Licence Sciences et Techniques

L1 MATH PC SI

M11
Mathématiques

Recueil d'exercices corrigés et aide-mémoire.

Gloria Faccanoni

http://faccanoni.univ-tln.fr/enseignements.html

Année 2016 – 2017
Dernière mise-à-jour : Lundi 19 septembre 2016

Table des matières

UNIVERSITÉ DE TOULON

Ce cours s'adresse à des étudiants de la première année d'une Licence Scientifique. Il a pour objectif de donner les bases en calcul différentiel pour des fonctions réelles d'une variable réelle indispensables à toute formation scientifique. Les notions supposées connues correspondent au programme du lycée.

L'objet de ce aide-mémoire est de proposer une explication succincte des concepts vu en cours. De nombreux livres, parfois très fournis, existent. Ici on a cherché, compte tenu des contraintes de volume horaire, des acquis des étudiants au lycée et des exigences pour la suite du cursus, à dégager les points clés permettant de structurer le travail personnel de l'étudiant voire de faciliter la lecture d'autres ouvrages. Ce polycopiée ne dispense pas des séances de cours et de TD ni de prendre des notes complémentaires. Il est d'ailleurs important de comprendre et apprendre le cours au fur et à mesure. Ce polycopié est là pour éviter un travail de copie qui empêche parfois de se concentrer sur les explications données oralement mais **ce n'est pas un livre auto-suffisant (il est loin d'être exhaustif) !** De plus, ne vous étonnez pas si vous découvrez des erreurs. Malgré de très nombreuses relectures, il restera toujours des fautes, ce polycopié est donc fournit sans garanties ! N'hésitez pas à me signaler les erreurs que vous remarquez.

On a inclus dans ce texte nombreux exercices corrigés. Ceux-ci, de difficulté variée, répondent à une double nécessitée. Il est important de jongler avec les différents concepts introduits en cours et même de faire certaines erreurs une fois pour bien identifier les pièges. Les exercices permettent d'orienter les raisonnements vers d'autres domaines (physique, économie, etc.), cela afin d'exhiber l'intérêt et l'omniprésence du calcul différentiel. Cependant, veuillez noter que vous n'obtiendrez pas grande chose si vous vous limitez à choisir un exercice, y réfléchir une minute et aller vite voir le début de la correction en passant tout le temps à essayer de comprendre la correction qui va paraitre incompréhensible. Pour que la méthode d'étude soit vraiment efficace, il faut d'abord vraiment essayer de chercher la solution. En particulier, il faut avoir un papier brouillon à coté de soi et un crayon. La première étape consiste alors à traduire l'énoncé (pas le recopier), en particulier s'il est constitué de beaucoup de jargon mathématique. Ensuite il faut essayer de rapprocher les hypothèses de la conclusion souhaitée, et pour cela faire quelques calculs ou transformer les hypothèses pour appliquer un théorème dont on aura vérifier que les hypothèses sont bien satisfaite. C'est ici que l'intuition joue un grand rôle et il ne faut pas hésiter à remplir des pages pour s'apercevoir que l'idée qu'on a eu n'est pas la bonne. Elle pourra toujours resservir dans une autre situation. Quand finalement on pense tenir le bon bout, il faut rédiger soigneusement en s'interrogeant à chaque pas sur la validité (logique, mathématique) de ce qu'on a écrit. Si l'étape précédente ne donne rien, il faut chercher de l'aide (voir le début de la correction, en parler à un autre étudiant, interroger les tuteurs).

M11		
CM	30h	20 séances de 1h30
TD	45h	30 séances de 1h30

Gloria FACCANONI

IMATH Bâtiment M-117
Université de Toulon
Avenue de l'université
83957 LA GARDE - FRANCE

☎ 0033 (0)4 83 16 66 72

✉ gloria.faccanoni@univ-tln.fr
🛈 http://faccanoni.univ-tln.fr

Notations

Ensembles usuels en mathématiques

On désigne généralement les ensemble les plus usuels par une lettre à double barre :

$\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels

$\mathbb{N}^*$ l'ensemble des entiers strictement positifs

$\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs (positifs, négatifs ou nuls)

$\mathbb{Z}^*$ l'ensemble des entiers non nuls

$\mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres rationnels $\left(\frac{p}{q} \text{ tel que } \quad p \in \mathbb{Z} \text{ et } q \in \mathbb{Z}^*\right)$

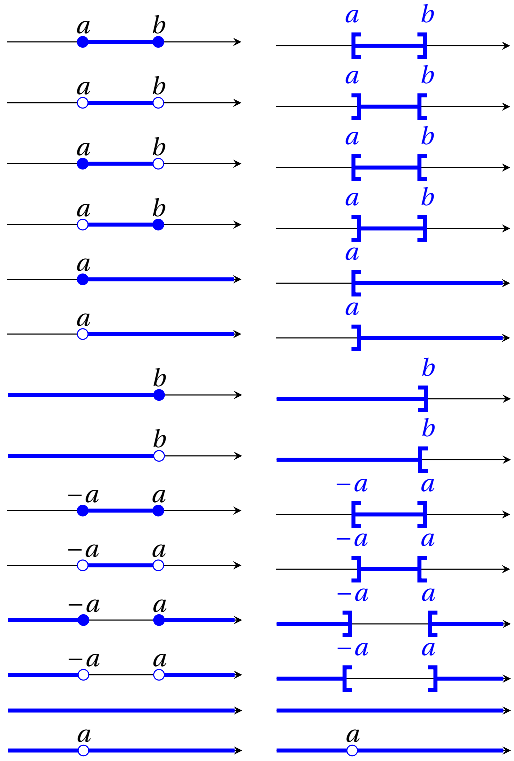
$\mathbb{R}$ l'ensemble des réels

$\mathbb{R}^*$ l'ensemble des réels autres que 0

$\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes

Intervalles

Inégalité(s)	Ensemble	Représentations graphique
$a \leq x \leq b$	$[a, b]$	
$a < x < b$	$]a, b[$	
$a \leq x < b$	$[a, b[$	
$a < x \leq b$	$]a, b]$	
$x \geq a$	$[a, +\infty[$	
$x > a$	$]a, +\infty[$	
$x \leq b$	$]-\infty, b]$	
$x < b$	$]-\infty, b[$	
$\lvert x\rvert \leq a$ avec $a \geq 0$	$[-a, a]$	
$\lvert x\rvert < a$ avec $a \geq 0$	$]-a, a[$	
$\lvert x\rvert \geq a$ avec $a \geq 0$	$]-\infty, -a] \cup [a, +\infty[$	
$\lvert x\rvert > a$ avec $a \geq 0$	$]-\infty, -a[\cup]a, +\infty[$	
$\forall x \in \mathbb{R}$	$]-\infty, +\infty[$	
$x \neq a$	$]-\infty, a[\cup]a, +\infty[= \mathbb{R} \setminus \{a\}$	



Symboles utilisés dans le document

définition, théorème, corollaire, proposition, propriété(s)

astuce

attention

remarque

méthode, algorithme, cas particulier

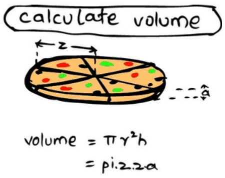
exercice de base

exercice

exemple

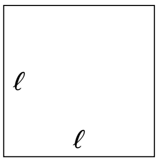
curiosité

$>$	strictement supérieur
$<$	strictement inférieur
$\geq$	supérieur ou égal
$\leq$	inférieur ou égal
$\neq$	différent
$\equiv$	équivaut (équivalence logique)
$\{\quad\}$	ensemble
$\mathbb{A}\setminus\mathbb{B}$	ensemble $\mathbb{A}$ privé de l'ensemble $\mathbb{B}$, *i.e.* $C_{\mathbb{A}}(\mathbb{B})$ le complémentaire de $\mathbb{B}$ dans $\mathbb{A}$
$\emptyset$	ensemble vide
$\mid$	tel que
$\in$	appartient
$\notin$	n'appartient pas
$\forall$	pour tout (quantificateur universel)
$\exists$	il existe (quantificateur universel)
$\nexists$	il n'existe pas
$\exists!$	il existe un et un seul
$\subset$	est sous-ensemble (est contenu)
$\cup$	union d'ensembles
$\cap$	intersection d'ensembles
$\vee$	ou
$\wedge$	et
$\neg$	non
$\Longrightarrow$	si … alors ; implique
$\Longleftrightarrow$	si et seulement si
ssi	si et seulement si
$\ln$	logarithme de base e
$\log_a$	logarithme de base a
∞	infini
$\int$	symbole d'intégrale
$\sum_{i=0}^{n} a_i$	somme par rapport à l'indice i, équivaut à $a_0+a_1+\cdots+a_n$
$\prod_{i=0}^{n} a_i$	produit par rapport à l'indice i, équivaut à $a_0\times a_1\times\cdots\times a_n$
$n!$	n factoriel, équivaut à $1\times 2\times\cdots\times n$
$g\circ f$	composé de f par g (on dit «g rond f» ou encore «f puis g»)
f', $\frac{df}{dx}$	symboles de dérivée
$\stackrel{(H)}{=}$	utilisation de la règle de l'Hôpital
$\stackrel{(P.P.)}{=}$	intégration par parties



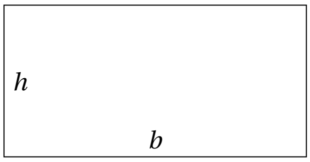
1 Formulaires de géométrie

1.1 Formulaire de géométrie plane



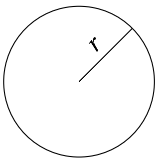
Périmètre $p = 4\ell$

Aire $A = \ell^2$



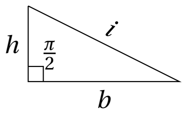
Périmètre $p = 2(b+h)$

Aire $A = bh$



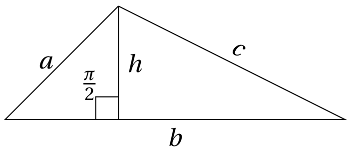
Périmètre $p = 2\pi r$

Aire $A = \pi r^2$



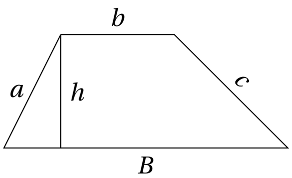
Périmètre $p = b+h+i$

Aire $A = \frac{bh}{2}$



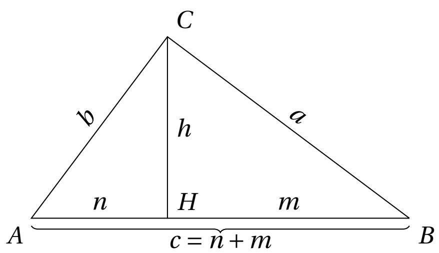
Périmètre $p = a+b+c$

Aire $A = \frac{bh}{2} = \frac{1}{4}\sqrt{p(p-2a)(p-2b)(p-2c)}$



Périmètre $p = a+B+c+b$

Aire $A = \frac{(B+b)h}{2}$



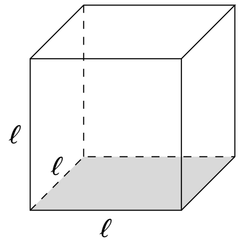
Triangle rectangle en C : $\widehat{ACB} = \pi/2$

Théorème de Pitagore $\left[\begin{array}{l} c^2 = a^2 + b^2, \\ b^2 = h^2 + n^2, \\ a^2 = h^2 + m^2 \end{array}\right.$

Premier théorème d'Euclide $\left[\begin{array}{l} b^2 = cn \\ a^2 = cm \end{array}\right.$

Deuxième théorème d'Euclide $h^2 = nm$

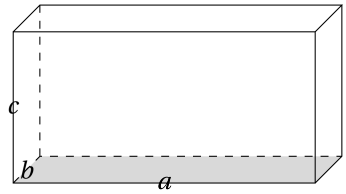
1.2 Formulaire de géométrie solide



Surface latérale $S_{\text{lat}} = 4\ell^2$

Surface totale $S_{\text{tot}} = 6\ell^2$

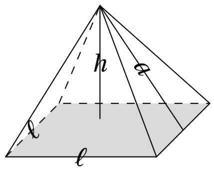
Volume $V = \ell^3$



Surface latérale $S_{\text{lat}} = 2c(a+b)$

Surface totale $S_{\text{tot}} = 2(ab+ac+bc)$

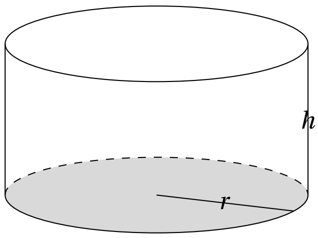
Volume $V = abc$



Surface latérale $S_{\text{lat}} = 2\ell a$

Surface totale $S_{\text{tot}} = 2\ell a + \ell^2$

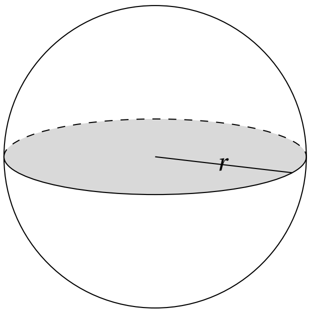
Volume $V = \frac{\ell^2 h}{3}$



Surface latérale $S_{\text{lat}} = 2\pi r h$

Surface totale $S_{\text{lat}} = 2\pi r h + 2\pi r^2$

Volume $V = \pi r^2 h$



Surface totale $S_{\text{tot}} = 4\pi r^2$

Volume $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

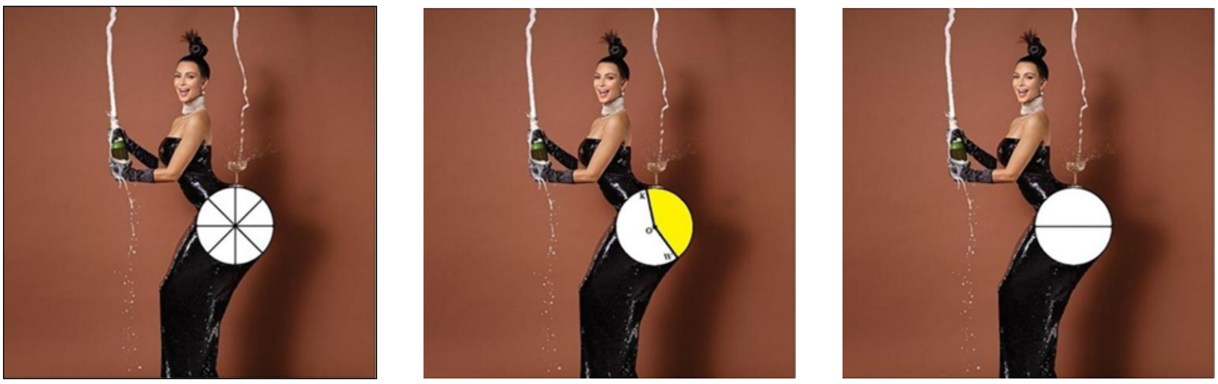
Exercices

Exercice 1.1
La scène d'une salle de concert a la forme d'un demi-cercle. Sa longueur est de 16 m. Quelle est sa surface, en m^2 ?

Correction
La longueur de la scène correspond au diamètre du disque, donc $r = 8$ m. L'aire du demi-disque sera égale à la moitié de l'aire du disque : $\pi r^2/2 = 32\pi$ *i.e.* environ $100.48\,\text{m}^2$.

Exercice 1.2
1. Les célèbres fesses de Kim KARDASHIAN de la figure 1.1a ont une surface de 64π et sont divisées en 8 secteurs. Calculer le périmètre d'un de ces secteurs.
2. Si le rayon est 12 et la surface colorée de la figure 1.1b mesure 48π, quel est la mesure de l'angle colorée ?
3. Si l'éditeur du journal devait *photoshoper* la région de sorte que son diamètre soit doublé, quel serait le rapport résultant entre la superficie de la nouvelle région et celle de la région initiale ?

Source : `http://catalystprep.com/`



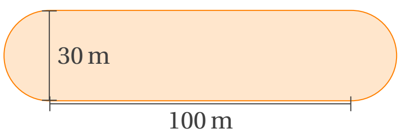
(a) (b) (c)

FIGURE 1.1 – Kim KARDASHIAN — shooting pour "*Paper*"

Correction
1. Le rayon du cercle est $r = \frac{\sqrt{64\pi}}{\pi} = 8$ donc le périmètre d'un de ces secteurs est $2 \times r + \frac{2\times\pi\times r}{8} = 16 + 2\pi$.
2. $\pi 12^2 : 48\pi = 2\pi : \alpha$ donc $\alpha = \frac{96\pi^2}{12^2\pi} = \frac{2}{3}\pi = \angle 120$.
3. $d_{\text{new}} = 2d_{\text{old}}$ donc $\frac{\pi\left(\frac{d_{\text{new}}}{2}\right)^2}{\pi\left(\frac{d_{\text{old}}}{2}\right)^2} = \left(\frac{d_{\text{old}}}{\frac{d_{\text{old}}}{2}}\right)^2 = 4$

Exercice 1.3
La piste de course d'un stade entoure le terrain qui a la forme d'un rectangle dont les deux côtés sont dotés de demi-cercles. Si la longueur du rectangle est de 100 m et sa largeur est de 30 m, quelle est la longueur de la piste ?

Correction



La longueur de la piste est de $2 \times 100\,\text{m} + \pi \times 2 \times 15\,\text{m} \simeq 294.2\,\text{m}$

Exercice 1.4
1. Dans un triangle ABC, rectangle en A, soit $\overline{AB} = 8$ et $\overline{AC} = 6$. Quel est son périmètre ? Et son aire ?
2. L'aire d'un carré égale a. Quelle est la longueur de sa diagonale ?

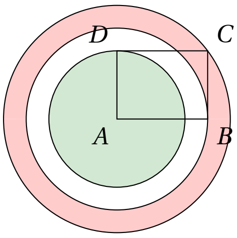
3. Une pyramide à base carrée a une hauteur de 9 cm. Si le volume de la pyramide égale 768 cm^3, quelle est la longueur du côté de sa base ?

Correction

1. Périmètre : $8+6+\sqrt{8^2+6^2}=8+6+10=24$. Aire : $8\times 6=48$
2. Notons d la diagonale recherchée. L'aire d'un carré égale le carré de son côté. Si l'aire du carré égale a, son côté égale $\sqrt{a}$. La diagonale du carré forme, avec deux de ses côtés, un triangle rectangle dont elle est l'hypoténuse. on peut ainsi calculer sa longueur. Selon le théorème de Pythagore, on obtient $(\sqrt{a})^2+(\sqrt{a})^2=d^2$ donc $d=\sqrt{2a}$.
3. Le volume d'une pyramide est calculé selon la formule $V=Ah/3$ où A est l'aire de sa base et h sa hauteur. On a alors $768=9A/3$ d'où $A=256\,\text{cm}^2$. Comme la base de cette pyramide est un carré, son coté égale la racine carrée de son aire : $\sqrt{256\,\text{cm}^2}=16\,\text{cm}$.

Exercice 1.5

Considérons un rectangle $ABCD$ et les trois cercles ayant pour centre A et pour rayons $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ et $\overline{AD}$. Colorions ensuite la couronne de frontières les deux cercles de rayon $\overline{AB}$ et $\overline{AC}$ et le disque de rayon $\overline{AD}$. Laquelle des deux zones coloriées possède l'aire la plus grande ?

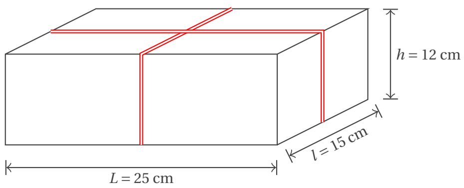


Correction

On a $\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AD}^2$ donc l'aire de la couronne vaut $\pi((\overline{AB}^2+\overline{AD}^2)-\overline{AB}^2)=\pi\overline{AD}^2$. L'aire du disque vaut $\pi\overline{AD}^2$. On en conclut donc que les deux aires sont égales.

Exercice 1.6

On veut faire un paquet cadeau (voir dessin). On donne $L=25\,\text{cm}$, $l=15\,\text{cm}$, $h=12\,\text{cm}$. Calculer la longueur de la ficelle nécessaire sans les nœuds.

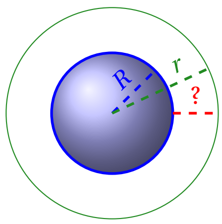


Correction

$2L+2l+4h=128\,\text{cm}$

Exercice 1.7

Imaginons que l'on entoure la Terre, au niveau de l'équateur, avec une ficelle, puis que l'on allonge cette longueur de ficelle d'un mètre. Quel sera l'espace libre ainsi créé entre la Terre et la ficelle ? Même question pour une balle de tennis.



Correction

La longueur de la ficelle au début vaut $P=2\pi R$ (R étant le rayon de la Terre). La longueur de la ficelle allongée est $P+1=2\pi r$ (r étant le rayon du cercle formé par cette ficelle). Soustrayons les deux équations membre à membre : $1=2\pi(r-R)$. L'espace entre Terre et ficelle vaut $r-R=1/(2\pi)$, c'est à dire 16 cm environ. Et ceci serait vrai en remplaçant la Terre par le soleil ou par un ballon. Étonnant, non ?

2 Méthodologie disciplinaire

2.1 Pourcentages

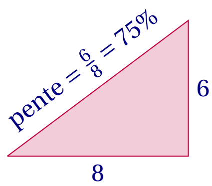
2.1 Définition (Pourcentage)
Un pourcentage est une fraction dont le dénominateur est 100.

EXEMPLE
- ⋆ $1\% = 1/100 = 0.01$
- ⋆ 20% de $3\,\text{kg}$ correspond à $0.2 \times 3\,\text{kg} = 0.6\,\text{kg}$

2.2 Définition (Pente)
Sur les panneaux de signalisation routière ou sur les pistes de skis, l'inclinaison des pentes est généralement exprimée sous la forme d'un pourcentage plutôt que celle d'un angle. On aurait tort de croire que cette valeur correspond directement à une valeur d'angle. En réalité, la pente est définie comme une distance verticale (un dénivelé) divisée par la distance horizontale correspondante :

$$\text{Pente (en \%)} = \frac{\text{Distance parcourue verticalement}}{\text{Distance parcourue horizontalement}}$$

Dans le cas d'une pente à 100%, chaque mètre parcouru horizontalement correspond à une montée d'un mètre verticalement. L'angle entre la route et l'horizontale est alors de 45°, et non davantage comme on le croit parfois.



On verra plus tard, lorsqu'on aura abordé les fonctions trigonométriques, que le passage entre un angle α et la pente correspondante p se fait grâce à la fonction tangente : $\tan(\alpha) = p$. Ainsi, si $\alpha < 45°$ alors $p < 100\%$ tandis que si $\alpha > 45°$ alors $p > 100\%$. Réciproquement, on peut obtenir la pente à partir de l'angle correspondant grâce à la fonction inverse, l'arc-tangente : $\arctan(p) = \alpha$. Il est clair alors que $\lim_{\alpha \to 90°} p = +\infty$.

2.3 Définition (Taux)
Le taux d'augmentation (ou de diminution) est le rapport de la partie augmentée (ou diminuée) à la valeur initiale. Il est exprimé en pourcentage.

EXEMPLE
Lorsqu'on augmente une quantité a de 20% on obtient la quantité $a + 0.2 \times a = (1 + 0.2)a = 1.2a$.

Exemple

1. Dans un zoo, il y a 2 000 animaux. Parmi eux, 1 200 sont des mammifères. Quel est le pourcentage de mammifères dans le zoo ?

   Réponse : $\frac{1200}{2000} \times 100\% = 0.6 \times 100\% = 60\%$.
2. Dans le même zoo, parmi les 2 000 animaux les reptiles constituent 5%. Combien y a-t-il de reptiles ?

   Réponse : $2000 \times 5\% = 2000 \times \frac{5}{100} = 100$. On peut également imaginer ce problème en tant que proportionnalité : si 2 000 animaux correspondent à 100%, combien d'animaux correspondent à 5% ? Ainsi on crée une proportion : $\frac{2000}{100} = \frac{5}{x}$ d'où $x = 100$.
3. Toujours dans le même zoo, parmi les 2 000 animaux, 25% sont des oiseaux. 3% des oiseaux sont des aigles. Combien y a-t-il d'aigles dans le zoo ?

   Réponse : $2000 \times 25\% \times 3\% = 2000 \times \frac{25}{100} \times \frac{3}{100} = 15$.
4. Une année s'est écoulée dans le zoo, et le nombre d'animaux est devenu 2 030. Quel est le taux de croissance du nombre d'animaux ?

   Réponse : $\frac{2030-2000}{2000} \times 100\% = \frac{30}{2000} \times 100\% = 1.5\%$.
5. Le nombre de reptiles dans le zoo, comme on l'a vu, est de 100. Après un an, leur nombre a augmenté de 15%, mais l'année suivante il a diminué de 11%. Quel est le nombre de reptiles à la fin de la deuxième année ?

   Réponse : Le réflexe presque naturel serait d'ajouter 15%, en déduire 11% et ainsi obtenir 104 reptiles, mais c'est faux. Souvenez-vous bien de la définition d'un taux. La solution correcte se présente de cette façon :
   - ⋆ 1ère année : $100 \times (1 + 15\%) = 100 \times \frac{115}{100} = 115$,
   - ⋆ 2ème année : $115 \times (1 - 11\%) = 115 \times \frac{89}{100} = 102$.

   La réponse est 102.

Exemple

Un prix subit trois augmentations annuelles successives : 10%, 50% *et* 90%.

- ⋆ *Quel est le pourcentage d'augmentation global durant ces trois ans ?*

  Réponse : le prix est multiplié par $1.1 \times 1.5 \times 1.9 = 3.135$. Cela correspond à une augmentation global de 213.5%.
- ⋆ *Quel est le pourcentage d'augmentation annuel moyen ?*

  Réponse : on cherche q tel que $q^3 = 3.135$; on obtient $q = \sqrt[3]{3.135} \simeq 1.464$. Donc l'augmentation annuelle moyenne est environ 46.4%. On remarque que si on avait pris la moyenne arithmétique de 10%, 50% et 90%, on aurait obtenu un résultat trop grand, à savoir 50%.

Exemple

On vous propose de diminuer votre salaire de 50% *et ensuite de l'augmenter de* 80%*. Seriez-vous d'accord ?*
Réponse : Le salaire est multiplié par $(1 - 0.5) \times (1 + 0.8) = 0.9$. Cela correspond à une diminution global de 10%.

TVA La taxe sur la valeur ajoutée (TVA) s'applique sur le coût «initial» d'un produit, dit «hors taxe» (HT). En France, quand la TVA est applicable, son taux atteint le plus souvent soit 19.6%, soit 5.5%. Le montant de la TVA égale alors le prix HT multiplié par le taux de TVA. Le prix «toutes taxes comprises» sous-entend le prix HT majoré du montant de la TVA.

Exemple

- ⋆ Si le prix HT d'un repas pour une girafe est 20 € et si le taux de TVA applicable à la nourriture est de 5.5%, quel est le prix TTC que le zoo paye pour ce repas ?

  Réponse : on trouve d'abord le montant de la TVA applicable : $20\,€ \times 5.5\% = 1.10\,€$. Ensuite, on additionne le prix HT et le montant de la TVA : $20\,€ + 1.10\,€ = 21.10\,€$. Pour accélérer le calcul du prix TTC, on peut multiplier le prix HT directement par 1.055 si le taux de TVA est 5.5% (*i.e.* $1 + 5.5\%$), ou par 1.196 si le taux de TVA est 19.6% (*i.e.* $1 + 19.6\%$).
- ⋆ La direction du zoo décide d'acheter une nouvelle grille pour la cage d'un des lions. Le prix TTC de la grille est 1000 €. Quel est son prix HT, si le taux de TVA applicable à ce type de produits est de 19.6% ?

  Réponse : pour trouver le prix HT à partir du prix TTC, il suffit de diviser soit par 1.055 si le taux de TVA est 5.5%, soit par 1.196 si le taux de TVA est 19.6%. Ainsi $1000\,€/1.196 = 836.12\,€$.

Astuce (Pourcentages)

- ⋆ Pour appliquer un taux de pourcentage $p\%$ à un nombre x on le multiplie par $\frac{p}{100}$.
- ⋆ Le taux de pourcentage de x par rapport à y est égale à $\frac{x}{y} \times 100$.

- ⋆ Pour augmenter un nombre x de $p\%$, on le multiplie par $1+\frac{p}{100}$.
- ⋆ Pour diminuer un nombre x de $p\%$, on le multiplie par $1-\frac{p}{100}$.
- ⋆ Pour une augmentation de $p\%$, la valeur initiale est égale à la valeur finale divisée par $1+\frac{p}{100}$.
- ⋆ Pour une diminution de $p\%$, la valeur initiale est égale à la valeur finale divisée par $1-\frac{p}{100}$.
- ⋆ Pour composer (enchaîner) les pourcentages, il ne faut pas les ajouter.

2.2 Proportionnalité et règle de trois

La règle de trois est une recette utilisée pour calculer dans des situations de proportionnalité. Son symbole, une croix, n'est pas très intuitif pour décrire une situation que les mathématiciens qualifient de linéaire et qu'ils représentent par une droite. C'est une notion subtile qui se rapproche de celle de fraction.
Une situation est proportionnelle lorsque des parts égales contribuent au tout de la même façon.

EXEMPLE
Supposons que pour faire des crêpes pour 8 personnes, il faille 250 g de farine, 4 œufs, un demi-litre de lait et 50 g de beurre. En divisant en deux parts égales tous les ingrédients, on pourra faire des crêpes pour 4 personnes. Si l'on n'était que 2, on pourrait à nouveau diviser ces quantités en 2, c'est-à-dire : 62.5 g de farine, 1 œuf, 125 mL de lait et 12.5 g de beurre. Si nous faisons 4 tas comportant chacun cette liste d'ingrédients, nous pouvons faire, avec chacun d'eux, des crêpes pour 2 personnes. Avec deux tas, nous retrouvons nos quantités pour 4 personnes et avec 4 tas, nos quantités pour 8 personnes. Et ainsi, si nous étions 6 personnes, il suffirait de prendre 3 de ces tas.
Comme l'œuf n'est pas divisible en deux parties, avec cette idée, on peut trouver la quantité d'ingrédients pour faire des crêpes pour un nombre pair de convives en prenant autant de tas qu'il y a de couples de convives. Si nous étions un nombre impair, il faudrait soit en prévoir un peu moins, soit un peu plus que la quantité prévue par la recette.
Cette situation peut se résumer par un tableau de proportionnalité

Nombre de convives	2	4	6	8
Farine	62.5 g	125 g	187.5 g	250 g
Œufs	1	2	3	4
Lait	0.125 L	0.25 L	0.375 L	0.5 L
Beurre	12.5 g	25 g	37.5 g	50 g

2.4 Définition (Grandeurs proportionnelles)
On peut dire que deux grandeurs x et y sont proportionnelles s'il existe un nombre m tel que $y = mx$ (le nombre m est le coefficient de proportionnalité).

Remarque
Une proportion représente une égalité de deux fractions :

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}.$$

La qualité notable de la proportion est le fait que les produits des membres «en croix» sont égaux entre eux. Pour la proportion ci-dessus

$$ad = bc.$$

Ceci signifie également qu'on peut échanger les places des membres «en croix» de la proportion, sans que l'égalité perde son sens :

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \iff \frac{d}{b}=\frac{c}{a} \iff \frac{d}{c}=\frac{b}{a} \iff \frac{a}{c}=\frac{b}{d}$$

EXEMPLE
Johann gagne de l'argent en été en tondant les gazons de ses voisins. Il est payé pour ses services par mètre carré de gazon tondu. S'il a tondu les $25\,\mathrm{m}^2$ du gazon de Mme DUPONT pour 10 €, combien Mme DUBOIS devra-t-elle payer pour les services de Johann si son gazon mesure $35\,\mathrm{m}^2$?
Réponse : notons x le prix que devra payer Mme DUBOIS. On a alors la proportion $\frac{25\,\mathrm{m}^2}{10\,€} = \frac{35\,\mathrm{m}^2}{x\,€}$ ce qui donne $x\,€ = 35\,\mathrm{m}^2 \times \frac{10\,€}{25\,\mathrm{m}^2} = 14\,€$.

EXEMPLE (PARTAGES PROPORTIONNELS)
Partager une somme de 2400 € en deux parties x et y proportionnelles à 7 et 5, ceci signifie que $\frac{x}{7}=\frac{y}{5}$ avec $x+y=2400$:

$$\begin{cases}\frac{x}{7}=\frac{y}{5},\\ x+y=2400,\end{cases}\implies\begin{cases}\frac{x}{7}=480-\frac{x}{5},\\ y=2400-x,\end{cases}\implies\begin{cases}x=1400,\\ y=1000.\end{cases}$$

Échelle La proportionnalité est également utilisée dans la notion de l'échelle. L'échelle d'une carte ou d'un plan est notée normalement en format «$1 \div a$», où a indique le taux de réduction du plan par rapport au terrain réel :

$$\text{échelle}=\frac{\text{longueur sur le dessin}}{\text{longueur réelle}}$$

EXEMPLE
Une carte est dessinée à l'échelle $1 \div 250000$ signifie que chaque kilomètre sur le terrain a été réduit 250000 fois pour être représenté sur la carte : soit 1 km du terrain correspond à 4 mm sur la carte. Soit, inversement, chaque unité sur la carte représente 250000 unités sur le terrain : par exemple, 1 cm sur la carte représente 250 000 cm sur le terrain soit 2.5 km.

