[3,4]);
B:matrix([1,1],[1,1]);
C:matrix([a,b],[c,d]);
```
```
A + B + C;
A . B ;
A^^-1;
B^^-1;
```
```
determinant(A);
determinant(B);
determinant(C);
```

Exercice 2.8

Soient les matrices
$$\mathbb{A}=\begin{pmatrix}-3&2\\0&4\\1&-1\end{pmatrix}\qquad\text{et}\qquad\mathbb{B}=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\\1&1\end{pmatrix}.$$

1. Trouver une matrice $\mathbb{C}$ telle que $\mathbb{A}-2\mathbb{B}-\mathbb{C}=\mathbb{O}$.
2. Trouver une matrice $\mathbb{D}$ telle que $\mathbb{A}+\mathbb{B}+\mathbb{C}-4\mathbb{D}=\mathbb{O}$.

Correction.

```
A:matrix([-3,2],[0,4],[1,-1]);
B:matrix([ 1,2],[0,1],[1,  1]);
C:A-2*B;
D:(A+B+C)/4;
```
$$\mathbb{C}=\mathbb{A}-2\mathbb{B}=\begin{pmatrix}-5&-2\\0&2\\-1&-3\end{pmatrix},\quad \mathbb{D}=\frac{1}{4}(\mathbb{A}+\mathbb{B}+\mathbb{C})=\begin{pmatrix}-7/4&1/2\\0&7/4\\1/4&-3/4\end{pmatrix}.$$

Exercice 2.9

Effectuer les multiplications suivantes
$$\begin{pmatrix}3&1&5\\2&7&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2&1&-1&0\\3&0&1&8\\0&-5&3&4\end{pmatrix},\qquad \begin{pmatrix}-3&0&5\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2\\-4\\-3\end{pmatrix},\qquad \begin{pmatrix}2\\-4\\-3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-3&0&5\end{pmatrix}.$$

Correction.

```
matrix([3,1,5],[2,7,0]) . matrix([2,1,-1,0],[3,0,1,8],[0,-5,3,4]);
matrix([-3,0,5]) . matrix([2],[-4],[-3]);
matrix([2],[-4],[-3]) . matrix([-3,0,5]);
```

Exercice 2.10

Calculer a, b, c et d tels que

$$\begin{pmatrix}1&3\\2&8\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\mathbb{I}_2.$$

Correction.

```
A:matrix([1,3],[2,8]);
I:matrix([1,0],[0,1]);
A^^-1 . I;
```

$$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3\\2&8\end{pmatrix}^{-1}\times\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&-3/2\\-1&1/2\end{pmatrix}$$

Exercice 2.11

On dit que deux matrices $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ commutent si $\mathbb{A}\times\mathbb{B}=\mathbb{B}\times\mathbb{A}$. Trouver toutes les matrices qui commutent avec $\mathbb{A}$:

$$\mathbb{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&0\\0&0&5\end{pmatrix}.$$

Correction.

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&0\\0&0&5\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}\\b_{21}&b_{22}&b_{23}\\b_{31}&b_{32}&b_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}\\b_{21}&b_{22}&b_{23}\\b_{31}&b_{32}&b_{33}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&0\\0&0&5\end{pmatrix}\iff\mathbb{B}=\begin{pmatrix}\kappa_1&0&0\\0&\kappa_2&0\\0&0&\kappa_3\end{pmatrix}\quad\text{avec }\kappa_1,\kappa_2,\kappa_3\in\mathbb{R}.$$

```
A:matrix([1,0,0],[0,3,0],[0,0,5]);
B:matrix([b11,b12,b13],[b21,b22,b23],[b31,b32,b33]);
M:A . B - B . A;
/* La fonction suivante transforme une matrice en une liste */
flatten_matrix(M):=apply(append,args(transpose(M)))$
linsolve(flatten_matrix(M),flatten_matrix(B));
```

Exercice 2.12

Pour quelle valeur de x la trace de la matrice $\mathbb{A}$ est minimale ? Et pour quelle valeur de x est-elle maximale ?

$$\mathbb{A}=\begin{pmatrix}2x^3&4&1\\0&3x^2&2\\5&6&-12x\end{pmatrix}.$$

Correction.

Notons $S\colon x\mapsto \operatorname{tr}(\mathbb{A})$; on a

$$S(x)=2x^3+3x^2-12x$$

Une brève étude de la fonction montre que

- $\lim_{x\to\pm\infty}S(x)=\pm\infty$
- $S'(x)=6(x^2+x-2)$: S est croissante pour $x<-2$ et $x>1$, décroissante pour $-2<x<1$,
- $S''(x)=6(2x+1)$: $S''(-2)<0$, $S''(1)>0$,

par conséquent on a un maximum local pour $x=-2$ et un minimum local pour $x=1$.

```
A:matrix([2*x^3,4,1],
         [0,3*x^2,2],
         [5,6,-12*x]);
S(x):=0;
for i from 1 thru 3 do
       define(S(x),S(x)+A[i][i])$
S(x);
define(S1(x),diff(S(x),x));
sol:solve(S1(x),x);
define(S2(x),diff(S1(x),x));
S2(rhs(sol[1])); S2(rhs(sol[2]));
```

Exercice 2.13

Trouver pour quelles valeurs de t la matrice suivante est inversible

$$\begin{pmatrix} t+3 & -1 & 1 \\ 5 & t-3 & 1 \\ 6 & -6 & t+4 \end{pmatrix}.$$

Correction.

```
A:matrix([t+3,-1,1],
         [5,t-3,1],
         [6,-6,t+4]);
```

```
determinant(A);
factor(%);
```

La matrice est inversible pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus \{-4,-2,2\}$.

Exercice 2.14

Soit a, b et c trois réels quelconques, calculer les déterminants des matrices suivantes :

$$D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix} \qquad D_2 = \begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+a \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -7 & 5 \end{pmatrix} \qquad \mathbb{B} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 5 & 15 & 7 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbb{C} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 4 & -5 \\ -2 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Correction.

```
D1:matrix([1,1,1],[a,b,c],[a^2,b^2,c^2]);
determinant(D1);
factor(%); /* reponse : (b-a)(c-a)(c-b) */
D2:matrix([1+a,1,1],[1,1+a,1],[1,1,1+a]);
determinant(D2);
factor(%); /* reponse : a^2(3+a) */
A:matrix([1,3],[-7,5]);
determinant(A); /* reponse : 26 */
B:matrix([2,3,3],[5,15,7],[0,-2,0]);
determinant(B); /* reponse : -2 */
C:matrix([2,-1,3,-4],[2,0,4,-5],[-2,4,3,1],[0,-3,1,-1]);
determinant(C); /* reponse : -24 */
```

2.1.3 Systèmes linéaires

Exercice 2.15

Résoudre les systèmes linéaires suivantes :

1. $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=2, \\ x_1-2x_2-3x_3=-6, \\ x_1+4x_2+4x_3=3. \end{cases}$

2. $\begin{cases} -x_1+x_2+3x_3=12, \\ 2x_1-x_2+2x_3=-8, \\ 4x_1+x_2-4x_3=15. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x+z+w=0, \\ ax+y+(a-1)z+w=0, \\ 2x+ay+z+2w=0, \\ x-y+2z+aw=0. \end{cases}$

   $a \in \mathbb{R}$

4. $\begin{cases} -2u-4v+3w=-1 \\ 2v-w=1 \\ u+v-3w=-6 \end{cases}$

5. $\begin{cases} -2x-y+z=0 \\ x-2y+z=0 \\ x+y-2z=0 \end{cases}$

Correction.

1. $x_1 = -\frac{7}{2}$, $\quad x_2 = \frac{19}{8}$, $\quad x_3 = -\frac{3}{4}$.

```
linsolve([x_1+2*x_2-x_3=2,x_1-2*x_2-3*x_3=-6,x_1+4*x_2+4*x_3=3],
         [x_1,x_2,x_3]);
```

2. $x_1 = \frac{43}{32}$, $\quad x_2 = \frac{47}{4}$, $\quad x_3 = \frac{17}{32}$.

```
linsolve([-x_1+x_2+3*x_3=12,2*x_1-x_2+2*x_3=-8,4*x_1+x_2-4*x_3=15],
         [x_1,x_2,x_3]);
```

3. Soit $\kappa \in \mathbb{R}$ une constante réelle quelconque, alors
   - si $a \neq 1$, $z = \frac{-a(a-1)w}{a-1} = -a\kappa_1$, $y = -(1-a)w+z = -\kappa_1$ et $x = -w-z = (a-1)\kappa_1$: tous les vecteurs de $\mathrm{Vect}\{(a-1,-1,-a,1)\}$ sont solution du système linéaire ;
   - si $a = 1$, on pose $z = \kappa_2 \in \mathbb{R}$ une constante réelle quelconque et on a $y = -(1-a)w+z = -(1-a)\kappa_1+\kappa_2$ et $x = -w-z = -\kappa_1-\kappa_2$: tous les vecteurs de $\mathrm{Vect}\{(-1,1,1,0),(-1,0,0,1)\}$ sont solution du système linéaire.

```
linsolve([x+z+w=0,a*x+y+(a-1)*z+w=0,2*x+a*y+z+2*w=0,x-y+2*z+a*w=0],
         [x,y,z,w]);
```

4. $u = 1$, $v = 2$ et $w = 3$

```
linsolve([-2*u-4*v+3*w=-1,2*v-w=1,u+v-3*w=-6],[u,v,w]);
```

5. $z = \kappa \in \mathbb{R}$, $y = z$ et $x = z$.

```
linsolve([-2*x-y+z=0,x-2*y+z=0,x+y-2*z=0],[x,y,z]);
```

Exercice 2.16 *Résolution d'un système 2×2 avec paramètre*

Discuter et résoudre le système

$$(S_m) \quad \begin{cases} (4m^2-1)x + (2m-1)^2 y = (2m+1)^2, \\ (2m+1)x + (4m-1)y = 4m^2-1, \end{cases}$$

d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et de paramètre $m \in \mathbb{R}$.

Correction. Comme le système contient un paramètre, on commence par calculer le déterminant de la matrice associée :

$$\det\begin{pmatrix} 4m^2-1 & (2m-1)^2 \\ 2m+1 & 4m-1 \end{pmatrix} = (4m^2-1)(4m-1) - (2m-1)^2(2m+1) = 2m(2m-1)(2m+1).$$

Le système est de Cramer si et seulement si ce déterminant est non nul, donc

$$(S_m) \text{ est un système de Cramer si et seulement si } m \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right\}.$$

- *Étude du cas $m = -\frac{1}{2}$.* Le système s'écrit

$$(S_{-1/2}) \quad \begin{cases} 4y = 0, \\ -3y = 0, \end{cases} \qquad \iff \qquad \begin{cases} x \in \mathbb{R}, \\ y = 0. \end{cases}$$

- *Étude du cas $m = 0$.* Le système s'écrit

$$(S_0) \quad \begin{cases} -x + y = 1, \\ x - y = -1, \end{cases} \qquad \iff \qquad \begin{cases} y \in \mathbb{R}, \\ x = -1 + y. \end{cases}$$

- *Étude du cas $m = \frac{1}{2}$.* Le système s'écrit

$$(S_{1/2}) \quad \begin{cases} 0 = 4, \\ 2x + y = 0, \end{cases}$$

  qui n'admet pas de solutions.

▷ *Étude du cas* $m \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right\}$. On peut utiliser la méthode de CRAMER : l'unique solution est donnée par

$$x = \frac{1}{2m(2m-1)(2m+1)} \begin{vmatrix} (2m+1)^2 & (2m-1)^2 \\ 4m^2-1 & 4m-1 \end{vmatrix} = \frac{-2(2m^2-5m+1}{2m-1},$$

$$y = \frac{1}{2m(2m-1)(2m+1)} \begin{vmatrix} 4m^2-1 & (2m+1)^2 \\ 2m+1 & 4m^2-1 \end{vmatrix} = \frac{(2m+1)(2m-3)}{2m-1}.$$

Donc si on note $\mathscr{S}$ l'ensemble des solutions,

$$\mathscr{S} = \begin{cases} \{\, (x,0) \mid x \in \mathbb{R} \,\} & \text{si } m = -1/2, \\ \left\{ (-1+y, y) \;\middle|\; y \in \mathbb{R} \right\} & \text{si } m = 0, \\ \emptyset & \text{si } m = 0, \\ \left\{ \left(\frac{-2(2m^2-5m+1}{2m-1}, \frac{(2m+1)(2m-3)}{2m-1} \right) \right\} & \text{sinon.} \end{cases}$$

```
linsolve([(4*m^2-1)*x+(2*m-1)^2*y=(2*m+1)^2,(2*m+1)*x+(4*m-1)*y=4*m^2-1],[x,y]);
m:-1/2;
linsolve([(4*m^2-1)*x+(2*m-1)^2*y=(2*m+1)^2,(2*m+1)*x+(4*m-1)*y=4*m^2-1],[x,y]);
m:0;
linsolve([(4*m^2-1)*x+(2*m-1)^2*y=(2*m+1)^2,(2*m+1)*x+(4*m-1)*y=4*m^2-1],[x,y]);
m:1/2;
linsolve([(4*m^2-1)*x+(2*m-1)^2*y=(2*m+1)^2,(2*m+1)*x+(4*m-1)*y=4*m^2-1],[x,y]);
```

Exercice 2.17

Résoudre les systèmes linéaires suivantes

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}.$

2. $\begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}.$

CORRECTION.

1. $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$

```
A:matrix([1,2,3,4],[2,3,4,1],[3,4,1,2],[4,1,2,3]);
b:matrix([10],[10],[10],[10]);
x:A^^(-1) . b;
```

2. $x_1 = 2$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$

```
A:matrix([6,1,1],[2,4,0],[1,2,6]);
b:matrix([12],[0],[6]);
x:A^^(-1) . b;
```

Exercice 2.18

Calculer les inverses des matrices suivantes (si elles existent) :

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{B} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \mathbb{C} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 2 & 11 & 1 \\ 2 & 9 & -11 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{D} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 2 & 11 & 1 \\ 1 & 4 & -10 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 4 & -1 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

CORRECTION.