EXEMPLE
Sur un plan dessiné à l'échelle $1 \div 1500$, la distance entre deux arbres est 16 cm. Quelle est la distance entre ces arbres en réalité ?
Réponse : on crée une proportion : $\frac{1}{1500}=\frac{16\,\text{cm}}{x\,\text{cm}}$ d'où $x=240\,\text{m}$.

ATTENTION
Toutes les grandeurs ne sont pas proportionnelles.

EXEMPLE
Il existe en fait toute sorte de variation d'une quantité en fonction d'une autre et la situation de proportionnalité est la plus simple, aussi essaye-t-on toujours, quand c'est possible, de s'y ramener.

- ⋆ La distance de freinage ne se relie pas simplement au temps de réaction du conducteur. Si il ou elle met deux fois plus de temps à réagir, la voiture parcourra très certainement bien plus que deux fois plus de distance avant de s'arrêter.
- ⋆ Le temps mis par un athlète n'est pas non plus proportionnel à la distance qu'il parcourt. Le record du monde du 400 m est supérieur à deux fois le record du monde du 200 m. Au cours d'un 10 000 m les premiers tours sont parcourus à des vitesses différentes des derniers tours.
- ⋆ Le coût d'une course en taxi comporte une prise en charge à laquelle s'ajoute une somme proportionnelle au nombre de kilomètres parcourus.
- ⋆ Certains phénomènes sont quadratiques. Le poids d'un disque (homogène) de métal n'est pas proportionnel à son rayon, mais au carré de son rayon.

2.3 Géométrie analytique

2.5 **Définition (Droite)**
Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ fixés. Les points (x, y) du plan qui vérifient l'équation

$$ax+by+c=0$$

appartiennent à une droite. Si $b \neq 0$, on peut réécrire cette équation sous la forme

$$y=mx+q$$

avec $m=-\frac{a}{b}$ la pente de la droite et $q=-\frac{c}{b}$ l'interception de la droite avec l'axe des ordonnées.

2.6 **Propriété**
Soient m_1 et m_2 la pente de r_1 et r_2 deux droites, alors

- ⋆ $r_1 \mathbin{/\mkern-6mu/} r_2$ si et seulement si $m_1 = m_2$,
- ⋆ $r_1 \perp r_2$ si et seulement si $m_1 \times m_2 = -1$.

Intersection de deux droites Si deux droites d'équations $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ et $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ ne sont pas parallèles, elles se croisent en un point qui est solution du système linéaire

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0. \end{cases}$$

En particulier, pour calculer les intersections d'une droite d'équation $ax + by + c = 0$ avec les axes, il suffit de résoudre deux systèmes linéaires :

- ⋆ intersection avec l'axe des abscisses :
$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0, \\ y = 0; \end{cases}$$
- ⋆ intersection avec l'axe des ordonnées :
$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0, \\ x = 0. \end{cases}$$

Droite passant par deux points L'équation de la droite passant par les deux points (x_1, y_1) et (x_2, y_2) est

$$\begin{aligned} &x = x_1 && \text{si } x_1 = x_2, \\ &y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1 && \text{si } x_1 \neq x_2. \end{aligned}$$

2.7 Définition (Cercle)
L'équation du cercle de centre (x_c, y_c) et rayon r est

$$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2.$$

On peut réécrire cette équation sous la forme

$$x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0, \qquad \left(-\frac{\alpha}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\beta}{2}\right)^2 - \gamma \geq 0,$$

avec $x_0 = -\frac{\alpha}{2}$, $y_0 = -\frac{\beta}{2}$ et $r = \sqrt{\left(-\frac{\alpha}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\beta}{2}\right)^2 - \gamma}$.

2.4 Puissances

2.8 Propriété

① $a^b \cdot a^c = a^{b+c}$
② $a^b : a^c = a^{b-c}$
③ $\left(a^b\right)^c = a^{b\cdot c}$
④ $(a \cdot b)^c = a^c \cdot b^c$
⑤ $(a : b)^c = a^c : b^c$
⑥ $(a)^c = \left(\frac{1}{a}\right)^{-c}$
⑦ $\sqrt[c]{a} = a^{1/c}$

Produits à apprendre par cœur

① $(A \pm B)^2 = A^2 \pm 2AB + B^2$
② $(A \pm B)^3 = A^3 \pm 3A^2B + 3AB^2 \pm B^3$
③ $(A \pm B + C)^2 = A^2 + B^2 + C^2 \pm 2AB + 2AC \pm 2BC$
④ $(A - B - C)^2 = A^2 + B^2 + C^2 - 2AB - 2AC + 2BC$
⑤ $(A^2 - B^2) = (A - B) \cdot (A + B)$
⑥ $(A^3 - B^3) = (A - B) \cdot (A^2 + AB + B^2)$
⑦ $(A^3 + B^3) = (A + B) \cdot (A^2 - AB + B^2)$

Divisibilité d'un binôme

- ⋆ le binôme $x^n + a^n$

- ⋆ avec n impair n'est divisible que par $x+a$ et on a
$$x^n+a^n=(x+a)\cdot(x^{n-1}-ax^{n-2}+\cdots-a^{n-2}x+a^{n-1}),$$
- ⋆ avec n pair n'est pas factorisable dans $\mathbb{R}$;

⋆ x^n-a^n
- ⋆ avec n impair n'est divisible que par $x-a$ et on a
$$x^n-a^n=(x-a)\cdot(x^{n-1}+ax^{n-2}+\cdots+a^{n-2}x+a^{n-1}),$$
- ⋆ avec n pair est divisible par $x-a$ et par $x+a$. Pour le factoriser, il convient de considérer le binôme comme la différence de deux carrés :
$$x^n-a^n=\left(x^{n/2}+a^{n/2}\right)\cdot\left(x^{n/2}-a^{n/2}\right).$$
On vérifie ensuite si les deux binômes ainsi obtenus sont encore factorisables sur $\mathbb{R}$.

2.5 Équations et inégalités de degré 1

	Solutions de l'équation $ax=b$	Solutions de l'inégalité $ax>b$	Solutions de l'inégalité $ax<b$
Si $a>0$	$x={}^b/_a$	$x>{}^b/_a$	$x<{}^b/_a$
Si $a<0$	$x={}^b/_a$	$x<{}^b/_a$	$x>{}^b/_a$

2.6 Équations et inégalités de degré 2

On ne considère ici que le cas $a>0$ auquel on peut toujours se ramener

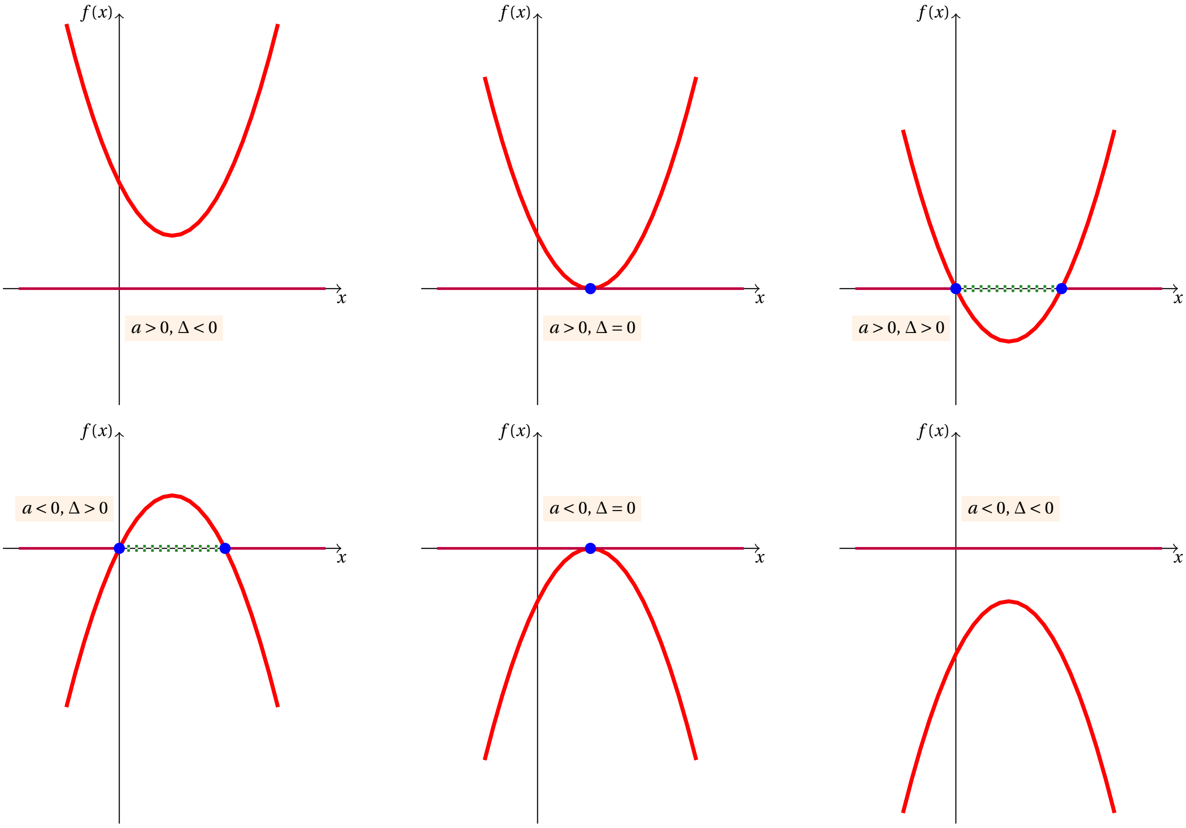
Soit $\Delta:=b^2-4ac$ $(a>0)$	Solutions de l'équation $ax^2+bx+c=0$	Solutions de l'inégalité $ax^2+bx+c>0$	Solutions de l'inégalité $ax^2+bx+c<0$
Si $\Delta>0$	$x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ $(x_1<x_2)$	$x<x_1$ ou $x>x_2$	$x_1<x<x_2$
Si $\Delta=0$	$x_1=x_2=-\dfrac{b}{2a}$	$x\neq-\dfrac{b}{2a}$	$\nexists$ solution
Si $\Delta<0$	$\nexists$ solution réelle	$\forall x\in\mathbb{R}$	$\nexists$ solution

Rappelons que
- ⋆ $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$
- ⋆ $\begin{cases}x_1+x_2=-{}^b/_a\\ x_1\cdot x_2={}^c/_a\end{cases}$

Le tableau ci-dessus a une interprétation géométrique : si on associe au trinôme ax^2+bx+c la parabole d'équation $y=ax^2+bx+c$, on peut interpréter les solutions de l'équation $ax^2+bx+c=0$ comme les intersections de la courbe représentative de la parabole avec l'axe des x. Ci-dessous, les figures du haut représentent les trois positions possibles de la parabole lorsque $a>0$: de gauche vers la droite on a aucune intersection, une intersection et deux intersections (respectivement, $\Delta>0$, $\Delta=0$, $\Delta<0$). En bas les trois cas lorsque $a<0$: de gauche vers la droite on a deux intersections, une intersection et aucune intersection (respectivement, $\Delta<0$, $\Delta=0$, $\Delta>0$). Pour résoudre les inégalités $ax^2+bx+c>0$ ou $ax^2+bx+c<0$ il suffit d'étudier la position de la parabole $y=ax^2+bx+c$ par rapport à l'axe des x :

- ⋆ les cercles représentent les solutions de l'équation $ax^2+bx+c=0$;

- ⋆ en bleu on a les solutions de l'inégalité $ax^2+bx+c>0$;
- ⋆ en vert pointillé les solutions de l'inégalité $ax^2+bx+c<0$.



2.7 Équations et inégalités de degré supérieur à 2

Équations et inégalités binomiales. On ne considère ici que le cas $a>0$ auquel on peut toujours se ramener.

$(a>0)$		Solutions de l'équation $ax^n+b=0$	Solutions de l'inégalité $ax^n+b>0$	Solutions de l'inégalité $ax^n+b<0$
n impair,		$x=\sqrt[n]{-\frac{b}{a}}$	$x>\sqrt[n]{-\frac{b}{a}}$	$x<\sqrt[n]{-\frac{b}{a}}$
	$b>0$	$\nexists x\in\mathbb{R}$	$\forall x\in\mathbb{R}$	$\nexists x\in\mathbb{R}$
n pair,	$b=0$	$x=0$	$x\neq 0$	$\nexists x\in\mathbb{R}$
	$b<0$	$x_{1,2}=\pm\sqrt[n]{-\frac{b}{a}}$	$x<-\sqrt[n]{-\frac{b}{a}}$ ou $x>\sqrt[n]{-\frac{b}{a}}$	$-\sqrt[n]{-\frac{b}{a}}<x<\sqrt[n]{-\frac{b}{a}}$

Équations et inégalités trinômes. Les équations (inégalités) trinômes ont pour forme normale

$$ax^{2n}+bx^n+c \gtreqless 0.$$

La stratégie résolutive consiste à poser $x^n=t$. On est ainsi reconduit à une équation (inégalité) de degré 2 en t : $at^2+bt+c \gtreqless 0$. On obtient ainsi deux solutions t_1 et t_2 et on obtient deux équations (inégalités) binomiales $x^n \lesseqgtr t_1$ et $x^n \gtreqless t_2$.

2.8 Équations et inégalités fractionnelles

- ⋆ L'équation $\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$ est satisfaite pour les x tels que $g(x)\neq 0$ et $f(x)=0$;

* l'inégalité $\dfrac{f(x)}{g(x)} > 0$ est satisfaite pour les x tels que $g(x) \neq 0$ et $f(x)$ et $g(x)$ sont de même signe ;
* l'inégalité $\dfrac{f(x)}{g(x)} < 0$ est satisfaite pour les x tels que $g(x) \neq 0$ et $f(x)$ et $g(x)$ sont de signes différents.

Remarque

* l'équation $f(x) \cdot g(x) = 0$ est satisfaite pour les x tels que $g(x) = 0$ ou $f(x) = 0$;
* l'inégalité $f(x) \cdot g(x) > 0$ est satisfaite pour les x tels que $f(x)$ et $g(x)$ sont de même signe ;
* l'inégalité $f(x) \cdot g(x) < 0$ est satisfaite pour les x tels que $f(x)$ et $g(x)$ sont de signes différents.

2.9 Systèmes d'inégalités

Deux (ou plus) inégalités constituent un système d'inégalités si elles doivent être satisfaites simultanément. Résoudre un système signifie donc calculer les solutions COMMUNES à toutes les inégalités qui le composent. Bien évidemment, les solutions des inégalités étant des intervalles, il faudra "superposer" ces intervalles pour trouver un intervalle dans lequel toutes les inégalités sont satisfaites.

2.10 Équations et inégalités qui contiennent des valeurs absolus

2.9 Définition (Valeur absolue)

La valeur absolue d'un réel x est le plus grand des deux nombres x et $-x$. On la note $|x|$ et on a donc

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad |x| = \max\{x, -x\}.$$

2.10 Propriété

① $|a| = 0 \iff a = 0$

② $|a| = |-a| \quad \forall a \in \mathbb{R}$

③ $|a \cdot b| = |a| \cdot |b| \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$

④ $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|} \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0$

⑤ $|a| = |b| \iff a = b$ ou $a = -b \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$

⑥ $|a| \le b \iff -b \le a \le b \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, b \ge 0$

⑦ $|a| \ge b \iff a \le -b$ ou $a \ge b \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, b \ge 0$

⑧ $|a| \le |b| \iff a^2 \le b^2 \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$

⑨ $\sqrt{a^2} = |a| \quad \forall a \in \mathbb{R}$

⑩ $\big||a| - |b|\big| \le |a + b| \le |a| + |b| \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$

2.11 Définition

Soit $f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ une application. Alors

$$\left|f(x)\right| = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \ge 0 \\ -f(x) & \text{si } f(x) < 0. \end{cases}$$

EXEMPLE

$$|x+1| = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \ge -1 \\ -x-1 & \text{si } x < -1 \end{cases}$$

2.12 Propriété

* $x \in \mathbb{R}$ est solution de l'équation $|f(x)| = g(x)$ si et seulement si

$$\begin{cases} f(x) \ge 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} f(x) < 0 \\ -f(x) = g(x) \end{cases}$$

- ⋆ $x \in \mathbb{R}$ est solution de l'inégalité $|f(x)| > g(x)$ si et seulement si

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) > g(x) \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} f(x) < 0 \\ -f(x) > g(x) \end{cases}$$

- ⋆ $x \in \mathbb{R}$ est solution de l'inégalité $|f(x)| < g(x)$ si et seulement si

$$\begin{cases} f(x) < g(x) \\ -f(x) < g(x) \end{cases}$$

EXEMPLE

1. $|2x-5| = |x^2-4|$ équivaut à l'union des deux systèmes

$$\begin{cases} 2x-5 \geq 0 \\ 2x-5 = x^2-4 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} 2x-5 < 0 \\ -(2x-5) = x^2-4 \end{cases}$$

i.e.

$$\begin{cases} x \geq \frac{5}{2} \\ x^2-2x+1 = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x < \frac{5}{2} \\ x^2+2x-9 = 0 \end{cases}$$

ce qui donne

$$\begin{cases} x \geq \frac{5}{2} \\ x = 1 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x < \frac{5}{2} \\ x = -1 \pm \sqrt{10} \end{cases}$$

d'où $x = -1 \pm \sqrt{10}$.

2. $|x+12| \geq |x^2-8|$ équivaut à l'union des deux systèmes

$$\begin{cases} x+12 \geq 0 \\ x+12 > x^2-8 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x+12 < 0 \\ -(x+12) > x^2-8 \end{cases}$$

i.e.

$$\begin{cases} x \geq -12 \\ x^2-x-20 < 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x < -12 \\ x^2+x+4 < 0 \end{cases}$$

ce qui donne

$$\begin{cases} x \geq -12 \\ -4 < x < 5 \end{cases}$$

donc $x \in]-4;5[$.

3. $|2x-4| \leq |x+2|$ équivaut au système

$$\begin{cases} 2x-4 < x+2 \\ -(2x-4) \leq x+2 \end{cases} \qquad \textit{i.e.} \qquad \begin{cases} x < 6 \\ x \geq \frac{2}{3} \end{cases} \qquad \text{donc} \qquad x \in \left[\frac{2}{3};6\right[.$$

Remarque (Cas particulier : $g(x) = k$)

Pour $k \in \mathbb{R}$ on a le tableau suivant :

	Solutions de l'équation $\lvert f(x)\rvert = k$	Solutions de l'inégalité $\lvert f(x)\rvert > k$	Solutions de l'inégalité $\lvert f(x)\rvert < k$
Si $k<0$	$\nexists x \in \mathscr{D}_f$	$\forall x \in \mathscr{D}_f$	$\nexists x \in \mathscr{D}_f$
Si $k=0$	$x \in \mathscr{D}_f$ tel que $f(x)=0$	$x \in \mathscr{D}_f$ tel que $f(x) \neq 0$	$\nexists x \in \mathscr{D}_f$
Si $k>0$	$x \in \mathscr{D}_f$ tel que $f(x) = \pm k$	$x \in \mathscr{D}_f$ tel que $\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) > k \end{cases}$ ou $\begin{cases} f(x) < 0 \\ -f(x) > k \end{cases}$	$x \in \mathscr{D}_f$ tel que $\begin{cases} f(x) < k \\ f(x) > -k \end{cases}$

EXEMPLE

1. $|x+3|=5$ équivaut à l'union des deux systèmes linéaires
$$\begin{cases} x+3\geq 0\\ x+3=5\end{cases}\quad\text{ou}\quad\begin{cases} x+3<0\\ -(x+3)=5\end{cases}$$
qu'on résout facilement
$$\begin{cases} x\geq -3\\ x=2\end{cases}\quad\text{ou}\quad\begin{cases} x<-3\\ x=8\end{cases}$$
d'où $x=2$ ou $x=8$.
2. $|x+3|>5$ équivaut à l'union des deux systèmes linéaires
$$\begin{cases} x+3\geq 0\\ x+3>5\end{cases}\quad\text{ou}\quad\begin{cases} x+3<0\\ -(x+3)>5\end{cases}$$
i.e.
$$\begin{cases} x\geq -3\\ x>2\end{cases}\quad\text{ou}\quad\begin{cases} x<-3\\ x<8\end{cases}$$
donc $x<-3$ ou $x>2$.
3. $|x+3|\leq 5$ équivaut au système
$$\begin{cases} x+3\leq 0\\ x+3>-5\end{cases}\qquad i.e.\qquad\begin{cases} x\leq -3\\ x>-8\end{cases}\qquad\text{donc}\qquad x\in]-8;-3].$$

2.11 Équations et inégalités irrationnelles

	Solutions de l'équation $A(x)=\sqrt[n]{B(x)}$	Solutions de l'inégalité $A(x)>\sqrt[n]{B(x)}$	Solutions de l'inégalité $A(x)<\sqrt[n]{B(x)}$
Si n est impaire	$(A(x))^n=B(x)$	$(A(x))^n>B(x)$	$(A(x))^n<B(x)$
Si n est paire	$\begin{cases}A(x)\geq 0\\(A(x))^n=B(x)\end{cases}$	$\begin{cases}B(x)\geq 0\\A(x)>0\\(A(x))^n>B(x)\end{cases}$	$\begin{cases}A(x)<0\\B(x)\geq 0\end{cases}$ ou $\begin{cases}A(x)\geq 0\\(A(x))^n<B(x)\end{cases}$

2.12 Équations exponentielles

Une équation est exponentielle si l'inconnue apparait en exposante.

Équation	Solution
$a^x=c$ (avec $a>0$, $a\neq 1$)	$x=\log_a c$
$ma^{f(x)}=nb^{g(x)}$ (avec $a,b>0$, $a\neq 1$, $b\neq 1$)	$\ln m+f(x)\ln a=\ln n+g(x)\ln b$
$f(a^x)=c$ (avec $a>0$, $a\neq 1$)	On pose $t:=a^x$

2.13 Inégalités exponentielles

Inégalité	Paramètres		Solution
$a^x > c$ (avec $a>0$, $a\neq 1$)	$c \le 0$		$\forall\, x \in \mathbb{R}$
	$c>0$	$0<a<1$	$x < \log_a c$
		$a>1$	$x > \log_a c$
$a^x < c$ (avec $a>0$, $a\neq 1$)	$c \le 0$		$\nexists\, x \in \mathbb{R}$
	$c>0$	$0<a<1$	$x > \log_a c$
		$a>1$	$x < \log_a c$

Puisque, pour $a>0$ on peut écrire $a^x = \left(\frac{1}{a}\right)^{-x}$, on peut toujours se ramener à des inégalités de base plus grande que 1.

	$0<a<1$	$a>1$
$a^{f(x)} > a^{g(x)}$ avec $a>0$ et $a\neq 1$	$f(x) < g(x)$	$f(x) > g(x)$
$m\,a^{f(x)} > n\,b^{g(x)}$ avec $a,b>0$ et $a\neq 1$, $b\neq 1$	$\ln m + f(x)\ln a > \ln n + g(x)\ln b$	

2.14 Propriétés des logarithmes

2.13 Propriété
Soit $a>0$, $a\neq 1$.

① Si $b_1>0$ et $b_2>0$ alors $\log_a(b_1\cdot b_2) = \log_a(b_1)+\log_a(b_2)$.

② Si $b_1>0$ et $b_2>0$ alors $\log_a\left(\frac{b_1}{b_2}\right) = \log_a(b_1)-\log_a(b_2)$.

③ Si $b>0$ alors $\log_a(b^k) = k\log_a(b)$.

④ $\log_a(1)=0$.

⑤ $\log_a(a)=1$.

⑥ $\log_a(a^c)=c$.

⑦ Si $c>0$ alors $a^{\log_a(c)} = c$.

⑧ Si $b>0$ alors $\log_a(b) = \frac{\log_c(b)}{\log_c(a)}$ avec $c>0$ et $c\neq 1$ (Règle du changement de la base).

Notamment, on rappelle la chaîne d'égalités suivante :

$$\log_a x = -\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_{1/a} x = \log_{1/a}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\log_x a}$$

2.15 Équations logarithmiques

Une équation est logarithmique si l'inconnue apparait sous le symbole de logarithme. Puisqu'on a $\log_x a = \log_x e \cdot \ln a = \frac{\ln a}{\ln x}$, on peut toujours se ramener au cas où l'inconnue n'apparait qu'en argument du logarithme.

Équation	Solution
$\log_a f(x) = c$ (avec $a > 0$, $a \neq 1$)	$\begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) = a^c \end{cases}$
$\log_a f(x) = \log_a g(x)$ (avec $a > 0$, $a \neq 1$)	$\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases}$
$f\left(\log_a g(x)\right) = c$ (avec $a > 0$, $a \neq 1$)	Il faut $g(x) > 0$ On pose $t := \log_a g(x)$

2.16 Inégalités logarithmiques

	$0 < a < 1$	$a > 1$
$\log_a f(x) > c$	$0 < f(x) < a^c$	$f(x) > a^c$
$\log_a f(x) < c$	$f(x) > a^c$	$0 < f(x) < a^c$
$\log_a f(x) > \log_a g(x)$	$0 < f(x) < g(x)$	$f(x) > g(x) > 0$

Puisque, pour $a > 0$ et $a \neq 1$ on peut écrire $\log_a x = -\log_{1/a} x$, on peut toujours se ramener à des inégalités de base plus grande que 1.

2.17 Systèmes linéaires

2.14 Définition (Système linéaire)
Soit $n, p, \geq 1$ des entiers. Un SYSTÈME LINÉAIRE $n \times p$ est un ensemble de n équations linéaires à p inconnues de la forme

$$(S) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 & + & \dots & + & a_{1p}x_p & = & b_1, \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & \dots & + & a_{np}x_p & = & b_n. \end{cases}$$

- ⋆ Les COEFFICIENTS a_{ij} et les SECONDES MEMBRES b_i sont des éléments donnés de $\mathbb{R}$.
- ⋆ Les INCONNUES $x_1, x_2, \dots, x_p$ sont à chercher dans $\mathbb{R}$.
- ⋆ Une SOLUTION de (S) est un p-uplet $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ qui vérifie simultanément les n équations de (S). Résoudre (S) signifie chercher toutes les solutions.
- ⋆ Un système est IMPOSSIBLE, ou incompatible, s'il n'admet pas de solution.
  Un système est POSSIBLE, ou compatible, s'il admet une ou plusieurs solutions.
- ⋆ Deux systèmes sont ÉQUIVALENTS s'ils admettent les mêmes solutions.
- ⋆ Le SYSTÈME HOMOGÈNE associé à (S) est le système obtenu en remplaçant les b_i par 0.
- ⋆ Un système est CARRÉ si $n = p$.

Équilibrage de réactions chimiques Du point de vue mathématique, équilibrer une réaction chimique signifie trouver des coefficients (dans $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Q}$), appelés coefficients stœchiométriques, qui satisfont certaines contraintes comme la conservation du nombre d'atomes, ou la conservation du nombre d'électrons (pour les réactions red-ox), ou la conservation de la charge (pour les réactions écrites sous forme ionique). Toutes ces contraintes dépendent linéairement des coefficients stœchiométriques, ce qui amène tout naturellement à l'écriture d'un système linéaire.
Par exemple, considérons la réaction

$$H_2 + O_2 \to H_2O.$$

Notons x_1, x_2 et x_3 les coefficients stœchiométriques

$$x_1 H_2 + x_2 O_2 \to x_3 H_2O.$$

Les contraintes sont :

1. la conservation du nombre d'atomes d'hydrogène : $2x_1 = 2x_3$,
2. la conservation du nombre d'atomes d'oxygène : $2x_2 = x_3$.

On note qu'on a 3 inconnues mais seulement 2 équations linéairement indépendantes ; en effet, les coefficients stœchiométriques ne définissent pas des quantités absolues mais seulement les rapports entre les différents éléments. Par conséquent, si (x_1, x_2, x_3) équilibre la réaction, alors tous les multiples entiers de (x_1, x_2, x_3) équilibrent aussi la réaction.
Pour résoudre le problème sans paramètres, fixons arbitrairement un des coefficients, par exemple $x_3 = 1$. On doit alors résoudre le système linéaire

$$\begin{cases} 2x_1 = 2 \\ 2x_2 = 1 \end{cases}$$

On trouve alors $x_1 = 1$ et $x_2 = 1/2$. Si nous voulons des coefficients stœchiométriques entiers, il suffit de multiplier tous les coefficients par 2 et on a ainsi

$$2H_2 + 1O_2 \to 2H_2O.$$

2.15 Définition (Système échelonné)
Un système (S) est EN ESCALIER, ou ÉCHELONNÉ, si le nombre de premiers coefficients nuls successifs de chaque équation est strictement croissant.

Autrement dit, un système est échelonné si les coefficients non nuls des équations se présentent avec une sorte d'escalier à marches de longueurs variables marquant la séparation entre une zone composée uniquement de zéros et une zone où les lignes situées à droite de l'escalier commencent par des termes non nuls, comme dans l'exemple suivant de 5 équations à 6 inconnues :

$$\left\{\begin{array}{rrrrrrcl} 5x_1 & -x_2 & -x_3 & +2x_4 & & +x_6 & = & b_1 \\ & & 3x_3 & -x_4 & +2x_5 & & = & b_2 \\ & & & & -x_5 & +x_6 & = & b_3 \\ & & & & & 5x_6 & = & b_4 \\ & & & & & 0 & = & b_5 \end{array}\right. \qquad (S)$$

Réduction Quand un système contient une équation du type

$$0x_1 + \cdots + 0x_p = b,$$

- ⋆ si $b \neq 0$ le système est impossible,
- ⋆ si $b = 0$, on peut supprimer cette équation, ce qui conduit à un système équivalent à (S) dit SYSTÈME RÉDUIT.

Méthode du pivot de GAUSS Soit $(a_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le p}}$ la matrice des coefficients du système (S).
La méthode du pivot de GAUSS comporte $n-1$ étapes : par des opérations élémentaires sur les lignes à chaque étape j on élimine l'inconnue x_j dans les lignes L_i pour $i > j$.

Étape j : en permutant éventuellement deux lignes (*i.e.* deux équations) du système linéaire, on peut supposer $a_{jj} \neq 0$ (appelé pivot de l'étape j). On transforme alors toutes les lignes L_i avec $i > j$ selon la règle :

$$L_i \leftarrow L_i - \frac{a_{ij}}{a_{jj}} L_j,$$

on élimine l'inconnue x_j dans chaque lignes L_i du système linéaire pour $i > j$.

En réitérant le procédé pour i de 1 à $n-1$, on aboutit à un système échelonné.

EXEMPLE
On résout par la méthode de GAUSS le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 2, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3, \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 4. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+4x_4=1\\ 2x_1+3x_2+4x_3+x_4=2\\ 3x_1+4x_2+x_3+2x_4=3\\ 4x_1+x_2+2x_3+3x_4=4\end{cases} \xrightarrow[\text{Étape } k=1]{\substack{L_2\leftarrow L_2-2L_1\\ L_3\leftarrow L_3-3L_1\\ L_4\leftarrow L_4-4L_1}} \begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+4x_4=1\\ -x_2-2x_3-7x_4=0\\ -2x_2-8x_3-10x_4=0\\ -7x_2-10x_3-13x_4=0\end{cases}$$

$$\xrightarrow[\text{Étape } k=2]{\substack{L_3\leftarrow L_3-2L_2\\ L_4\leftarrow L_4-7L_2}} \begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+4x_4=1\\ -x_2-2x_3-7x_4=0\\ -4x_3+4x_4=0\\ 4x_3+36x_4=0\end{cases} \xrightarrow[\text{Étape } k=3]{L_4\leftarrow L_4+L_3} \begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+4x_4=1\\ -x_2-2x_3-7x_4=0\\ -4x_3+4x_4=0\\ 40x_4=0\end{cases}$$

donc

$$x_4=0,\quad x_3=0,\quad x_2=0,\quad x_1=1.$$

Méthode de Gauss-Jordan Dans cette variante de la méthode du pivot de Gauss, à chaque étape on fait apparaître des zéros à la fois au-dessus et en-dessous du pivot.
Étape j : en permutant éventuellement deux lignes (*i.e.* deux équations) du système linéaire, on peut supposer $a_{jj}\neq 0$ (appelé pivot de l'étape j). On transforme alors toutes les lignes L_i avec $i\neq j$ selon la règle :

$$L_i \leftarrow L_i - \frac{a_{ij}}{a_{jj}} L_j$$

ainsi on élimine l'inconnue x_j dans toutes les lignes L_i. En réitérant le procédé pour i de 1 à n, on aboutit à un système diagonal.

Exemple

On résout par la méthode de Gauss-Jordan le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+4x_4=1\\ 2x_1+3x_2+4x_3+x_4=2\\ 3x_1+4x_2+x_3+2x_4=3\\ 4x_1+x_2+2x_3+3x_4=4\end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+4x_4=1\\ 2x_1+3x_2+4x_3+x_4=2\\ 3x_1+4x_2+x_3+2x_4=3\\ 4x_1+x_2+2x_3+3x_4=4\end{cases} \xrightarrow{\substack{L_2\leftarrow L_2-2L_1\\ L_3\leftarrow L_3-3L_1\\ L_4\leftarrow L_4-4L_1}} \begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+4x_4=1\\ -x_2-2x_3-7x_4=0\\ -2x_2-8x_3-10x_4=0\\ -7x_2-10x_3-13x_4=0\end{cases} \xrightarrow{\substack{L_1\leftarrow L_1+2L_2\\ L_3\leftarrow L_3-2L_2\\ L_4\leftarrow L_4-7L_2}} \begin{cases} x_1-x_3-10x_4=1\\ -x_2-2x_3-7x_4=0\\ -4x_3+4x_4=0\\ 4x_3+36x_4=0\end{cases}$$

$$\xrightarrow{\substack{L_1\leftarrow L_1-L_3/4\\ L_2\leftarrow L_2-L_3/2\\ L_4\leftarrow L_4+L_3}} \begin{cases} x_1+4x_4=1\\ -x_2-7x_4=0\\ -4x_3+4x_4=0\\ +40x_4=0\end{cases} \xrightarrow{\substack{L_1\leftarrow L_1+11L_4/40\\ L_2\leftarrow L_2+9L_4/40\\ L_3\leftarrow L_3+4L_4/40}} \begin{cases} x_1=1\\ -x_2=0\\ -4x_3=0\\ 40x_4=0\end{cases}$$

donc

$$x_1=1,\quad x_2=0,\quad x_3=0,\quad x_4=0.$$

Remarque (Systèmes mal conditionnés)
Considérons le système de deux équations à deux inconnues suivant :

$$\begin{cases} 3.218613x_1+6.327917x_2=10.546530,\\ 3.141592x_1+4.712390x_2=7.853982.\end{cases}$$

Sa solution est donnée par $x_1=x_2=1$. Considérons maintenant un système d'équations "voisin" (le carré indique un changement de décimale) :

$$\begin{cases} 3.21861\boxed{1}x_1+6.327917x_2=10.546530,\\ 3.14159\boxed{4}x_1+4.712390x_2=7.85398\boxed{0}.\end{cases}$$

Sa solution est donnée par $x_1=-5$, $x_2=5$. On voit donc que, bien que ces deux systèmes soient voisins, leurs solutions sont très différentes. On parle dans ce cas de systèmes mal conditionnés. Résoudre un système mal conditionné avec un ordinateur peut être une affaire délicate si l'ordinateur calcule avec trop peu de chiffres significatifs. Dans l'exemple précédent nous observons que, si l'ordinateur ne retient que 6 chiffres significatifs, il est complètement inespéré d'obtenir une solution raisonnablement proche de la solution !

Exercices

Calcul

Exercice 2.1

Sans utiliser la calculatrice mettre sous forme de fraction irréductible les expressions suivantes :

$$A = \frac{51}{136}, \qquad B = \frac{1015}{2\,450}, \qquad C = \frac{9}{40} + \frac{9}{50} + \frac{18}{125},$$
$$D = 1 - \frac{27}{125} - \frac{549}{1\,000}, \qquad E = \frac{549}{1\,000} + 2 \times \frac{235}{1\,000}, \qquad F = 0{,}000\,001\,25.$$

Correction

$$A = \frac{3 \times 17}{2^3 \times 17} = \frac{3}{8}, \qquad B = \frac{5 \times 7 \times 29}{2 \times 5^2 \times 7^2} = \frac{29}{70}, \qquad C = \frac{3^2}{2^3 \times 5} + \frac{3^2}{2 \times 5^2} + \frac{2 \times 3^2}{5^3} = \frac{3^2 \times (5^2 + 2^2 \times 5 + 2^4)}{2^3 \times 5^3} = \frac{549}{1\,000},$$
$$D = 1 - \frac{3^3}{5^3} - \frac{3^2 \times 61}{2^3 \times 5^3} = \frac{47}{200}, \qquad E = \frac{3^2 \times 61}{2^3 \times 5^3} + 2 \times \frac{5 \times 47}{2^3 \times 5^3} = \frac{1\,019}{1\,000}, \qquad F = 125 \times 10^{-9} = 5^3 \times 2^{-9} \times 5^{-9} = 2^{-3} \times 10^{-6} = \frac{1}{800\,000}.$$

Exercice 2.2

Sans utiliser la calculatrice, calculer

$$A)\,12.5\% \text{ de } 164 \qquad B)\,13\% \text{ de } 50\% \text{ de } 800 \qquad C)\,\frac{300}{30\%} \qquad D)\,14 \times 5\% \qquad E)\,(412 - 518) \times 116\%$$

Correction

$A)$ 20.5, $B)$ 52, $C)$ 1 000, $D)$ 0.7, $E)$ -122.96.

Exercice 2.3

Sans utiliser la calculatrice donner la valeur des expressions suivantes :

$$A)\ \frac{\frac{4}{7} - \frac{1}{8}}{\frac{5}{9}} \qquad\qquad B)\ \frac{\left(\frac{2^{18} \times 2^{-6}}{2^9}\right)}{\left(2^{-2}\right)}$$

Correction

$$A)\ \frac{\frac{4}{7} - \frac{1}{8}}{\frac{5}{9}} = \left(\frac{4}{7} - \frac{1}{8}\right) \cdot \frac{9}{5} = \frac{4 \times 8 - 1 \times 7}{56} \cdot \frac{9}{5} = \frac{25}{56} \cdot \frac{9}{5} = \frac{45}{56} \qquad B)\ \frac{\frac{2^{18} \times 2^{-6}}{2^9}}{2^{-2}} = 2^{18} \times 2^{-6} \times 2^{-9} \times 2^2 = 2^{18-6-9+2} = 2^5 = 32$$

Exercice 2.4

Sans utiliser la calculatrice, établir laquelle des expressions suivantes a la plus grande valeur :

i) $\frac{4}{7}, \quad \frac{5}{9}, \quad \frac{7}{10}, \quad \frac{5}{8};$

ii) $\sqrt{100 + 69}, \quad \sqrt{100} \times \sqrt{9}, \quad \frac{\sqrt{100}}{\sqrt{6}}, \quad (\sqrt{100})^{-6}.$

Correction

i) ppcm(7; 9; 10; 8) = ppcm(7; 3^2; 2 × 5; 2^3) $= 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7 = 2\,520$ et on a

$$\frac{4}{7} = \frac{4 \times (5 \times 8 \times 9)}{2\,520} = \frac{1\,440}{250}, \qquad \frac{5}{9} = \frac{5 \times (5 \times 7 \times 8)}{2\,520} = \frac{1\,400}{250}, \qquad \frac{7}{10} = \frac{7 \times (7 \times 4 \times 9)}{2\,520} = \frac{1\,764}{250}, \qquad \frac{5}{8} = \frac{5 \times (5 \times 7 \times 9)}{2\,520} = \frac{1\,575}{250},$$

donc $\frac{5}{9} < \frac{4}{7} < \frac{5}{8} < \frac{7}{10}$.

ii) $\sqrt{100+69}=\sqrt{169}=13$, $\quad\sqrt{100}\times\sqrt{9}=10\times 3=30$, $\quad\dfrac{\sqrt{100}}{\sqrt{6}}=\dfrac{10}{\sqrt{6}}$, $\quad(\sqrt{100})^{-6}=\dfrac{1}{10^6}$, donc

$$(\sqrt{100})^{-6}<\frac{\sqrt{100}}{\sqrt{6}}<\sqrt{100+69}<\sqrt{100}\times\sqrt{9}.$$

Exercice 2.5

Soit $x\in\mathbb{R}$. On donne $A=2x$, $B=4x^2-1$. Calculer

$$C=2xB-A,\qquad D=2xC-B,\qquad E=2xD-C.$$

Correction

$$\begin{aligned}
C&=2x(4x^2-1)-(2x)=4x(2x^2-1),\\
D&=2x(4x(2x^2-1))-(4x^2-1)=(4x^2-2x-1)(4x^2+2x-1),\\
E&=2x(4x^2-2x-1)(4x^2+2x-1)-(4x(2x^2-1))=2x(2x-1)(2x+1)(4x^2-3).
\end{aligned}$$

Exercice 2.6

Écrire sous forme d'une seule fraction irréductible la fraction $\dfrac{\left(\frac{x}{2}+4x\right)}{\left(\frac{3x+2}{4-4x}x\right)}$.

Correction

$$\frac{\frac{x}{2}+4x}{\frac{3x+2}{4-4x}x}=\frac{\frac{1+8}{2}x}{\frac{(3x+2)x}{4(1-x)}}=\frac{9x}{2}\,\frac{4(1-x)}{(3x+2)x}=\frac{18(1-x)}{3x+2}$$

Exercice 2.7

Soit $n\in\mathbb{N}$. Factoriser les expressions suivantes :

a) $\dfrac{n^2-1}{9}-\dfrac{n+1}{6}$,

b) $\dfrac{(n-2)(n+1)}{4}+4\dfrac{n+1}{3}$,

c) $\dfrac{(n+1)(2n+1)}{6}-\dfrac{(n+1)^2}{4}$,

d) $\dfrac{(n+1)(3n+2)}{6}-4\dfrac{(n+1)^2}{9}$,

e) $-\dfrac{1}{n(n-1)}\left[\left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2-\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]$.

Correction

a) $\dfrac{n^2-1}{9}-\dfrac{n+1}{6}=\dfrac{(n+1)(2n-5)}{18}$,

b) $\dfrac{(n-2)(n+1)}{4}+4\dfrac{n+1}{3}=\dfrac{(3n+10)(n+1)}{12}$,

c) $\dfrac{(n+1)(2n+1)}{6}-\dfrac{(n+1)^2}{4}=\dfrac{n^2-1}{12}$,

d) $\dfrac{(n+1)(3n+2)}{6}-4\dfrac{(n+1)^2}{9}=\dfrac{(n+1)(n-2)}{18}$,

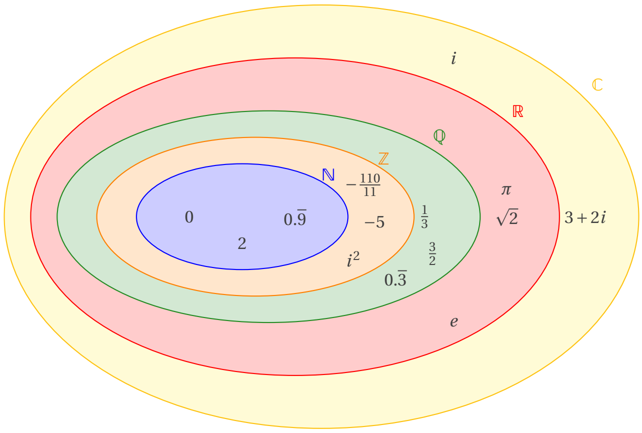
e) $-\dfrac{1}{n(n-1)}\left[\left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2-\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]=-\dfrac{(n+1)(3n+2)}{12}$.

Exercice 2.8

Pour chaque élément de $\mathbb{C}$ ci-dessous, indiquer s'il appartient à $\mathbb{N}$, à $\mathbb{Z}\setminus\mathbb{N}$, à $\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$, à $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ ou à $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$:

i) i	iv) $-\frac{110}{11}$	vii) 0	x) π	xiii) i^2
ii) -5	v) 2	viii) e	xi) $0.\overline{3}$	
iii) $\sqrt{2}$	vi) $1/3$	ix) $3+2i$	xii) $\frac{3}{2}$	xiv) $0.\overline{9}$

Correction



Puissances

Exercice 2.9

Soit $n = 10^{45}$, calculer $-\dfrac{1}{n^{2/3}}$.

Correction

-10^{-30}

Exercice 2.10

Simplifier les expressions suivantes autant que possible :

$a)\quad (2^2)^2 \qquad b)\quad 2^{(2^2)} \qquad c)\quad (2^2)^3 \qquad d)\quad 2^{(2^3)} \qquad e)\quad \left(\frac{1}{3}\right)^x 9^{\frac{x}{2}} \qquad f)\quad \dfrac{a^{-4}(b^2)^3(a^2b)^{-1}}{(ab^3)^2b^{-1}}.$

Correction

$$a)(2^2)^2 = 4^2 = 16 \qquad b)2^{2^2} = 2^4 = 16 \qquad c)(2^2)^3 = 4^3 = 64$$

$$d)2^{2^3} = 2^8 = 256 \qquad e)\left(\frac{1}{3}\right)^x 9^{\frac{x}{2}} = 3^{2\frac{x}{2}-x} = 3^0 = 1 \qquad f)\frac{a^{-4}(b^2)^3(a^2b)^{-1}}{(ab^3)^2b^{-1}} = \frac{1}{a^8}$$

Exercice 2.11

Soit $n \in \mathbb{N}$. Simplifier les expressions suivantes :

$$A = \frac{3^n}{3^{3n}}, \qquad B = \frac{(2^{2n+1})^2}{2^{2n-1}}, \qquad C = 4^n - 2^{2n-1}, \qquad D = \frac{1}{(-1)^{2n+1}} + (-1)^{2n-2}.$$

Correction

$A = 9^{-n}, \qquad B = 2^{2n+3}, \qquad C = 2^{2n-1}, \qquad D = 0.$

Exercice 2.12

Calculer, factoriser ou simplifier :

a) $(e^3)^6$ b) e^3e^6 c) e^3+e^6 d) $e^{-6}e^8$ e) 2^44^7 f) 2^4e^5

Correction

a) e^{18} b) e^9 c) $e^3(1+e^3)$ d) e^2 e) 2^{18} f) $(2e)^4 e$

Exercice 2.13

Soit n un entier naturel et x un réel strictement positif. Simplifier :

$$A = 1\times\sqrt[3]{2}\times\sqrt[3]{2^5} \qquad B = (\sqrt[6]{3})^3 \qquad C = \sqrt[5]{3}\sqrt[3]{9}\sqrt[15]{3^2} \qquad D = \frac{(x^2)^n}{x^{n+1}} \qquad E = \frac{x^3x^{5n}}{x^{2n}x^5}$$

$$F = (x^{-n+1})^2(x^3)^{n-2} \qquad G = \sqrt{2^{2^{(2n+1)}}} \qquad H = (2^{2n})^{(2n)^{2^n}} \qquad I = \frac{2\times\left((2^{2n-1})^2\right)^{2^n}}{8^{n^2}}$$

Correction

$$A = 2^{1/3}\times2^{5/3} = 2^2 \qquad B = 3^{3/6} = 3^{1/2} = \sqrt{3} \qquad C = 3^{1/5}\times3^{2/3}\times3^{2/15} = 3 \qquad D = x^{n-1} \qquad E = x^{3n-2}$$

$$F = x^{n-4} \qquad G = 2^{2^{2n}} = 2^{4^n} \qquad H(4^n)^{(2n)^{2^n}} \qquad I = 2\frac{16^{n2^n}}{4^{2^n}8^{n^2}}$$

Exercice 2.14

Soit n un entier naturel et soit a et u deux réels. Mettre sous la forme a^pu^q le réel $u_n = a\left(a^{2^{n+1}}u^{2^n}\right)^2$ (attention, les exposants ne sont pas $2n+1$ et $2n$ mais 2^{n+1} et 2^n).

Correction

$p = 1+2^{n+2}$ et $q = 2^{n+1}$

Logarithmes et exponentielles

Exercice 2.15

En utilisant seulement la définition de logarithme (*i.e.* $a^{\log_a(b)} = b$), simplifier les expressions suivantes :

$$A = \log_5(25)-\log_5(5) \qquad B = \log_{x^2+1}(1)+\log_{2012}(1)+\log_{10^7}(1)$$

$$C = \log_{10}(0.1)+\log_{10}(0.01)+\log_{10}(0.001) \qquad D = \frac{\log_{10}(10^3)+\log_{10}^2(1)+\log_{2012}^{2012}(2012)}{2^3+2}$$

Attention : on note $\log_a^c b$ la valeur $(\log_a b)^c$.

Correction

$$\begin{aligned}
A &= \log_5(25)-\log_5(5) = \log_5(5^2)-\log_5(5) = 2-1 = 1\\
B &= \log_{x^2+1}(1)+\log_{2012}(1)+\log_{10^7}(1) = 0+0+0 = 0\\
C &= \log_{10}(0.1)+\log_{10}(0.01)+\log_{10}(0.001) = \log_{10}(10^{-1})+\log_{10}(10^{-2})+\log_{10}(10^{-3}) = -1-2-3 = -6\\
D &= \frac{\log_{10}(10^3)+\log_{10}^2(1)+\log_{2012}^{2012}(2012)}{2^3+2} = \frac{3+0^2+1^{2012}}{10} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}
\end{aligned}$$

Exercice 2.16

Simplifier chacune des expressions suivantes :

$$A = \ln(\sqrt{3}+1)+\ln(\sqrt{3}-1), \qquad B = \ln((\sqrt{3}+1)^{18})+\ln((\sqrt{3}-1)^{18}), \qquad C = \ln(1+\cos(x))+\ln(1-\cos(x))-2\ln(\sin(x)).$$

Correction

⋆ $A = \ln(2)$,

- ⋆ $B = 18\ln(2)$,
- ⋆ $C = \ln(1+\cos(x)) + \ln(1-\cos(x)) - 2\ln(\sin(x)) = \ln\left(\frac{(1+\cos(x))(1-\cos(x))}{\sin^2(x)}\right) = \ln\left(\frac{1-\cos^2(x)}{\sin^2(x)}\right) = \ln(1) = 0.$

Exercice 2.17

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Simplifier les expressions suivantes :

$$A = \frac{\ln(2x)}{\ln(x)} \text{ (ici } x \neq 1), \qquad B = (\ln(x))^2 - \ln(x^2), \qquad C = (\ln(x))^2 - \ln(x^2) + 1.$$

Correction

$$A = \frac{\ln(2)}{\ln(x)} + 1, \qquad B = \ln^2(x) - 2\ln(x) = (\ln(x) - 2)\ln(x), \qquad C = \ln^2(x) - 2\ln(x) + 1 = (\ln(x) - 1)^2.$$

Exercice 2.18

Soit x un nombre réel. On pose $f(x) = x^2\ln(x)$. Compléter le tableau suivant :

$x =$	e	$\frac{1}{e}$	$\sqrt{e}$	e^2	$e\sqrt{e}$	$\frac{1}{e^2}$	$\frac{1}{\sqrt{e}}$
$f(x) =$							

Correction

$x =$	e	$\frac{1}{e}$	$\sqrt{e}$	e^2	$e\sqrt{e}$	$\frac{1}{e^2}$	$\frac{1}{\sqrt{e}}$
$f(x) =$	e^2	$-\frac{1}{e^2}$	$\frac{e}{2}$	$2e^4$	$\frac{3}{2}e^3$	$-\frac{2}{e^4}$	$-\frac{1}{2e}$

Exercice 2.19

Calculer ou simplifier.

a) $\log_{10}(1000)$ b) $\log_5(1/25)$ c) $\ln(e^{\sqrt{2}})$ d) $\log_{10}(10) + \log_{10}(4)$ e) $\log_{10}(10) - \log_{10}(4)$
f) $\log_{10}(10)\log_{10}(4)$ g) $\log_3(108) - \log_3(4)$ h) $\log_{10}(0.1)$ i) $\log_{10}(100/67)$ j) $3\log_{10}(10)$
k) $\log_{10}(1)$ l) $\log_2(8)$ m) $\log_2(0.25)$ n) $\ln(1/e)$ o) $(\ln(e))^{-1}$

Correction

a) 3 b) -2 c) $\sqrt{2}$ d) $1 + 2\frac{\ln(2)}{\ln(10)}$ e) $1 - 2\frac{\ln(2)}{\ln(10)}$
f) $2\frac{\ln(2)}{\ln(10)}$ g) 3 h) -1 i) $2 - \log_{10}(67)$ j) 3
k) 0 l) 3 m) -2 n) -1 o) 1

Exercice 2.20

Simplifier les expressions suivantes :

$$A = \exp\left(-\ln\left(\frac{1}{w}\right)\right), \qquad B = \exp\left(-\frac{1}{\ln\left(\frac{1}{v}\right)}\right)\exp\left(-\ln\left(\frac{1}{v}\right)\right), \qquad C = \left(\exp\left(-\ln\left(\frac{1}{w}\right)\right)\right)^{\ln\left(\frac{1}{w^2}\right)},$$

$$D = \exp\left(x - \ln\left(1 + \frac{1}{e^x}\right)\right), \qquad E = \exp\left(-\ln\left(\frac{1}{x^2 - x^4}\right) + \frac{1}{x}\right), \qquad F = \frac{\exp(\ln|1+x| - \ln|1-x|)}{\exp(\ln|1+x| - \ln|x-1|)},$$

$$G = \frac{1}{e}\exp\left((x+1)^2 - e^{2\ln(x)}\right), \qquad H = \frac{e^{3\ln(2x) - \ln(x)}e^{1-3\ln(x)}}{xe^{x-2}}.$$

Correction

$$A = w, \qquad B = -v\exp(-\ln^{-1}(v)), \qquad C = w^{-2\ln(w)}, \qquad D = \frac{e^{2x}}{1+e^x},$$
$$E = x^2(1-x^2)e^{1/x}, \qquad F = -1 \qquad G = e^{2x}, \qquad H = \frac{8}{x^2e^{x-3}}.$$

Exercice 2.21

Résoudre l'inégalité $\log_2|x-1| \le 6+\log_{1/2}\left((x-1)^2\right)$.

Correction

Tout d'abord on note que la présence des logarithmes impose $|x-1|>0$ et $(x-1)^2>0$, *i.e.* $x\neq 1$. On doit alors résoudre

$$\log_2|x-1| \le 6-\log_2(x-1)^2 \iff \log_2\left(|x-1|(x-1)^2\right)\le 6 \iff \log_2|x-1|^3\le 6$$
$$\iff |x-1|^3\le 2^6, x\neq 1 \iff |x-1|\le 2^2, x\neq 1 \iff -3\le x\le 5, x\neq 1.$$

Donc la solution est $x\in[-3,1)\cup(1,5]$.

Équations et inégalités

Exercice 2.22

Calculer la valeur de l'inconnue x :

1. $\dfrac{30}{75}=\dfrac{20}{x}$
2. $\dfrac{4}{x+5}=\dfrac{5}{x-23}$
3. $\dfrac{6x}{x+14}=\dfrac{6}{8}$
4. $\dfrac{(55x-38)\times 4}{11}=\dfrac{4}{\frac{3}{8}}$
5. $\dfrac{\sqrt{x}}{8}=\dfrac{4}{\sqrt{x}}$
6. $-3(4-x)=\frac{x}{2}-(2-(3+2x))(3-4)$
7. $35x+3(18-26x+4^2)=70-3x$

Correction

1. $x\neq 0$ et $x=20\times\dfrac{75}{30}=50$
2. $x\neq -5$, $x\neq 23$ et $4(x-23)=5(x+5)$ donc $x=-117$
3. $x\neq -14$ et $8\times(6x)=6\times(x+14)$ donc $x=2$
4. $(55x-38)=\dfrac{4}{3/8}\times\dfrac{11}{4}$ d'où $55x=\dfrac{88}{3}+38$ donc $x=\dfrac{88+3\times 38}{3\times 55}=\dfrac{202}{165}$
5. $x\ge 0$ et $\sqrt{x}\times\sqrt{x}=4\times 8$ d'où $x=32$
6. $-3(4-x)=\frac{x}{2}-(2-(3+2x))(3-4) \iff -12+3x=\frac{x}{2}+(2-3-2x) \iff -12+3x=\frac{x}{2}-1-2x \iff 3x-\frac{x}{2}+2x=-1+12 \iff \frac{10-1}{2}x=11 \iff x=\frac{22}{9}$
7. $35x+3(18-26x+4^2)=70-3x \iff 35x+54-78x+48=70-3x \iff 32=40x \iff x=\frac{32}{40}=\frac{4}{5}$

Exercice 2.23

Indiquer comment choisir x pour que l'on ait

1. $x^2>10\,000$,
2. $\frac{1}{x}>10\,000$,
3. $\frac{1}{x}<10^{-6}$,
4. $x^2<0{,}000\,1$,
5. $\frac{1}{x}>0{,}000\,1$,
6. $x^2>1$.

Correction

1. $|x|>10^2$,
2. $0<x<10^{-4}$,
3. $x<0$ ou $x>10^6$,
4. $|x|<0.01=10^{-2}$,
5. $0<x<10^4$,
6. $|x|>1$.

Exercice 2.24

Trouver le plus petit entier n tel que 2^n soit supérieur à 1000. En déduire la partie entière de $\log_2(1000)$.

Correction
On cherche $\min\left\{ n\in\mathbb{N} \,\middle|\, 2^n > 10^3 \right\}$, *i.e.*

$$\begin{aligned}\min\left\{ n\in\mathbb{N} \,\middle|\, n>\log_2(10^3) \right\} &= \min\left\{ n\in\mathbb{N} \,\middle|\, n>3\log_2(10) \right\}\\ &= \min\left\{ n\in\mathbb{N} \,\middle|\, n>3\log_2(2\times5) \right\}\\ &= \min\left\{ n\in\mathbb{N} \,\middle|\, n>3(1+\log_2(5)) \right\} = 10.\end{aligned}$$

En effet $2^9 = 516$, $2^{10} = 1024$. Donc $E(\log_2(1000)) = 9$.

Exercice 2.25
Trouver toutes les solutions dans $\mathbb{R}$ des inégalités suivantes (pour chaque inégalité, la réponse est indiquée à droite) :

1. $\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{x-2}<1+\dfrac{1}{4-x^2}$ .... $]-\infty,-2[\cup]-1,1[\cup]+2,+\infty[$
2. $x|x|<1$ .... $]-\infty,1[$
3. $x^2-4|x|-5>0$ .... $]-\infty,-5[\cup]5,+\infty[$
4. $|4-x^2|-|3-x|>x$ .... $\left]-\infty,-\sqrt{7}\right[\cup]-1,1[\cup\left]+\sqrt{7},+\infty\right[$
5. $|x+2|<1+|x-1|$ .... $]-\infty,0[$
6. $\sqrt{2x+1}>x$ .... $\left[-1/2,1+\sqrt{2}\right[$
7. $\sqrt{x+2}<x$ .... $]2,+\infty[$
8. $\sqrt{x^2-5x+4}<x-1$ .... $[4,+\infty[$
9. $\sqrt{\dfrac{x^2+8|x|-9}{x^2-1}}\geq x-3$ .... $]-\infty,5+\sqrt{17}/2]\setminus\{-1,1\}$
10. $\sqrt{4x^2+3x-1}\geq 2x-3$ .... $]-\infty,-1]\cup[1/4,+\infty[$
11. $\dfrac{\sqrt{1-9x^2}+2x}{3x-2}>0$ .... $[-1/3,-1/\sqrt{13}[$
12. $\sqrt{x+1}+\sqrt{x-2}\geq 3$ .... $[3,+\infty[$
13. $\dfrac{\sqrt{2x-5}}{3}\leq\dfrac{3}{\sqrt{2x-5}}$ .... $]5/2,7]$
14. $\sqrt{4+|1-x^2|}<x+\sqrt{5}$ .... $]0,+\infty[$
15. $\dfrac{\sqrt{x}+1}{3-x-\sqrt{x}}<0$ .... $]7-\sqrt{13}/2,+\infty[$
16. $\sqrt{\dfrac{x^2-1}{x+2}}<\sqrt{x}$ .... $[1,+\infty[$
17. $\sin(x)>\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ .... $]\pi/3+2k\pi,2\pi/3+2k\pi[\ \ k\in\mathbb{Z}$
18. $2\cos^2(x)+\cos(x)>1$ .... $]-\pi/3+2k\pi,\pi/3+2k\pi[\ \ k\in\mathbb{Z}$
19. $\sin(2x)<1$ .... $x\neq\pi/4+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$
20. $\dfrac{1-2\sin(x)}{1-2\cos(x)}\leq 0$ .... $]-\pi/3+2k\pi,\pi/6+2k\pi]\cap]\pi/3+2k\pi,5\pi/6+2k\pi]\ \ k\in\mathbb{Z}$
21. $\dfrac{\sin(x)}{\sqrt{2\sin(x)-1}}\geq 1$ .... $]\pi/6+2k\pi,5\pi/6+2k\pi[\ \ k\in\mathbb{Z}$
22. $\dfrac{\tan^2(x)-\sqrt{3}\tan(x)}{\tan^2(x)-1}<1$ .... $]-\pi/4+k\pi,\pi/6+k\pi[\cup]\pi/4+k\pi,\pi/2+k\pi[\ \ k\in\mathbb{Z}$
23. $\dfrac{e^{2x}-e^x}{2e^{2x}-5e^x+2}>-1$ .... $]-\infty,\ln(1-\sqrt{3}/3)[\cup]-\ln 2,\ln(1+\sqrt{3}/3)[\cup(\ln 2,+\infty)$
24. $\dfrac{\ln(x-2)}{\sqrt{1-\ln(x-2)}}<2$ .... $\left]2,e^{2(\sqrt{2}-1)}+2\right[$
25. $\dfrac{(2/3)^{x-1}-1}{\sqrt{2}-\sqrt[3]{2^{x-1}}}<0$ .... $]1,5/2[$
26. $\dfrac{e^x+e^{\sqrt{x}}+2}{e^{2x}-e}\geq 0$ .... $]1/2,+\infty[$

27. $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-1} > 9$ .... $\emptyset$
28. $3^{x+2} \le 3^{\sqrt{x^2+x-2}}$ .... $]-\infty,-2]$
29. $x-1 < \sqrt{x+4}$ .... $[-4, {}^{(3+\sqrt{21})}/_2[$
30. $\log_5(x-7) > 2$ .... $]32;+\infty[)$
31. $\log_{2/3}(x^2-1) > 2$ .... $]{}^{-\sqrt{13}}/_3, -1[\,\cup\,]1, {}^{\sqrt{13}}/_3[$
32. $\log_{1/2}\sqrt{x} < \log_{1/2}|x-1|$ .... $]{}^{3-\sqrt{5}}/_2, {}^{(3+\sqrt{5})}/_2[\,\setminus\{1\}$
33. $3^{2-x} + 2\cdot 3^x < 19$ .... $]-{}^{\ln(2)}/_{\ln(3)}, 2[$
34. $(2^{\sqrt{x}} - 2^x)(\ln^2 x - 4) \le 0$ .... $]0, e^{-2}] \cup [1, e^2]$
35. $\log_2 \dfrac{x+\sqrt{x^2+9}}{2x} > 1$ .... $]0, {}^3/_{(2\sqrt{2})}[$
36. $\log_{1/4}\sqrt{6+x-x^2} < \log_{1/4}(x-1)$ .... $]1, {}^5/_2[$
37. $\ln(x) - \dfrac{2}{\ln(x)} + 1 \ge 0$ .... $[{}^1/_{e^2}, 1[\,\cup\,[e,+\infty[$
38. $\log_{1/2}(7^{2x} - 7^x + 1) > 0$ .... $]-\infty, 0[$
39. $\log_2\left(\dfrac{|x|-1}{2-|x+3|}\right) \le 2$ .... $]-{}^{21}/_5, -1[\,\cup\,]-1, 1[$
40. $\dfrac{1}{2}\ln(x) + \dfrac{1}{2}\ln(1-x) < \ln(2) + \dfrac{1}{2}\ln(5)$ .... $]0,1[$

Géométrie analytique

Exercice 2.26 (Droites)

1. Trouver l'équation de la droite passant par $(2,3)$ et parallèle à la droite passant par $(7,9)$ et $(3,-2)$.
2. Trouver l'équation de la droite passant par $(2,6)$ et $(3,10)$. Quelle est sa pente ? Trouver l'équation d'une droite qui lui est parallèle et qui passe par $(7,2)$. Quelles sont les intersections de cette droite avec les axes ?
3. Trouver l'équation de la droite passant par $(5,-3)$ et possède une pente de 4. Trouver l'équation de la droite qui est parallèle à la droite d'équation $5x+3y=9$ et qui passe par $(2,5)$. Trouver l'intersection entre les deux droites.