```
A:matrix([2,-3],[4,5]);
determinant(A);
A^^(-1);
```

$\det(\mathbb{A}) = 22 \neq 0$ donc $\mathbb{A}$ est inversible et on trouve

$$\mathbb{A}^{-1} = \frac{1}{22}\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

```
B:matrix([a,b],[c,d]);
determinant(B);
B^^(-1);
```

$\mathbb{B}$ est inversible si et seulement si $ad \neq bc$ et on a

$$\mathbb{B}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

```
C:matrix([1,5,-3],[2,11,1],[2,9,-11]);
determinant(C);
C^^(-1);
```

$\det(\mathbb{C}) = 2 \neq 0$ donc $\mathbb{C}$ est inversible et on trouve

$$\mathbb{C}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -130 & 28 & 38 \\ 24 & -5 & -7 \\ -4 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

```
D:matrix([1,5,-3],[2,11,1],[1,4,-10]);
determinant(D);
```

$\det(\mathbb{D}) = 0$ donc $\mathbb{D}$ n'est pas inversible.

```
E:matrix([1,0,-1],[4,-1,-2],[-2,0,1]);
determinant(E);
E^^(-1);
```

$\det(\mathbb{E}) = 1 \neq 0$ donc $\mathbb{E}$ est inversible et on a

$$\mathbb{E}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

2.1.4 Familles libres, génératrices, bases

Exercice 2.19

Étudier si la famille $\mathscr{F} = \{\mathbf{u} = (2,3), \mathbf{v} = (4,5)\}$ de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ est libre. Si la famille est liée, trouver une relation entre les vecteurs de cette famille.

Correction. On dit qu'une famille $\mathscr{F} = \left\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p\right\}$ est libre lorsque $\sum_{i=1}^p a_i \cdot \mathbf{u}_i = \mathbf{0}_E \implies a_i = 0\ \forall\ i$. Ici

$$\sum_{i=1}^p a_i \cdot \mathbf{u}_i = \mathbf{0}_E \iff a_1\mathbf{u} + a_2\mathbf{v} = (0,0) \iff \begin{cases} 2a_1 + 4a_2 = 0, \\ 3a_1 + 5a_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a_1 = 0, \\ a_2 = 0, \end{cases}$$

donc la famille est libre.

```
u:[2,3];
v:[4,5];
A:transpose(matrix(u,v));
rank(A);
```

Exercice 2.20

Étudier si la famille $\mathscr{F} = \{\mathbf{u} = (1,0,1), \mathbf{v} = (2,1,0), \mathbf{w} = (0,-1,2)\}$ de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ est libre. Si la famille est liée, trouver une relation entre les vecteurs de cette famille.

Correction. On dit qu'une famille $\mathscr{F} = \left\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p\right\}$ est libre lorsque $\sum_{i=1}^p a_i \cdot \mathbf{u}_i = \mathbf{0}_E \implies a_i = 0\ \forall\ i$. Ici

$$\sum_{i=1}^p a_i \cdot \mathbf{u}_i = \mathbf{0}_E \iff a_1\mathbf{u} + a_2\mathbf{v} + a_3\mathbf{w} = (0,0,0) \iff \begin{cases} a_1 + 2a_2 = 0, \\ a_2 - a_3 = 0, \\ a_1 + 2a_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a_1 = -2\kappa, \\ a_2 = \kappa, \\ a_3 = \kappa \end{cases}$$

donc la famille est liée. De plus, en prenant par exemple $\kappa = 1$, on a $\mathbf{w} = 2 \cdot \mathbf{u} - \mathbf{v}$.

```
u:[1,0,1];
v:[2,1,0];
w:[0,-1,2];
A:transpose(matrix(u,v,w));
rank(A);
solve(a*u+b*v+c*w);
```

Exercice 2.21

Déterminer le rang dans $\mathbb{R}^2$ de la famille $\mathscr{A} = \{\mathbf{u}_1 = (3,1), \mathbf{u}_2 = (-1,5)\}$. Si le rang de la famille est strictement inférieur au nombre de vecteurs de la famille, on déterminera une ou des relations non triviales entre les vecteurs de la famille. Le vecteur $\mathbf{w} = (1,0)$ appartient-il à $\operatorname{Vect}\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2\}$? Si oui, l'exprimer comme combinaison linéaire de $\mathbf{u}_1$ et $\mathbf{u}_2$.

Correction.

Comme $\det\left(\begin{smallmatrix}3 & -1\\ 1 & 5\end{smallmatrix}\right) \neq 0$, $\operatorname{rg}(\mathscr{A}) = 2$ et l'on a $\operatorname{rg}(\mathscr{A}) = \operatorname{card}(\mathscr{A})$: les vecteurs $\mathbf{u}_1$ et $\mathbf{u}_2$ sont linéaire indépendants. Pour obtenir l'expression de $\mathbf{w}$ en fonction de $\mathbf{u}_1$ et $\mathbf{u}_2$ on cherche les réels a et b tels que $a\mathbf{u}_1 + b\mathbf{u}_2 = \mathbf{w}$, ce qui conduit au système linéaire

$$\begin{cases} 3a - b = 1,\\ a + 5b = 0 \end{cases} \implies a = \frac{5}{16},\ b = \frac{-1}{16}, \implies \mathbf{w} = \frac{1}{16}(5\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2)$$

```
u1:[3,1];
u2:[-1,5];

A:transpose(matrix(u1,u2));

w:[1,0];

A^^(-1) . w;
```

Exercice 2.22 *Rang d'une famille de vecteurs*

Dans $\mathbb{R}^3$, déterminer le rang de la famille $\mathscr{E} = \{\mathbf{u}_1 = (1,2,3), \mathbf{u}_2 = (2,-1,1), \mathbf{u}_3 = (1,0,1), \mathbf{u}_4 = (0,1,1)\}$.

Correction. Notons $\mathscr{F} = \operatorname{Vect}(\mathscr{E})$ le sous-espace vectoriel engendré par la famille $\mathscr{E}$.

- ▷ Comme $\operatorname{card}(\mathscr{E}) = 4$ alors $\operatorname{rg}(\mathscr{E}) = \dim(\mathscr{F}) \leq 4$.
- ▷ Comme $\mathscr{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, $\dim(\mathscr{F}) \leq \dim(\mathbb{R}^3) = 3$ ainsi $\operatorname{rg}(\mathscr{E}) = \dim(\mathscr{F}) \leq 3$.
- ▷ Comme $\mathbf{u}_1$ et $\mathbf{u}_2$ sont linéairement indépendants, alors $\dim(\operatorname{Vect}\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2\}) = 2$ et comme $\operatorname{Vect}\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2\} \subset \mathscr{F}$, on obtient $\operatorname{rg}(\mathscr{E}) = \dim(\mathscr{F}) \geq 2$.
- ▷ Étudions maintenant la famille $\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3\} \subset \mathscr{E}$: si elle est libre, comme $\dim(\operatorname{Vect}\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3\}) = 3$ alors $\operatorname{rg}(\mathscr{E}) = 3$; si elle est liée on ne peut pas conclure. On étudiera alors la famille $\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_4\} \subset \mathscr{E}$: si elle est libre, comme $\dim(\operatorname{Vect}\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_4\}) = 3$ alors $\operatorname{rg}(\mathscr{E}) = 3$; si elle est liée $\operatorname{rg}(\mathscr{E}) = 2$.
  Comme $5\mathbf{u}_3 = \mathbf{u}_1 + 2\mathbf{u}_2$, la famille $\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3\}$ est liée.
  Comme $5\mathbf{u}_4 = 2\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$, la famille $\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_4\}$ est liée.

On conclut que $\operatorname{rg}(\mathscr{E}) = 2$.

```
u1:[1,2,3];
u2:[2,-1,1];
u3:[1,0,1];
u4:[0,1,1];
transpose(matrix(u1,u2,u3,u4));
columnspace(%);
```

Exercice 2.23

Déterminer le rang dans $\mathbb{R}^3$ de la famille $\mathscr{A} = \{\mathbf{u}_1 = (-1,1,-3), \mathbf{u}_2 = (1,2,5), \mathbf{u}_3 = (1,7,1)\}$. Si le rang de la famille est strictement inférieur au nombre de vecteurs de la famille, on déterminera une ou des relations non triviales entre les vecteurs de la famille. Le vecteur $\mathbf{w} = (1,0,0)$ appartient-il à $\operatorname{Vect}\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3\}$? Si oui, l'exprimer comme combinaison linéaire de $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ et $\mathbf{u}_3$.

Correction.

Comme $\det\left(\begin{smallmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 7\\ -3 & 5 & 1\end{smallmatrix}\right) \neq 0$, $\operatorname{rg}(\mathscr{A}) = 3$ et l'on a $\operatorname{rg}(\mathscr{A}) = \operatorname{card}(\mathscr{A})$: les vecteurs $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ et $\mathbf{u}_3$ sont linéairement indépendants, *i.e.* la famille $\mathscr{A}$ est libre. Comme $\operatorname{card}(\mathscr{A}) = \dim(\mathbb{R}^3)$, alors $\operatorname{Vect}(\mathscr{A}) = \mathbb{R}^3$ et $\mathbf{w} \in \operatorname{Vect}(\mathscr{A})$. Pour obtenir l'expression de $\mathbf{w}$ en fonction de $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ et $\mathbf{u}_3$ on cherche les réels a, b et c tels que $a\mathbf{u}_1 + b\mathbf{u}_2 + c\mathbf{u}_3 = \mathbf{w}$, ce qui conduit au système linéaire

$$\begin{cases} -a + b + c = 1,\\ a + 2b + 7c = 0,\\ -3a + 5b + c = 0, \end{cases} \implies \mathbf{w} = \frac{1}{2}(-3\mathbf{u}_1 - 2\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3)$$

```
u1:[-1,1,-3];
```

```
u2:[1,2,5];
u3:[1,7,1];

A:transpose(matrix(u1,u2,u3));
```

```
w:[1,0,0];

A^^(-1) . w;
```

2.1.5 Applications linéaires

Exercice 2.24

Soit l'application linéaire

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} x+y+z\\ x-y+z\\ x+3y+z\end{pmatrix}\end{aligned}$$

1. Déterminer une base de son noyau.
2. Déterminer une base de son image.
3. Est-elle injective ? Est-elle surjective ?
4. Déterminer sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Correction.

1. Recherche d'une base du noyau :

$$\mathbf{u}=\begin{pmatrix} u_x\\ u_y\\ u_z\end{pmatrix}\in\ker(f) \iff f(\mathbf{u})=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} u_x+u_y+u_z\\ u_x-u_y+u_z\\ u_x+3u_y+u_z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \iff \begin{cases} u_x\ +u_y+u_z=0\\ u_x\ -u_y+u_z=0\\ u_x+3u_y+u_z=0\end{cases} \iff \mathbf{u}=\begin{pmatrix}-\kappa\\0\\\kappa\end{pmatrix},\quad \kappa\in\mathbb{R}.$$

D'où

$$\ker(f)=\left\{\begin{pmatrix}-\kappa\\0\\\kappa\end{pmatrix}\;\middle|\;\kappa\in\mathbb{R}\right\}=\left\{\kappa\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\;\middle|\;\kappa\in\mathbb{R}\right\}=\operatorname{Vect}\left\{\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}.$$

Par conséquent $\operatorname{Vect}\left\{\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ est une base de $\ker(f)$ et $\dim(\ker(f))=1$.

2. D'après le théorème du rang, $\dim(\ker(f))+\dim(\operatorname{im}(f))=\dim(\mathbb{R}^3)$, donc $\dim(\operatorname{im}(f))=3-1=2$. Soit $\mathscr{C}=\{\mathbf{c}_1,\mathbf{c}_2,\mathbf{c}_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, *i.e.*

$$\mathbf{c}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\qquad \mathbf{c}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\qquad \mathbf{c}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

On sait que, pour une application linéaire $f\colon E\to F$, l'image d'une base de E est une famille génératrice de $\operatorname{im}(f)\subset F$:

$$\operatorname{Vect}\{f(\mathbf{c}_1),f(\mathbf{c}_2),f(\mathbf{c}_3)\}=\operatorname{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}=\operatorname{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}\right\}$$

Comme la cardinalité de cette famille est égale à la dimension de $\operatorname{im}(f)$ on conclut que $\operatorname{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}\right\}$ est une base de $\operatorname{im}(f)$.

3. Comme $\ker(f)\neq\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$, f n'est pas injective.

Comme $\dim(\operatorname{im}(f))\neq\dim(\mathbb{R}^3)$, alors $\operatorname{im}(f)\neq\mathbb{R}^3$, on en déduit que f n'est pas surjective.

4. Soit $\{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, on a

$$f(\mathbf{c}_1) = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2 + \mathbf{c}_3, \qquad f(\mathbf{c}_2) = \begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix} = \mathbf{c}_1 - \mathbf{c}_2 + 3\mathbf{c}_3, \qquad f(\mathbf{c}_3) = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2 + \mathbf{c}_3.$$

Alors par définition la matrice e f relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est la matrice 3×3

$$\mathbb{M}(f, \mathscr{C}, \mathscr{C}) = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\1 & -1 & 1\\1 & 3 & 1\end{pmatrix}.$$