Correction

1. Les droites qui passent par $(2,3)$ ont équation $y = m(x-2)+3$ pour $m \in \mathbb{R}$. La droite passant par $(7,9)$ et $(3,-2)$ a pente $\frac{-2-9}{3-7} = \frac{11}{4}$. Par conséquent, la droite cherchée a équation $y = \frac{11}{4}(x-2)+3$.
2. La droite passant par $(2,6)$ et $(3,10)$ a équation $y = \frac{10-6}{3-2}(x-2)+6$. Sa pente est 4. L'équation de la droite qui lui est parallèle et qui passe par $(7,2)$ est $y = 4(x-7)+2$. Les intersections de cette droite avec les axes sont $(0,-26)$ et $(13/2,0)$.
3. L'équation de la droite passant par $(5,-3)$ et de pente de 4 est $y = 4(x-5)-3$. L'équation de la droite qui est parallèle à la droite d'équation $5x+3y=9$ et qui passe par $(2,5)$ est $y = -\frac{5}{3}(x-2)+5$. L'intersection entre les deux droites est $(94/17,-15/17)$.

Exercice 2.27 (Cercles)

1. Trouver l'équation du cercle de centre $(-2,-5)$ et rayon 6.
2. Établir pour quelles valeurs du paramètre $k \in \mathbb{R}$ l'équation $x^2+y^2+kx-2y+k^2-2=0$ représente un cercle. Ensuite, en calculer le centre.

Correction

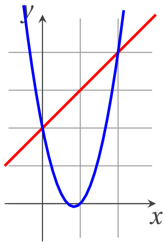
1. $(x+2)^2+(y+5)^2 = 6^2$
2. $0 = x^2+y^2+kx-2y+k^2-2 = (x+k/2)^2+(y-1)^2-3+\frac{3}{4}k^2$: il s'agit de l'équation du cercle de centre $(-k/2,1)$ et rayon $\sqrt{3-\frac{3}{4}k^2}$, d'où la condition $3-\frac{3}{4}k^2>0$, *i.e.* $k \in]-2,2[$.

Exercice 2.28 (Paraboles)

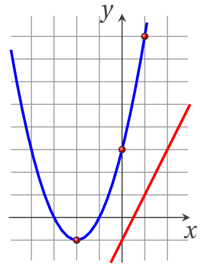
1. Calculer les intersections de la droite d'équation $y = x+2$ avec la parabole d'équation $y = 3x^2-5x+2$.
2. Calculer les intersections de la droite d'équation $y = 2x-1$ avec la parabole passant par les points $(0,3)$, $(1,8)$ et $(-2,-1)$.

Correction

1. Les intersections de la droite d'équation $y = x+2$ avec la parabole d'équation $y = 3x^2 - 5x + 2$ sont $(0,2)$ et $(2,4)$.



2. Aucune intersection entre la parabole d'équation $y = (x+1)(x+3) = x^2+4x+3$ et la droite d'équation $y = 2x-1$.



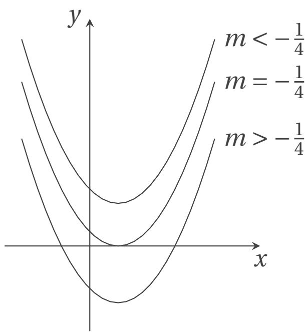
Exercice 2.29

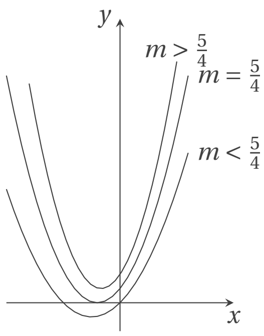
Calculer suivant la valeur du paramètre $m \in \mathbb{R}$ les solutions de l'équation $f(x) = 0$ pour :

1. $f(x) = x^2 - x - m$,
2. $f(x) = m^2x^2 + mx + m - 1$.

Correction

1. Si $m > -\frac{1}{4}$ il y a deux solutions : $x = \frac{1-\sqrt{1+4m}}{2}$ et $x = \frac{1+\sqrt{1+4m}}{2}$; si $m = -\frac{1}{4}$ il a une seule solution : $x = \frac{1}{2}$; si $m < \frac{1}{4}$ il n'y a pas de solutions.
2. Si $m < \frac{5}{4}$ et $m \neq 0$ il y a deux solutions : $x = \frac{-1-\sqrt{5-4m}}{2m}$ et $x = \frac{-1+\sqrt{5-4m}}{2m}$; si $m = \frac{5}{4}$ il a une seule solution : $x = -\frac{2}{5}$; si $m > \frac{5}{4}$ ou $m = 0$ il n'y a pas de solutions.





Exercice 2.30

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $e^x - 2 + e^{-x} = 0$,
2. $x^4 + 3x^2 = k$, où $k \in \mathbb{R}$ est un paramètre,
3. $\left(\frac{1}{5}\left(x^2 - 10x + 26\right)\right)^{x^2-6x+1} = 1$.

Correction

1. $e^x - 2 + e^{-x} = 0$ est équivalente à $X^2 - 2X + 1 = 0$ ayant posé $X = e^x > 0$. L'unique solution de l'équation $X^2 - 2X + 1 = 0$ est $X = 1$ d'où $x = 0$.
2. $x^4 + 3x^2 = k$ est équivalente à $X^2 + 3X - k = 0$ ayant posé $X = x^2 \geq 0$. Si $k < -\frac{9}{4}$ l'équation $X^2 + 3X - k = 0$ n'a pas de solutions, donc l'équation $x^4 + 3x^2 = k$ non plus ; si $k = -\frac{9}{4}$ l'équation $X^2 + 3X - k = 0$ a une unique solution $X = -\frac{3}{2} < 0$ donc l'équation $x^4 + 3x^2 = k$ n'a pas de solutions ; si $k > -\frac{9}{4}$ l'équation $X^2 + 3X - k = 0$ a deux solutions $X = -\frac{3-\sqrt{9+4k}}{2} < 0$ et $X = -\frac{3+\sqrt{9+4k}}{2}$, cette dernière est non négative si et seulement si $k \geq 0$ donc l'équation $x^4 + 3x^2 = k$ admet deux solutions $x = \pm\sqrt{-\frac{3+\sqrt{9+4k}}{2}}$ si et seulement si $k \geq 0$.
3. Par définition $(A(x))^{B(x)} = e^{B(x)\ln(A(x))}$ donc il faut imposer $A(x) > 0$. Comme $x^2 - 10x + 26 \geq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (il s'agit d'une parabole qui a son minimum en $x = 5$), le terme de gauche est bien défini pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   De plus, pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a > 0$ on a
   $$a^b = 1 \qquad \iff \qquad a = 1 \text{ ou } b = 0.$$
   L'équation admet donc 4 solutions :

- ⋆ $x = 3$ et $x = 7$ qui sont solutions de l'équation
$$\frac{1}{5}\left(x^2 - 10x + 26\right) = 1$$
- ⋆ $x = 3 - 2\sqrt{2}$ et $x = 3 + 2\sqrt{2}$ qui sont solutions de l'équation
$$x^2 - 10x + 26 = 0.$$

Exercice 2.31 (Le crible de Matiyasevitch)

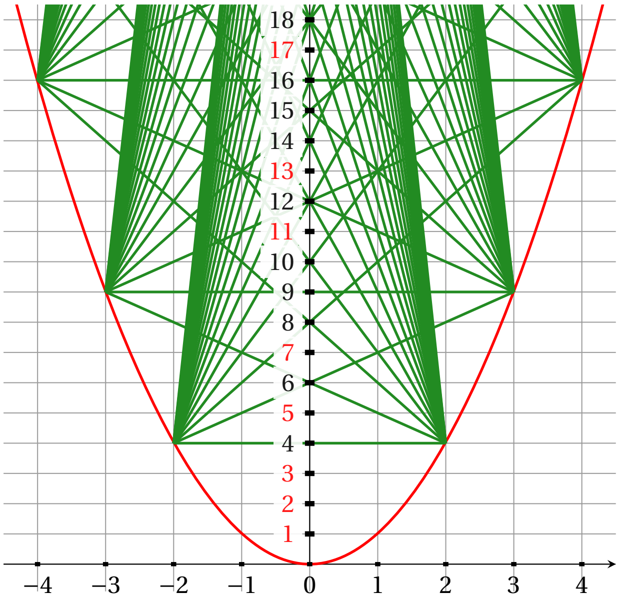
Traçons la parabole d'équation $y = x^2$. Sur ce graphe, on va considérer deux familles de points :

- ⋆ pour tout $i \ge 2$, i entier, on note A_i le point de coordonnées $(-i, i^2)$,
- ⋆ pour tout $j \ge 2$, j entier, on note B_i le point de coordonnées (j, j^2).

Relions tous les points A_i à tous les points B_j.

1. Montrer que tous les segments $[A_iB_j]$ croisent l'axe des ordonnées en un point de coordonnées $(0, n)$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Montrer qu'un nombre situé sur l'axe des ordonnées n'est pas premier si, et seulement si, un des segments $[A_iB_j]$ traverse l'axe des ordonnées en ce point.
3. Que représente-t-il le nombre de segments qui passent par les points de coordonnées $(0, n)$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et n non premier ?

Rappel : un nombre $n \in \mathbb{N}^*$ est premier s'il n'est divisible que par 1 et lui même.



Correction

1. Le segment $[A_iB_j]$ appartient à la droite d'équation
$$y = \frac{j^2 - i^2}{j + i}(x - j) + j^2 = (j - i)x + ij$$
et il croise l'axe des ordonnées en le point de coordonnées $(0, ij)$. Comme $i, j \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, le produit ij appartient à $\mathbb{N}$.
2. Un nombre $n \in \mathbb{N}^*$ situé sur l'axe des ordonnées n'est pas premier si, et seulement si, il existe un couple $(i, j) \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ tel que $n = ij$ donc si, et seulement si, il existe un couple $(i, j) \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ tel que le segment $[A_iB_j]$ traverse l'axe des ordonnées en ce point.
3. Le nombre de segments qui passent par les points de coordonnées $(0, n)$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et n non premier représente le double du nombre de diviseurs propres de n si n n'est pas un carré parfait, sinon c'est le nombre de diviseurs propres de n.

Systèmes linéaires

Exercice 2.32

Résoudre les systèmes linéaires suivantes par la méthode de Gauss

$$(1)\ \begin{cases} 4x - 3y = 84 \\ 5x + 7y = 19 \end{cases} \qquad (2)\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 = -6, \\ x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 3. \end{cases} \qquad (3)\ \begin{cases} -x_1 + x_2 + 3x_3 = 12, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -8, \\ 4x_1 + x_2 - 4x_3 = 15. \end{cases}$$

$$(4)\ \begin{cases} -2u - 4v + 3w = -1 \\ 2v - w = 1 \\ u + v - 3w = -6 \end{cases} \qquad (5)\ \begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases} \qquad (6)\ \begin{cases} -2x - y + 4t = 2 \\ 2x + 3y + 3z + 2t = 14 \\ x + 2y + z + t = 7 \\ -x - z + t = -1 \end{cases}$$

Correction

Système (1)

$$\begin{cases} 4x-3y=84\\ 5x+7y=19\end{cases}\xrightarrow{L_2\leftarrow L_2-\frac{5}{4}L_1}\begin{cases} 4x-3y=84\\ \frac{43}{4}y=-86\end{cases}$$

donc $y=-8$ et $x=15$.

Système (2)

$$\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=2,\\ x_1-2x_2-3x_3=-6,\\ x_1+4x_2+4x_3=3.\end{cases}\xrightarrow[L_3\leftarrow L_3-L_1]{L_2\leftarrow L_2-L_1}\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=2,\\ -4x_2-2x_3=-8,\\ 2x_2+5x_3=1.\end{cases}\xrightarrow{L_3\leftarrow L_3+L_2/2}\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=2,\\ -4x_2-2x_3=-8,\\ 4x_3=-3.\end{cases}$$

donc $x_3=-\frac{3}{4}$, $x_2=\frac{19}{8}$ et $x_1=-\frac{7}{2}$.

Système (3)

$$\begin{cases} -x_1+x_2+3x_3=12\\ 2x_1-x_2+2x_3=-8\\ 4x_1+x_2-4x_3=15\end{cases}\xrightarrow[L_3\leftarrow L_3+4L_1]{L_2\leftarrow L_2+2L_1}\begin{cases} -x_1+x_2+3x_3=12\\ x_2+8x_3=16\\ 5x_2+8x_3=63\end{cases}\xrightarrow{L_3\leftarrow L_3-5L_2}\begin{cases} -x_1+x_2+3x_3=12\\ x_2+8x_3=16\\ -32x_3=-17\end{cases}$$

donc $x_3=\frac{17}{32}$, $x_2=\frac{47}{4}$ et $x_1=\frac{43}{32}$.

Système (4)

$$\begin{cases} -2u-4v+3w=-1\\ 2v-w=1\\ u+v-3w=-6\end{cases}\xrightarrow{L_3\leftarrow L_3+L_1/2}\begin{cases} -2u-4v+3w=-1\\ 2v-w=1\\ -v-\frac{3}{2}w=-{}^{13}/_{2}\end{cases}\xrightarrow{L_3\leftarrow L_3+L_2/2}\begin{cases} -2u-4v+3w=-1\\ 2v-w=1\\ -2w=-6\end{cases}$$

donc $w=3$, $v=2$ et $u=1$.

Système (5)

$$\begin{cases} -2x+y+z=0\\ x-2y+z=0\\ x+y-2z=0\end{cases}\xrightarrow[L_3\leftarrow L_3+\frac{L_1}{2}]{L_2\leftarrow L_2+\frac{L_1}{2}}\begin{cases} -2x+y+z=0\\ -\frac{3}{2}y+\frac{3}{2}z=0\\ \frac{3}{2}y-\frac{3}{2}z=0\end{cases}\xrightarrow{L_3\leftarrow L_3+L_2}\begin{cases} -2x+y+z=0\\ -\frac{3}{2}y+\frac{3}{2}z=0\\ 0z=0\end{cases}$$

donc $z=\kappa\in\mathbb{R}$, $y=z$ et $x=z$.

Système (6)

$$\begin{cases} -2x-y+4t=2\\ 2x+3y+3z+2t=14\\ x+2y+z+t=7\\ -x-z+t=-1\end{cases}\xrightarrow[\substack{L_3\leftarrow L_3+\frac{L_1}{2}\\ L_4\leftarrow L_4-\frac{L_1}{2}}]{L_2\leftarrow L_2+L_1}\begin{cases} -2x-y+4t=2\\ 2y+3z+6t=16\\ \frac{3}{2}y+z+3t=8\\ \frac{1}{2}y-z-t=-2\end{cases}$$

$$\xrightarrow[L_4\leftarrow L_2-\frac{L_2}{4}]{L_3\leftarrow L_3-\frac{3}{4}L_2}\begin{cases} -2x-y+4t=2\\ 2y+3z+6t=16\\ -\frac{5}{4}z-\frac{3}{2}t=-4\\ -\frac{7}{4}z-\frac{5}{2}t=-6\end{cases}\xrightarrow{L_4\leftarrow L_4-\frac{7}{5}L_3}\begin{cases} -2x-y+4t=2\\ 2y+3z+6t=16\\ -\frac{5}{4}z-\frac{3}{2}t=-4\\ -\frac{2}{5}t=-\frac{2}{5}\end{cases}$$

donc $t=1$, $z=2$, $y=2$ et $x=0$.

Exercice 2.33

Trouver toutes les solutions des systèmes linéaires homogènes suivantes

$$(1)\ \begin{cases} -3x_1+x_2+2x_3=0,\\ -2x_1+2x_3=0,\\ -11x_1+6x_2+5x_3=0.\end{cases}\qquad (2)\ \begin{cases} x_1+x_2+3x_3+x_4=0,\\ x_1+3x_2+2x_3+4x_4=0,\\ 2x_1+x_3-x_4=0.\end{cases}\qquad (3)\ \begin{cases} 2x_1-x_2-3x_3=0,\\ -x_1+2x_3=0,\\ 2x_1-3x_2-x_3=0.\end{cases}$$

Correction

Système (1)

$$\begin{cases}-3x_1+x_2+2x_3=0,\\-2x_1+2x_3=0,\\-11x_1+6x_2+5x_3=0.\end{cases}\xrightarrow[L_3\leftarrow L_3-\frac{11}{3}L_1]{L_2\leftarrow L_2-\frac{2}{3}L_1}\begin{cases}-3x_1+x_2+2x_3=0,\\-{}^2/_3x_2+{}^2/_3x_3=0,\\{}^7/_3x_2-{}^7/_3x_3=0,\end{cases}\xrightarrow{L_3\leftarrow L_3+\frac{7}{2}L_2}\begin{cases}-3x_1+x_2+2x_3=0,\\-{}^2/_3x_2+{}^2/_3x_3=0,\\0=0,\end{cases}$$

Le système admet une infinité de solutions de la forme (κ,κ,κ) avec $\kappa\in\mathbb{R}$.

Système (2)

$$\begin{cases}x_1+x_2+3x_3+x_4=0,\\x_1+3x_2+2x_3+4x_4=0,\\2x_1+x_3-x_4=0.\end{cases}\xrightarrow[L_3\leftarrow L_3-2L_1]{L_2\leftarrow L_2-L_1}\begin{cases}x_1+x_2+3x_3=1,\\2x_2-x_3=3,\\-2x_2-5x_3=-3,\end{cases}\xrightarrow{L_3\leftarrow L_3+L_2}\begin{cases}x_1+x_2+3x_3=1,\\2x_2-x_3=3,\\-6x_3=0,\end{cases}$$

Le système admet une infinité de solutions de la forme $(\frac{1}{2}\kappa,-\frac{3}{2}\kappa,0,\kappa)$ avec $\kappa\in\mathbb{R}$.

Système (3)

$$\begin{cases}2x_1-x_2-3x_3=0,\\-x_1+2x_3=0,\\2x_1-3x_2-x_3=0.\end{cases}\xrightarrow[L_3\leftarrow L_3-L_1]{L_2\leftarrow L_2+\frac{L_1}{2}}\begin{cases}2x_1-x_2-3x_3=0,\\-{}^1/_2x_2+{}^1/_2x_3=0,\\-2x_2+2x_3=0,\end{cases}\xrightarrow{L_3\leftarrow L_3-4L_2}\begin{cases}2x_1-x_2-3x_3=0,\\-{}^1/_2x_2+{}^1/_2x_3=0,\\0=0,\end{cases}$$

Le système admet une infinité de solutions de la forme $(2\kappa,\kappa,\kappa)$, $\kappa\in\mathbb{R}$.

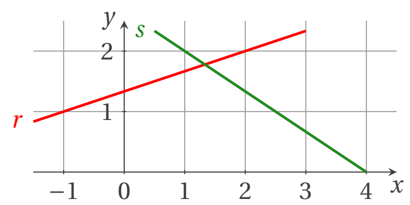
Partage de secrets *Comment envoyer un message secret avec plusieurs espions sans pour autant que ceux-ci ne connaissent le contenu du message envoyé ?*

Typiquement, un message à envoyer est un nombre entier (car, par codage, on peut remplacer un texte quelconque par un nombre). Imaginons donc que l'on désire envoyer le nombre n. Considérons un polynôme de degré k, par exemple à coefficients entiers, $P(X)=a_kX^k+\dots+a_1X+n$ dont le terme indépendant vaut exactement n. En particulier, on a $P(0)=n$. Un corollaire du théorème fondamental de l'algèbre stipule que si deux polynômes de degré k sont égaux en $k+1$ points, alors ils sont égaux. Autrement dit, le polynôme P est complétement caractérisé par les valeurs qu'il prend par exemple aux entiers $1,2,\dots,k+1$. On engage alors $k+1$ espions (voire un peu plus, si certains étaient capturés par les «ennemis»). On donne au i-ème espion le nombre $P(i)$. Les espions se dispersent (par exemple, pour passer les lignes ennemies). Une fois que $k+1$ espions sont arrivés à destination, il est aisé de reconstituer le polynôme (on a *un système de* $k+1$ *équations linéaires* pour retrouver les $k+1$ coefficients de P) et ainsi retrouver la valeur secrète n. Si un espion est capturé et qu'il parle, les ennemis auront à leur disposition un des $P(i)$, cela ne leur permet nullement de retrouver n. De même, si un espion étaient en fait un agent double, connaître $P(i)$ seul ne sert à rien.

Source : `http://michelrigo.wordpress.com/2010/01/30/partage-de-secrets-et-tfa/`

Exercice 2.34

Trouver l'équation des droites r et s représentées ci-dessous et calculer les coordonnées du point d'intersection :



Correction

$$r: y=\frac{1}{3}x+\frac{4}{3}, \qquad s: y=-\frac{2}{3}x+\frac{8}{3}.$$

Le point d'intersection a coordonnées (x,y) qui vérifient

$$\begin{cases}y=\frac{1}{3}x+\frac{4}{3},\\y=-\frac{2}{3}x+\frac{8}{3},\end{cases}\iff\begin{cases}x=\frac{4}{3},\\y=\frac{16}{9}.\end{cases}$$

Exercice 2.35 (V. GUIRARDEL)

Vous projetez de passer un concours de recrutement l'an prochain. Vous avez sous les yeux le tableau de notes suivant :

CANDIDAT	Mathématique	Anglais	Informatique	Moyenne
QUI	7	12	6	8
QUO	11	6	10	9
QUA	11	16	14	14

Retrouver les coefficients de chaque épreuve. La solution est-elle unique ?

Correction

Il s'agit de trouver les trois coefficients $m, a, i \in [0;1]$ tels que

$$\begin{cases} 7m+12a+6i=8,\\ 11m+6a+10i=9,\\ 11m+16a+14i=14.\end{cases}$$

Utilisons la méthode de GAUSS :

$$\begin{cases} 7m+12a+6i=8,\\ 11m+6a+10i=9,\\ 11m+16a+14i=14,\end{cases} \xrightarrow[L_3\leftarrow L_3-\frac{11}{7}L_1]{L_2\leftarrow L_2-\frac{11}{7}L_1} \begin{cases} 7m+12a+6i=8,\\ -\frac{90}{7}a+\frac{4}{7}i=-\frac{25}{7},\\ -\frac{20}{7}a+\frac{32}{7}i=\frac{10}{7},\end{cases} \xrightarrow{L_3\leftarrow L_3-\frac{2}{9}L_2} \begin{cases} 7m+12a+6i=8,\\ -\frac{90}{7}a+\frac{4}{7}i=-\frac{25}{7},\\ \frac{40}{9}i=\frac{20}{9},\end{cases}$$

qui admet l'unique solution $(0.2, 0.3, 0.5)$.

Une autre interprétation est la suivante : il s'agit de trouver les trois coefficients $m, a, i \in [0;1]$ tels que

$$\begin{cases} 7m+12a+6i=8(m+a+i)\\ 11m+6a+10i=9(m+a+i),\\ 11m+16a+14i=14(m+a+i).\end{cases}$$

Utilisons la méthode de GAUSS :

$$\begin{cases} -m+4a-2i=0,\\ 2m-3a+i=0,\\ -3m+2a=0,\end{cases} \xrightarrow[L_3\leftarrow L_3-\frac{11}{7}L_1]{L_2\leftarrow L_2-\frac{11}{7}L_1} \begin{cases} -m+4a-2i=0,\\ 5a-3i=0,\\ -10a+6i=0,\end{cases} \xrightarrow{L_3\leftarrow L_3-\frac{2}{9}L_2} \begin{cases} -m+4a-2i=0,\\ 5a-3i=0,\\ 0=0,\end{cases}$$

qui admet une infinité de solutions de la forme $(2\kappa, 3\kappa, 5\kappa)$ avec $\kappa \in [0;1/5]$.

Exercice 2.36

Soit le système linéaire

$$(S) \quad \begin{cases} x-\alpha y=1,\\ \alpha x - y = 1.\end{cases}$$

Déterminer les valeurs de α de telle sorte que ce système possède :

1. une infinité de solutions ;
2. aucune solution ;
3. une solution unique.

Correction

$$\begin{cases} x-\alpha y=1\\ \alpha x - y=1\end{cases} \xrightarrow{L_2\leftarrow L_2-\alpha L_1} \begin{cases} x-\alpha y=1\\ (-1+\alpha^2)y=1-\alpha\end{cases}$$

Comme $-1+\alpha^2=(\alpha-1)(\alpha+1)$ on conclut que

1. si $\alpha=1$ (*i.e.* la dernière équation correspond à $0=0$) alors (S) possède une infinité de solutions,
2. si $\alpha=-1$ (*i.e.* la dernière équation correspond à $0=2$) alors (S) ne possède aucune solution,

3. si $\alpha \notin \{-1;1\}$ alors (S) possède une solution unique $x = \frac{1}{\alpha+1}$ et $y = -\frac{1}{\alpha+1}$.

Exercice 2.37

Soit le système linéaire

$$(S)\quad \begin{cases} x+y-z=1,\\ 2x+3y+\beta z=3,\\ x+\beta y+3z=-3. \end{cases}$$

Déterminer les valeurs de β de telle sorte que ce système possède :

1. une infinité de solutions ;
2. aucune solution ;
3. une solution unique.

Correction

$$\begin{cases} x_1 +x_2 -x_3 =1\\ 2x_1+3x_2+\beta x_3 =3\\ x_1+\beta x_2+3x_3=-3 \end{cases} \xrightarrow[L_3\leftarrow L_3-L_1]{L_2\leftarrow L_2-2L_1} \begin{cases} x_1 +x_2 -x_3 =1\\ x_2+(\beta+2)x_3 =1\\ (\beta-1)x_2 +4x_3=-4 \end{cases} \xrightarrow{L_3\leftarrow L_3+(1-\beta)L_2} \begin{cases} x_1+x_2 -x_3 =1\\ x_2 +(\beta+2)x_3 =1\\ (6-\beta-\beta^2)x_3=-(3+\beta) \end{cases}$$

Comme $6-\beta-\beta^2 = (2-\beta)(3+\beta)$ on conclut que

1. si $\beta=-3$ (*i.e.* la dernière équation correspond à $0z=0$) alors (S) possède une infinité de solutions,
2. si $\beta=2$ (*i.e.* la dernière équation correspond à $0z=-5$) alors (S) ne possède aucune solution,
3. si $\beta \notin \{2;-3\}$ alors (S) possède une solution unique.

Exercice 2.38

En utilisant la méthode de Gauss, résoudre le système linéaire en discutant suivant la valeur du paramètre $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x+2y+3z=2,\\ x-y+2z=7,\\ 3x+az=10. \end{cases}$$

Correction

$$\begin{cases} x+2y+3z=2\\ x-y+2z=7\\ 3x+az=10 \end{cases} \xrightarrow[L_3\leftarrow L_3-3L_1]{L_2\leftarrow L_2-L_1} \begin{cases} x+2y+3z=2\\ -3y-z=5\\ -6y+(a-9)z=4 \end{cases} \xrightarrow{L_3\leftarrow L_3-2L_2} \begin{cases} x+2y+3z=2\\ -3y-z=5\\ (a-7)z=-6 \end{cases}$$

On a ainsi transformé le système linéaire initial dans le système linéaire triangulaire supérieur équivalent

$$\begin{cases} x+2y+3z=2,\\ -3y-z=5,\\ (a-7)z=-6. \end{cases}$$

Par conséquent,

- ⋆ si $a\neq 7$, $z=\dfrac{-6}{a-7}$, $y=\dfrac{5+z}{-3}=\dfrac{5a-41}{-3(a-7)}$ et $x=2-2y-3z=\dfrac{2(8a-35)}{3(a-7)}$ est l'unique solution du système linéaire ;
- ⋆ si $a=7$ il n'y a pas de solutions du système linéaire.

Exercice 2.39 (Résolution de systèmes non carrées)

Résoudre le système

$$(S)\quad \begin{cases} x+2y+z=-1,\\ 2x+y-z=1,\\ -x+y+2z=-2,\\ x+y+z=4, \end{cases}$$

d'inconnue $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.

Correction
(S) étant un système de 4 équations à 3 inconnues, on considère (S') le sous-système carré d'ordre 3 qu'on peut résoudre par la méthode du pivot de Gauss

$$(S')\quad \begin{cases} x+2y+z=-1,\\ 2x+y-z=1,\\ -x+y+2z=-2,\end{cases} \xrightarrow[L_3\leftarrow L_3+L_1]{L_2\leftarrow L_2-2L_1} \begin{cases} x+2y+z=-1,\\ -3y-3z=3,\\ 3y+3z=-3,\end{cases} \xrightarrow{L_3\leftarrow L_3+L_2} \begin{cases} x+2y+z=-1,\\ -3y-3z=3,\\ 0=0,\end{cases}$$

qui admet une infinité de solutions de la forme $(1+\kappa,-1-\kappa,\kappa)$ pour $\kappa\in\mathbb{R}$. Cherchons parmi ces solutions celles qui vérifient l'équation de (S) qui n'apparaît pas dans (S') : pour $(x,y,z)=(1+\kappa,-1-\kappa,\kappa)$ on a $x+y+z=1+\kappa-1-\kappa+\kappa=\kappa$ donc $x+y+z=4$ si et seulement si $\kappa=4$ ainsi (S) admet l'unique solution $(5,-5,4)$.

Exercice 2.40 (Résolution de systèmes non carrées)
Résoudre le système

$$(S)\quad \begin{cases} x+y+z=3,\\ x+2y+3z=6,\\ -x-y+2z=0,\\ 3x+2y-4z=1,\end{cases}$$

d'inconnue $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.

Correction
(S) étant un système de 4 équations à 3 inconnues, on considère (S') le sous-système carré d'ordre 3 qu'on peut résoudre par la méthode du pivot de Gauss

$$(S')\quad \begin{cases} x+y+z=3,\\ x+2y+3z=6,\\ -x-y+2z=0,\end{cases} \xrightarrow[L_3\leftarrow L_3+L_1]{L_2\leftarrow L_2-L_1} \begin{cases} x+y+z=3,\\ y+2z=3,\\ 3z=3,\end{cases}$$

qui admet l'unique solution $(1,1,1)$. On étudie alors si elle est aussi solution de l'équation de (S) qui n'apparaît pas dans (S') : pour $(x,y,z)=(1,1,1)$ on a $3x+2y-4z=1$ donc le triplet $(1,1,1)$ est solution de (S) et c'est l'unique.

Exercice 2.41
Déterminer si le système suivant a une solution non nulle. Dans le cas affirmatif trouver la(les) solution(s) :

$$(S)\quad \begin{cases} x-2y+2z=0,\\ 2x+y-2z=0,\\ 3x+4y-6z=0,\\ 3x-11y+12z=0.\end{cases}$$

Correction
(S) étant un système de 4 équations à 3 inconnues, on considère le sous-système (S') carré d'ordre 3 suivant qu'on peut résoudre par la méthode du pivot de Gauss

$$(S')\quad \begin{cases} x-2y+2z=0,\\ 2x+y-2z=0,\\ 3x+4y-6z=0,\end{cases} \xrightarrow[L_3\leftarrow L_3-3L_1]{L_2\leftarrow L_2-2L_1} \begin{cases} x-2y+2z=0,\\ 5y-6z=0,\\ 10y-12z=0,\end{cases} \xrightarrow{L_3\leftarrow L_3-2L_2} \begin{cases} x-2y+2z=0,\\ 5y-6z=0,\\ 0=0,\end{cases}$$

qui admet une infinité de solutions de la forme $(2\kappa,6\kappa,5\kappa)$ pour $\kappa\in\mathbb{R}$. Cherchons parmi ces solutions celles qui vérifient l'équation de (S) qui n'apparaît pas dans (S') : pour $(x,y,z)=(2\kappa,6\kappa,5\kappa)$ on a $3x-11y+12z=6\kappa-66\kappa+60\kappa=0$ donc $3x-11y+12z=0$ pour tout $\kappa\in\mathbb{R}$ ainsi (S) admet une infinité de solutions de la forme $(2\kappa,6\kappa,5\kappa)$ pour $\kappa\in\mathbb{R}$.

Exercice 2.42 (Résolution de systèmes non carrées)
Résoudre le système

$$(S)\quad \begin{cases} -2x+y+z=0,\\ x-2y+z=0,\end{cases}$$

d'inconnue $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.

Correction
(S) est équivalent au système

$$\begin{cases}-2x+y+z=0,\\ -3y+3z=0,\end{cases}$$

qui admet une infinité de solutions de la forme (κ,κ,κ) pour $\kappa\in\mathbb{R}$.

Exercice 2.43 (Résolution de systèmes non carrées avec paramètre)
Soit le système linéaire

$$(S)\qquad\begin{cases}x_1+x_2-2x_3+4x_4=6,\\ -3x_1-3x_2+6x_3-12x_4=b.\end{cases}$$

1. Pour quelle valeur de b le système est-il possible ?
2. Donner à b la valeur trouvée au point précédent et calculer la solution complète du système.

Correction
(S) est équivalent au système

$$\begin{cases}x_1+x_2-2x_3+4x_4=6,\\ 0=b+18.\end{cases}$$

1. (S) est possible si et seulement si $b=-18$.
2. Si $b=-18$, (S) admet une infinité de solutions dépendant de trois paramètres. Elles sont de la forme $(x_1,x_2,x_3,x_4)=(6-a+2b-4c,a,b,c)$ avec $a,b,c\in\mathbb{R}$.

Problèmes

Exercice 2.44
Un parpaing pèse un kilo plus un demi parpaing. Combien pèse un parpaing ?