```
Mcc:matrix([1,1,1],[1,-1,1],[1,3,1]);
rank(Mcc);          /* rang(f) */
nullspace(Mcc);     /* une base du noyeau */
columnspace(Mcc); /* une base de l'image */
```

Exercice 2.25

Soit l'application linéaire

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^3\\ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix}x+2y\\y\\x+z\end{pmatrix}\end{aligned}$$

1. Déterminer une base de son noyau.
2. Déterminer une base de son image.
3. Est-elle injective ? Est-elle surjective ?
4. Déterminer sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Correction.

1. Recherche d'une base du noyau :

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix}u_x\\u_y\\u_z\end{pmatrix} \in \ker(f) \iff f(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix}u_x+2u_y\\u_y\\u_x+u_z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \iff \begin{cases} u_x+2u_y = 0\\ u_y = 0\\ u_x + u_z = 0\end{cases} \iff \mathbf{u} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

D'où

$$\ker(f) = \left\{ \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \right\}.$$

Par conséquent $\dim(\ker(f)) = 0$.

2. D'après le théorème du rang, $\dim(\ker(f)) + \dim(\operatorname{im}(f)) = \dim(\mathbb{R}^3)$, donc $\dim(\operatorname{im}(f)) = 3$. De plus, $\operatorname{im}(f) \subset \mathbb{R}^3$ donc $\operatorname{im}(f) = \mathbb{R}^3$. Par conséquent, une base de $\operatorname{im}(f)$ est par exemple la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

3. Comme $\ker(f) = \left\{ \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \right\}$, f est injective.

   Comme $\operatorname{im}(f) = \mathbb{R}^3$, on en déduit que f est surjective.
   Ainsi f est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.

4. Soit $\mathscr{C} = \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, *i.e.*

$$\mathbf{c}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \qquad \mathbf{c}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \qquad \mathbf{c}_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

On a

$$f(\mathbf{c}_1)=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\mathbf{c}_1+\mathbf{c}_3,\qquad f(\mathbf{c}_2)=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}=2\mathbf{c}_1+1\mathbf{c}_2,\qquad f(\mathbf{c}_3)=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\mathbf{c}_3.$$

Alors par définition la matrice de f relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est la matrice 3×3

$$\mathbb{M}(f,\mathscr{C},\mathscr{C})=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}.$$

```
Mcc:matrix([1,0,1],[2,1,0],[0,0,1]);
rank(Mcc);
nullspace(Mcc);
columnspace(Mcc);
```

Exercice 2.26

Soit l'application linéaire

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^3\\ \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix}x\\y\\x+y\end{pmatrix}\end{aligned}$$

1. Déterminer une base de son noyau.
2. Déterminer une base de son image.
3. Est-elle injective ? Est-elle surjective ?
4. Déterminer sa matrice relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.

Correction.

1. Recherche d'une base du noyau :

$$\mathbf{u}=\begin{pmatrix}u_x\\u_y\end{pmatrix}\in\ker(f)\iff f(\mathbf{u})=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\iff\begin{pmatrix}u_x\\u_y\\u_x+u_y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\iff\begin{cases}u_x=0\\u_y=0\\u_x+u_y=0\end{cases}\iff\mathbf{u}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}.$$

D'où

$$\ker(f)=\left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\}.$$

Par conséquent $\dim(\ker(f))=0$.

2. D'après le théorème du rang, $\dim(\ker(f))+\dim(\mathrm{im}(f))=\dim(\mathbb{R}^2)$, donc $\dim(\mathrm{im}(f))=2$. Soit $\{\,\mathbf{c}_1,\mathbf{c}_2\,\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$, *i.e.*

$$\mathbf{c}_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\qquad \mathbf{c}_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}.$$

On sait que $\{\,f(\mathbf{c}_1),f(\mathbf{c}_2)\,\}$ est une famille génératrice de $\mathrm{im}(f)$. De plus, le cardinal de cette famille est égal à la dimension de $\mathrm{im}(f)$, donc $\{\,f(\mathbf{c}_1),f(\mathbf{c}_2)\,\}$ est une base de $\mathrm{im}(f)$. On a

$$f(\mathbf{c}_1)=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\qquad f(\mathbf{c}_2)=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},$$

et on conclut que $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$ est une base de $\mathrm{im}(f)$.

3. Comme $\ker(f) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$, f est injective.

   Comme $\operatorname{im}(f) \neq \mathbb{R}^3$, on en déduit que f n'est pas surjective.
4. Soit $\mathscr{C} = \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et $\mathscr{W} = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, *i.e.*

$$\mathbf{c}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{c}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{w}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$f(\mathbf{c}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_3, \qquad f(\mathbf{c}_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{w}_2 + \mathbf{w}_3.$$

   Alors par définition la matrice de f relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et de $\mathbb{R}^3$ est la matrice 3×2

$$\mathbb{M}(f, \mathscr{C}, \mathscr{W}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

```
Mcc:matrix([1,0],[0,1],[1,1]);
rank(Mcc);
nullspace(Mcc);
columnspace(Mcc);
```

Exercice 2.27

Soit l'application linéaire définie par

$$\begin{aligned} f \colon \mathbb{R}_3[t] &\to \mathbb{R}^4 \\ p &\mapsto \begin{pmatrix} p(0) \\ p(1) \\ p(2) \\ p(3) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Montrer que f est injective et surjective.

Correction. Soit

- ▷ $\mathscr{C} = \left\{ c_0(t) = 1, c_1(t) = t, c_2(t) = t^2, c_3(t) = t^3 \right\}$ la base canonique de $\mathbb{R}_3[t]$ et
- ▷ $\mathscr{E} = \{\mathbf{e}_0 = (1,0,0,0), \mathbf{e}_1 = (0,1,0,0), \mathbf{e}_2 = (0,0,1,0), \mathbf{e}_3 = (0,0,0,1)\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

$$\begin{cases} f(c_0(t)) = c_0(0)\mathbf{e}_0 + c_0(1)\mathbf{e}_1 + c_0(2)\mathbf{e}_2 + c_0(3)\mathbf{e}_3 = (1,1,1,1) \\ f(c_1(t)) = c_1(0)\mathbf{e}_0 + c_1(1)\mathbf{e}_1 + c_1(2)\mathbf{e}_2 + c_1(3)\mathbf{e}_3 = (0,1,1,1) \\ f(c_2(t)) = c_2(0)\mathbf{e}_0 + c_2(1)\mathbf{e}_1 + c_2(2)\mathbf{e}_2 + c_2(3)\mathbf{e}_3 = (0,1,4,9) \\ f(c_3(t)) = c_3(0)\mathbf{e}_0 + c_3(1)\mathbf{e}_1 + c_3(2)\mathbf{e}_2 + c_3(3)\mathbf{e}_3 = (0,1,8,27) \end{cases} \implies \mathbb{M}(f, \mathscr{C}, \mathscr{E}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \end{pmatrix}.$$

On a $\det(\mathbb{M}(f, \mathscr{C}, \mathscr{E})) = 12 \neq 0$ donc $\operatorname{rg}(\mathbb{M}(f, \mathscr{C}, \mathscr{E})) = 4$: l'application linéaire est bijective.

```
Mce:matrix([1,0,0,0],[1,1,1,1],[1,2,4,8],[1,3,9,27]);
rank(Mce);
```

Exercice 2.28

On considère l'application linéaire f de matrice

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 9 & -6 & 10 \\ -5 & 2 & -5 \\ -12 & 6 & -13 \end{pmatrix}$$

par rapport à la base canonique $\mathscr{C}$ de $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que les vecteurs $\mathbf{u}_1 = (2, -1, -2)$, $\mathbf{u}_2 = (1, 0, -1)$ et $\mathbf{u}_3 = (-2, 1, 3)$ forment une base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^3$.
2. Calculer les matrices de passage $\mathbb{P}_{\mathscr{B}\to\mathscr{C}}$ et $\mathbb{P}_{\mathscr{C}\to\mathscr{B}}$.
3. Calculer la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$.

Correction.

1. Comme $\det\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \neq 0$, les vecteurs sont linéairement indépendantes, ainsi $\mathscr{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ est une famille libre. Comme $\operatorname{card}(\mathscr{B}) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$, $\mathscr{B}$ est bien une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Les colonnes de la matrice $\mathbb{P}_{\mathscr{B}\to\mathscr{C}}$ sont données par les vecteurs de $\mathscr{B}$:
$$\mathbb{P}_{\mathscr{B}\to\mathscr{C}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \Longrightarrow \qquad \mathbb{P}_{\mathscr{C}\to\mathscr{B}} = (\mathbb{P}_{\mathscr{B}\to\mathscr{C}})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
3. La matrice de f dans la base $\mathscr{B}$ est alors
$$\mathbb{P}_{\mathscr{B}\to\mathscr{C}}\mathbb{A}\mathbb{P}_{\mathscr{C}\to\mathscr{B}} = \mathbb{M}(f, \mathscr{B})$$
i.e.
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 & -6 & 10 \\ -5 & 2 & -5 \\ -12 & 6 & -13 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 56 & -81 & 78 \\ -32 & 45 & -44 \\ -75 & 105 & -103 \end{pmatrix}.$$