Correction
Soit p le poids (en kilo) d'un parpaing. On a alors $p=1+\frac{p}{2}$, ce qui donne $p=2$.
Si on ne veut pas utiliser les équations, considérons une balance à deux plateaux ; si on pose un parpaing sur le plateau de gauche et sur le plateau de droite un kilo et la moitié d'un parpaing, on est à l'équilibre. Maintenant, si on enlève des deux plateaux la moitié d'un parpaing, on est toujours à l'équilibre : sur le plateau de gauche il reste la moitié d'un parpaing et sur ceux de droite 1 kilo. On conclut que la moitié d'un parpaing pèse 1 kilo et donc qu'un parpaing pèse 2 kilo.

Exercice 2.45
Une bouteille et son bouchon coûtent 11 €. Sachant que la bouteille coûte 10 € de plus que le bouchon, combien coûte la bouteille ?

Correction
10.50 € et le bouchon coûte 0.50 €.

Exercice 2.46
Un grand aquarium contient 200 poissons. De ceux-ci, 99% sont des poissons rouges. On voudrait que ce pourcentage baisse à 98%. On décide donc de retirer des poissons rouges. Combien de poissons rouges doit-on enlever de l'aquarium ?

Correction
Si les poissons rouges représentent 99% de la population de l'aquarium, cela signifie que "les autres" correspondent, eux, à 1% : il y a donc deux de ces "autres" poissons. Si on désire que les poissons rouges représentent maintenant 98% de la population, "les autres", toujours au nombre de deux, doivent maintenant représenter 2% de la population. Mais pour ce faire, on doit avoir un total de 100 poissons et il faut donc retirer de l'aquarium, pour que la représentation des poissons rouges passe de 99% à 98%, un total de 100 poissons rouges !

Exercice 2.47 (Paul Halmos, “*Problème pour mathématiciens, petits et grands*”)

On suppose que les concombres sont composés de a% d'eau. On laisse reposer M kilogrammes de concombre pendant une nuit et le lendemain les concombres ne contient plus que b% d'eau avec $0 < b < a < 100$. Quel est le poids des concombres restantes ?
Considérer par exemple $M = 500$, $a = 99$ et $b = 98$.

Correction
Avant la nuit, les concombres étaient composés de $M \times (100\% - a\%)$ kilogrammes de matière solide. La matière solide n'a pas changée pendant la nuit et le lendemain elle constitue le $(100\% - b\%)$ du poids restant, *i.e.*

$$\frac{M \times (100\% - a\%)\text{kg}}{(100\% - b\%)} = \frac{x\text{kg}}{100\%} \qquad \text{ainsi} \quad x = \frac{M(100-a)}{100-b}\text{kg}.$$

Avec $M = 500$, $a = 99$ et $b = 98$ on trouve $x = 250\,\text{kg}$.

Exercice 2.48

Un comité de 70 personnes élit son président. Deux candidats se sont présentés. Si le premier a obtenu 60% de votes et le deuxième deux fois moins, combien d'électeurs se sont abstenus ?

Correction
Le premier candidat a obtenu 60% de votes, le deuxième 30%, ainsi $100\% - 60\% - 30\% = 10\%$ d'électeurs se sont abstenus, c'est-à-dire $71 \times 10\% = 7$ personnes.

Exercice 2.49

Un commercial touche une commission de 15% sur les ventes qu'il réalise au cours d'un mois. Si pour le mois d'avril le commercial a touché 1400 € de commission, quel est le montant des ventes qu'il a perçu en avril ?

Correction

$$\frac{1400\,€}{15\%} = 9333.33\,€$$

Exercice 2.50

D'une manière générale, le groupe sanguin AB est le plus rare et représente 4% de la population humaine. Le rhésus négatif, lui aussi, est assez rare (15% de la population uniquement). Si la population totale de la planète est de 6 milliards de personnes, combien sont de type AB- ?

Correction
$(6 \times 10^9) \times 4\% \times 15\% = 36 \times 10^6$

Exercice 2.51

Le prix du blé dans un certain pays est indexé sur l'inflation. Au 1er janvier 1990, le blé coûtait 140 dollars la tonne. L'inflation de 1990 était de 3%. Par contre, en 1991, le pays a connu une déflation de 1.5%. Combien coûtait une tonne de blé au 1er janvier 1992 ?

Correction
$140 \times (1 + 3\%) \times (1 - 1.5\%) = 142,04\$$

Exercice 2.52

La population de l'Allemagne diminue chaque année de 0.3%. Si à la fin de l'année 2007 la population était de 82 200 000, quelle était la population de l'Allemagne à la fin de l'année 2009 ?

Correction
$82\,200\,000 \times (1 - 0.3\%)^2 = 81\,707\,540$

Exercice 2.53

Pendant la période des soldes, Éva trouve un pull marqué 59 € sur un stand avec une pancarte «−40%». Elle aime beaucoup le pull, mais il y a une petite tâche qu'Éva compte éliminer elle-même. La vendeuse lui propose une réduction supplémentaire de 10% sur le prix de caisse. Combien Éva payera-t-elle pour le pull ?

Correction
Les deux réductions ne sont pas à additionner, car la deuxième ne s'applique qu'au prix «après la première réduction» (prix de caisse) : $59\,€ \times (1-40\%) \times (1-10\%) = 31.86\,€$.

Exercice 2.54

Un certain dessert coûte 12 € TTC. Avec la baisse de TVA sur la restauration, de 19.6% à 5.5%, quel sera le nouveau prix de ce dessert ?

Correction

$$12\,€ \times \frac{1+5.5\%}{1+19.6\%} = 10.58\,€$$

Exercice 2.55

Antoine place 1000 € sur son Livret A. Quel montant recevra-t-il au bout de deux ans si le taux en vigueur pour le Livret A est maintenu au niveau de 1.2% ?

Correction
Notons bien qu'il s'agit des intérêts composés sur deux ans : $1000\,€ \times (1+1.2\%)^2 = 1024.14\,€$. Notons que dans le cas des intérêts simples (non composés), le montant final du placement aurait été 1024 € (les intérêts égaux à $1000\,€ \times 1.2\% = 12\,€$ gagnés au cours de chaque année).

Exercice 2.56

Un capital a été placé dans une banque à un taux annuel de 4.5%. Les intérêts accumulés à la fin de l'année s'élèveront à 126 €. Quel est le montant initialement placé ?

Correction

$$\frac{126\,€}{4.5\%} = 2800\,€$$

Exercice 2.57

Un artisan installe des fenêtres dans les habitations. Si un particulier achète uniquement une fenêtre sans installation, le taux de TVA applicable est de 19.6%. Si un particulier achète une fenêtre et commande son installation auprès du même artisan, le taux de TVA applicable au produit et au service est de 5.5%. Si le prix HT d'une fenêtre est 600 € et le prix HT de l'installation est de 150 €, quelle est la différence de prix des deux options pour le particulier ?

Correction
Le prix de l'option 1 (fenêtre seule) : $600\,€ \times (1+19.6\%) = 717.60\,€$. Le prix de l'option 2 (fenêtre et installation) : $(600\,€ + 150\,€) \times (1+5.5\%) = 791.25\,€$. La différence est donc $791.25\,€ - 717.60\,€ = 73.65\,€$.

Exercice 2.58

Sur 1.4 million d'iPhone vendu depuis juin, environ 250 000 ont été débloqué grâce à des logiciels pirates. Quel pourcentage représente cela ? (Arrondir à 1% près).

Correction

$$\frac{250\,000}{1\,400\,000} = \frac{25}{140} = \frac{5}{28} \approx 0.18 = 18\%$$

Exercice 2.59
Le service de restauration dans un avion propose un plat au choix : soit de l'agneau, soit du poulet. 42% des passagers ont commandé l'agneau, 36% ont commandé le poulet, et les autres 55 passagers n'ont pas pris de plat chaud. Combien y a-t-il de passagers à bord de l'avion ?

Correction

$$55 = \frac{100-42-36}{100}x \quad \text{ainsi} \quad x = 250$$

Exercice 2.60
Un couple achète un panneau photovoltaïque au prix de 1674.40 € TTC. Le gouvernement octroie un crédit d'impôt applicable à ce type d'installation à hauteur de 40% du prix HT. Si le taux de TVA en vigueur applicable aux panneaux photovoltaïques est de 19.6%, quel est le montant du crédit d'impôt dont bénéficiera le couple ?

Correction
Le prix HT d'un panneau photovoltaïque est de 1674.40 € × (1 − 19.6%) = 1346.22 €. Le crédit d'impôt égale 40% de cette somme : 1346.22 € × 40% = 560 €, autrement dit le panneau photovoltaïque leur revient à 1674.40 € − 560 € = 1114.40 €.

Exercice 2.61
Pendant les soldes un magasin donne une remise de 30%. Le prix non-soldé d'une veste est de 70 € ; quel est son prix soldé ? Le prix soldé d'une chemise est de 21 € ; quel est son prix non-soldé ?

Correction
On paye 70% du prix non-soldé :

$$\text{prix soldé} = 0.7 \times \text{prix non-soldé}.$$

* Veste : pris soldé=0.7×70 € = 49 €
* Chemise : prix non-soldé=21 €/0.7 = 30 €

Exercice 2.62
64% des élèves d'une classe sont des garçons et 25% parmi ces garçons apprennent l'allemand. Quel est le pourcentage des garçons qui font de l'allemand dans la classe ?

Correction
Ce sont 16% car $25\% \times 64\% = 0.25 \times 0.64 = 0.16$.

Exercice 2.63
Un prix vient d'augmenter de 25%. De quel pourcentage faut-il le baisser pour revenir au prix initial ?

Correction
Augmenter le prix de 25% revient à le multiplier par 1.25 ou encore par 5/4. Donc, pour revenir au prix initial on le multiplie par 4/5 ou encore par 0.8 ; autrement dit, on fait une baisse de 20%.

Exercice 2.64
Un prix subit deux augmentations successives, d'abord de 20%, puis de 50%. Quel est le pourcentage de l'augmentation globale ? L'augmentation globale serait-elle la même si le prix avait d'abord augmenté de 50%, puis de 20% ?

Correction
$(1+20\%) \times (1+50\%) = 1.2 \times 1.5 = 1.8 = 1+80\%$: l'augmentation globale est de 80%, indépendamment de l'ordre dans laquelle les deux augmentations ont été faites.

Exercice 2.65
Un prix subit les variations annuelles suivantes : +25%, −5%, +10%, −10%, −8%, +20%. À combien s'élève la variation annuelle moyenne ?

Correction
$(1+25\%)\times(1-5\%)\times(1+10\%)\times(1-10\%)\times(1-8\%)\times(1+20\%) = 1.25\times0.95\times1.10\times0.90\times0.92\times1.20 = 1.30$ ce qui correspond à une augmentation annuelle de 30%.

Exercice 2.66

M. Dezèle fait un emprunt de 100 000 € à sa banque. Le taux d'intérêts est de 3% par an, ou encore (3/12)% par mois. Chaque mois M. Dezèle rembourse un même montant à la banque, appelé «annuité constante mensuelle». Après 10 ans exactement le crédit est entièrement remboursé. On note

- ⋆ $t = 0.03/12 = 0.0025$ le taux d'intérêt mensuel,
- ⋆ $d = 120$ la durée du crédit en mois,
- ⋆ $S_0 = 100000$ l'emprunt initial,
- ⋆ a l'annuité constante mensuelle.

1. On suppose que l'emprunt commence le 1^{er} janvier et que le payement de l'annuité se fait à la fin de chaque mois. On note S_1 la dette au 1er février, S_2 la dette au 1er mars, etc. Montrer que $S_{n+1} = (1+t)S_n - a$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Établir la formule qui donne l'annuité a en fonction de la durée du crédit, du taux d'intérêt et du montant initial de l'emprunt.
3. Utiliser cette formule pour calculer l'annuité de M. Dezèle. Quel est le montant total des intérêts payés lors de ce crédit ?

Correction

1. On a $S_0 = 100\,000$. Comme il faut payer des intérêts, à la fin du premier mois le montant à rembourser est de $(1+t)S_0$. Après remboursement de la première annuité il reste donc $S_1 = (1+t)S_0 - a$ et ainsi de suite. On trouve alors
$$S_{n+1} = (1+t)S_n - a, \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$
2. D'après la formule qu'on vient d'établir on trouve
$$\begin{aligned} S_n &= (1+t)S_{n-1} - a \\ &= (1+t)\left((1+t)S_{n-2} - a\right) - a \\ &= (1+t)^2 S_{n-2} - ((t+1)+1a \\ &= (1+t)^2\left((1+t)S_{n-3} - a\right) - ((t+1)+1a \\ &= (1+t)^3 S_{n-3} - ((1+t)^2 + (t+1)+1)a. \end{aligned}$$
Par une récurrence on montre que
$$S_n = (1+t)^\kappa S_{n-\kappa} - ((1+t)^{\kappa-1} + \dots + (1+t)^2 + (t+1)+1)a, \qquad \text{pour tout } k = 0, 1, \dots, n.$$
Le coefficient de a est une suite géométrique donc
$$S_n = (1+t)^\kappa S_{n-\kappa} - \frac{(1+t)^\kappa - 1}{t} a.$$
Comme on connait S_0 et on sait que $S_d = 0$ car après d mois le remboursement du crédit est terminé, pour $\kappa = n = d$ on obtient
$$0 = S_d = (1+t)^d S_0 - \frac{(1+t)^d - 1}{t} a,$$
ce qui permet de donner l'annuité a par la formule
$$a = \frac{t(1+t)^d S_0}{(1+t)^d - 1}.$$
3. L'annuité de M. Dezèle est alors
$$a = \frac{0.0025 \times 1.0025^{120} \times 100000}{1.0025^{120} - 1} \simeq 956.61.$$
Au total, M. Dezèle rembourse 120×956.61 € $\simeq 115\,873.20$ €. Les intérêts payés lors de ce crédit s'élève donc à $15\,873.20$ €.

Exercice 2.67

En Irlande, le prix d'un certain livre est 12.5 € HT ou 13.1 € TTC. Quel est le taux de la taxe sur la valeur ajoutée applicable aux livres en Irlande ?

Correction

$$\text{TVA} = \frac{13.1\,€}{12.5\,€} - 1 = 4.8\%$$

Exercice 2.68

Dans quelle proportion faut-il mélanger une solution à 40% d'un certain produit avec une solution à 90% du même produit pour obtenir une solution à 60% ?

Correction

Si on appelle p la proportion de la solution à 40%, alors la proportion de la solution à 90% est $(1-p)$. Dans un tel mélange, le total des deux fractions (proportions) est évidemment 1 car $(p+(1-p)=1)$. La proportion de produit pur dans le mélange est : $0,4p+0,9(1-p)=0,9-0,5p$. Mais c'est aussi 60% soit $0,60$ donc on obtient :

$$\begin{cases} 0,6 = 0,9 - 0,5p \\ 0,5p = 0,3 \end{cases}$$

d'où $p = 0,3/0,5 = 3/5 = 0,6$ soit 60%. Il faut donc mélanger 6 volumes de solution à 40% avec 4 volumes de solution à 90% pour obtenir 10 volumes de solution à 60%.

Exercice 2.69

Pour tenir le feu dans la cheminée pendant 5 heures, il faut 3 kg de bois. Combien de kg de bois faut-il pour tenir le feu pendant 24 heures ?

Correction

$$\frac{3\,\text{kg}}{5\,\text{h}} = \frac{x\text{kg}}{24\,\text{h}} \qquad \text{donc} \qquad 14.4\,\text{kg}$$

Exercice 2.70

Une voiture consomme 6 L d'essence pour 100 km. Combien de kilomètres peut-on parcourir avec un réservoir plein dont les dimensions sont 20 cm×30 cm×70 cm ?

Correction

$20\,\text{cm}\times30\,\text{cm}\times70\,\text{cm}=42\,000\,\text{cm}^3=42\,\text{L}$ et $\dfrac{6\,\text{L}}{100\,\text{km}} = \dfrac{42\,\text{L}}{x\text{km}}$ donc $x = 700\,\text{km}$

Exercice 2.71

La distance entre New York et Los Angeles est 3950 km. Quelle sera cette distance sur une carte $1 \div 10\,000\,000$?

Correction

$$\frac{1}{10\,000\,000} = \frac{x\text{km}}{3950\,\text{km}} \qquad \text{donc} \qquad 39.5\,\text{cm}.$$

Exercice 2.72

Une chambre a les dimensions 10 m par 15 m. Sur un plan de l'appartement, la longueur de la chambre est de 10 cm. Quelle sera sa largeur sur le plan, en cm ?

Correction

$$\frac{10\,\text{cm}}{x\text{cm}} = \frac{15\,\text{m}}{10\,\text{cm}} \qquad \text{donc} \qquad 6.7\,\text{cm}.$$

Exercice 2.73
La longueur de l'équateur de la Terre est de 40 000 km. Sur un globe d'école, l'équateur mesure 80 cm. À quelle échelle le globe a-t-il été réalisé ?

Correction

$$\frac{80\,\text{cm}}{4\,000\,000\,000\,\text{cm}} = \frac{1}{x} \qquad \text{donc le globe est à} \qquad 1 \div 50\,000\,000.$$

Exercice 2.74
Un épicier a compté par erreur un poids de 50 g au lieu d'un poids de 20 g dans une pesée qu'il a estimée à 375 g d'épices. Celles-ci coûtent 28 euro le kilo. Quelle somme a-t-il demandée en trop ?

Correction
L'épicier a fait payer 30 g en trop et l'on a $\frac{1000\,\text{g}}{28\,€} = \frac{30\,\text{g}}{x\,€}$ donc il a fait payer 0.84 € en trop.

Exercice 2.75
Le litre de bon lait pèse 1.030 kg. On achète 15 litres de lait qui pèsent 15.375 kg. Montrer que le lait n'est pas pur. Quelle quantité d'eau y a été mélangée ?

Correction
Si 1 L de bon lait pèse 1.030 kg alors 15 L de bon lait pèsent 15.45 kg : le lait n'est pas pur.
1 L d'eau pèse 1.000 kg et 1 L de bon lait pèse 1.030 kg. Puisque 15 L de lait pèsent 15.375 kg, cela signifie que 5/6ème sont de bon lait et 1/6 d'eau. En effet, si on note a la fraction de bon lait et b la fraction d'eau du mélange, on a

$$\begin{cases} 15.375\,\text{kg} = a \times 15 \times 1.030\,\text{kg} + b \times 15 \times 1.000\,\text{kg} \\ a + b = 1 \end{cases}$$

Exercice 2.76
Nina voudrait estimer la distance entre Paris et Berlin en consultant la carte dont l'échelle est indiquée comme 1 :5 000 000. Elle mesure la distance avec une règle et obtient 21 cm. Quelle est la distance entre Paris et Berlin ?

Correction
L'échelle «1 ÷ 5 000 000» indique que chaque centimètre sur la carte correspond à 5 000 000 cm sur le terrain, ce qui égale 50 000 m ou 50 km. La distance entre Paris et Berlin égale donc $21 \times 50\,\text{km} = 1050\,\text{km}$.

Exercice 2.77
Si une bonbonne pleine de lait pèse 25 kg et que la même bonbonne à moitié pleine (ou à moitié vide selon votre conception de la vie...) pèse 13 kg, combien pèse la bonbonne vide ?

Correction
Soit L le poids du lait contenu dans la bonbonne lorsqu'elle est pleine et T le poids de la bonbonne vide, on a

$$\begin{cases} L + T = 25, \\ \frac{L}{2} + T = 13, \end{cases}$$

ainsi $T = 1\,\text{kg}$.

Exercice 2.78
Plusieurs métaux fondus ensemble constituent un alliage. Pour diverse raisons (dureté, couleur...), les bijoux dits en or ne sont jamais faits uniquement d'or. Par exemple, un bijou en or jaune est un alliage composé d'or pur, d'argent et de cuivre. Un bijou en or pesant 16 grammes contient 12 grammes d'or pur. En gardant la même proportion dans l'alliage, combien d'or pur contiendrait un bijou de 24 grammes ?

Correction
Un simple calcul de proportion nous permet de trouver la solution : $12:16 = x:24$ donc ce bijou contient $x = 18$ grammes d'or pur. Par définition, les carats indiquent la masse d'or pur (en grammes) contenue dans 24 grammes d'alliage. Nous avons ainsi un bijou de 18 carats. Le carat indique le degré de pureté d'un métal précieux. Attention, le carat est aussi une unité de masse utilisée par les joailliers. Elle correspond à 0,2 grammes.

Exercice 2.79
Un pack «raquette + balle» coûte 1.10 €. Vous avez déjà une raquette et vous ne voulez acheter que la balle. Le vendeur ne se souvient plus du prix de la balle, mais il dit : «Je me souviens que la raquette coûte un euro de plus que la balle». Combien coûte la balle seule ?

Correction
Soit r le prix de la raquette et b le prix de la balle, on a

$$\begin{cases} r+b=1.10, \\ r=b+1, \end{cases}$$

ainsi $b = 0.05$ €.

Exercice 2.80
Paul et Marie ont acheté des pommes. Si Paul donne 5 de ses pommes à Marie, elle aura autant de pommes que lui. Si Marie donne 5 de ses pommes à Paul, il aura 5 fois plus de pommes qu'elle. Combien de pommes Paul et Marie ont-ils acheté ensemble ?

Correction
Soit p le nombre de pommes de Paul et m le nombre de pommes de Marie. Alors $\begin{cases} p-5=m+5, \\ 5(m-5)=p+5 \end{cases}$ ainsi $p = 20$ et $m = 10$.

Exercice 2.81
Dans un panier de fruits, 1/7 de tous les fruits sont des ananas, 3/8 des pamplemousses et 2/5 des nectarines. Si les 23 fruits restantes sont des pommes, combien d'ananas y a-t-il dans le panier ?

Correction
Soit F le nombre total de fruits, A le nombre d'ananas, P le nombre de pamplemousses et N le nombre de nectarines. Alors

$$\begin{cases} A=\frac{1}{7}F, \\ P=\frac{3}{8}F, \\ N=\frac{2}{5}F, \\ 23=F-A-P-N, \end{cases}$$

ainsi $F = 280$ donc $A = 40$.

Exercice 2.82
Le prix d'un carton est $5\,€\cdot\mathrm{m}^{-2}$. Vous achetez un rectangle de $120\,\mathrm{cm} \times 30\,\mathrm{cm}$. Combien ça coûte ?

Correction
L'aire du carton est $1.2\,\mathrm{m} \times 0.3\,\mathrm{m} = 0.36\,\mathrm{m}^2$. On paye donc $0.36\,\mathrm{m}^2 \times 5\,€\cdot\mathrm{m}^{-2} = 1.80\,€$.

Exercice 2.83
André gagne 1500 € net par mois. Il en déduit un tiers pour son loyer, 10 € par jour pour les repas, 60 € pour ses frais de transport et une centaine d'euros pour des frais divers. Quel est le montant qui reste à la disposition d'André ? (Compter 30 jours par mois).

Correction
$1500\,€ - \frac{1500}{3}\,€ - 30 \times 10\,€ - 60\,€ - 100\,€ = 540\,€$

Exercice 2.84

Chez un boucher, un acheteur prend un kilo et demi de bœuf à 24 € le kilo, quatre côtes de porc, chacune pesant 100 g, à 11 € le kilo, et deux cailles à 3.5 € la pièce. Quel est le montant total des achats ?

Correction

$(1.5\,\mathrm{kg} \times 24\,€\cdot\mathrm{kg}^{-1}) + 4 \times (0.1\,\mathrm{kg} \times 11\,€\cdot\mathrm{kg}^{-1}) + 2 \times (3.5\,€) = 47.4\,€$

Exercice 2.85

Il faut vider un chauffe-eau en forme de cylindre horizontal qui occupe un espace de 60 cm×60 cm×1 m. Si le chauffe-eau a été vidé en 1.5 h, quel est le débit du tuyau d'évacuation en $\mathrm{L}\cdot\mathrm{min}^{-1}$?

Correction

Les dimensions présentées vous donnent les mesures du cylindre : 60 cm de diamètre et 1 m de hauteur. Convertissons les dimensions en décimètres afin de faciliter le calcul en litres : 6 dm et 10 dm. Le volume du cylindre est $V = \pi R^2 h$ où R est le rayon du fond et h est la hauteur. Ici, le volume égale $V = \pi R^2 h = 90\pi\mathrm{L} \approx 282.6\mathrm{L}$. Le débit du tuyau est alors $\frac{V}{t} = \frac{90\pi\mathrm{L}}{1.5\mathrm{h}} \approx 188.4\,\mathrm{L}\cdot\mathrm{h}^{-1} = 3.14\,\mathrm{L}\cdot\mathrm{min}^{-1}$.

Exercice 2.86

Mes 4 perroquets bleus mangent 4 kg de graines en 4 jours. Mes 5 perroquets verts mangent 5 kg de graines en 5 jours. Mes 8 perroquets oranges mangent 8 kg de graines en 8 jours. Quels sont les perroquets qui ont le plus d'appétit ?

Correction

4 perroquets bleus mangent 1 kg de graines en 1 jour donc 1 perroquet bleu mange 0.25 kg de graines en 1 jour. De la même manière on trouve qu'1 perroquet vert mange 0.20 kg de graines en 1 jour et 1 perroquet orange mange 0.125 kg de graines en 1 jour, donc les perroquets bleu ont le plus d'appétit.

Exercice 2.87

Une feuille de papier d'une épaisseur d'un dixième de millimètre est pliée 15 fois en deux : quelle est l'épaisseur du résultat après pliage ? Après combien de pliages l'épaisseur dépasse-t-elle la distance Terre-Lune (la distance Terre-Lune vaut approximativement 300 000 km) ?

Correction

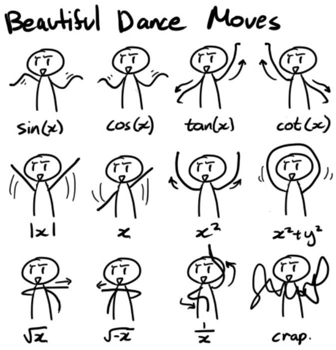
Épaisseur du résultat après pliage : $2^{15} \times 0.1\,\mathrm{mm} = 3.2768\,\mathrm{m}$. L'épaisseur dépasse la distance Terre-Lune après n pliage avec n qui vérifie $2^n \geq 3 \times 10^{12}$, *i.e.* 42 pliages.

Exercice 2.88

Le produit “pH-Moins granulés” sert à baisser le pH de l'eau des piscines. Il s'utilise lorsque le pH est supérieur à 7.4 : pour baisser de 0.1 le pH d'un mètre cube d'eau il faut y diluer 10 g de produit. Si on a une piscine circulaire autoportante de 2.44 m de diamètre et dont la hauteur de la ligne d'eau est de 50 cm et le pH est de 7.8, combien de produit doit-on ajouter ?

Correction

Le volume d'eau contenu dans la piscine est d'environ $\pi\left(\frac{2.44}{2}\right)^2 \times 0.50 \simeq 2.33$ mètres cubes. Pour baisser le pH de ce volume d'eau de 0.4 points il faut alors y diluer $2.33 \times 10 \times 4 = 93.2$ grammes de produit.

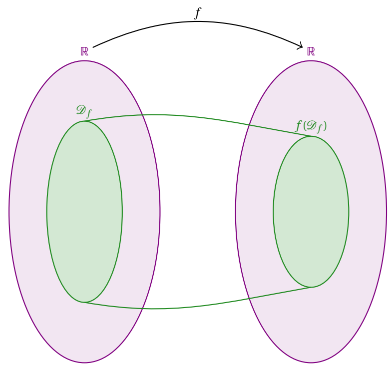


3
Fonctions d'une variable réelle

3.1 Définition (Fonction)
Une fonction est un procédé qui à tout nombre réel x d'un ensemble $\mathscr{D}_f$ de $\mathbb{R}$ associe (au plus) un unique nombre réel noté $f(x)$. On la note :

$$\begin{aligned} f\colon \mathscr{D}_f &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

où $\mathscr{D}_f$ est l'ensemble de définition de la fonction f, x la variable et $f(x)$ l'image de x par la fonction f.



Remarque

1. Lorsque l'ensemble de définition d'une fonction n'est pas donné, il faut le préciser : c'est le plus grand ensemble des réels x pour lesquels $f(x)$ est bien défini.
2. Attention : ne pas confondre la fonction f et le réel $f(x)$.
3. La variable x est muette, on pourrait très bien écrire $t \mapsto f(t)$ ou encore $\heartsuit \mapsto f(\heartsuit)$.

EXEMPLE
On peut définir une fonction de différentes manières :

1. à l'aide d'une expression : $f(x) = \frac{1}{1+x}$ avec $\mathscr{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$;
2. à l'aide de plusieurs expressions : $g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0, \\ \cos(x) & \text{si } x \geq 0, \end{cases}$ avec $\mathscr{D}_g = \mathbb{R}$;
3. à l'aide de certaines courbes, par exemple un électrocardiogramme.

3.2 Définition (Ensemble image d'une fonction)
Soit f une fonction définie sur un ensemble $\mathscr{D}_f$, on appelle ensemble image, noté $f(\mathscr{D}_f)$, l'ensemble des images de tous les réels de l'ensemble de départ $\mathscr{D}_f$:

$$f(\mathscr{D}_f) = \left\{ f(x) \mid x \in \mathscr{D}_f \right\}.$$

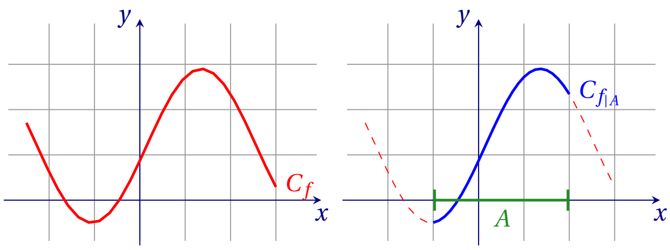
EXEMPLE
Pour les fonctions de l'exemple précédent, on trouve $f(\mathbb{R} \setminus \{-1\}) = \mathbb{R}^*$ et $g(\mathbb{R}) = [-1, 1]$.

3.3 Définition (Antécédent)
Soient f une fonction définie sur un ensemble $\mathscr{D}_f$ et y un réel. On appelle antécédent de y par f tout réel x de $\mathscr{D}_f$ tel que $f(x) = y$.

Remarque
Un réel peut avoir un ou plusieurs antécédents ou n'en avoir aucun !

3.4 Définition (Graphe d'une fonction)
Soit f une fonction définie sur un ensemble $\mathscr{D}_f$, on appelle graphe de f sur $\mathscr{D}_f$ l'ensemble des points d'abscisse x et d'ordonnée $f(x)$, où x appartient à $\mathscr{D}_f$:
$$C_f = \left\{ (x, f(x)) \;\middle|\; x \in \mathscr{D}_f \right\}.$$
L'équation $y = f(x)$ est appelée équation cartésienne de la courbe représentative de f.

3.5 Définition (Restriction d'une fonction)
Soient f une fonction et $\mathscr{D}_f$ son ensemble de définition. Soit A une partie de $\mathscr{D}_f$, la fonction f est bien définie sur A et on appelle restriction de f à A, la fonction notée $f_{|A}$ définie par
$$\begin{aligned} f_{|A} \colon A &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$



Exemple
En considérant la fonction g du premier exemple on a $g_{|[0;+\infty[} = \cos$.

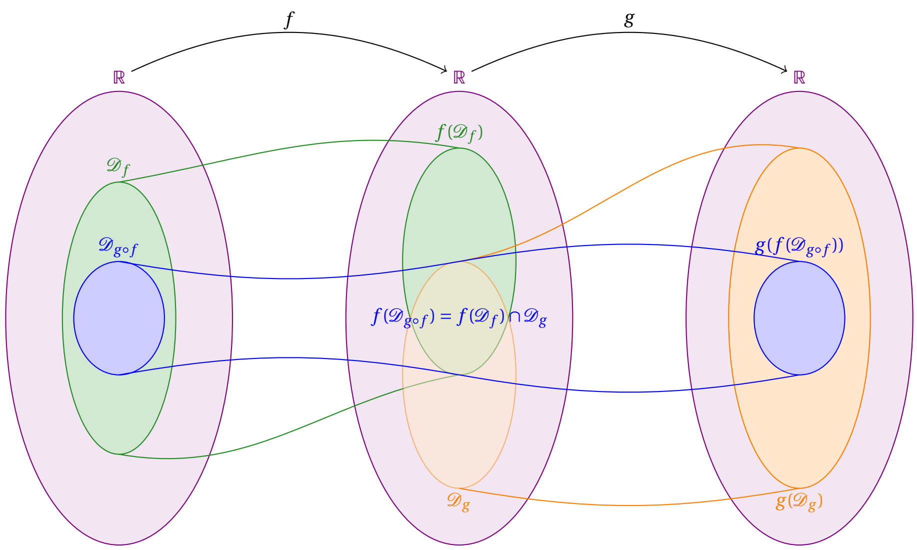
Remarque
Lorsqu'il n'y a pas de confusion possible, il arrive que l'on utilise la notation f pour désigner $f_{|A}$. Par exemple, $\cos\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$.