```
A:matrix([9,-6,10],[-5,2,-5],[-12,6,-13]);
u1:[2,-1,-2];
u2:[1,0,-1];
u3:[-2,1,3];
Pbc:transpose(matrix(u1,u2,u3));
rank(U);
Pcb:Pbc^^(-1);
Pbc . A . Pcb;
```

Exercice 2.29

On note $f : \mathbb{R}_4[x] \to \mathbb{R}_4[x]$ l'application linéaire définie par $f(p)(x) = p(x+1) - p(x)$.

1. Déterminer la matrice $\mathbb{B} = \mathbb{M}(f, \mathscr{B})$ de f dans la base $\mathscr{B} = \{1, x, x^2, x^3, x^4\}$ de $\mathbb{R}_4[x]$.
2. Déterminer la matrice $\mathbb{C} = \mathbb{M}(f, \mathscr{C})$ de f dans la base
$$\mathscr{C} = \{1, x, x(x-1), x(x-1)(x-2), x(x-1)(x-2)(x-3)\}$$
de $\mathbb{R}_4[x]$.
3. Calculer les matrices de passage $\mathbb{P}_{\mathscr{B}\to\mathscr{C}}$ et $\mathbb{P}_{\mathscr{C}\to\mathscr{B}}$. Quelle est la relation entre $\mathbb{B}$ et $\mathbb{C}$?
4. Décrire sous forme de Vect, en précisant leurs dimensions, le noyau et l'image de f.

Correction. Notons

$$\begin{aligned}
&\mathbf{b}_1(x) = 1 && \mathbf{b}_2(x) = x && \mathbf{b}_3(x) = x^2 && \mathbf{b}_4(x) = x^3 && \mathbf{b}_5(x) = x^4 \\
&\mathbf{c}_1(x) = 1 && \mathbf{c}_2(x) = x && \mathbf{c}_3(x) = x(x-1) && \mathbf{c}_4(x) = x(x-1)(x-2) && \mathbf{c}_5(x) = x(x-1)(x-2)(x-3) \\
& && && \qquad\quad = x^2 - x && \qquad\quad = x^3 - 3x^2 + 2x && \qquad\quad = x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x
\end{aligned}$$

1. On calcule l'image de chaque vecteur de $\mathscr{B}$ par f :
$$\begin{cases} f(\mathbf{b}_1) = 0 = \mathbf{0}, \\ f(\mathbf{b}_2) = 1 = \mathbf{b}_1, \\ f(\mathbf{b}_3) = 2x + 1 = 2\mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_1, \\ f(\mathbf{b}_4) = 3x^2 + 3x + 1 = 3\mathbf{b}_3 + 3\mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_1, \\ f(\mathbf{b}_5) = 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1 = 4\mathbf{b}_4 + 6\mathbf{b}_3 + 4\mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_1, \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \mathbb{B} = \mathbb{M}(f, \mathscr{B}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. On calcule l'image de chaque vecteur de $\mathscr{C}$ par f :

$$\begin{cases} f(\mathbf{c}_1) = 0 = \mathbf{0}, \\ f(\mathbf{c}_2) = 1 = \mathbf{c}_1, \\ f(\mathbf{c}_3) = 2x = 2\mathbf{c}_1, \\ f(\mathbf{c}_4) = 3x(x-1) = 3\mathbf{c}_2, \\ f(\mathbf{c}_5) = 4x(x-1)(x-2) = 4\mathbf{c}_4, \end{cases} \implies \mathbb{C} = \mathbb{M}(f, \mathscr{C}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. On calcule les coordonnées de chaque vecteur de $\mathscr{C}$ dans la base $\mathscr{B}$:

$$\begin{cases} \mathbf{c}_1 = \mathbf{b}_1, \\ \mathbf{c}_2 = \mathbf{b}_2, \\ \mathbf{c}_3 = \mathbf{b}_3 - \mathbf{b}_2, \\ \mathbf{c}_4 = \mathbf{b}_4 - 3\mathbf{b}_3 + 2\mathbf{b}_2, \\ \mathbf{c}_5 = \mathbf{b}_5 - 6\mathbf{b}_4 + 11\mathbf{b}_3 - 6\mathbf{b}_2, \end{cases} \implies \mathbb{P}_{\mathscr{B}\to\mathscr{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \implies \mathbb{P}_{\mathscr{C}\to\mathscr{B}} = (\mathbb{P}_{\mathscr{B}\to\mathscr{C}})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

et la relation cherchée est

$$\mathbb{P}_{\mathscr{B}\to\mathscr{C}}\mathbb{C}\mathbb{P}_{\mathscr{C}\to\mathscr{B}} = \mathbb{B}.$$

4. On a $\dim(\operatorname{im}(f)) = \operatorname{rg}(\mathbb{B}) = 4$, donc $\dim(\ker(f)) = \dim(\mathbb{R}_4[x]) - \dim(\operatorname{im}(f)) = 1$. Une base de $\operatorname{im}(f)$ est alors l'ensemble $\{ f(\mathbf{b}_2), f(\mathbf{b}_3), f(\mathbf{b}_4), f(\mathbf{b}_5) \}$. Étant donné que $\operatorname{Vect}\{ f(\mathbf{b}_2), f(\mathbf{b}_3), f(\mathbf{b}_4), f(\mathbf{b}_5) \} \subset \mathbb{R}_3[x]$ et que $\dim(\mathbb{R}_3[x]) = 3$ on conclut que $\operatorname{Vect}\{ f(\mathbf{b}_2), f(\mathbf{b}_3), f(\mathbf{b}_4), f(\mathbf{b}_5) \} = \mathbb{R}_3[x]$, une autre base de $\operatorname{im}(f)$ est alors la base canonique de $\mathbb{R}_3[x]$. Comme $f(\mathbf{b}_1) = \mathbf{0}$, une base de $\ker(f)$ est l'ensemble $\{\mathbf{b}_1\}$, *i.e.* le sous-espace vectoriel constitué par les polynômes constants : $\ker(f) = \mathbb{R}_0[x]$.

```
B:  matrix([0,1,1,1,1],[0,0,2,3,4],[0,0,0,3,6],[0,0,0,0,4],[0,0,0,0,0]);
C:  matrix([0,1,0,0,0],[0,0,2,0,0],[0,0,0,3,0],[0,0,0,0,4],[0,0,0,0,0]);
BC: matrix([1,0,0,0,0],[0,1,-1,2,-6],[0,0,1,-3,11],[0,0,0,1,-6],[0,0,0,0,1]);
CB: BC^^(-1);
BC . C . CB - B;
```

2.2 Calculus

2.2.1 Suites

Exercice 2.30

Étant donnés trois nombres réels a, b et μ, on considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = \mu, \\ 4u_{n+1} = ab + 2(a+b) - 2(a+b)u_n + 3u_n^2, & \text{pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

1. Dans cette partie on suppose $a < b < 2$.

   1.1. Montrer que, lorsqu'elle existe, la limite ℓ de la suite est une solution de l'équation

   $$ab + 2(a+b) - 2(2+a+b)x + 3x^2 = 0.$$

   1.2. On considère la fonction polynomiale définie par

   $$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto ab + 2(a+b) - 2(2+a+b)x + 3x^2. \end{aligned}$$

   Déterminer la primitive de f qui s'annule pour $x = 2$ et montrer qu'elle a exactement trois zéros que l'on précisera.

   1.3. En déduire que, lorsqu'elle existe, la limite de la suite vérifie l'une des deux inégalités suivants :

   $$a < \ell < b \quad \text{ou} \quad b < \ell < 2.$$

2. Dans cette partie on suppose $a = b = 2$.
   2.1. Montrer que si la suite converge, sa limite ℓ est égale à 2.
   2.2. Montrer que pour tout $\mu \in \mathbb{R}$, la suite est croissante.
   2.3. Montrer que la suite est convergente lorsque $\mu \in \left]\frac{2}{3};2\right[$.
   2.4. Montrer que la suite est divergente lorsque $\mu \notin \left[\frac{2}{3};2\right]$.
   2.5. Préciser les cas pour $\mu = \frac{2}{3}$ et pour $\mu = 2$.

CORRECTION. On commence par introduire la fonction $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $u_{n+1} = h(u_n)$:

$$h(x) = \frac{ab + 2(a+b) - 2(a+b)x + 3x^2}{4}$$

```
h(x):=1/4*(3*x^2-2*(a+b)*x+a*b+2*(a+b));
```

1. Dans cette partie on suppose $a < b < 2$.
   1.1. Si la suite converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ alors, sachant que l'on a $u_{n+1} = h(u_n)$ et que h est une fonction continue, nécessairement $\ell = h\ell$.

```
4*(h(x)-x)=0, expand;
```

$$ab + 2(a+b) - 2(2+a+b)x + 3x^2 = 0.$$

   1.2. $f(x)$ est le membre de gauche de l'équation précédente :

```
f(x):=4*h(x)-4*x;
```

$$f(x) = ab + 2(a+b) - 2(2+a+b)x + 3x^2.$$

On détermine g la primitive de f qui s'annule pour $x = 2$:

```
g(x):=integrate(f(t),t,2,x);
```

$$g(x) = 2ab + 2(2a + (a+2)b)x + (-a - b - 2)x^2 + x^3.$$

On factorise l'expression obtenue :

```
factor(g(x));
```

$$(x-2)(x-a)(x-b)$$

donc g s'annule en $x = 2$, $x = a$ et $x = b$.

   1.3. Le théorème de ROLLE s'applique à g sur les deux segments $[a;b]$ et $[b;2]$, sa dérivée f s'annule donc au moins une fois à l'intérieur de ces deux segments et comme elle ne s'annule au plus que deux fois sur $\mathbb{R}$ (polynôme de degré 2), on a là ses deux zéros distincts et ℓ est l'un d'eux.

2. On particularise les fonctions f et h dans ce cas :

```
f2(x):=ev(f(x),a=2,b=2);
```

$$f_2(x) = 12 - 12x + 3x^2.$$

```
factor(f2(x));
```

$$3(x-2)^2.$$

```
h2(x):=ev(h(x),a=2,b=2);
```

$$h_2(x) = \frac{12 - 12x + 3x^2}{4}.$$

```
factor(h2(x));
```

$$\frac{3}{4}(x-2)^2.$$

2.1. Comme on le voit dans la factorisation précédente, l'équation $f_2(x) = 0$ ou encore $h_2(x) = x$ n'admet qu'une seule solution : $x = 2$, ce qui permet de justifier que lorsque la suite converge, elle converge nécessairement vers $\ell = 2$.

2.2. Le signe de $h_2(x) - x$ étant toujours positif, on peut en déduire que la suite est croissante quelle que soit la valeur de μ.

2.3. Une étude des variations de h_2 sur $\mathbb{R}$ montre que l'intervalle $\left]\frac{2}{3};2\right[$ est stable. Si μ est dans cet intervalle alors on montre par récurrence que tous les termes de la suite y seront, la suite est donc bornée. Comme elle est croissante et bornée, elle converge et sa limite est $\ell = 2$.

2.4. D'après l'étude des variations de h_2 sur $\mathbb{R}$, on peut établir que si $\mu < \frac{2}{3}$ ou $\mu > 2$ alors tous les termes de la suite à partir du rang 1 sont supérieurs à 2. Comme la suite est croissante et tous les termes de la suite à partir du rang 1 sont supérieurs à 2, la suite ne peut alors pas converger vers 2, seule limite possible. Dans ce cas, elle est divergente.

2.5. Si $\mu = \frac{2}{3}$ ou $\mu = 2$, alors la suite est stationnaire à partir du rang 1 et vaut 2.

Le jeu d'échecs

Selon la légende, le jeu d'échecs fut inventé en Inde par un savant. Le roi, séduit par ce nouveau loisir, le convoqua au palais : “Ton jeu m'a redonné la joie de vivre ! Je t'offre ce que tu désires !” lui dit-il. Le sage ne voulait rien et ne dit mot. Le roi offensé s'énerva : “Parle donc, insolent ! Tu as peur que je ne puisse exaucer tes souhaits ?” Le sage fut blessé par ce ton et décida de se venger : “J'accepte votre présent. Vous ferez déposer un grain de blé sur la première case de l'échiquier. Vous ferez mettre ensuite 2 grains sur la deuxième case, 4 sur la troisième et ainsi de suite. . .” Le roi s'énerva pour de bon : “Puisque tu honores si mal ma générosité, vas-t-en ! Ton sac de blé te sera porté demain et ne me dérange plus !” Le lendemain matin, le roi fut réveillé par son intendant affolé : ”Sire, c'est une catastrophe ! Nous ne pouvons pas livrer le blé ! Nos mathématiciens ont travaillé toute la nuit : il n'y a pas assez de blé dans tout le royaume pour exaucer le souhait du savant !” Pourquoi une telle affirmation ?

Notons b_n le nombre de grains de blé sur la case n, n allant de 0 à 63. La suite (g_n) est géométrique de raison 2 car $g_{n+1} = 2g_n$ donc $g_n = 2^n g_0 = 2^n$. Ainsi la somme totale des grains de blé sera

$$\sum_{n=0}^{63} g_n = \sum_{n=0}^{63} 2^n = \frac{1-2^{64}}{1-2} = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,615.$$

```
sum(a^n,n,0,N);
%, simpsum$
define(S(a,N),%);
'S(2,N)=S(2,N);
'S(2,63)=S(2,63);
```

Exercice 2.31 *Suite géométrique*

Une population microbienne voit son effectif augmenter d'à peu près 10% toutes les heures. Sachant qu'elle comporte 200 individus au moment où nous l'observons, qu'en sera-t-il au bout de 24 heures ? Au bout de n heures (où n est un entier naturel) ?

Correction. Notons g_i le nombre d'individu après i heures. D'après nos informations, $g_0 = 200$ et comme la population augmente d'à peu près 10% toutes les heures $g_{i+1} \simeq (1+10\%)g_i$. La suite (g_i) est donc géométrique de raison 1.1. Donc $g_n \simeq (1.1)^n g_0$ et au but de 24 heures il y aura à peu près $g_{24} \simeq 1970$ individus.

```
solve_rec(g(n+1)=(1+10/100)*g(n),g(n),g(0)=200);
subst(n=24,%);
float(%);
```

Exercice 2.32 *Suite arithmétique*

Le prix de vente d'une voiture commercialisée initialement en 1995 diminue tous les ans de la même valeur. En 2002, elle est affichée au prix de 13 200 €. On relève en 2006 un prix de vente de 11 600 €. On note v_n le prix de vente de ce modèle l'année $(1995+n)$ et on considère la suite (v_n).

1. Donner la nature de la suite (v_n) et en déterminer la raison.
2. Quel était le prix initial de vente en 1995 ?
3. À partir de quel année sera-t-il possible d'acquérir la voiture pour moins de 10 000 € ?
4. De début 1999 à fin 2010, un concessionnaire achète chaque année dix de ces modèles. Déterminer la somme totale

dépensée pour acheter l'ensemble de ces véhicules.

CORRECTION.

1. Comme le prix de vente diminue tous les ans de la même valeur, la suite (v_n) est arithmétique $v_{n+1} = v_n + r = v_0 + nr$. On a $v_{11} = 11600$ et $v_7 = 13200$ donc la raison de la suite est $r = \frac{v_{11}-v_7}{11-7} = \frac{11600-13200}{4} = -400$.

```
load(solve_rec);
Vn:solve_rec(v(n+1)=v(n)+r,v(n),v(11)=11600);
R:solve(subst(n=7,rhs(Vn))=13200,r);
```

2. $v_0 = v_{n+1} - nr$ donc $v_0 = 13200 - 7 \times (-400) = 16000$€
3. $v_n < 10000$ ssi $v_0 + (n-1)r < 10000$ ssi $n > \frac{10000-16000}{-400} = \frac{-6000}{-400} = 15$: à partir de 2010 il sera possible d'acquérir la voiture pour moins de 10 000 €.
4. $v_4 + v_5 + \cdots + v_{15} = \sum_{k=0}^{15} v_k - \sum_{k=0}^{3} v_k = \left((15+1)v_0 + r\frac{15(15+1)}{2}\right) - \left((3+1)v_0 + r\frac{3(3+1)}{2}\right) = 146400$€

Exercice 2.33

Vérifier avec `Maxima` les limites suivantes :

$$\lim_{n\to+\infty} n^2\left(1-\cos\frac{2}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} 4\frac{n^2}{4}\left(1-\cos\frac{2}{n}\right) = 2,$$

$$\lim_{n\to+\infty} n^2\left(1-\cos\frac{2}{\sqrt{n}}\right) = \lim_{n\to+\infty} (4n)n\left(1-\cos\frac{2}{\sqrt{n}}\right) = +\infty,$$

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(1-\cos\frac{2}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{4}{n}n^2\left(1-\cos\frac{2}{n}\right) = 0,$$

$$\lim_{n\to+\infty} n^2\left((-1)^n-\cos\frac{1}{n}\right) \quad \text{n'existe pas}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \left(n\sin\frac{2}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} 2\left(\frac{n}{2}\sin\frac{2}{n}\right) = 2,$$

$$\lim_{n\to+\infty} \left(n\sin\frac{2}{\sqrt{n}}\right) = \lim_{n\to+\infty} 2\sqrt{n}\left(\frac{\sqrt{n}}{2}\sin\frac{2}{\sqrt{n}}\right) = +\infty,$$

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n}\sin\frac{2}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{n}}\left(\frac{n}{2}\sin\frac{2}{n}\right) = 0,$$

$$\lim_{n\to+\infty} \left(n\sin\frac{(-1)^n}{n}\right) \quad \text{n'existe pas}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{2}{n}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} \left(\left(1+\frac{2}{n}\right)^{\frac{n}{2}}\right)^2 = e^2,$$

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{2}{\sqrt{n}}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} \left(\left(1+\frac{2}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}} = +\infty,$$

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{2}{n}\right)^{\sqrt{n}} = \lim_{n\to+\infty} \left(\left(1+\frac{2}{n}\right)^{n}\right)^{\frac{1}{\sqrt{n}}} = 1,$$

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)^n \quad \text{n'existe pas}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{3}{n}\right)^{4n} = \lim_{n\to+\infty} \left(\left(1+\frac{1}{n/3}\right)^{n/3}\right)^{4\times 3} = e^{12},$$

$$\lim_{n\to+\infty} n^3\left(\tan\frac{3}{n}-\sin\frac{3}{n}\right) \overset{t=n/3}{=} \lim_{t\to+\infty} (3t)^3\left(\frac{\sin\frac{1}{t}}{\cos\frac{1}{t}}-\sin\frac{1}{t}\right)$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\left(3+\frac{1}{n}\right)^{2n}}{9^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3^{2n}\left(\left(1+\frac{1}{3n}\right)^{3n}\right)^{2n/3n}}{3^{2n}} = e^{2/3},$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n-(-1)^{n+1}}{n+(-1)^{n+1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-\frac{(-1)^{n+1}}{n}}{1+\frac{(-1)^{n+1}}{n}} = 1,$$

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n^5+3n}-n = \lim_{n} \frac{n^5+3n-n^2}{\sqrt{n^5+3n}+n} = \lim_{n} \frac{n^5}{n^{5/2}} = +$$

$$\lim_{n\to+\infty} n-\sqrt{n^3-3n} = \lim_{n} \frac{n^2-(n^3-3n)}{n+\sqrt{n^3-3n}} = \lim_{n} \frac{-n^3}{n^{3/2}} =$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin^5(\sqrt{n})}{n^2} = 0 \text{ (théorème d'encadrement)}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{\pi}{n}\right)^n = \lim_{n} \left(\left(1+\frac{\pi}{n}\right)^{n/\pi}\right)^{\pi} = e^{\pi}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1-\frac{e}{n}\right)^n = \lim_{n} \left(\left(1+\frac{-e}{n}\right)^{-n/e}\right)^{-e} = e^{-e}$$

CORRECTION.

```
limit(n^2*(1-cos(2/n)),n,inf);
limit(n^2*(1-cos(2/sqrt(n))),n,inf);
limit(n*(1-cos(2/n)),n,inf);
limit(n^2*((-1)^n-cos(2/n)),n,inf);
limit(n*sin(2/n),n,inf);
limit(n*sin(2/sqrt(n)),n,inf);
limit(sqrt(n)*sin(2/n),n,inf);
limit(n*sin((-1)^n/n),n,inf);
limit((1+2/n)^n,n,inf);
limit((1+2/sqrt(n))^n,n,inf);
```

```
limit((1+2/n)^sqrt(n),n,inf);
limit((1+(-1)^n/n)^n,n,inf);
limit((1+3/n)^(4*n),n,inf);
limit(n^3*(tan(3/n)-sin(3/n)),n,inf);
limit((3+1/n)^(2*n)/(3^n)^2,n,inf);
limit((n-(-1)^(n+1))/(n+(-1)^(n+1)),n,inf);
limit(sqrt(n^5+3*n)-n,n,inf);
limit(n-sqrt(n^3-3*n),n,inf);
limit((sin(sqrt(n)))^5/n^2,n,inf);
limit((1+%pi/n)^n,n,inf);
limit((1-%e/n)^n,n,inf);
```

Exercice 2.34 *Suites récurrentes*

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_0=2$ et $u_{n+1}=2-\frac{1}{u_n}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.
   1.1. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bien définie qui satisfait $u_n>1$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.
   1.2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone puis en étudier la convergence.
2. Soit (u_n) une suite telle que $u_0=4$ et $\forall n\in\mathbb{N}$ $u_{n+1}=3-\frac{4}{2+u_n}$.
   2.1. Montrer que $u_n\ge 2$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.
   2.2. Montrer que (u_n) est une suite monotone.
   2.3. En étudier la convergence.

CORRECTION.

1. 1.1. Par récurrence :
   - ▷ $u_0=2>1$;
   - ▷ soit $u_n>1$, alors $u_{n+1}=2-\frac{1}{u_n}>2-1=1$.

   1.2. Puisque $u_n>1$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $u_{n+1}-u_n=2-\frac{1}{u_n}-u_n=-\frac{(u_n-1)^2}{u_n}<0$, autrement dit la suite u_n est monotone décroissante. Étant une suite monotone décroissante vérifiant $u_n>1$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, alors elle converge et $\lim u_n=\ell\ge 1$. En passant à la limite dans la définition, on a $\ell=2-\frac{1}{\ell}$ d'où $\ell=1$.

```
load(solve_rec);
un:solve_rec(u(n+1)=2-1/u(n),u(n),u(0)=2);
limit(rhs(un),n,inf);
```

2. 2.1. La propriété se démontre par récurrence. On a bien $u_0=4>1$. Il reste à démontrer que, pour tout $k\in\mathbb{N}$, si $u_k>1$ alors $u_{k+1}>1$. On a

$$u_{k+1}>1 \iff 3-\frac{4}{u_k+2}>1 \iff \frac{4}{u_k+2}<2 \overset{u_k+2>0}{\iff} 2<u_k+2 \iff 0<u_k.$$

   Comme $u_k>1>0$ alors $u_{k+1}>1$.

   2.2. Pour tout $n\in\mathbb{N}$ on a

$$u_{n+1}-u_n=3-\frac{4}{u_n+2}-u_n=\frac{-u_n^2+u_n+2}{u_n+2}=1-u_n^2<0.$$

   Comme pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n>1$, alors $1-u_n^2<0$ donc (u_n) est une suite monotone décroissante.

   2.3. On a montré que la suite (u_n) est décroissante et minorée. Elle est donc convergente. Notons ℓ sa limite. La suite (u_{n+1}) tend vers ℓ et la suite $f(u_n)$ tend vers $f(\ell)$. La limite vérifie donc

$$\ell=3-\frac{4}{\ell+2} \iff \ell^2-\ell-2=0 \iff (\ell-2)(\ell+1)=0.$$

   Comme $u_n>1$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, il faut $\ell\ge 1$; on a donc $\ell=2$.

```
load(solve_rec);
un:solve_rec(u(n+1)=3-4/(2+u(n)),u(n),u(0)=4);
limit(rhs(un),n,inf);
```

2.2.2 Fonctions réelles d'une variable réelle

Exercice 2.35

On considère la fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{e^x-1}$.

1. Montrer que la fonction f n'est pas prolongeable par continuité en 0.
2. Montrer que la fonction $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = xf(x)$ est prolongeable par continuité en 0. Dans la suite, on identifiera g avec ce prolongement.
3. Après avoir déterminé le développement limité à l'ordre 4 en 0 de $e^x - 1$, en déduire le développement limité à l'ordre 3 en 0 de g.
4. Montrer qu'il existe quatre réels a, b, c et d tels que, au voisinage de 0 mais sauf en 0, on ait :

$$f(x) = \frac{a}{x} + b + cx + dx^2 + o(x^2).$$

Le membre de droite de l'égalité ci-dessus est le développement limité généralisé de f au voisinage de 0 à l'ordre 2.

Correction. Définition de f :

```
f(x):=1/(exp(x)-1);
```

$$f(x) = \frac{1}{e^x - 1}$$

Calculons $\lim_{x\to0} f(x)$:

```
limit(f(x),x,0);
```

Cette limite n'existe pas.

Définition de g :

```
g(x):=x*f(x);
```

$$g(x) = \frac{x}{e^x - 1}$$

Calculons $\lim_{x\to0} g(x)$:

```
limit(g(x),x,0);
```

Cette limite existe donc g est prolongeable par continuité en 0 en posant $g(0) = 1$.

Calculons le développement limité en 0 à l'ordre 4 de $e^x - 1$:

```
t1:taylor(exp(x)-1,x,0,4);
```

$$x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \dots$$

En substituant le développement précédent à $e^x - 1$ dans l'expresion de g on voit une simplification possible par x. La quantité qui reste est de la forme $\frac{1}{1+u}$. On développe $\frac{1}{1+u}$ au voisinage de 0 à l'ordre 3 :

```
t2:taylor(1/(1+u),u,0,3);
```

$$1 - u + u^2 - u^3 + \dots$$

En substituant u dans l'expression précédente on obtient le résultat attendu :

```
subst(u=t1/x-1,t2);
```

$$1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} + \dots$$

On vérifie directement

```
taylor(g(x),x,0,3);
```

$$1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} + \dots$$

En divisant par x on obtient le développement généralisé de f en 0 donc $a = 0$, $b = 1$, $c = -1/2$ et $d = 1/12$.

Exercice 2.36

1. Soit $g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la fonction définie par $g(x)=-\frac{1}{2}+\frac{x}{2\sqrt{x^2+1}}$. Étudier la continuité et la dérivabilité de g ; en déduire les variations de g.
2. Soit $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x)=-\frac{x}{2}+1+\frac{1}{2}\sqrt{x^2+1}$. Étudier la fonction f et donner la position de la courbe représentative de f par rapport à ses asymptotes.
3. Déduire de l'étude précédente l'existence d'un intervalle $[a;b]\in_R$, à préciser, tel que f permet de définir une bijection de $\mathbb{R}$ sur $[a;b]$. Vérifier que la bijection réciproque est telle que, pour tout $x\in[a;b]$,

$$f^{-1}(x)=\frac{1}{4(x-1)}+1-x.$$

Tracer sa courbe représentative.

Correction. Définition de g :

```
g(x):=x/(2*sqrt(x^2+1))-1/2;
```

Limites aux bornes de son domaine de définition :

```
limit(g(x),x,minf);
limit(g(x),x,inf);
```

Dérivée première :

```
define(d1g(x),ratsimp(diff(g(x),'x)));
```

elle est manifestement positive sur $\mathbb{R}$ donc g est strictement croissante et $g(\mathbb{R})=]-1;0[$.

Définition de f :

```
f(x):=1+sqrt(x^2+1)/2-x/2;
```

Limites aux bornes du domaine de définition :

```
limit(f(x),x,minf);
limit(f(x),x,inf);
```

Dérivée première (on vérifie qu'elle coïncide avec g) :

```
define(d1f(x),ratsimp(diff(f(x),'x)));
solve(d1f(x)-g(x));
```

Asymptote en $-\infty$ et étude du signe de la différence de f et de l'équation de l'asymptote (on se ramène à 0) :