3.6 Définition (Composée de fonctions)
Soient $f\colon \mathscr{D}_f \to \mathbb{R}$ et $g\colon \mathscr{D}_g \to \mathbb{R}$ deux fonctions telles que $f(\mathscr{D}_f) \subset \mathscr{D}_g$. On appelle composée de f par g la fonction notée $g \circ f$ définie sur $\mathscr{D}_f$ par
$$g \circ f \colon x \mapsto g(f(x)).$$

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{D}_f \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, dashed, "g \circ f"] & f(\mathscr{D}_f) \arrow[r, "g"] & \mathbb{R} \\
x \arrow[r, mapsto] & f(x) \arrow[r, mapsto] & g(f(x))
\end{tikzcd}$$

Exemple
La fonction $u\colon t \mapsto \cos(\omega t + \varphi)$ s'écrit sous la forme composée $u = g \circ f$ avec $f\colon t \mapsto \omega t + \varphi$ et $g\colon x \mapsto \cos(x)$.

Remarque
En général on n'a pas nécessairement $f(\mathscr{D}_f) \subset \mathscr{D}_g$. Dans ce cas, l'ensemble de définition de $g \circ f$ est l'ensemble des points x de l'ensemble de définition de f dont l'image par f appartient à l'ensemble de définition de g :
$$\mathscr{D}_{g\circ f} = \left\{ x \in \mathscr{D}_f \;\middle|\; f(x) \in \mathscr{D}_g \right\}.$$



Exemple
La fonction $h\colon x \mapsto \sqrt{1-x}$ s'écrit sous la forme composée $h = g \circ f$ avec

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto 1-x \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} g\colon \mathbb{R}_+ &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sqrt{x}. \end{aligned}$$

On a d'autre part

$$\mathscr{D}_h = \{\, x \in \mathbb{R} \mid 1-x \in \mathbb{R}_+ \,\} = \{\, x \in \mathbb{R} \mid x \le 0 \,\} =]-\infty, 1].$$

Une fonction f fait correspondre au plus une (et une seule) valeur y à chaque valeur $x \in \mathscr{D}_f$. Dans certaines situations, il est intéressant d'inverser ce processus et de retrouver la ou les valeurs de x qui ont conduit à une valeur y particulière.

3.7 Définition (Fonction réciproque)
Soit $f\colon \mathscr{D}_f \to \mathbb{R}$ une fonction et notons $B = f(\mathscr{D}_f)$ l'ensemble image. Si à chaque élément $y \in B$ correspond une et une seule antécédent $x \in \mathscr{D}_f$, alors la loi qui à y associe son unique antécédent x définit une fonction $f^{-1}\colon B \to \mathscr{D}_f$ que l'on appelle fonction réciproque ou fonction inverse de f.

Les fonctions qui possèdent une réciproque sont dites inversibles. Lorsque $f\colon \mathscr{D}_f \to \mathbb{R}$ est inversible, on a $f^{-1}(f(x)) = x$ pour tout $x \in \mathscr{D}_f$ et $f(f^{-1}(y)) = y$ pour tout $y \in B$.

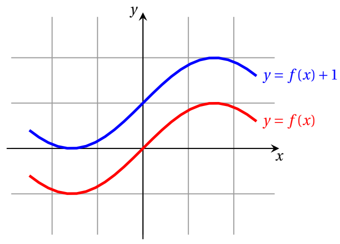
Exemple
L'ensemble image de la fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$ est $B = f(\mathscr{D}_f) = f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+$. Cette fonction n'est pas inversible car les valeurs positives de y possèdes deux antécédents. L'ensemble image de la fonction $g\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = f(x)$ est encore $\mathbb{R}_+$ mais cette fonction est bien inversible car à chaque valeur de $y \in B$ correspond une et une seule valeur $x \in \mathbb{R}_+$ telle que $x^2 = y$.

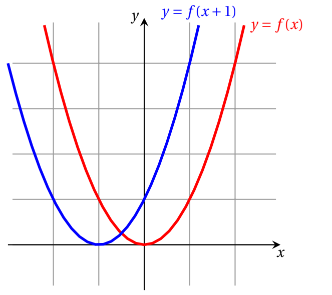
Attention
Ne pas confondre $f^{-1}(x)$ avec $[f(x)]^{-1} = \frac{1}{f(x)}$.

3.1 Graphes

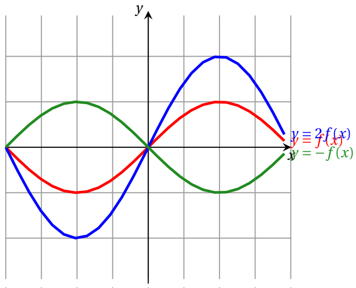
L'ensemble des points (x, y) du plan dont les coordonnées satisfont $y = f(x)$ forme le graphe de la fonction f. Puisqu'une fonction f associe une et une seule valeur $f(x)$ à chacun des points x de son domaine, une droite verticale coupe le graphe d'une fonction en au plus un point. Lorsque l'on modifie la formule définissant une fonction, le graphe de la fonction se transforme. Certaines modifications de la formule induisent des transformations élémentaires du graphe.

3.8 Définition (Translation verticale)
Soit $g(x) = f(x) + c$. Lorsque c est positif, le graphe de g s'obtient en translatant le graphe de f vers le haut de c unités. Lorsque c est négatif, la translation se fait vers le bas.

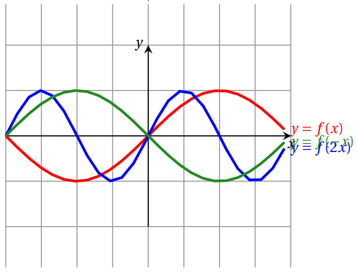




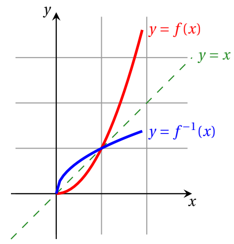
3.9 Définition (Translation horizontale)
Considérons la fonction $g(x) = f(x+c)$ pour un certain $c \ge 0$. La valeur de g en 0 est égale à la valeur de f en c. Le graphe de g s'obtient en translatant le graphe de f vers la gauche de c unités. Lorsque c est négatif, la translation se fait vers la droite.



3.10 Définition (Dilatation ou contraction verticale)
Soit $g(x) = cf(x)$ pour un certain c. La valeur prise par g en 1 est égale à la valeur prise par f en 1. Lorsque $c \ge 1$, le graphe de g s'obtient par dilatation du graphe de f suivant l'axe y d'un facteur c. Lorsque $0 < c \le 1$, le graphe de g s'obtient par contraction de celui de f. Lorsque c est négatif, la transformation obtenue est une symétrie par rapport à l'axe x, suivie d'une dilatation ou d'une contraction d'un facteur $|c|$.



3.11 Définition (Dilatation ou contraction horizontale)
Soit $g(x) = f(cx)$ pour un certain c. La valeur prise par g en 1 est égale à la valeur prise par f en 1. Lorsque $c \ge 1$, le graphe de g s'obtient par contraction du graphe de f suivant l'axe x d'un facteur c. Lorsque $0 < c \le 1$, le graphe de g s'obtient par dilatation de celui de f. Lorsque c est négatif, la transformation obtenue est une symétrie par rapport à l'axe y, suivie d'une dilatation ou d'une contraction d'un facteur $|c|$.



3.12 Définition (Graphe fonction réciproque)
Si f est bijective (donc inversible), le graphe de la réciproque de f est le symétrique du graphe de f par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Exemple
Considérons la fonction $f(x) = ax^2 + bx + c$ pour $a \neq 0$. La fonction se décompose en

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

Le graphe de la fonction $g(x) = x^2$ est une parabole pointée vers le bas. Le graphe de la fonction f s'obtient au départ de celui de g en procédant aux transformations successives suivantes : translation horizontale de $b/(2a)$ unités, dilatation ou contraction horizontale d'un facteur a, translation verticale de $-(b^2 - 4ac)/(4a)$ unités.

3.13 Définition (Parité et périodicité d'une fonction)
Soit $f : \mathscr{D}_f \to \mathbb{R}$ une fonction, on dit que

- ⋆ f est une fonction paire si pour tout réel x de $\mathscr{D}_f$ on a

$$-x \in \mathscr{D}_f \qquad \text{et} \qquad f(-x) = f(x);$$

- ⋆ f est une fonction impaire si pour tout réel x de $\mathscr{D}_f$ on a

$$-x \in \mathscr{D}_f \qquad \text{et} \qquad f(-x) = -f(x);$$

- ⋆ f est une fonction périodique de période $p > 0$ (ou p-périodique) si pour tout réel x de $\mathscr{D}_f$ on a

$$x + p \in \mathscr{D}_f \qquad \text{et} \qquad f(x+p) = f(x).$$

  Si p est une période de f, tout multiple de p en est une. On considérera toujours la plus petite période strictement positive.

EXEMPLE
Les fonctions cos et $x \mapsto x^2$ sont paires. Les fonctions sin, $x \mapsto ax$ et $x \mapsto x^3$ sont impaires. Les fonctions cos et sin sont périodiques de période 2π, la fonction tan est périodique de période π. La fonction $x \mapsto x - E(x)$ est périodique de période 1.

Remarque
- ⋆ Les définitions de parité/imparité imposent que l'ensemble de définition de f soit «symétrique par rapport à 0».
- ⋆ La courbe représentative d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, autrement dit, si (x, y) est un point du graphe d'une fonction paire, alors le point $(-x, y)$ appartient également au graphe. Les points (x, y) et $(-x, y)$ sont disposés de manière symétrique par rapport à l'axe y.
- ⋆ La courbe représentative d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine, autrement dit, si (x, y) est un point du graphe d'une fonction paire, alors le point $(-x, -y)$ appartient également au graphe. Les points (x, y) et $(-x, -y)$ sont disposés de manière symétrique par rapport à l'origine.
- ⋆ L'unique fonction $f: \mathscr{D}_f \to \mathbb{R}$ qui est à la fois paire et impaire est la fonction identiquement nulle.
- ⋆ La courbe représentative d'une fonction p-périodique est invariante par translation horizontale de p-unités, autrement dit, si (x, y) est un point du graphe d'une fonction p-périodique, alors le point $(x + p, y)$ appartient également au graphe.

3.14 Théorème
Si $f: x \mapsto f(x)$ est p-périodique, $g: x \mapsto f(mx)$ est $\frac{p}{m}$-périodique.

Remarque
La majorité des fonctions ne sont ni paires ni impaires. Elles peuvent toutefois être décomposées de manière unique en la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire. Soit la fonction

$$\begin{aligned} f: \mathscr{D}_f &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

On définit les deux fonctions f_p et f_i de $\mathscr{D}_f$ à valeur dans $\mathbb{R}$ définies par $f_p(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}$ et $f_i(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$. On vérifie sans difficulté que f_p est paire et que f_i est impaire et qu'on a bien $f = f_p + f_i$.

EXEMPLE
La fonction $f(x) = (1-x)/(2+x)$ que l'on considère sur le domaine $\mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$ n'est ni paire ni impaire. Sa décomposition donne

$$f(x) = \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{1-x}{2+x} + \frac{1+x}{2-x}\right)}_{f_p(x)} + \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{1-x}{2+x} - \frac{1+x}{2-x}\right)}_{f_i(x)} = \underbrace{\frac{2+x^2}{4-x^2}}_{f_p(x)} + \underbrace{\frac{-3x}{4-x^2}}_{f_i(x)}.$$

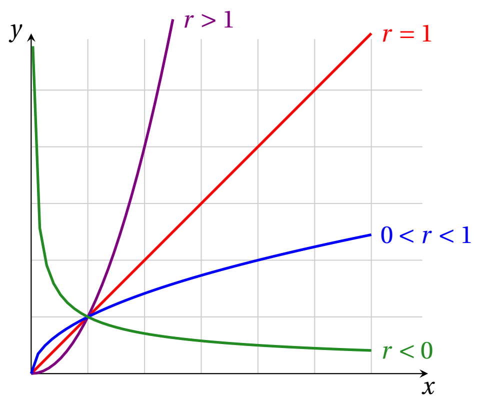
3.2 Fonctions puissances.

On appelle *fonction puissance* $r \in \mathbb{R}$ l'application définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$x \mapsto x^r.$$

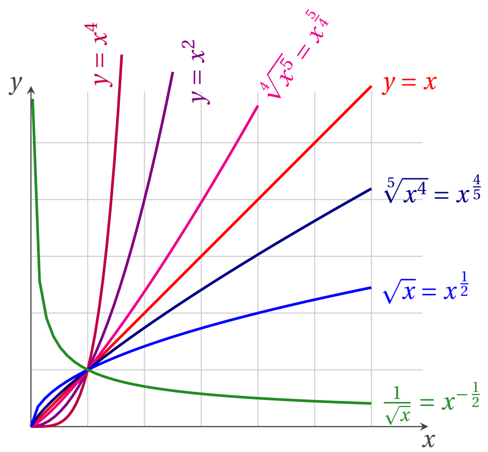
- **Dérivées** Les propriétés connues pour les exposants rationnels sont prolongées ; en particulier $(x^r)' = r x^{r-1}$, $(x^r)'' = r(r-1)x^{r-2}\dots$

  Remarquez bien qu'ici l'exposant est constant.
- **Monotonie**
  - ⋆ Pour $r < 0$, la fonction $x \mapsto x^r$ est décroissante de $+\infty$ à 0.
  - ⋆ Pour $r > 0$, la fonction $x \mapsto x^r$ est croissante de 0 à $+\infty$. Dans ce cas on peut prolonger la fonction par continuité en 0 ; la fonction prolongée est dérivable en 0 si $r > 1$.
- **Limites**
  - ⋆ Pour $b > 0$ on a
  $$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^b} = 0; \qquad \lim_{x\to 0^+} x^b \ln x = 0.$$
  - ⋆ Pour $a > 1$ et $b \in \mathbb{R}$ on a
  $$\lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x^b} = +\infty.$$
  - ⋆ Pour $a > 1$ on a
  $$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{a^x} = 0.$$
- **Représentation graphique**



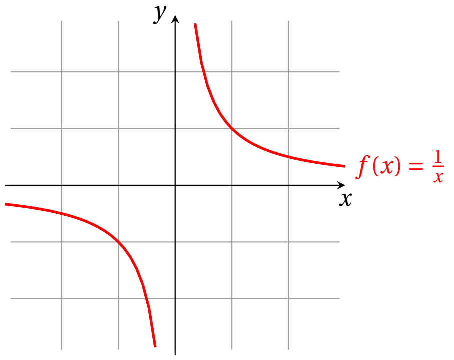
Propriété $x^r = e^{r\ln(x)}$.

Exemple



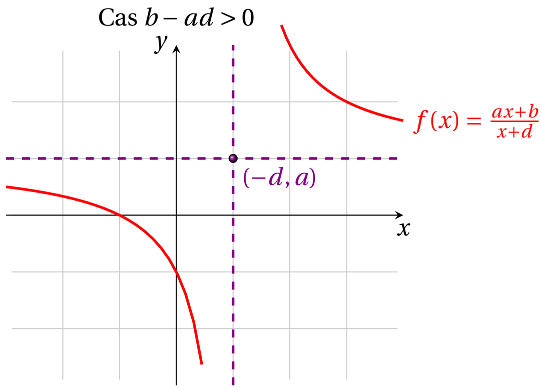
3.3 Fonctions homographiques.

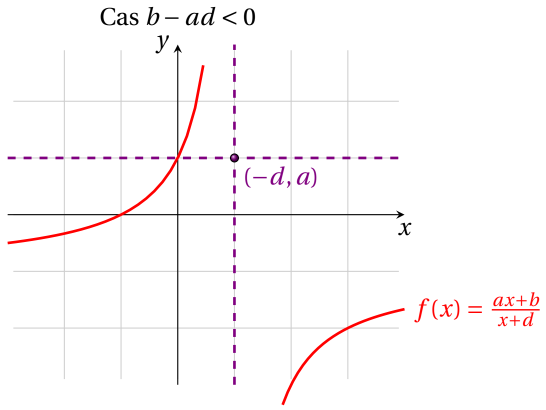
- **Cas particulier** La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ n'est pas définie à l'origine. Son graphe est une hyperbole équilatère ayant les axes pour asymptotes :



- **Cas général** Les fonctions homographiques sont les fonctions définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-d\}$ à valeurs dans $\mathbb{R}\setminus\{-b/a\}$ par $x \mapsto \frac{ax+b}{x+d}$. On peut obtenir le graphe d'une *fonction homographique* au départ de celui de $x \mapsto \frac{1}{x}$ en procédant à des transformations élémentaires car
$$\frac{ax+b}{x+d} = a + (b-ad)\frac{1}{x+d}.$$
  1. On part du graphe de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$,
  2. en translatant ce graphe vers la gauche de d unités on obtient le graphe de $x \mapsto \frac{1}{x+d}$,
  3. en dilatant le graphe ainsi obtenu suivant l'axe y par un facteur $(b-ad)$ on obtient le graphe de $x \mapsto (b-ad)\frac{1}{x+d}$,
  4. en translatant le graphe obtenu vers le haut de a unités on obtient le graphe de $x \mapsto a + (b-ad)\frac{1}{x+d}$

  - **Représentation graphique** Le graphe final est celui d'une hyperbole équilatère dont les asymptotes sont parallèles aux axes et se coupent en $(-d, a)$.





  - **Limites**
    ⋆ Si $b-ad>0$ alors
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{ax+b}{x+d} = a^- \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{ax+b}{x+d} = a^+ \qquad \lim_{x\to-d^-}\frac{ax+b}{x+d} = -\infty \qquad \lim_{x\to-d^+}\frac{ax+b}{x+d} = +\infty$$
    ⋆ Si $b-ad<0$ alors
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{ax+b}{x+d} = a^+ \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{ax+b}{x+d} = a^- \qquad \lim_{x\to-d^-}\frac{ax+b}{x+d} = +\infty \qquad \lim_{x\to-d^+}\frac{ax+b}{x+d} = -\infty$$

  - **Dérivées** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, la dérivée n-ème est $\left(\frac{ax+b}{x+d}\right)^{(n)} = (b-ad)\frac{(-1)^n n!}{(x+d)^{n+1}}$

3.4 Fonction logarithme népérien.

La fonction "ln" est définie pour $x>0$ par

$$\begin{cases} \ln(1)=0 \\ (\ln(x))'=\frac{1}{x} & \forall x>0. \end{cases}$$

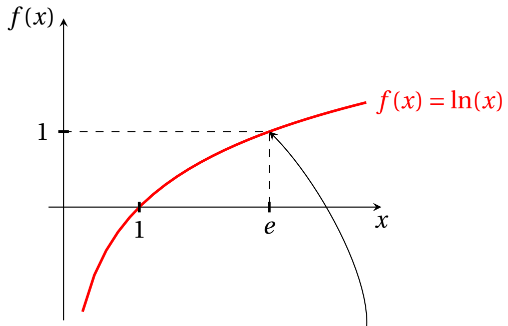
- **Propriétés algébriques** $\forall a>0$, $\forall b>0$, $\forall r\in\mathbb{Q}$

$$\ln(ab)=\ln(a)+\ln(b); \qquad \ln(a^r)=r\ln a; \qquad \ln(a/b)=\ln(a)-\ln(b).$$

- **Limites** $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^+}x\ln(x)=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x}=0$.
- **Monotonie et dérivées**
  - ⋆ Elle est strictement croissante, de classe $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*)$.
  - ⋆ $(\ln(x))'=\frac{1}{x}$ et la dérivée n-ème est $(\ln(x))^{(n)}=(-1)^{n+1}x^{-n}$.
  - ⋆ La dérivée en $x=1$ étant égale à 1, on a aussi $\ln(1+x)=x+o(x^2)$ au voisinage de 0.
- **Convexité** La fonction ln est concave sur $]0,+\infty[$ ce qui entraîne

$$\forall x>-1, \qquad \ln(1+x)\le x.$$

- **Représentation graphique**



L'unique solution de l'équation $\ln(x)=1$ est notée e ($e\approx 2{,}718$).

3.5 Fonction exponentielle.

La fonction exponentielle est la bijection réciproque de la fonction ln ; elle est définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $]0,+\infty[$; elle est notée exp ou $x\mapsto e^x$:

$$y=e^x \iff x=\ln(y).$$

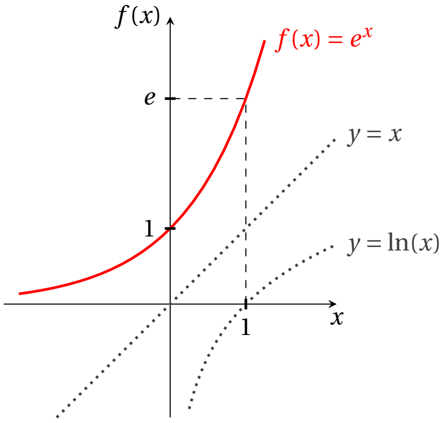
- **Propriétés algébriques** $\forall a\in\mathbb{R}$, $\forall b\in\mathbb{R}$, $\forall r\in\mathbb{Q}$

$$e^{a+b}=e^a\cdot e^b; \qquad e^{ra}=(e^a)^r; \qquad e^{-a}=\frac{1}{e^a}; \qquad e^{a-b}=\frac{e^a}{e^b}.$$

- **Limites** $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0^+$, $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty}xe^x=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$,
- **Monotonie et dérivées**
  - ⋆ Elle est strictement croissante
  - ⋆ Elle est de classe $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*)$ et la dérivée n-ème est égale à elle même : $(e^x)^{(n)}=e^x$.
  - ⋆ La dérivée en $x=0$ étant égale à 1, on a aussi $e^x-1=x+o(x^2)$ au voisinage de 0.
- **Convexité** La fonction exp est convexe sur $\mathbb{R}$ ce qui entraîne

$$\forall x\in\mathbb{R}, \qquad 1+x\le e^x.$$

- **Représentation graphique**



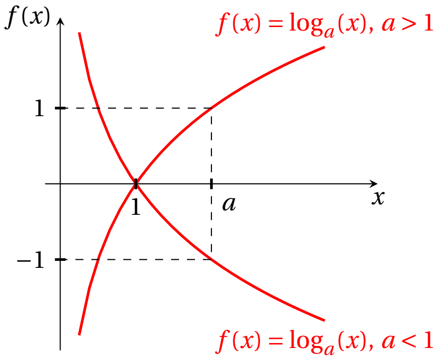
L'unique solution de l'équation $e^x = 1$ est $x = 0$.

3.6 Fonction logarithme de base a.

La fonction logarithme de base a ($a > 0$, $a \neq 1$) est la fonction définie par

$$\forall x > 0 \qquad \log_a(x) := \frac{\ln(x)}{\ln(a)}.$$

- **Propriétés algébriques** Ses propriété algébriques sont les mêmes que celles de la fonction ln.
- **Dérivées** $(\log_a(x))' = \frac{1}{x\ln(a)}$.
- **Représentation graphique**



3.7 Fonction exponentielle de base a.

La fonction exponentielle de base a ($a > 0$) est la fonction définie par

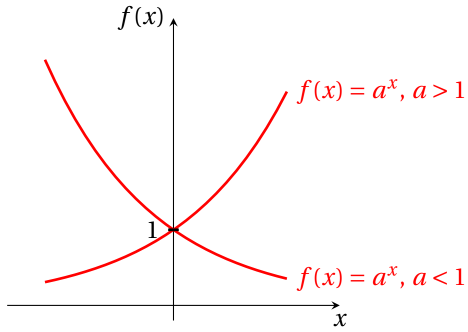
$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad a^x := e^{x\ln(a)}.$$

Remarquez bien qu'ici la variable est en exposant. Pour $a \neq 1$ c'est la fonction réciproque de la fonction $\log_a$:

$$y = a^x \iff x = \log_a(y).$$

- **Dérivées** Sa dérivée est $(a^x)' = a^x \ln a$.

- **Représentation graphique**



Échelle logarithmique et repères (semi)-logarithmiques

Échelle logarithmique L'échelle logarithmique est une alternative à l'échelle linéaire. Elle peut s'avérer préférable lorsqu'on étudie un phénomène utilisant une gamme étendue de valeurs car elle espace les valeurs faibles et rapproche les valeurs fortes.

L'échelle logarithmique n'est définie que pour des valeurs strictement positives. Une base logarithmique b est choisie, correspondant à un type de logarithme, les plus courants étant le logarithme népérien ln (en mathématiques), le logarithme décimal $\log_{10}$ (en biologie) et le logarithme de base 2 $\log_2$ (en informatique). Toutes les autres bases restent possibles, elles sont seulement plus rarement utilisées. Les échelles obtenues sont identiques à un rapport près, seuls les calculs de pente seront différents.

L'origine (le zéro) de l'échelle correspond à la valeur $b^0 = 1$; vers la droite (ou vers le haut), le nombre b est placé à une unité de l'origine, b^2 à deux unités, b^3 à trois unités, etc. Vers la gauche (ou vers le bas), on trouve les puissances négatives de b : $b^{-1} = 1/b$ à une unité, $b^{-2} = 1/b^2$ à deux unités, etc. Plus généralement, un nombre x est placé sur l'échelle à une distance $\log_b(x)$: c'est sa coordonnée logarithmique.

Par exemple, si on utilise le logarithme décimal, la distance qui sépare 1 de 10 est la même que celle qui sépare 10 de 100 et celle qui sépare 0.1 de 1 car $\log_{10}(100) - \log_{10}(10) = \log_{10}(10) - \log_{10}(1) = \log_{10}(1) - \log_{10}(0.1)$. En revanche, la distance qui sépare 1 de 2 est égale à celle qui sépare 10 de 20 mais est supérieure à celle qui sépare 2 de 3 car $\log_{10}(2) - \log_{10}(1) = \log_{10}(20) - \log_{10}(10) = \log_{10}(4) - \log_{10}(2) > \log_{10}(3) - \log_{10}(2)$. Pour l'échelle linéaire, deux graduations dont la *différence* vaut 10 sont à distance constante.

Sur ce type d'échelle, les grands nombres sont comprimés très proches de l'origine et facilement représentés (en base 10 par exemple, un nombre dix fois plus grand est seulement une unité plus loin), en revanche les nombres entre 0 et 1 sont dilatés et très vite renvoyés vers l'infini négatif. Pour l'échelle logarithmique de base b, deux graduations dont le *rapport* vaut b sont à distance constante.

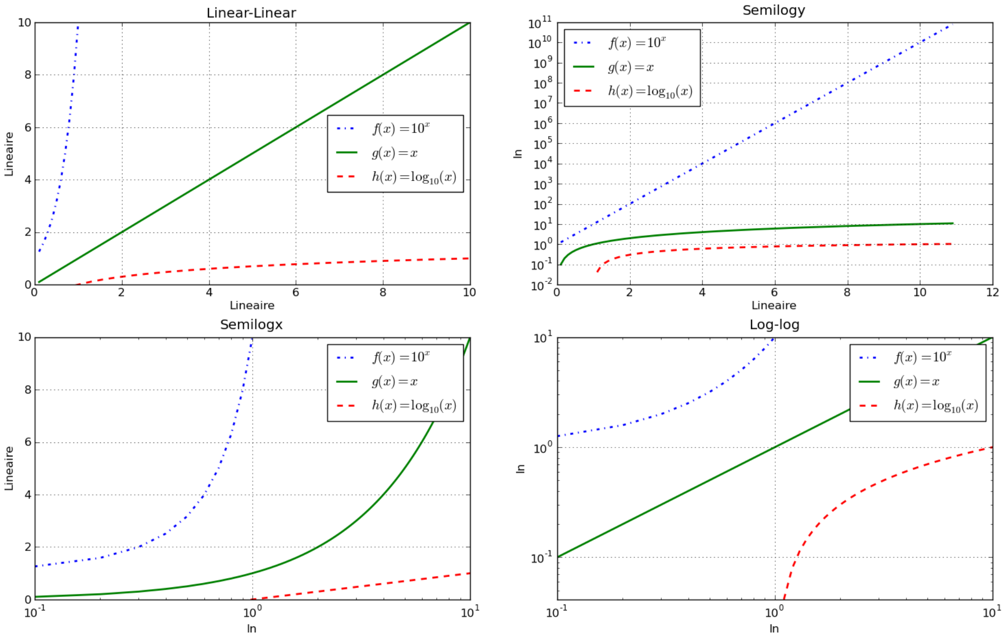
Repères semi-logarithmiques Un repère semi-logarithmique est un repère dans lequel l'un des axes, par exemple celui des abscisses (x), est gradué selon une échelle linéaire, comme les graduations d'un mètre courant, alors que l'autre axe, ici celui des ordonnées (y), est gradué selon une échelle logarithmique. Le repère semi-logarithmique en y permet de représenter des phénomènes exponentiels ou, plus généralement, des mesures s'étalant sur plusieurs ordres de grandeurs comme prenant des valeurs proches de 1 ou proches de 10^5. Ce type de repère permet aussi d'évaluer les taux de croissance d'une variable évoluant avec le temps. Quel que soit le niveau de la variable, des taux de croissance identiques seront représentés par des segments ayant la même pente. On peut ainsi comparer des taux de croissance en faisant abstraction des effets d'échelle.

Repère logarithmique Un repère log-log est un repère dans lequel les deux axes sont gradués selon une échelle logarithmique.

EXEMPLE

Représentation graphique des fonctions $f(x) = 10^x$, $g(x) = x$ et $h(x) = \log_{10}(x)$ dans un repère

- ⋆ linéaire en x et en y (en haut à gauche)
- ⋆ linéaire en x et logarithmique de base 10 en y (en haut à droite)
- ⋆ logarithmique de base 10 en x et linéaire en y (en bas à gauche)
- ⋆ logarithmique de base 10 en x et y (en bas à droite)



Acidité d'une solution En chimie, on mesure l'acidité d'une solution par son pH. Le pH d'une solution est défini par

$$pH = -\log_{10}([H^+])$$

où $[H^+]$ désigne la concentration molaire en ions H^+ de la solution. Plus le pH d'une solution est faible, plus sa concentration en ions est élevée et plus la solution est acide.

EXEMPLE (ACIDITÉ DE QUELQUES ALIMENTS)

Aliment	pH
Banane	$4.5-4.7$
Raisin	$3.0-3.3$
Orange	$3.0-4.0$
Citron	$1.8-2.0$
Lait	$6.3-6.6$
Épinards	$5.1-5.7$

Intensité d'un son En acoustique, on mesure l'intensité d'un son en décibels :

$$I = 10\log_{10}\left(\frac{J}{J_0}\right)$$

où J est la puissance acoustique du son (en $\mathrm{W\cdot m^{-1}}$) et J_0 est la plus faible puissance audible par un humain à une fréquence de 1 kHz ($J_0 = 10^{-12}\,\mathrm{W\cdot m^{-1}}$). Cette définition est telle que la plus faible puissance audible par un être humain est égale à 0 dB. La gamme d'intensité perceptible à l'oreille humaine va de 0 dB à 120 dB qui correspond au seuil de douleur. Voici l'intensité de quelques sons :

Origine du son	Intensité
Limite de perception	0 dB
Bruissement de feuilles	10 dB
Chuchotement	20 dB
Automobile	50 dB
Conversation ordinaire	65 dB
Marteau piqueur à 3 m	90 dB
Limite de la douleur	120 dB

EXEMPLE

Un haut-parleur d'une puissance de Q watts disposé à une distance de R mètres d'un observateur développe une puissance acoustique de $J = Q/(4\pi J_0 R^2)\mathrm{W}\cdot\mathrm{m}^{-1}$. L'intensité du son est (en décibels)

$$I = 10\log_{10}\left(\frac{Q}{4\pi J_0 R^2}\right) = 10\left(\log_{10}(Q) - \log_{10}(4\pi) - 2\log_{10}(R) - \log_{10}(J_0)\right).$$

Si $Q = 100\,\mathrm{W}$ on obtient $I \simeq 129 - 20log_{10}(R)$: un observateur situé à une distance de 1 m d'une source de 100 W perçoit une intensité de $I = 129\,\mathrm{dB}$, qui dépasse la seul de la douleur. À une distance de 10 m l'intensité n'est plus que de 109 dB.

Intensité d'un tremblement de terre En géologie, on utilise l'échelle de RICHTER pour mesurer la vigueur des tremblements de terre. L'amplitude d'un tremblement de terre est donnée par

$$R = \log_{10}\left(\frac{a}{T}\right) + B$$

où a désigne l'amplitude (mesurée en microns) des oscillations à la station de réception, T désigne la période (en secondes) et B est un facteur empirique qui est fonction de la distance entre la station de réception et de l'épicentre du tremblement de terre. Pour une distance de 10000 km on a typiquement $B = 6.8$.

EXEMPLE

Si, lors de secousses successives, la période des oscillations générées par un tremblement de terre reste inchangée mais l'amplitude est multipliée par 10, l'intensité du tremblement de terre sur l'échelle de RICHTER augmente d'une unité.