```
t1:taylor(f(x),x,minf,0);
s:ratsimp(f(x)-(-x+1));
ratsimp(subst(x=1/t,s));
```

Cette quantité est manifestement positive donc f est au dessus de la droite.

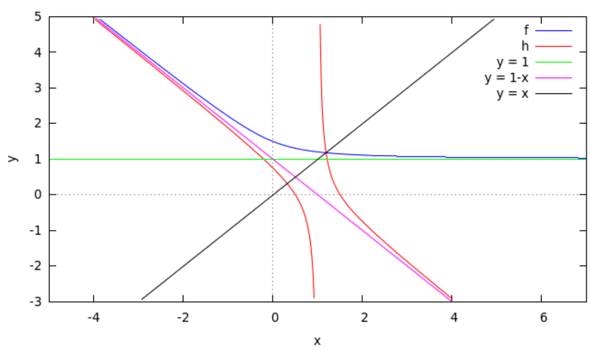
On définie h et on vérifie que $h\circ f$ et $f\circ h$ coïncident avec l'identité :

```
h(x):=-x+1/(4*(x-1))+1;
radcan(f(h(x)));
ratsimp(h(f(x)));
```

```
plot2d([f(x),h(x),x^0,-x+1,x],[x,-5,7],[y,-3,5],[legend,f,h,y=1,y=-x+1,y=x]);
```

Donc $h\colon \mathbb{R}\to]-1;+\infty[$ est bien la réciproque de f.

Représentation graphique :



Exercice 2.37

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x\cosh(x)-\sinh(x)}{\cosh(x)-1} & \text{si } x\neq 0,\\ \ell & \text{si } x=0.\end{cases}$$

Déterminer le développement limité de f à l'ordre 3 au voisinage de 0. En déduire pour quelle valeur de ℓ la fonction f est continue en 0. Dans la suite, on donne à ℓ cette valeur. Montrer que f est dérivable en 0 et préciser la position de sa courbe représentative par rapport à sa tangente au point d'abscisse 0. Montrer que f est croissante sur $[0;+\infty[$. Préciser la droite asymptote au graphe de f au voisinage de $+\infty$ et préciser sa position par rapport à la droite.

CORRECTION.

```
f(x):=(x*cosh(x)-sinh(x))/(cosh(x)-1);
taylor(f(x),x,0,3);
```

La limite de f en 0 est donc 0. Il faut et il suffit de poser $\ell=0$ pour que f soit continue en 0. De plus, f est dérivable en 0 et $f'(0)=\frac{2}{3}$.

```
c:limit(f(x)/x,x,0);
taylor(f(x)-c*x,x,0,3);
```

La différence est équivalente à $x^3/90$ donc la courbe représentative de f traverse sa tangente à l'origine.

```
diff(f(x),x);
factor(%);
```

La quantité dont le signe n'est pas immédiat est $\sinh(x)-x$, on a toutefois vite fait de se convaincre qu'elle est positive sur $\mathbb{R}_+$, en s'appuyant sur le signe de sa dérivée qui est manifestement positive. La fonction f est donc croissante sur $[0;+\infty[$.

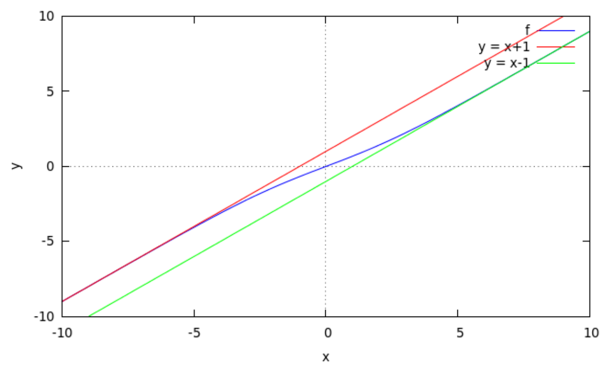
```
m:limit(f(x)/x,x,inf);
q:limit(f(x)-m*x,x,inf);
```

Il y a donc une droite asymptote en $+\infty$ qui a équation $y=x-1$. L'étude de la position de la courbe par rapport à son asymptote au voisinage de $+\infty$ peut être faite en recherchant un équivalent de $g(x)=f(x)-(x-1)$. Demander, comme cela, un développement de ne convient pas à maxima, c'est pourquoi on passe à l'écriture à l'aide d'exponentielles des fonctions sinh et cosh.

```
g(x):=f(x)-m*x-q;
factor(g(x));
taylor(%,x,inf,1);
```

Un équivalent de $g(x)$ au voisinage de $+\infty$ est $2xe^{-x}$ qui est positif : la courbe est donc au dessus de son asymptote vers $+\infty$.

```
F(x):=block ([], if (x=0) then return (0) else return (f(x)));
plot2d([F(x),x+1,x-1],[x,-10,10],[y,-10,10],[legend,f,y=x+1,y=x-1]);
```



2.2.3 Primitive et intégrales

Exercice 2.38 *Intégration directe*

Vérifier avec `Maxima` que les primitives suivantes sont correctes :

1. $\displaystyle\int 2x^3-3x+1\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x(x^3-3x+2)+c$
2. $\displaystyle\int \sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{12}(8\sqrt[3]{x}+3)x^{4/3}+c$
3. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x=2\sqrt{x+1}+c$
4. $\displaystyle\int \sqrt{2x+1}\,\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{(2x+1)^3}}{3}+c$
5. $\displaystyle\int e^{2x+1}\,\mathrm{d}x=\frac{e^{2x+1}}{2}+c$
6. $\displaystyle\int \sqrt[4]{(x-1)^3}\,\mathrm{d}x=\frac{4}{7}(x-1)^{7/4}+c$
7. $\displaystyle\int \frac{x}{x+1}\,\mathrm{d}x=x-\ln(x+1)+c$
8. $\displaystyle\int x\sqrt{5+x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}(5+x^2)^{3/2}+c$
9. $\displaystyle\int \frac{e^x}{1+e^x}\,\mathrm{d}x=\ln(1+e^x)+c$
10. $\displaystyle\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x=2e^{\sqrt{x}}+c$
11. $\displaystyle\int \frac{e^{-1/x}}{x^2}\,\mathrm{d}x=e^{-1/x}+c$
12. $\displaystyle\int xe^{x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{e^{x^2}}{2}+c$
13. $\displaystyle\int \frac{\ln^3(x)}{x}\,\mathrm{d}x=\frac{\ln^4(x)}{4}+c$
14. $\displaystyle\int \frac{1}{x\ln^3(x)}\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{2\ln^2(x)}+c$
15. $\displaystyle\int x^2e^{x^3}\,\mathrm{d}x=\frac{e^{x^3}}{3}+c$
16. $\displaystyle\int \frac{1+\cos x}{x+\sin x}\,\mathrm{d}x=\ln|x+\sin x|+c$
17. $\displaystyle\int \frac{\sin(2x)}{1+\sin^2(x)}\,\mathrm{d}x=\ln(1+\sin^2(x))+c$
18. $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x=-\frac{3}{\sqrt[3]{x}}+c$
19. $\displaystyle\int \sin^3(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x=\frac{\sin^4(x)}{4}+c$
20. $\displaystyle\int \sin(3x)\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{3}\cos(3x)+c$
21. $\displaystyle\int \frac{1}{\sin(x)\cos(x)}\,\mathrm{d}x=\ln(|\tan(x)|)+c$
22. $\displaystyle\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x=-2\cos(\sqrt{x})+c$
23. $\displaystyle\int x(x^2+1)^2\,\mathrm{d}x=\frac{(x^2+1)^3}{6}+c$
24. $\displaystyle\int \frac{e^{\tan(x)}}{\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x=e^{\tan(x)}+c$
25. $\displaystyle\int \frac{x^3+x+1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}+\arctan(x)+c$
26. $\displaystyle\int (1+2x^3)^2\,\mathrm{d}x=\frac{4}{7}x^7+x^4+x+c$
27. $\displaystyle\int (1+\cos(x))^2\,\mathrm{d}x=\frac{3}{2}x+2\sin(x)+\frac{\sin(x)\cos(x)}{2}+c$
28. $\displaystyle\int \frac{1-2x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x=\arcsin(x)+2\sqrt{1-x^2}+c$
29. $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2(x)\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x=\tan(x)-\frac{1}{\tan(x)}+c$
30. $\displaystyle\int \frac{1}{1+e^x}\,\mathrm{d}x=x-\ln(1+e^x)+c$
31. $\displaystyle\int (ax+b)^n\,\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1}+c$ avec $a\neq 0$ et $n\neq 1$
32. $\displaystyle\int \frac{1}{(ax+b)^n}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\frac{(ax+b)^{-n+1}}{-n+1}+c$ avec $ax+b\neq 0$, $a\neq 0$ et $n>1$

CORRECTION.

```
integrate(2*x^3-3*x+1,x);
integrate(sqrt(x)+(x)^(1/3),x);
integrate( 1/sqrt(x+1) ,x);
integrate( sqrt(2*x+1) ,x);
integrate( %e^(2*x+1) ,x);
integrate( (x-1)^(3/4) ,x);
integrate( x/(x+1) ,x);
integrate( x*sqrt(5+x^2) ,x);
integrate( %e^x/(1+%e^x) ,x);
integrate( %e^sqrt(x)/sqrt(x) ,x);
integrate( %e^(-1/x)/x^2 ,x);
integrate( x*%e^(x^2) ,x);
integrate( (log(x))^3/x ,x);
integrate( 1/(x*(log(x))^3) ,x);
integrate( x^2*%e^(x^3) ,x);
integrate( (1+cos(x))/(x+sin(x)) ,x);
integrate( sin(2*x)/(1+(sin(x))^2) ,x);
```

```
integrate( 1/x^(1/3+1) ,x);
integrate( (sin(x))^3*cos(x) ,x);
integrate( sin(3*x) ,x);
integrate( 1/(sin(x)*cos(x)) ,x);
integrate( sin(sqrt(x))/sqrt(x) ,x);
integrate( x*(x^2+1)^2 ,x);
integrate( %e^(tan(x))/(cos(x))^2 ,x);
integrate( (x^3+x+1)/(x^2+1) ,x);
integrate( (1+2*x^3)^2 ,x);
integrate( (1+cos(x))^2 ,x);
integrate( (1-2*x)/sqrt(1-x^2) ,x);
integrate( 1/(sin(x)*cos(x))^2 ,x);
integrate( 1/(1+exp(x)) ,x);
integrate( (a*x+b)^n ,x);
integrate( 1/(a*x+b)^n ,x);
```

Exercice 2.39 *Intégration par parties*

Calculer les primitives suivantes :

1. $\displaystyle\int \frac{\ln(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int \frac{\ln(\ln(x))}{x}\,\mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int \ln(1+x)\,\mathrm{d}x$
4. $\displaystyle\int x^2 e^x\,\mathrm{d}x$
5. $\displaystyle\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$
6. $\displaystyle\int x\sin x\,\mathrm{d}x$
7. $\displaystyle\int x\ln x\,\mathrm{d}x$
8. $\displaystyle\int x^2\cos x\,\mathrm{d}x$
9. $\displaystyle\int \frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$
10. $\displaystyle\int \frac{\sin x}{\cos^3 x}e^{\tan x}\,\mathrm{d}x$
11. $\displaystyle\int x^3\sin x^2\,\mathrm{d}x$
12. $\displaystyle\int e^{2x}\sin(3x)\,\mathrm{d}x$
13. $\displaystyle\int e^{-3x}\cos(2x)\,\mathrm{d}x$
14. $\displaystyle\int x^3\ln x\,\mathrm{d}x$
15. $\displaystyle\int \frac{\ln x}{\sqrt[4]{x}}\,\mathrm{d}x$
16. $\displaystyle\int \ln^2 x\,\mathrm{d}x$
17. $\displaystyle\int x\sin^2 x\,\mathrm{d}x$

CORRECTION.

1. Comme $f(x)=\ln(x)\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{x}$ et $g(x)=-\frac{1}{x}\Leftarrow g'(x)=\frac{1}{x^2}$ on obtient $-\frac{1+\ln x}{x}+c$
2. Comme $f(x)=\ln(\ln(x))\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{x\ln x}$ et $g(x)=\ln(x)\Leftarrow g'(x)=\frac{1}{x}$ on obtient $(\ln(\ln(x))-1)\ln(x)+c$
3. Comme $f(x)=\ln(1+x)\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{1+x}$ et $g(x)=x\Leftarrow g'(x)=1$ on obtient $(1+x)\ln(1+x)-x+c$
4. Comme $f(x)=x^2\Rightarrow f'(x)=2x$ et $g(x)=e^x\Leftarrow g'(x)=e^x$ on obtient $e^x((x-2)x+2)+c$
5. Comme $f(x)=\ln x\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{x}$ et $g(x)=2\sqrt{x}\Leftarrow g'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ on obtient $2\sqrt{x}(\ln x-2)+c$
6. Comme $f(x)=x\Rightarrow f'(x)=1$ et $g(x)=-\cos x\Leftarrow g'(x)=\sin x$ on obtient $-x\cos x+\sin x+c$
7. Comme $f(x)=\ln x\Rightarrow f'(x)=1/x$ et $g(x)=x^2/2\Leftarrow g'(x)=x$ on obtient $\dfrac{x^2}{2}\ln x-\dfrac{1}{4}x^2+c$
8. Comme $f(x)=x^2\Rightarrow f'(x)=2x$ et $g(x)=\sin x\Leftarrow g'(x)=\cos x$ on obtient $x^2\sin x-2[-x\cos x+\sin x]+c$
9. Comme $f(x)=\arcsin x\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et $g(x)=-\sqrt{1-x^2}\Leftarrow g'(x)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ on obtient $-\sqrt{1-x^2}\cdot\arcsin x+x+c$
10. Comme $f(x)={}^{\sin x}/_{\cos x}\Rightarrow f'(x)={}^{1}/_{\cos^2 x}$ et $g(x)=e^{\tan x}\Leftarrow g'(x)={}^{e^{\tan x}}/_{x^2}$ on obtient $e^{\tan x}(\tan x-1)+c$
11. Comme $f(x)=\sin(x^2)\Rightarrow f'(x)=2x\cos(x^2)$ et $g(x)={}^{x^4}/_{4}\Leftarrow g'(x)=x^3$ on obtient $\dfrac{-x^2\cos(x^2)+\sin(x^2)}{2}+c$
12. Comme $f(x)=\sin(3x)\Rightarrow f'(x)=3\cos(3x)$ et $g(x)=e^{2x}/2\Leftarrow g'(x)=e^{2x}$ on obtient $\frac{2e^{2x}(\sin(3x)-\frac{3}{2}\cos(3x))}{13}+c$
13. Comme $f(x)=\cos(2x)\Rightarrow f'(x)=-2\sin(2x)$ et $g(x)=\frac{-e^{-3x}}{3}\Leftarrow g'(x)=e^{-3x}$ on obtient $-\frac{3e^{-3x}(\cos(2x)-\frac{2}{3}\sin(2x))}{13}+c$
14. Comme $f(x)=\ln x\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{x}$ et $g(x)=\frac{x^4}{4}\Leftarrow g'(x)=x^3$ on obtient $\dfrac{x^4(4\ln x-1)}{16}+c$
15. Comme $f(x)=\ln x\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{x}$ et $g(x)=\frac{4x^{3/4}}{3}\Leftarrow g'(x)=\frac{1}{\sqrt[4]{x}}$ on obtient $\dfrac{4}{3}x^{3/4}\left(\ln x-\frac{4}{3}\right)+c$
16. Comme $f(x)=\ln x\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{x}$ et $g(x)=x\ln x-x\Leftarrow g'(x)=\ln x$ on obtient $x(\ln^2 x-2\ln x+2)+c$
17. Comme $f(x)=\sin^2 x\Rightarrow f'(x)=2\sin x\cos x=\sin(2x)$ et $g(x)=\frac{x^2}{2}\Leftarrow g'(x)=x$ on obtient $\frac{1}{4}(x^2-x\sin(2x)-\frac{1}{2}\cos(2x))+c$

```
integrate(log(x)/x^2,x);
integrate(log(log(x))/x,x);
integrate(log(1+x),x);
integrate(x^2*exp(x),x);
integrate(log(x)/sqrt(x),x);
integrate(x*sin(x),x);
integrate(x*log(x),x);
integrate(x^2*cos(x),x);
integrate(x*asin(x)/sqrt(1-x^2),x);
integrate(sin(x)/(cos(x))^3,x);
integrate(x^3*(sin(x^2)),x);
integrate(exp(2*x)*sin(3*x),x);
integrate(exp(-3*x)*cos(2*x),x);
integrate(x^3*log(x),x);
integrate(log(x)/x^(1/4),x);
integrate((log(x))^2,x);
integrate(x*(sin(x))^2,x);
```

Exercice 2.40 *Intégration par changement de variable*

Calculer les primitives suivantes :

1. $\displaystyle\int \frac{\sin(\ln(x))}{x}\,\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int \frac{1+e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int \frac{1}{x-\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$
4. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x(1+\sqrt{x})}}\,\mathrm{d}x$
5. $\displaystyle\int \frac{e^x}{1+e^x}\,\mathrm{d}x$
6. $\displaystyle\int \frac{1}{x\ln x}\,\mathrm{d}x$
7. $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{\ln\frac{1}{x}}}\,\mathrm{d}x$
8. $\displaystyle\int e^x\ln(1+e^x)\,\mathrm{d}x$
9. $\displaystyle\int \frac{1}{x(2+\ln^2 x)}\,\mathrm{d}x$
10. $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$
11. $\displaystyle\int \frac{x^5}{\sqrt{x^3-1}}\,\mathrm{d}x$
12. $\displaystyle\int \sqrt{e^x-1}\,\mathrm{d}x$
13. $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$
14. $\displaystyle\int \frac{1}{e^x+e^{-x}}\,\mathrm{d}x$
15. $\displaystyle\int \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$
16. $\displaystyle\int \frac{\sin(\ln x)}{x}\,\mathrm{d}x$
17. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x$
18. $\displaystyle\int x\sqrt{a+x^2}\,\mathrm{d}x$
19. $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}\,\mathrm{d}x$
20. $\displaystyle\int \frac{e^{1/x}}{x^2}\,\mathrm{d}x$
21. $\displaystyle\int \frac{\cos x}{1+\sin x}\,\mathrm{d}x$
22. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$
23. $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x$

CORRECTION.

1. Si on pose $t=\ln(x)$ alors $\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=\,\mathrm{d}t$ et on obtient $-\cos(\ln(x))+c$
2. Si on pose $t=\sqrt{x}$ alors $\mathrm{d}x=2t\,\mathrm{d}t$ et on obtient $2(\sqrt{x}+e^{\sqrt{x}})+c$
3. Si on pose $t=\sqrt{x}$ alors $\mathrm{d}x=2t\,\mathrm{d}t$ et on obtient $2\ln(\sqrt{x}-1)+c$
4. Si on pose $t=1+\sqrt{x}$ alors $\mathrm{d}x=2(t-1)\,\mathrm{d}t$ et on obtient $\dfrac{4\sqrt{x^{3/2}+x}}{\sqrt{x}}+c$
5. Si on pose $t=e^x$ alors $e^x\,\mathrm{d}x=\,\mathrm{d}t$ et on obtient $\ln(1+e^x)+c$
6. Si on pose $t=\ln x$ alors $\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=\,\mathrm{d}t$ et on obtient $\ln|\ln x|+c$
7. Si on pose $t=\ln\frac{1}{x}$ alors $-\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=2t\,\mathrm{d}t$ et on obtient $-2\sqrt{\ln\dfrac{1}{x}}+c$
8. Si on pose $t=1+e^x$ alors $e^x\,\mathrm{d}x=\,\mathrm{d}t$ et on obtient $(1+e^x)\ln(1+e^x)-e^x+c$
9. Si on pose $t=\ln x$ alors $\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=\,\mathrm{d}t$ et on obtient $\dfrac{\arctan\left(\frac{\ln x}{\sqrt{2}}\right)}{\sqrt{2}}+c$
10. Si on pose $t^2=1-x^2$ alors $-x\,\mathrm{d}x=t\,\mathrm{d}t$ et on obtient $-\dfrac{(x^2+2)\sqrt{1-x^2}}{3}+c$
11. Si on pose $t^2=x^3-1$ alors $3x^2\,\mathrm{d}x=2t\,\mathrm{d}t$ et on obtient $\dfrac{2(x^3+2)\sqrt{x^3-1}}{9}+c$
12. Si on pose $t^2=e^x-1$ alors $\mathrm{d}x=\frac{2t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$ et on obtient $2\left(\sqrt{e^x-1}-\arctan(\sqrt{e^x-1})\right)+c$

13. Si on pose $t = \ln x$ alors $\mathrm{d}x = e^t\,\mathrm{d}t$ et on obtient $\dfrac{\ln^2 x}{x} + c$
14. Si on pose $t = e^x$ alors $\mathrm{d}x = \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$ et on obtient $\arctan e^x + c$
15. Si on pose $t = \tan x$ alors $\mathrm{d}x = \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ et on obtient $e^{\tan x} + c$
16. Si on pose $t = \ln x$ alors $\mathrm{d}x = e^t\,\mathrm{d}t$ et on obtient $-\cos(\ln x) + c$
17. Si on pose $t = \sqrt{1+x^2}$ alors $2x\,\mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t$ et on obtient $\sqrt{1+x^2} + c$
18. Si on pose $t = \sqrt{a+x^2}$ alors $2x\,\mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t$ et on obtient $\dfrac{\sqrt{(a+x^2)^3}}{3} + c$
19. Si on pose $t = \ln x$ alors $\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \,\mathrm{d}t$ et on obtient $\arcsin(\ln x) + c$
20. Si on pose $t = \frac{1}{x}$ alors $-\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \,\mathrm{d}t$ et on obtient $-e^{1/x} + c$
21. Si on pose $t = 1 + \sin x$ alors $\cos x\,\mathrm{d}x = \,\mathrm{d}t$ et on obtient $\ln|1+\sin x| + c$
22. Si on pose $t = \frac{1}{x}$ alors $-\dfrac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \,\mathrm{d}t$ et on obtient $-\sin\dfrac{1}{x} + c$
23. Si on pose $t^2 = 1 + x^2$ alors $x\,\mathrm{d}x = t\,\mathrm{d}t$ et on obtient $\dfrac{(x^2-2)}{3}\sqrt{x^2+1} + c$

```
integrate(sin(log(x))/x,x);
integrate((1+%e^sqrt(x))/sqrt(x),x);
integrate(1/(x-sqrt(x)),x);
integrate(1/sqrt(x*(1+sqrt(x))),x);
integrate(exp(x)/(1+exp(x)),x);
integrate(1/(x*log(x)),x);
integrate(1/(x*sqrt(log(1/x))),x);
integrate(exp(x)*log(1+exp(x)),x);
integrate(1/(x*(2+(log(x))^2)),x);
integrate(x^3/sqrt(1-x^2),x);
integrate(x^5/sqrt(x^3-1),x);
integrate(sqrt(exp(x)-1),x);
integrate(log(x)/x,x);
integrate(1/(exp(x)+exp(-x)),x);
integrate(exp(tan(x))/(cos(x))^2,x);
integrate(sin(log(x))/x,x);
integrate(x/sqrt(1+x^2),x);
integrate(x*sqrt(a+x^2),x);
integrate(1/(x*sqrt(1-(log(x))^2)),x);
integrate(exp(1/x)/x^2,x);
integrate(cos(x)/(1+sin(x)),x);
integrate(cos(1/x)/x^2,x);
integrate(x^3/sqrt(1+x^2),x);
```

Exercice 2.41

Calculer une primitive des fonctions suivantes (a désigne un réel strictement positif) :

1. $x \mapsto \dfrac{1}{x^2+a^2}$
2. $x \mapsto \dfrac{1}{x^2-a^2}$
3. $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$
4. $x \mapsto \dfrac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}$
5. $x \mapsto \dfrac{1}{\sin^2(x)}$
6. $x \mapsto \dfrac{1}{\sin(x)}$
7. $x \mapsto \dfrac{1}{\cos(x)}$
8. $x \mapsto \dfrac{\sin^3(x)}{\sqrt{\cos(x)}}$

Correction.

1. $x \mapsto \dfrac{\arctan\left(\frac{x}{a}\right)}{a}$
2. $x \mapsto \dfrac{\ln\left(\frac{x-a}{x+a}\right)}{2a}$
3. $x \mapsto \operatorname{arcsinh}\left(\dfrac{x}{a}\right)$
4. $x \mapsto \sqrt{x^2+a^2} - a\operatorname{arcsinh}\left(\dfrac{x}{a}\right)$
5. $x \mapsto -\dfrac{1}{\tan(x)}$
6. $x \mapsto \dfrac{\ln\left(\frac{\cos(x)-1}{\cos(x)+1}\right)}{2}$
7. $x \mapsto \dfrac{\ln\left(\frac{\sin(x)+1}{\sin(x)-1}\right)}{2}$
8. $x \mapsto \dfrac{\sqrt{\cos(x)}\left(2\cos^2(x)-10\right)}{5}$

```
assume (a>0);
integrate (1/(x^2+a^2),x);
integrate (1/(x^2-a^2),x);
integrate (1/sqrt(x^2+a^2),x);
integrate (sqrt(x^2+a^2)/x,x);
integrate (1/(sin(x))^2,x);
integrate (1/sin(x),x);
integrate (1/cos(x),x);
load(ntrig);integrate((sin(x))^3/sqrt(cos(x)),x);trigsimp(%);
```

Exercice 2.42

Calculer les intégrales ou primitives suivantes :

1. $\displaystyle\int_1^{27} \frac{1}{t\sqrt[3]{t}} dt$
2. $\displaystyle\int_0^2 (1-|x-1|)^3 dx$
3. $\displaystyle\int_0^4 \sqrt{2x+1}\, \mathrm{d}x$
4. $\displaystyle\int_0^{1/2} x^3(1-x^2)^{5/2} dx$
5. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{9x^2+3}}\, \mathrm{d}x$
6. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin(x) e^x\, \mathrm{d}x$
7. $\displaystyle\int \frac{\ln(\sin(x))}{\cos^2(x)}\, \mathrm{d}x$
8. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3\tan(x)+2}\, \mathrm{d}x$
9. $\displaystyle\int \frac{\cos(2x)}{\sin(x)+\sin(3x)}\, \mathrm{d}x$ (CV : $t=\cos(x)$)
10. $\displaystyle\int \frac{1-\cos(2x)}{\sin(3x)}\, \mathrm{d}x$ (CV : $t=\cos(x)$)
11. $\displaystyle\int \frac{dx}{2\cosh(x)+\sinh(x)+1}$ (CV : $t=\tanh\left(\frac{x}{2}\right)$)
12. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}\, \mathrm{d}x$ (CV : $t=(x+1)^{1/6}$)
13. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^3+1}}{x}\, \mathrm{d}x$ (CV : $t^2=x^3+1$)
14. $\displaystyle\int \frac{x+1}{\sqrt{x(1-2x)}}\, \mathrm{d}x$ (CV : $x-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}\cos(t)$)
15. $\displaystyle\int \sin(2x)\sinh(3x)\, \mathrm{d}x$
16. $\displaystyle\int \tan^5(x)\, \mathrm{d}x$
17. $\displaystyle\int \frac{\sin(x)}{2+\tan^2(x)}\, \mathrm{d}x$
18. $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^4(x)+\sin^4(x)}\, \mathrm{d}x$

CORRECTION.