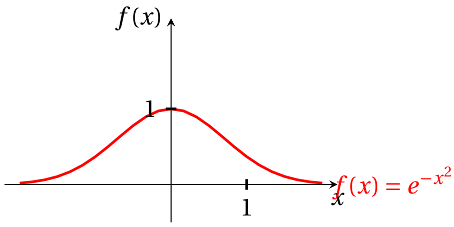
3.8 Fonctions gaussienne.

La fonction gaussienne est définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $]0,+\infty[$ par $x \mapsto e^{-x^2}$.

- **Limites** $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x^2} = 0^+$, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x^2} = 0^+$.
- **Monotonie** La fonction gaussienne est de classe $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$, croissante pour $x < 0$, décroissante pour $x > 0$ et

$$(e^{-x^2})' = -2xe^{-x^2}, \qquad (e^{-x^2})'' = -2xe^{-x^2}(1-2x^2).$$

- **Représentation graphique**



3.9 Fonction logistique (ou sigmoïde).

La fonction logistique est définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $]0,+\infty[$ par $x \mapsto \frac{1}{1+e^{-x}}$.

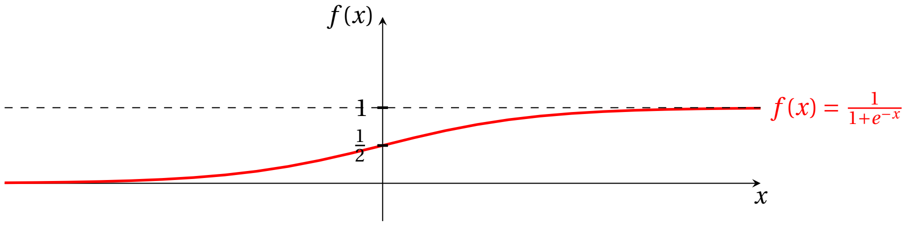
- **Limites** On a

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{1+e^{-x}} = 0^+, \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+e^{-x}} = 1^-.$$

- **Monotonie et dérivées** La fonction logistique est de classe $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$, croissante et l'on a

$$\left(\frac{1}{1+e^{-x}}\right)' = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}, \qquad \left(\frac{1}{1+e^{-x}}\right)'' = \frac{e^{-x}(e^{-x}-1)}{(1+e^{-x})^3}.$$

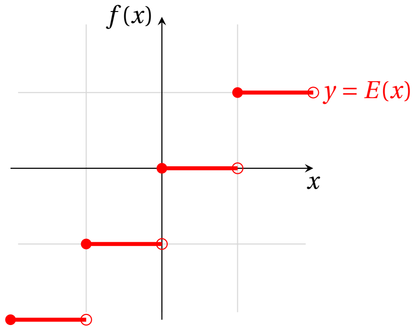
- **Représentation graphique**



3.10 Fonction «partie entière».

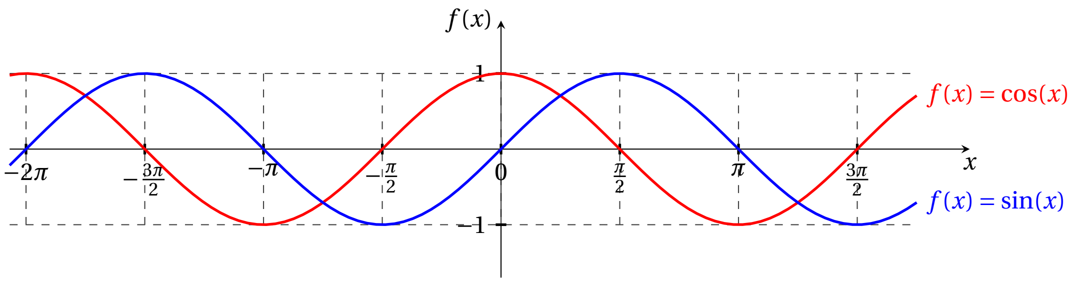
La fonction «partie entière» est définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{Z}$ par $x \mapsto E(x) = n$ où n est l'unique entier relatif (positif, négatif ou nul) tel que $n \leq x < n+1$.

- **Monotonie et dérivées** La fonction E est non continue et croissante.
- **Représentation graphique**

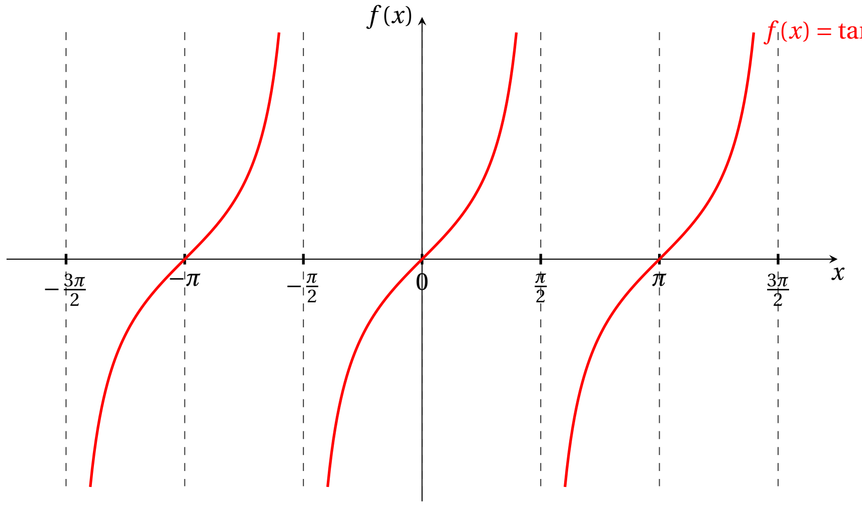


3.11 Fonctions circulaires et trigonométriques.

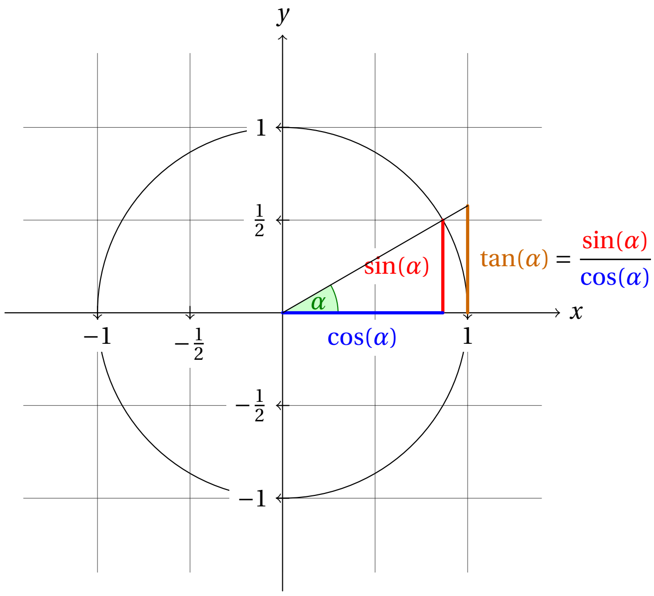
- **Fonctions sinus et cosinus**
  - **Domaine de définition** Elles sont définies dans $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $[-1,1]$.
  - **Périodicité, parité** Elles sont 2π-périodiques. La fonction cos est paire, la fonction sin est impaire.
  - **Dérivées** $(\cos(x))' = -\sin(x)$, $(\sin(x))' = -\cos(x)$.
    Si $x \in \mathbb{R}$ est la mesure d'un angle, ces expressions des dérivées ne sont correctes que si x est exprimé en radians.
  - **Limites remarquables** $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$, $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$.
  - **Représentation graphique**

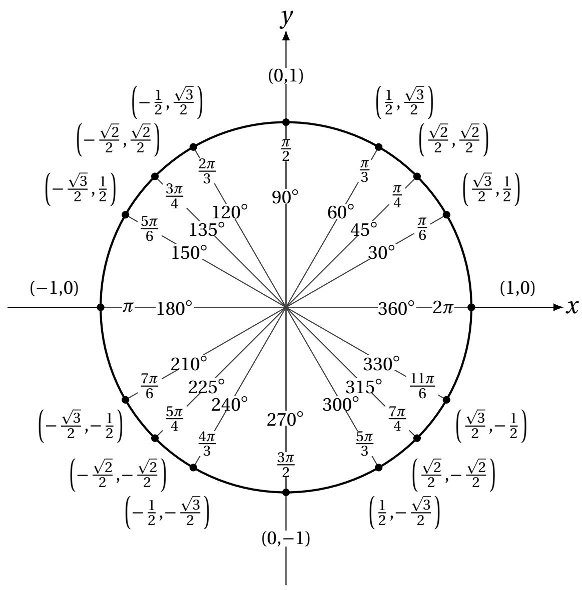


- **Fonction tangente**
  - **Domaine de définition** Elle est définie sur $D := \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$ par $\tan(x) := \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$.
  - **Périodicité, parité** Elle est π-périodique et impaire.
  - **Dérivée** $(\tan(x))' = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$ pour tout $x \in D$.
  - **Limites** $\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{x} = 1$.
  - **Représentation graphique**



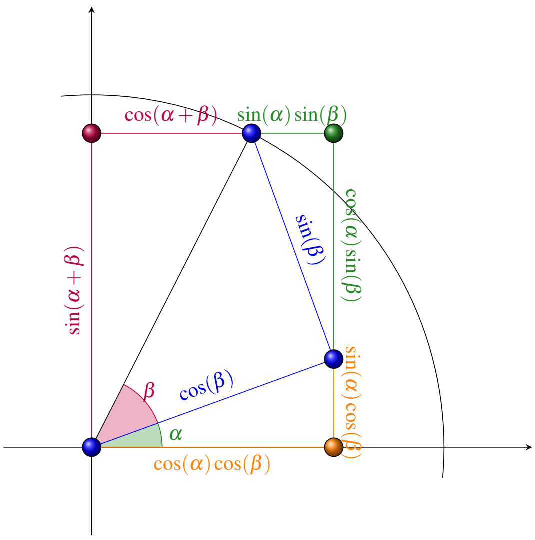
- **Propriétés**





$$
\begin{aligned}
\cos(\pi-x) &= -\cos(x) & \sin(\pi-x) &= \sin(x) & \tan(\pi-x) &= -\tan(x)\\
\cos(\pi+x) &= -\cos(x) & \sin(\pi+x) &= -\sin(x) & \tan(\pi+x) &= \tan(x)\\
\cos(\pi/2-x) &= \sin(x) & \sin(\pi/2-x) &= \cos(x) & \tan(\pi/2-x) &= 1/\tan(x)\\
\cos(\pi/2+x) &= -\sin(x) & \sin(\pi/2+x) &= \cos(x) & \tan(\pi/2+x) &= -1/\tan(x)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\cos(a+b) &= \cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b) & \cos(a-b) &= \cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b)\\
\sin(a+b) &= \sin(a)\cos(b)+\cos(a)\sin(b) & \sin(a-b) &= \sin(a)\cos(b)-\cos(a)\sin(b)\\
\tan(a+b) &= \frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)} & \tan(a-b) &= \frac{\tan(a)-\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}
\end{aligned}
$$



$$\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a)$$
$$\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$$
$$\tan(2a) = \frac{2\tan(a)}{1-\tan^2(a)}$$

$$\cos(a)+\cos(b) = 2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \qquad \cos(a)-\cos(b) = -2\sin\left(\frac{a-b}{2}\sin\frac{a+b}{2}\right)$$
$$\sin(a)+\sin(b) = 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right) \qquad \sin(a)-\sin(b) = 2\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{\cos(a+b)+\cos(a-b)}{2}$$
$$\sin(a)\sin(b) = \frac{\cos(a-b)-\cos(a+b)}{2}$$
$$\sin(a)\cos(b) = \frac{\sin(a+b)+\sin(a-b)}{2}$$

$$\cos^2(a) = \frac{1+\cos(2a)}{2} \qquad \sin^2(a) = \frac{1-\cos(2a)}{2}$$

$$\sin(a) = \pm\sqrt{1-\cos^2(a)} = \frac{\tan(a)}{\pm\sqrt{1+\tan^2(a)}},$$
$$\cos(a) = \pm\sqrt{1-\sin^2(a)} = \frac{1}{\pm\sqrt{1+\tan^2(a)}},$$
$$\tan(a) = \frac{\sin(a)}{\pm\sqrt{1-\sin^2(a)}} = \frac{\pm\sqrt{1-\cos^2(a)}}{\cos(a)}.$$

Soit $t := \tan\left(\frac{a}{2}\right)$, alors

$$\cos(a) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \sin(a) = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \tan(a) = \frac{2t}{1-t^2}$$

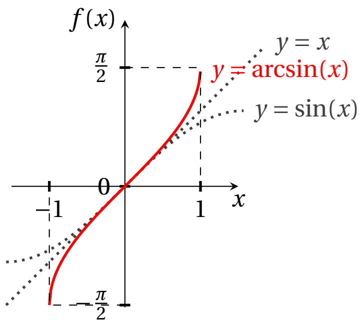
3.12 Fonctions circulaires réciproques.

- **Fonction arc-sinus** C'est la bijection réciproque de la restriction à $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ de la fonction sinus :

$$\left.\begin{array}{c} y=\arcsin(x) \\ -1\le x\le 1 \end{array}\right\} \iff \left\{\begin{array}{c} x=\sin(y) \\ -\frac{\pi}{2}\le y\le\frac{\pi}{2} \end{array}\right.$$

Elle est impaire et pour tout $x\in]-1,1[$ on a

$$(\arcsin(x))'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

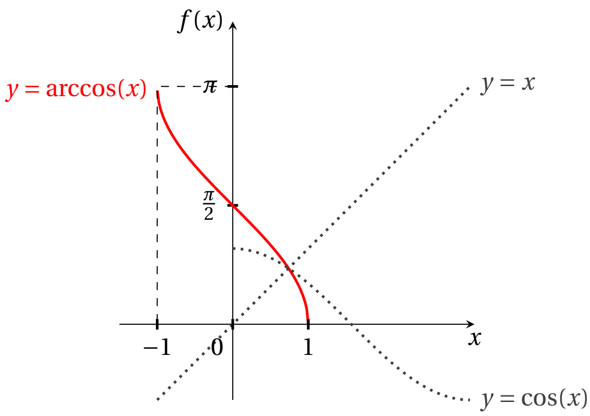


- **Fonction arc-cosinus** C'est la bijection réciproque de la restriction à $[0,\pi]$ de la fonction cosinus :

$$\left.\begin{array}{c} y=\arccos(x) \\ -1\le x\le 1 \end{array}\right\} \iff \left\{\begin{array}{c} x=\cos(y) \\ 0\le y\le\pi \end{array}\right.$$

Pour tout $x\in]-1,1[$ on a

$$(\arccos(x))'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

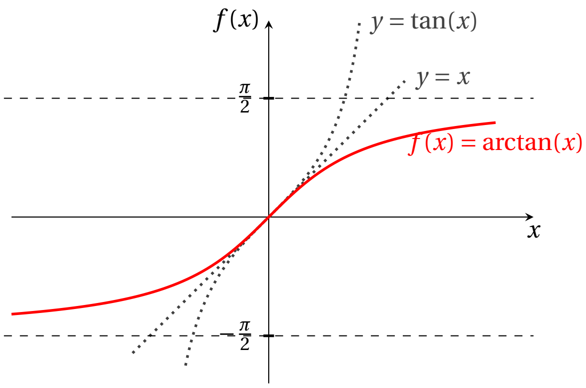


- **Fonction arc-tangente** C'est la bijection réciproque de la restriction à $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ de la fonction tangente :

$$\left.\begin{array}{c} y=\arctan(x) \\ x\in\mathbb{R} \end{array}\right\} \iff \left\{\begin{array}{c} x=\tan(y) \\ -\frac{\pi}{2}< y<\frac{\pi}{2} \end{array}\right.$$

Elle est impaire et pour tout $x\in\mathbb{R}$ on a

$$(\arctan(x))'=\frac{1}{1+x^2}.$$



- **Propriétés**

$$\forall x \in [-1,1] \qquad \arcsin(x)+\arccos(x)=\frac{\pi}{2}$$

$$\sin(\arccos(x))=\sqrt{1-x^2}=\cos(\arcsin(x))$$

$$\forall x>0 \qquad \arctan(x)+\arctan(1/x)=\frac{\pi}{2}$$

$$\forall x<0 \qquad \arctan(x)+\arctan(1/x)=-\frac{\pi}{2}$$

3.13 Fonctions hyperboliques.

On définit les fonctions cosinus hyperbolique, sinus hyperbolique et tangente hyperbolique pour tout $x\in\mathbb{R}$ respectivement par

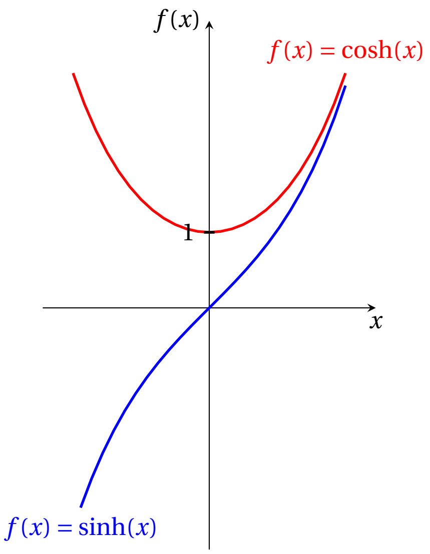
$$\cosh(x):=\frac{e^x+e^{-x}}{2}, \qquad \sinh(x):=\frac{e^x-e^{-x}}{2}, \qquad \tanh(x):=\frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}=1-\frac{2}{1+e^{2x}}.$$

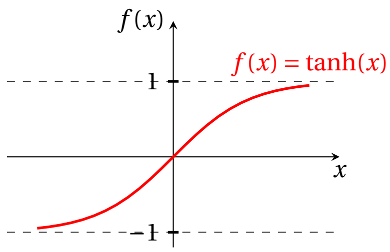
Propriétés : cosh est paire ; sinh et tanh sont impaires et pour tout $x\in\mathbb{R}$ on a

$$\cosh(x)+\sinh(x)=e^x; \qquad \cosh^2(x)-\sinh^2(x)=1; \qquad 1-\tanh^2(x)=\frac{1}{\cosh^2(x)}.$$

Dérivées : pour tout $x\in\mathbb{R}$

$$(\sinh(x))'=\cosh(x); \qquad (\cosh(x))'=\sinh(x); \qquad (\tanh(x))'=\frac{1}{\cosh^2(x)}=1-\tanh^2(x).$$





3.14 Fonctions hyperboliques réciproques.

Fonction argument sinus hyperbolique C'est la bijection réciproque de la fonction sinh. Elle est impaire et on a

$$(\operatorname{argsinh}(x))' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Fonction argument cosinus hyperbolique C'est la bijection réciproque de la restriction à $[0,+\infty[$ de la fonction $\cosh(x)$. Pour tout $x \in [0,+\infty[$ on a

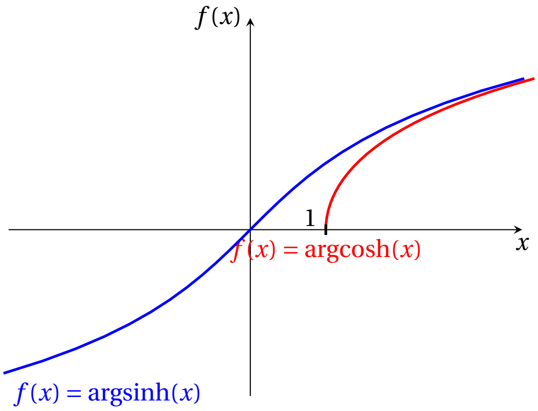
$$(\operatorname{argcosh}(x))' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$$

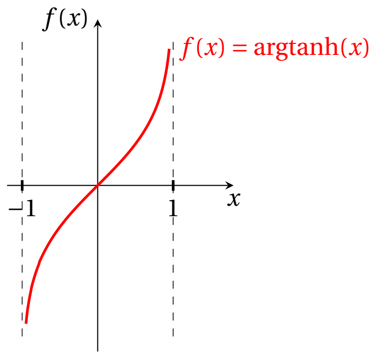
Fonction argument tangente hyperbolique C'est la bijection réciproque de la fonction tanh. Elle est impaire et pour tout $x \in]-1,1[$ on a

$$(\operatorname{argtanh}(x))' = \frac{1}{1-x^2}.$$

Propriétés

$$\begin{aligned}
&\forall x \in \mathbb{R} && \operatorname{argsinh}(x) = \ln(x+\sqrt{x^2+1})\\
&\forall x \in [1,+\infty[&& \operatorname{argcosh}(x) = \ln(x+\sqrt{x^2-1})\\
&\forall x \in]-1,1[&& \operatorname{argtanh}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)
\end{aligned}$$





Caténaire ou chaînette Lorsqu'un câble (ou une chaîne) est suspendu par ses extrémités entre deux points d'attache de même hauteur et est soumis à une force gravitationnelle uniforme (son propre poids), le câble adopte un profil donné par le graphe d'un cosinus hyperbolique et la courbe ainsi définie est appelée caténaire ou chaînette. On lui donne parfois le nom de vélaire. La chaînette est presque verticale près des points de suspension, car c'est là que le poids le plus important tire le plus la chaîne vers le bas. En revanche, vers le bas de la courbe, l'inclinaison diminue peu à peu puisque la chaîne supporte de moins en moins de poids. C'est d'ailleurs une des différences entre la chaînette et la parabole : pour une longueur égale, la parabole est plus «pointue» dans sa partie inférieure. Plus généralement, aucune courbe dont l'ordonnée est proportionnelle à une puissance de l'abscisse ne monte aussi vite qu'une chaînette.
La chaînette n'apparaît pas seulement dans la forme d'une chaîne ou d'un câble suspendu. On la trouve aussi,

- ⋆ renversée, pour un arc tenant par son propre poids. Relèvent de cette technique les essais architecturaux de GAUDI, l'arche du Jefferson National Expansion Memorial à Saint Louis et le hangar à dirigeables d'Écausseville ;
- ⋆ verticale, dans le profil d'une voile rectangulaire attachée à 2 barres horizontales, enflée par un vent soufflant perpendiculairement à ces barres, en négligeant le poids propre de la voile par rapport à la force du vent. C'est cette propriété qui justifie le nom de «vélaire» (voile) donné par Jacques BERNOULLI.

Exercices

Ensemble de définition

Exercice 3.1
Donner l'ensemble de définition de chacune des fonctions f suivantes définies par la donnée du réel $f(x)$.

$$f_1(x)=e^x-x^2,\qquad f_2(x)=\frac{\ln(x)}{x^2+5x+7},\qquad f_3(x)=\frac{e^x}{x^2+1},$$
$$f_4(x)=\sqrt{x^2+x+1},\qquad f_5(x)=e^{2x}-(x+1)e^x,\qquad f_6(x)=\frac{\ln(x^2+2)}{2x},$$
$$f_7(x)=\frac{\sqrt{e^x+2}}{x},\qquad f_8(x)=\frac{e^{3x}}{x^2+e^x},\qquad f_9(x)=\ln(x)-x,$$
$$f_{10}(x)=\frac{1}{x^x},\qquad f_{11}(x)=x^{1/x},\qquad f_{12}(x)=x^3\ln(x),$$
$$f_{13}(x)=\frac{x^2-2x+1}{x-1},\qquad f_{14}(x)=\sqrt{x^2},\qquad f_{15}(x)=(\sqrt{x})^2.$$

Correction

$$\mathscr{D}_{f_1}=\mathbb{R},\qquad \mathscr{D}_{f_2}=\left\{x\in\mathbb{R}\;\middle|\;x>0\wedge x^2+5x+7\neq 0\right\}=\mathbb{R}_+^*,\qquad \mathscr{D}_{f_3}=\left\{x\in\mathbb{R}\;\middle|\;x^2+1\neq 0\right\}=\mathbb{R},$$
$$\mathscr{D}_{f_4}=\left\{x\in\mathbb{R}\;\middle|\;x^2+x+1\geq 0\right\}=\mathbb{R},\qquad \mathscr{D}_{f_5}=\mathbb{R},\qquad \mathscr{D}_{f_6}=\left\{x\in\mathbb{R}\;\middle|\;x^2+2>0\wedge x\neq 0\right\}=\mathbb{R}^*,$$
$$\mathscr{D}_{f_7}=\{x\in\mathbb{R}\mid x\neq 0\}=\mathbb{R}^*,\qquad \mathscr{D}_{f_8}=\left\{x\in\mathbb{R}\;\middle|\;x^2+e^x\neq 0\right\}=\mathbb{R},\qquad \mathscr{D}_{f_9}=\{x\in\mathbb{R}\mid x>0\}=\mathbb{R}_+^*,$$
$$\mathscr{D}_{f_{10}}=\{x\in\mathbb{R}\mid x>0\}=\mathbb{R}_+^*,\qquad \mathscr{D}_{f_{11}}=\{x\in\mathbb{R}\mid x>0\wedge x\neq 0\}=\mathbb{R}_+^*,\qquad \mathscr{D}_{f_{12}}=\{x\in\mathbb{R}\mid x>0\}=\mathbb{R}_+^*.$$
$$\mathscr{D}_{f_{13}}=\mathbb{R}\setminus\{1\},\qquad \mathscr{D}_{f_{14}}=\mathbb{R}\text{ et }f_{14}=|x|,\qquad \mathscr{D}_{f_{15}}=\mathbb{R}_+\text{ et }f_{15}=x.$$

Exercice 3.2
Donner l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes :

$$f_1\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\qquad f_2\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto\ln(e^x)\qquad f_3\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto e^{\ln(x)}$$
$$f_4\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto\frac{1-x}{1-x^2}\qquad f_5\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto\sqrt{|x|}\qquad f_6\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto\ln(|x|)$$

Correction

$$\mathscr{D}_{f_1}=\left\{x\in\mathbb{R}\;\middle|\;x\geq 0\ \wedge\ 1-x\geq 0\ \wedge\ \sqrt{1-x}\neq 0\right\}=[0;1[\qquad \mathscr{D}_{f_2}=\left\{x\in\mathbb{R}\;\middle|\;e^x>0\right\}=\mathbb{R}\text{ et on a }f_2(x)=x$$
$$\mathscr{D}_{f_3}=\{x\in\mathbb{R}\mid x>0\}=\mathbb{R}_+^*\text{ et on a }f_3(x)=x\qquad \mathscr{D}_{f_4}=\left\{x\in\mathbb{R}\;\middle|\;1-x^2\neq 0\right\}=\mathbb{R}\setminus\{-1,+1\}\text{ et on a }f_4(x)=\frac{1}{1+x}$$
$$\mathscr{D}_{f_5}=\{x\in\mathbb{R}\mid |x|\geq 0\}=\mathbb{R}\qquad \mathscr{D}_{f_6}=\{x\in\mathbb{R}\mid |x|>0\}=\mathbb{R}^*$$

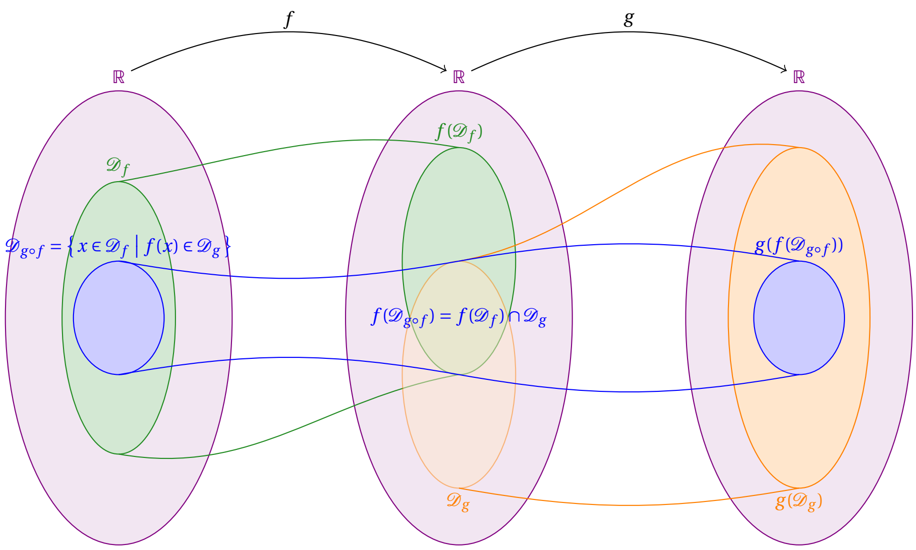
Exercice 3.3
Donner l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

1. $x\mapsto x^5-3x^2+2x-7$
2. $x\mapsto\frac{1}{x^2+1}$
3. $x\mapsto\frac{1}{x^2-1}$
4. $x\mapsto\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
5. $x\mapsto\sqrt{x^2+1}$
6. $x\mapsto\sqrt{x^2-1}$
7. $x\mapsto\sqrt{1-x^2}$
8. $x\mapsto\frac{1}{x^2-5x+6}$
9. $x\mapsto\sqrt{x^2-3x-4}$
10. $x\mapsto\frac{x}{1-\sqrt{1-x}}$
11. $x\mapsto\ln(1-x)$
12. $x\mapsto\ln(1-x^2)$
13. $x\mapsto|\ln(x)|$
14. $x\mapsto\ln(\ln(\ln(x)))$
15. $x\mapsto\frac{1}{e^x-1}$
16. $x\mapsto\tan(2x)$
17. $x\mapsto\frac{1}{\sin(2x)}$
18. $x\mapsto\frac{1}{x\cos(x)}$
19. $x\mapsto\ln\frac{e^x-1}{(x-1)(x+2)}$
20. $x\mapsto\left(\frac{x^2-2x}{x^2+4x+3}\right)^\alpha$, avec $\alpha\in\mathbb{R}$,
21. $x\mapsto\sqrt{3-\log_2(x+5)}$.

Correction

1. $x \in \mathbb{R}$
2. $x \in \mathbb{R}$
3. $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$
4. $x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$
5. $x \in \mathbb{R}$
6. $x \in]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$
7. $x \in [-1, 1]$
8. $x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3) \neq 0$, *i.e.* $x \in \mathbb{R} \setminus \{2; 3\}$
9. $x^2 - 3x - 4 \geq 0$, *i.e.* $x \in]-\infty; -1] \cup [4; +\infty[$
10. $\begin{cases} 1 - \sqrt{1-x} \neq 0 \\ 1 - x \geq 0 \end{cases}$ *i.e.* $x \in]-\infty; 1] \setminus \{0\}$
11. $1 - x > 0$, *i.e.* $x \in]-\infty; 1[$
12. $1 - x^2 > 0$, *i.e.* $x \in]-1; +1[$
13. $x > 0$, *i.e.* $x \in]0; +\infty[$
14. $\ln(\ln(x)) > 0$, c'est-à-dire $\ln(x) > 1$, *i.e.* $x \in]e; +\infty[$
15. $e^x - 1 \neq 0$, *i.e.* $x \in \mathbb{R}^*$
16. $2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$, *i.e.* $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}$
17. $\sin(2x) \neq 0$, *i.e.* $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ k\frac{\pi}{2} \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}$
18. $x\cos(x) \neq 0$, *i.e.* $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ 0 \text{ et } \frac{\pi}{2} + k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}$
19. $\begin{cases} \frac{e^x - 1}{(x-1)(x+2)} > 0 \\ (x-1)(x+2) \neq 0 \end{cases}$ *i.e.* $x \in]-2; 0[\cup]1; +\infty[$
20. $\begin{cases} \frac{x^2 - 2x}{x^2 + 4x + 3} > 0 \text{ car } [f(x)]^\alpha = e^{\alpha \ln[f(x)]} \\ x^2 + 4x + 3 \neq 0 \end{cases}$
    i.e. $x \in]-\infty; -3[\cup]-1; 0[\cup]2; +\infty[$
21. $\begin{cases} x + 5 > 0, \\ \log_2(x+5) \leq 3 \end{cases}$ *i.e.* $\begin{cases} x > -5, \\ x + 5 \leq 2^3 = 8 \end{cases}$ *i.e.* $x \in]-5; 3]$

Composée de fonctions



Exercice 3.4

On considère les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $u \colon x \mapsto 2x - 8$ et $v \colon x \mapsto x^2$. Donner les ensembles de définition et les expressions des fonctions $u \circ v$ et $v \circ u$.

Correction

$$\begin{aligned} \mathscr{D}_u &= \mathbb{R}, & u(\mathscr{D}_u) &= \mathbb{R}, \\ \mathscr{D}_v &= \mathbb{R}, & v(\mathscr{D}_v) &= \mathbb{R}^+, \\ u(\mathscr{D}_u) \cap \mathscr{D}_v &= \mathbb{R}, & \mathscr{D}_{v\circ u} &= \{ x \in \mathscr{D}_u \mid u(x) \in \mathscr{D}_v \} = \mathbb{R}, \\ v(\mathscr{D}_v) \cap \mathscr{D}_u &= \mathbb{R}^+, & \mathscr{D}_{u\circ v} &= \{ x \in \mathscr{D}_v \mid v(x) \in \mathscr{D}_u \} = \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Les deux fonctions composées sont donc définies sur $\mathbb{R}$ et on a $u \circ v \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $x \mapsto 2x^2 - 8$ et $v \circ u \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $x \mapsto (2x-8)^2$.