```
load(ntrig);
algebraic:true;

integrate( 1/(t*t^(1/3)) ,t,1,27);
integrate( (1-abs(x-1))^3 ,x,0,2);
/* Maxima ne sait pas travailler avec la valeur absolue, on va l'aider...*/
'integrate( (1-abs(x-1))^3 ,x,0,2)=integrate( (1+(x-1))^3 ,x,0,1)+integrate( (1-(
   ➥x-1))^3 ,x,1,2);

integrate( sqrt(2*x+1) ,x,0,4);
integrate( x^3*(1-x^2)^(5/2) ,x,0,1/2);
integrate( 1/sqrt(9*x^2+3) ,x,0,1);
integrate( x^2*sin(x)*exp(x) ,x,0,%pi/2);
trigsimp(integrate( log(sin(x))/(cos(x))^2 ,x));

integrate( 1/(3*tan(x)+2) ,x,0,%pi/2);
/* Maxima ne sait pas calculer formellement cette integrale tandis que Maple
   ➥donne bien (pi+3*ln(3/2))/13 */

logcontract(trigsimp(trigexpand(integrate( cos(2*x)/(sin(x)+sin(3*x)) ,x))));
trigsimp(logcontract(trigexpand(integrate( (1-cos(2*x))/sin(3*x) ,x))));
integrate( 1/(2*cosh(x)+sinh(x)+1) ,x);
```



```
ratsimp(integrate( (sqrt(x+1)-(x+1)^(1/3))/(sqrt(x+1)+(x+1)^(1/3)) ,x));
integrate( sqrt(x^3+1)/x ,x);
integrate( (x+1)/sqrt(x*(1-2*x)) ,x);
integrate( sin(2*x)*sinh(3*x) ,x);
integrate( (tan(x))^5 ,x);
integrate( sin(x)/(2+(tan(x))^2) ,x);
integrate( 1/((cos(x))^4+(sin(x))^4) ,x);
```

Exercice 2.43 *Intégration de fonctions rationnelles*

Calculer les primitives suivantes :

a) $\displaystyle\int \frac{a}{x-b}\,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int \frac{a}{(x-b)^n}\,\mathrm{d}x,\ n\neq 1$

c) $\displaystyle\int \frac{2x-1}{(x-1)(x-2)}\,\mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int \frac{3x+1}{x^3-4x}\,\mathrm{d}x$

e) $\displaystyle\int \frac{3x^2+2x-5}{3x^2-5x-2}\,\mathrm{d}x$

CORRECTION. Soit c une constante réelle.

a) $\int \frac{a}{x-b}\,\mathrm{d}x = a\ln|x-b|+c$

b) $\int \frac{a}{(x-b)^n}\,\mathrm{d}x = \frac{a}{(1-n)(x-b)^{n-1}}+c$

c) Comme $\frac{2x-1}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{(x-1)}+\frac{B}{(x-2)}$ ssi $A+B=2$ et $-2A-B=-1$, alors $\int \frac{2x-1}{(x-1)(x-2)}\,\mathrm{d}x = -\int \frac{1}{(x-1)}\,\mathrm{d}x + 3\int \frac{1}{(x-2)}\,\mathrm{d}x = -\ln|x-1| + 3\ln|x-2|+c = \ln\left|\frac{(x-2)^3}{x-1}\right|+c$

d) Comme $\frac{3x+1}{x^3-4x} = \frac{-1/4}{x}+\frac{-5/8}{x+2}+\frac{7/8}{x-2}$ alors $\int \frac{3x+1}{x^3-4x}\,\mathrm{d}x = -\frac{\ln|x|}{4}-\frac{5\ln|x+2|}{8}+\frac{7\ln|x-2|}{8}+c$

e) Comme $\frac{3x^2+2x-5}{3x^2-5x-2} = \frac{(3x^2-5x-2)+(7x-3)}{3x^2-5x-2} = 1+\frac{7x-3}{3x^2-5x-2}$ alors $\int \frac{3x^2+2x-5}{3x^2-5x-2}\,\mathrm{d}x = x+\frac{16}{21}\ln\left|3x+1\right|+\frac{11}{7}\ln|x-2|+c$

```
integrate(a/(x-b),x);
integrate(a/(x-b)^n,x);
integrate((2*x-1)/((x-1)*(x-2)),x);
integrate((3*x+1)/(x^3-4*x),x);
integrate((3*x^2+2*x-5)/(3*x^2-5*x-2),x);
```

Exercice 2.44

Calculer

$$\mathscr{A}=\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x,\qquad \mathscr{B}=\int_{-1/\sqrt{3}}^{1/\sqrt{3}}\frac{1}{1+3x^2}\,\mathrm{d}x,\qquad \mathscr{C}=\int_{-1}^{1}\frac{2x-5}{x^2-5x+6}\,\mathrm{d}x.$$

CORRECTION.

$$\mathscr{A}=[\arctan(x)]_{-1}^{1}=\arctan(1)-\arctan(-1)=\frac{\pi}{4}-\frac{-\pi}{4}=\frac{\pi}{2},$$
$$\mathscr{B}=\frac{1}{\sqrt{3}}\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t=\frac{\mathscr{A}}{\sqrt{3}}=\frac{\pi}{2\sqrt{3}},$$
$$\mathscr{C}=\int_{-1}^{1}\frac{2x-5}{x^2-5x+6}\,\mathrm{d}x=\left[\ln|x^2-5x+6|\right]_{-1}^{1}=\ln(2)-\ln(12)=\ln(2)-\ln(3)-2\ln(2)=-\ln(2)-\ln(3).$$

```
integrate(1/(1+x^2),x,-1,1);
integrate(1/(1+3*x^2),x,-1/sqrt(3),1/sqrt(3));
```

Exercice 2.45

Calculer l'aire comprise entre les courbes d'équation $f(x)=\sqrt{x}$ et $g(x)=x^{3/2}$.

CORRECTION. Pour cela on commence par afficher le graphe des deux courbes et calculer les points d'intersections :

```
f:sqrt(x);
g:x^(3/2);
/*plot2d([f,g],[x,0,1.5]);*/
draw2d(filled_func=f,fill_color=green,explicit(g,x,0,1),filled_func=false,
   ➥explicit(f,x,0,1),explicit(g,x,0,1));
solve(f=g);
```

On voit que $f(x) \ge g(x) \ge 0$ pour $x \in [0;1]$. Alors l'aire mesure

```
integrate(f-g,x,0,1);
```

Exercice 2.46

Calculer l'aire comprise entre le graphe de la fonction $f(x)$ et le graphe de la fonction $g(x)$:

a) $f(x) = -x^2 + x + 2$ et $g(x) = x^2 - 3x + 2$ b) $f(x) = \frac{x^3}{4}$ et $g(x) = x^2 - x$

CORRECTION.

a) Comme $f(x) = g(x)$ ssi $x \in \{0,2\}$ et $f(x) \ge g(x)$ pour $x \in [0,2]$, l'aire comprise entre le graphe de la fonction $f(x)$ et le graphe de la fonction $g(x)$ est $\int_0^2 (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x = \int_0^2 -2x^2 + 4x\,\mathrm{d}x = \left[-2\frac{x^3}{3} + 4\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = \frac{8}{3}$.

```
f(x):=-x^2+x+2;
g(x):=x^2-3*x+2;
sol:sort(solve(f(x)=g(x)));
plot2d([f(x),g(x)],[x,rhs(sol[1]),rhs(sol[2])]);
integrate(f(x)-g(x),x,rhs(sol[1]),rhs(sol[2]));
```

b) Comme $f(x) = g(x)$ ssi $x \in \{0,2\}$ et $f(x) \ge g(x)$ pour $x \in [0,2]$, l'aire comprise entre le graphe de la fonction $f(x)$ et le graphe de la fonction $g(x)$ est $\int_0^2 (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x = \int_0^2 \frac{x^3}{4} - x^2 + x\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^4}{16} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right]_0^2 = \frac{1}{3}$.

```
f(x):=-x^3/4;
g(x):=x^2-x;
sol:sort(solve(f(x)=g(x)));
plot2d([f(x),g(x)],[x,rhs(sol[1]),rhs(sol[2])]);
integrate(f(x)-g(x),x,rhs(sol[1]),rhs(sol[2]));
```

2.2.4 EDO

Exercice 2.47

Calculer et afficher la solution des problèmes différentiels suivants :

1. $\begin{cases} y'(x) = -xy + 2x, \\ y(0) = 3 \end{cases}$
2. $\begin{cases} y'(x) = \cos(x)y + e^{\sin(x)}, \\ y(0) = 3 \end{cases}$
3. $\begin{cases} y'(x) = -\frac{y(x)}{x}, \\ y(1) = 3 \end{cases}$
4. $\begin{cases} y'(x) = y^2 - 1, \\ y(0) = 0 \end{cases}$
5. $\begin{cases} y''(x) - 5y'(x) + 6y(x) = 0, \\ y(0) = 2, \\ y'(0) = -1 \end{cases}$
6. $\begin{cases} y''(x) - 2y'(x) + 2y(x) = 0, \\ y(0) = 2, \\ y'(0) = -1 \end{cases}$
7. $\begin{cases} y''(x) = 2y'(x) - y(x), \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 0 \end{cases}$

Correction.

1. $y(x) = e^{-x^2/2}(1+2e^{x^2/2})$

```
solgen:ode2('diff(y,x)=-x*y+2*x,y,x);
sol:ic1(%,x=0,y=3);
plot2d(rhs(sol),[x,-5,5],[y,0,4]);
```

2. $y(x) = (x+3)e^{\sin(x)}$

```
solgen:ode2('diff(y,x)=cos(x)*y+exp(sin(x)),y,x);
sol:ic1(%,x=0,y=3);
plot2d(rhs(sol),[x,-4,15],[y,-1,30]);
```

3. $y(x) = \frac{x^3+8}{3x}$

```
solgen:ode2('diff(y,x)=-y/x+x,y,x);
sol:ic1(%,x=1,y=3);
plot2d(rhs(sol),[x,-5,10],[y,-25,50]);
```

4. $y(x) = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$

```
solgen:ode2('diff(y,x)=y^2-1,y,x);
sol:ic1(%,x=0,y=0);
sol:logcontract(sol);
sol:solve(sol,y);
plot2d(rhs(sol[1]),[x,-5,5],[y,-2,2]);
```

5. $y(x) = 7e^{2x} - 5e^{3x}$

```
solgen:ode2('diff(y,x,2)-5*'diff(y,x)+6*y=0,y,x);
sol:ic2(%,x=0,y=2,'diff(y,x)=-1);
plot2d(rhs(sol),[x,-5,1],[y,-5,8]);
```

6. $y(x) = (2\cos(x) - 3\sin(x))\,e^x$

```
solgen:ode2('diff(y,x,2)-2*'diff(y,x)+2*y=0,y,x);
sol:ic2(%,x=0,y=2,'diff(y,x)=-1);
plot2d(rhs(sol),[x,-10,10]);
```

7. $y(x) = (1-x)e^x$

```
solgen:ode2('diff(y,x,2)=2*'diff(y,x)-y,y,x);
sol:ic2(%,x=0,y=1,'diff(y,x)=0);
plot2d(rhs(sol),[x,-5,5],[y,-5,5]);
```