Exercice 3.5

Considérons les fonctions

$$\begin{aligned} f \colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{1-x} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} g \colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sqrt{x} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} h \colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

$$u\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R} \qquad v\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R} \qquad w\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$$
$$x\mapsto \tfrac{1}{1+x} \qquad x\mapsto \ln(x) \qquad x\mapsto e^x$$

Donner l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes et écrire explicitement l'expression de la composition :

- ⋆ $f\circ g$, $g\circ f$, $h\circ g\circ f$;
- ⋆ $u\circ v$, $v\circ u$, $w\circ v\circ u$.

Correction

- ⋆ $f\circ g$, $g\circ f$, $h\circ g\circ f$;

$$\begin{aligned}
f(x)&=\frac{1}{1-x}, & \mathscr{D}_f&=\mathbb{R}\setminus\{1\}, & f(\mathscr{D}_f)&=\mathbb{R}^*,\\
g(x)&=\sqrt{x}, & \mathscr{D}_g&=[0;+\infty[, & g(\mathscr{D}_g)&=[0;+\infty[,\\
h(x)&=x^2, & \mathscr{D}_h&=\mathbb{R}, & h(\mathscr{D}_h)&=[0;+\infty[,
\end{aligned}$$

Donc

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=\frac{1}{1-g(x)}=\frac{1}{1-\sqrt{x}}, \qquad \mathscr{D}_{f\circ g}=\left\{x\in\mathscr{D}_g \;\middle|\; g(x)\in\mathscr{D}_f\right\}=\left\{x\ge 0 \;\middle|\; g(x)\neq 1\right\}=\mathbb{R}_+\setminus 1,$$
$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=\sqrt{f(x)}=\frac{1}{\sqrt{1-x}}, \qquad \mathscr{D}_{g\circ f}=\left\{x\in\mathscr{D}_f \;\middle|\; f(x)\in\mathscr{D}_g\right\}=\left\{x\neq 1 \;\middle|\; f(x)\ge 0\right\}=]-\infty;1[,$$
$$(h\circ g\circ f)(x)=h(g(f(x)))=\big(g(f(x))\big)^2=\left(\frac{1}{\sqrt{1-x}}\right)^2=f(x), \quad \mathscr{D}_{h\circ g\circ f}=\left\{x\in\mathscr{D}_{g\circ f} \;\middle|\; g(f(x))\in\mathscr{D}_h\right\}=]-\infty;1[\neq\mathscr{D}_f.$$

- ⋆ $u\circ v$, $v\circ u$, $w\circ v\circ u$:

$$\begin{aligned}
u(x)&=\frac{1}{1+x}, & \mathscr{D}_u&=\mathbb{R}\setminus\{-1\}, & u(\mathscr{D}_u)&=\mathbb{R}^*,\\
v(x)&=\ln(x), & \mathscr{D}_v&=]0;+\infty[, & v(\mathscr{D}_v)&=\mathbb{R},\\
w(x)&=e^x, & \mathscr{D}_w&=\mathbb{R}, & w(\mathscr{D}_w)&=]0;+\infty[,
\end{aligned}$$

Donc

$$(v\circ u)(x)=v(u(x))=\ln(u(x))=\ln\left(\frac{1}{1+x}\right), \qquad \mathscr{D}_{v\circ u}=\{x\in\mathscr{D}_u \mid u(x)\in\mathscr{D}_v\}=\{x\neq-1 \mid u(x)>0\}=]-1;+\infty[,$$
$$(u\circ v)(x)=u(v(x))=\frac{1}{1+v(x)}=\frac{1}{1+\ln(x)}, \qquad \mathscr{D}_{u\circ v}=\{x\in\mathscr{D}_v \mid v(x)\in\mathscr{D}_u\}=\{x>0 \mid v(x)\neq-1\}=\mathbb{R}_+^*\setminus\{1/e\},$$
$$(w\circ v\circ u)(x)=w(v(u(x)))=e^{v(u(x))}=e^{\ln\left(\frac{1}{1+x}\right)}=\frac{1}{1+x}=u(x), \quad \mathscr{D}_{w\circ v\circ u}=\{x\in\mathscr{D}_{v\circ u} \mid v(u(x))\in\mathscr{D}_w\}=]-1;+\infty[\neq\mathscr{D}_u.$$

Exercice 3.6

Compléter le tableau suivant (dans cet exercice on ne s'intéresse pas aux domaines de définition mais exclusivement aux formules).

$f(x)$	$g(y)$	$g(f(x))$
$x-7$	$\sqrt{y}$	
	$\sqrt{y-5}$	$\sqrt{x^2-5}$
$x+2$	$3y$	
$\frac{x}{x-1}$	$\frac{y}{y-1}$	
	$1+\frac{1}{y}$	x
$\frac{1}{x}$		x
$\frac{2x+3}{x+7}$		x

Correction

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R} \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, dashed, "g\circ f"] & \mathbb{R} \arrow[r, "g"] & \mathbb{R} \\
x \arrow[r, mapsto] & y=f(x) \arrow[r, mapsto] & z=g(y)=g(f(x))
\end{tikzcd}$$

① $x\mapsto y=x-7\mapsto z=\sqrt{y}=\sqrt{x-7}$

② $x\mapsto y=x+2\mapsto z=3y=3x+6$

③ $x\mapsto y=\frac{x}{x-1}=1+\frac{1}{x-1}\mapsto z=\frac{y}{y-1}=1+\frac{1}{y-1}=1+\frac{1}{1+\frac{1}{x-1}-1}=x$

④ $x\mapsto y=f(x)\mapsto z=\sqrt{y-5}=\sqrt{f(x)-5}=\sqrt{x^2-5}$ donc $f(x)=x^2$

⑤ $x\mapsto y=f(x)\mapsto z=1+\frac{1}{y}=1+\frac{1}{f(x)}=x$ donc $f(x)=\frac{1}{x-1}$

⑥ $x\mapsto y=\frac{1}{x}\mapsto z=g(y)=g\left(\frac{1}{x}\right)=x$ *i.e.* $g=f^{-1}$: on cherche x tel que $y=\frac{1}{x}$ donc $g(y)=\frac{1}{y}$

⑦ $x\mapsto y=\frac{2x+3}{x+7}\mapsto z=g(y)=g\left(\frac{2x+3}{x+7}\right)=x$ *i.e.* $g=f^{-1}$: on cherche x tel que $y=\frac{2x+3}{x+7}$ donc $g(y)=\frac{3-7y}{y-2}$

Ainsi

$f(x)$	$g(y)$	$g(f(x))$
$x-7$	$\sqrt{y}$	$\sqrt{x-7}$
$x+2$	$3y$	$3x+6$
$\frac{x}{x-1}$	$\frac{y}{y-1}$	x
x^2	$\sqrt{y-5}$	$\sqrt{x^2-5}$
$\frac{1}{x-1}$	$1+\frac{1}{y}$	x
$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{y}$	x
$\frac{2x+3}{x+7}$	$\frac{3-7y}{y-2}$	x

Parité

Exercice 3.7

Parmi les fonctions suivantes, quelles sont celles qui sont paires ou impaires ?

$$f_1(x)=x^2-1+\sin^2(x),\qquad f_2(x)=\frac{\tan(x)-x}{x^3\cos(x)},\qquad f_3(x)=\frac{\sin^2(2x)-\cos(3x)}{\tan(x)},\qquad f_4(x)=\frac{x-1}{\sin(x+1)}+\cos(x).$$

Correction

$$f_1(-x)=(-x)^2-1+\sin^2(-x)=x^2-1+(-\sin(x))^2=x^2-1+\sin^2(x)=f_1(x),\qquad f_1 \text{ est paire;}$$

$$f_2(-x)=\frac{\tan(-x)+x}{(-x)^3\cos(-x)}=\frac{-\tan(x)+x}{-x^3\cos(x)}=\frac{\tan(x)-x}{x^3\cos(x)}=f_2(x),\qquad f_2 \text{ est paire;}$$

$$f_3(-x)=\frac{\sin^2(-2x)-\cos(-3x)}{\tan(-x)}=\frac{(-\sin(2x))^2-\cos(3x)}{-\tan(x)}=-\frac{\sin^2(2x)-\cos(3x)}{\tan(x)}=-f_3(x),\qquad f_3 \text{ est impaire;}$$

$$f_4(-x)=\frac{-x-1}{\sin(-x+1)}+\cos(-x)=\frac{-x-1}{\sin(-x+1)}+\cos(x),\qquad f_4 \text{ n'est ni paire ni impaire.}$$

Exercice 3.8

Démontrer les propositions suivantes.

1. La somme de fonctions paires est une fonction paire.
2. La somme de fonctions impaires est une fonction impaire.
3. Le produit de deux fonctions paires est pair.
4. Le produit de deux fonctions impaires est pair.

5. Le produit d'une fonction paire et d'une fonction impaire est une fonction impaire.

Correction

1. Soit f et g deux fonctions paires, *i.e.* $f(x)=f(-x)$ et $g(x)=g(-x)$. Alors $(f+g)(-x)=f(-x)+g(-x)=f(x)+g(x)=(f+g)(x)$: la somme de deux fonctions paires est pair.
2. Soit f et g deux fonctions paires, *i.e.* $f(x)=f(-x)$ et $g(x)=g(-x)$. Alors $(f+g)(-x)=f(-x)+g(-x)=-f(x)-g(x)=-(f+g)(x)$: la somme de deux fonctions impaires est impaire.
3. Soit f et g deux fonctions paires, *i.e.* $f(x)=f(-x)$ et $g(x)=g(-x)$. Alors $(fg)(-x)=f(-x)g(-x)=f(x)g(x)=(fg)(x)$: le produit de deux fonctions paires est pair.
4. Soit f et g deux fonctions impaires, *i.e.* $f(x)=-f(-x)$ et $g(x)=-g(-x)$. Alors $(fg)(-x)=f(-x)g(-x)=f(x)g(x)=(fg)(x)$: le produit de deux fonctions impaires est pair.
5. Soit f une fonction paire et g une fonctions impaire, *i.e.* $f(x)=f(-x)$ et $g(x)=-g(-x)$. Alors $(fg)(-x)=f(-x)g(-x)=-f(x)g(x)=-(fg)(x)$: le produit d'une fonction paire et d'une fonction impaire est une fonction impaire.

Périodicité

Exercice 3.9

Calculer la période des fonctions suivantes :

$$f_1(x)=\cos(3x),\qquad f_2(x)=\sqrt{\tan(x)},\qquad f_3(x)=\cos^4(8x),\qquad f_4(x)=|\cos(5x)|,$$
$$f_5(x)=\cos(3x)+\sin(2x),\qquad f_6(x)=\frac{\cos(5x)}{\sin(5x)},\qquad f_7(x)=\cos(5x)\sin(3x),\qquad f_8(x)=\cos(3x)\sin(3x).$$

Correction

1. $\cos(y)$ est 2π-périodique donc f_1 est $\frac{2\pi}{3}$-périodique.
2. La racine ne change pas la période et comme $\tan(y)$ est π-périodique alors f_2 est π-périodique.
3. $\cos(8y)$ est $\frac{\pi}{4}$-périodique donc f_3 est $\frac{\pi}{8}$-périodique.
4. $\cos(5y)$ est $\frac{2\pi}{5}$-périodique donc f_4 est $\frac{\pi}{5}$-périodique.
5. $\cos(3x)$ est $\frac{2\pi}{3}$-périodique $\sin(2x)$ est $\frac{2\pi}{2}$-périodique donc f_5 a période égale à $p.p.c.m.\left(\frac{2\pi}{3},\pi\right)=2\pi$
6. $\cos(5x)$ et $\sin(5x)$ sont $\frac{2\pi}{5}$-périodiques donc f_6 est $\frac{\pi}{5}$-périodique
7. $\cos(5x)$ est $\frac{2\pi}{5}$-périodique $\sin(3x)$ est $\frac{2\pi}{3}$-périodique donc f_7 a période égale à $p.p.c.m.\left(\frac{2\pi}{5},\frac{2\pi}{3}\right)=2\pi$
8. $\cos(3x)$ et $\sin(3x)$ sont $\frac{2\pi}{3}$-périodiques donc f_7 est $\frac{\pi}{3}$-périodique

Fonctions usuelles et graphes

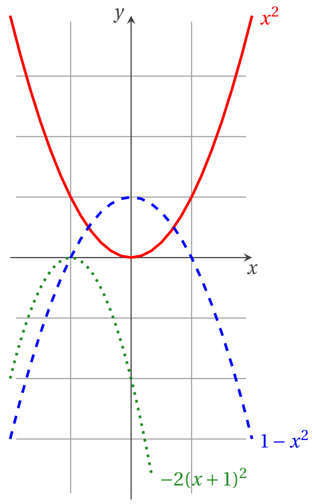
Exercice 3.10

Pour chaque fonction $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, indiquer l'ensemble de définition et l'ensemble image et tracer à main levée la courbe représentative :

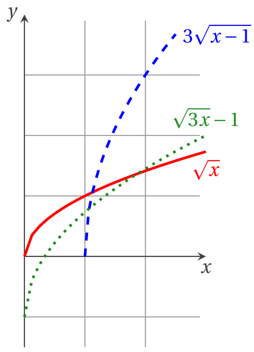
1. $f(x)=x^2$
2. $f(x)=1-x^2$
3. $f(x)=-2(x+1)^2$
4. $f(x)=\sqrt{x}$
5. $f(x)=3\sqrt{x-1}$
6. $f(x)=\sqrt{3x}-1$
7. $f(x)=\ln(x)$
8. $f(x)=\ln(-x)$
9. $f(x)=\ln(x-1)$
10. $f(x)=e^x$
11. $f(x)=e^{x-1}$
12. $f(x)=e^{-x}$
13. $f(x)=\cos(x)$
14. $f(x)=\cos(2x)$
15. $f(x)=1+\cos(2x)$
16. $f(x)=|x|$
17. $f(x)=|-x|$
18. $f(x)=-|x|$
19. $f(x)=\frac{1}{x}$
20. $f(x)=\frac{1}{x-1}$
21. $f(x)=\frac{1}{2x}$

Correction

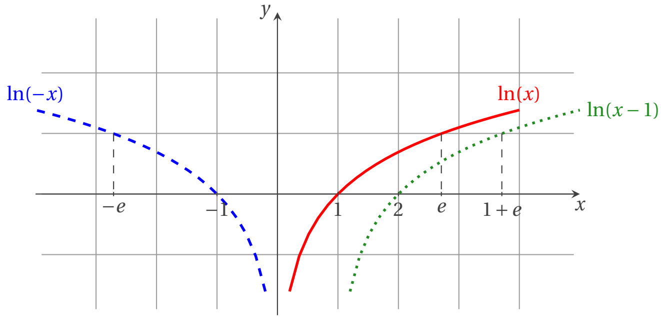
1. L'ensemble de définition de la fonction $f(x)=x^2$ est $\mathbb{R}$, l'ensemble image est $\mathbb{R}_+$.
2. L'ensemble de définition de la fonction $f(x)=1-x^2$ est $\mathbb{R}$, l'ensemble image est $]-\infty;1]$.
3. L'ensemble de définition de la fonction $f(x)=-2(x+1)^2$ est $\mathbb{R}$, l'ensemble image est $\mathbb{R}_-$.



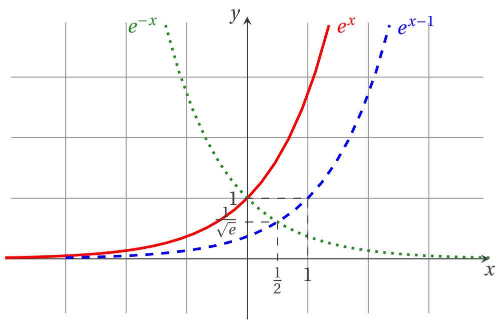
4. L'ensemble de définition de la fonction $f(x)=\sqrt{x}$ est $\mathbb{R}_+$, l'ensemble image est $\mathbb{R}_+$.
5. L'ensemble de définition de la fonction $f(x)=3\sqrt{x-1}$ est $[1;+\infty[$, l'ensemble image est $\mathbb{R}_+$.
6. L'ensemble de définition de la fonction $f(x)=\sqrt{3x}-1$ est $\mathbb{R}_+$, l'ensemble image est $[-1;+\infty[$. Notons que la fonction $\sqrt{3x}=\sqrt{3}\sqrt{x}$ peut être vue soit comme une contraction en x de 3 soit comme une dilatation en y de $\sqrt{3}$.



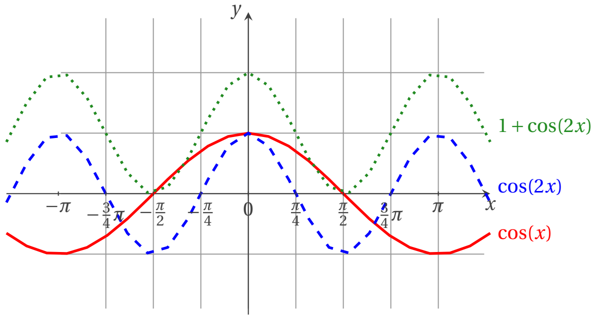
7. L'ensemble de définition de la fonction $f(x)=\ln(x)$ est $]0;+\infty[$, l'ensemble image est $\mathbb{R}$.
8. L'ensemble de définition de la fonction $f(x)=\ln(-x)$ est $]-\infty;0[$, l'ensemble image est $\mathbb{R}$.
9. L'ensemble de définition de la fonction $f(x)=\ln(x-1)$ est $]1;+\infty[$, l'ensemble image est $\mathbb{R}$.



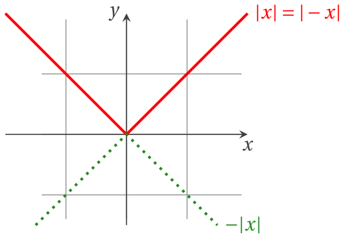
10. L'ensemble de définition de la fonction $f(x)=e^x$ est $\mathbb{R}$, l'ensemble image est $\mathbb{R}_+^*$.
11. L'ensemble de définition de la fonction $f(x)=e^{x-1}$ est $\mathbb{R}$, l'ensemble image est $\mathbb{R}_+^*$.
12. L'ensemble de définition de la fonction $f(x)=e^{-x}$ est $\mathbb{R}$, l'ensemble image est $\mathbb{R}_+^*$.



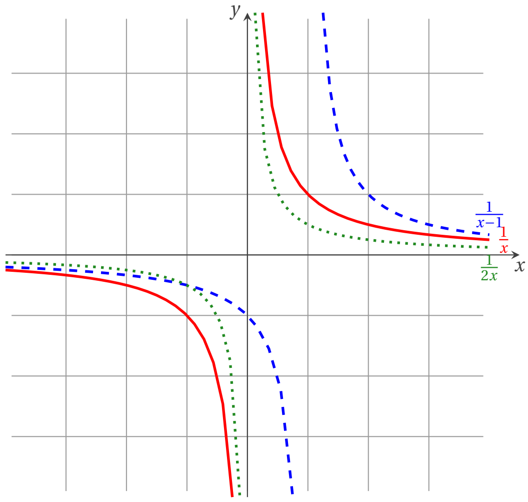
13. L'ensemble de définition de la fonction $f(x) = \cos(x)$ est $\mathbb{R}$, l'ensemble image est $[-1;1]$.
14. L'ensemble de définition de la fonction $f(x) = \cos(2x)$ est $\mathbb{R}$, l'ensemble image est $[-1;1]$.
15. L'ensemble de définition de la fonction $f(x) = 1+\cos(2x)$ est $\mathbb{R}$, l'ensemble image est $[0;2]$.



16. L'ensemble de définition de la fonction $f(x) = |x|$ est $\mathbb{R}$, l'ensemble image est $\mathbb{R}_+$.
17. L'ensemble de définition de la fonction $f(x) = |-x|$ est $\mathbb{R}$, l'ensemble image est $\mathbb{R}_+$.
18. L'ensemble de définition de la fonction $f(x) = -|x|$ est $\mathbb{R}$, l'ensemble image est $\mathbb{R}_-$.



19. L'ensemble de définition de la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$ est $\mathbb{R}^* = \mathbb{R}\setminus\{0\} =]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$, l'ensemble image est $\mathbb{R}^*$.
20. L'ensemble de définition de la fonction $f(x) = \frac{1}{x-1}$ est $\mathbb{R}\setminus\{1\} =]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$, l'ensemble image est $\mathbb{R}^*$.
21. L'ensemble de définition de la fonction $f(x) = \frac{1}{2x} = \frac{1}{2}\frac{1}{x}$ est $\mathbb{R}^* = \mathbb{R}\setminus\{0\} =]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$, l'ensemble image est $\mathbb{R}^*$.



Exercice 3.11

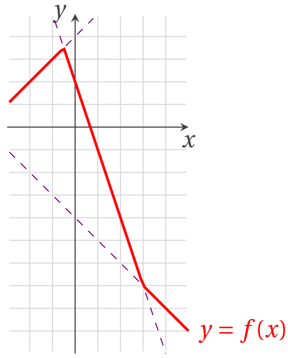
Soit $f\colon x \mapsto |x-3|-|2x+1|$ définie sur $\mathbb{R}$. Simplifier en fonction de x l'expression de $f(x)$ puis tracer la courbe représentative de la fonction f.

Correction

$$|x-3| = \begin{cases} x-3 & \text{si } x \geq 3 \\ -(x-3) & \text{si } x < 3 \end{cases} \qquad |2x+1| = \begin{cases} 2x+1 & \text{si } x \geq -1/2 \\ -(2x+1) & \text{si } x < -1/2 \end{cases}$$

donc

$$f(x) = |x-3| - |2x+1|$$
$$= \begin{cases} (-x+3)-(-2x-1) & \text{si } x < -\frac{1}{2} \\ (-x+3)-(2x+1) & \text{si } -\frac{1}{2} \le x < 3 \\ (x-3)-(2x+1) & \text{sinon.} \end{cases}$$
$$= \begin{cases} x+4 & \text{si } x < -\frac{1}{2} \\ -3x+2 & \text{si } -\frac{1}{2} \le x < 3 \\ -x-4 & \text{sinon.} \end{cases}$$



Exercice 3.12

On considère la fonction

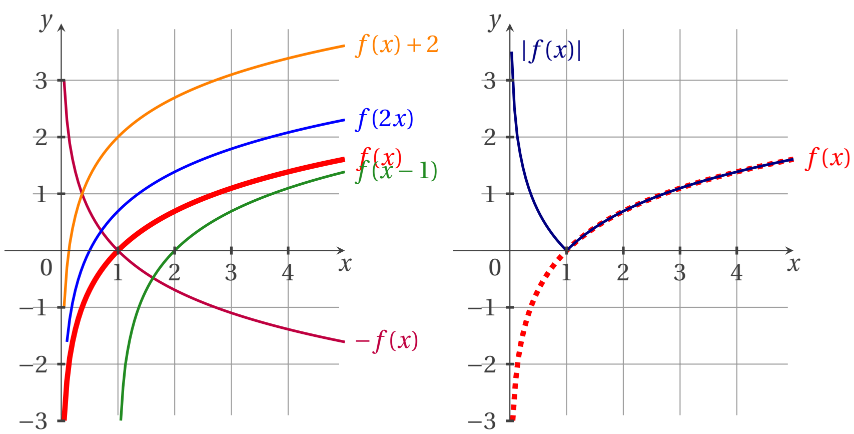
$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \ln(x) \end{aligned}$$

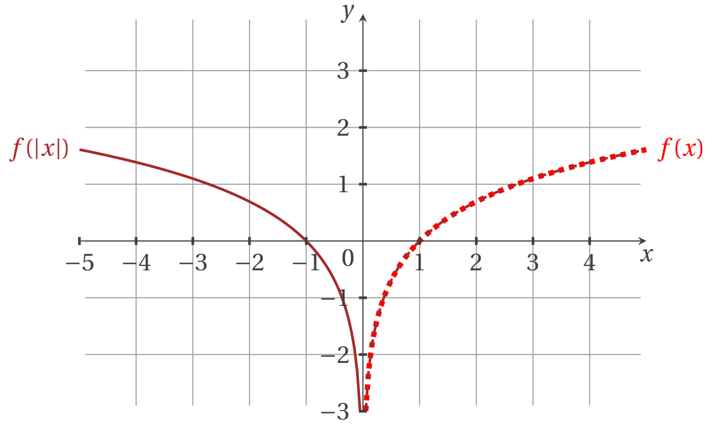
Tracer à main levée les courbes représentatives des fonctions :

1. $x \mapsto f(x)$,
2. $x \mapsto -f(x)$,
3. $x \mapsto f(x)+2$,
4. $x \mapsto f(2x)$,
5. $x \mapsto f(x-1)$,
6. $x \mapsto f(|x|)$,
7. $x \mapsto |f(x)|$.

Correction

1. $f(x) = \ln(x)$ est une fonction définie pour $x > 0$; elle est strictement croissante sur son domaine de définition ; $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$; $f(1) = 0$ et $f(e) = 1$.
2. Le graphe de $-f(x)$ est symétrique à celui de $f(x)$ par rapport à l'axe des abscisse.
3. Le graphe de $f(x)+2$ est une translation de celui de $f(x)$ vers le haut de 2 unités.
4. Le graphe de $f(2x)$ est une contraction de celui de $f(x)$ de 2 unités.
5. Le graphe de $f(x-1)$ est une translation de celui de $f(x)$ de 1 unité vers la droite.
6. $f(|x|) = f(x)$ si $x > 0$ et $f(|x|) = f(-x)$ si $x < 0$, on en déduit que son graphe coïncide avec celui de $f(x)$ si $x > 0$, tandis que pour $x < 0$ son graphe est le symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
7. $|f(x)| = f(x)$ si $f(x) > 0$ (donc si $x > 1$) ; $|f(x)| = -f(x)$ si $f(x) < 0$ (donc si $x < 1$).



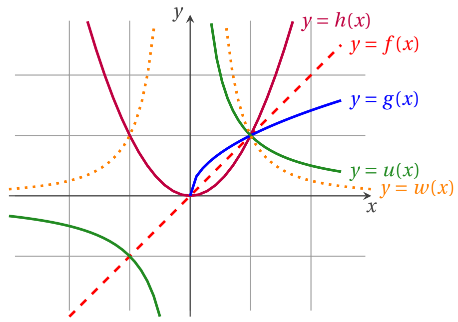


Exercice 3.13

Tracer sur un même graphique les courbes représentatives des fonctions suivantes après avoir précisé leur ensemble de définition respectifs (ne pas faire de tracé point par point!) :

$$f\colon x \mapsto x, \qquad g\colon x \mapsto \sqrt{x}, \qquad h\colon x \mapsto x^2, \qquad u\colon x \mapsto \frac{1}{x} \qquad w\colon x \mapsto \frac{1}{x^2}.$$

Correction

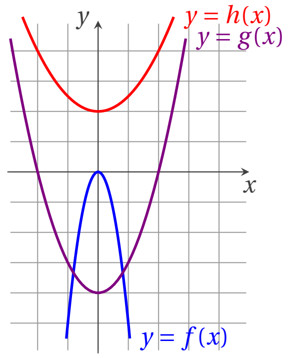


Exercice 3.14

Donner les tableaux de variations des fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}$:

$$f\colon x \mapsto -5x^2, \qquad g\colon x \mapsto x^2-4, \qquad h\colon x \mapsto 0.5x^2+2.$$

Correction



	croissante	décroissante
f	$x<0$	$x>0$
g	$x>0$	$x<0$
h	$x>0$	$x<0$

Exercice 3.15

Soit f la fonction définie par $f(x)=\sqrt{x^2+6x+8}-\sqrt{x^2-1}$. Donner son ensemble de définition $\mathscr{D}_f$ et étudier le signe de $f(x)$ pour $x \in \mathscr{D}_f$.

Correction

Ensemble de définition : il faut que

$$\begin{cases} x^2+6x+8\ge 0,\\ x^2-1\ge 0, \end{cases} \iff \begin{cases} (x+2)(x+4)\ge 0,\\ (x-1)(x+1)\ge 0, \end{cases}$$

donc $\mathscr{D}_f =]-\infty,-4]\cup[-2,-1]\cup[1,+\infty[$.

Signe : pour tout $x\in\mathscr{D}_f$ on a

$$\sqrt{x^2+6x+8}-\sqrt{x^2-1}>0 \iff x^2+6x+8>x^2-1 \iff x>-3/2$$

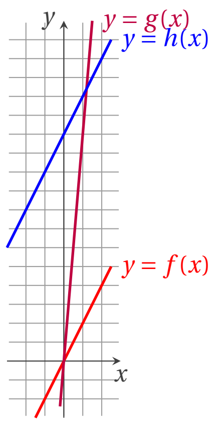
donc

- ⋆ $f(x)=0$ si et seulement si $x=-3/2$,
- ⋆ $f(x)>0$ pour $x\in]-3/2,-1]\cup[1,+\infty[$,
- ⋆ $f(x)<0$ pour $x\in]-\infty,-4]\cup]-2,-3/2[$.

Exercice 3.16

Tracer dans un même plan cartésien le graphe des fonctions définies par $f(x)=2x$, $g(x)=12x$, $h(x)=2x+12$.

Correction



Exercice 3.17

Une fonction affine prend la valeur H au point r et son graphe passe par l'origine. Quelle est son équation ?

Correction

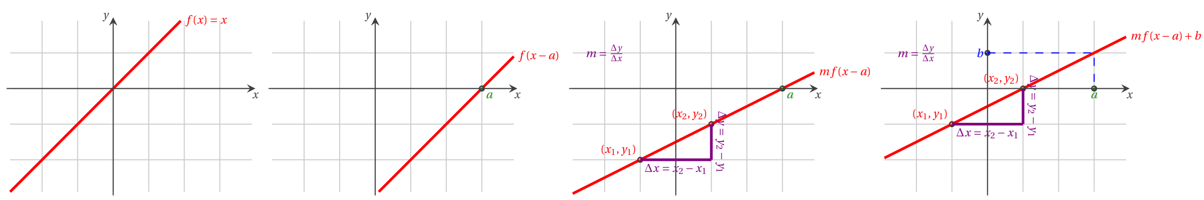
Une fonction affine a pour équation $f(x)=mx+q$. Pour calculer m et q on impose les deux conditions : $\begin{cases} H=mr+q\\ 0=q \end{cases}$ et on obtient $f(x)=\frac{H}{r}x$

Exercice 3.18

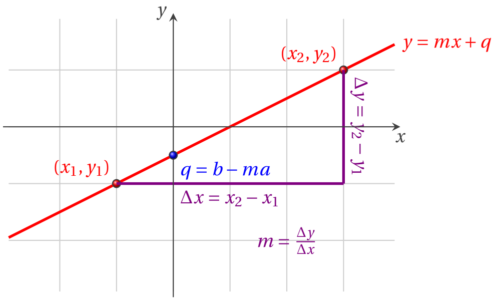
Tracer le graphe des fonctions définies par $f(x)=m(x-a)+b$ pour différentes valeurs de a, m et b. Identifier ces trois paramètres sur un graphe général.

Correction

Construction :

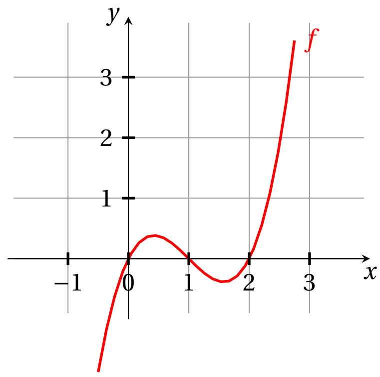


Le graphe de la fonction est une droite qui passe par le point $(0, q = b - ma)$. La pente de la droite est égale à m : l'accroissement de la variable y résultat d'un accroissement d'une unité de la variable x est égal à m. La droite passe donc par le point $(1, m + q)$. La tangente de l'angle entre la droite d'équation $y = m(x - a) + b$ et une droite horizontale est égale à m.

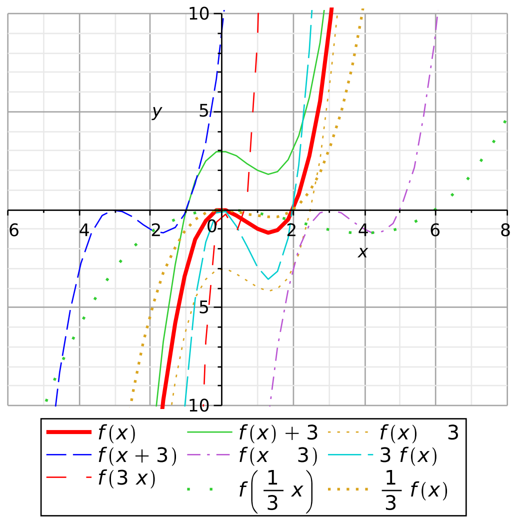


Exercice 3.19

Pour la fonction dont le graphe est reproduit plus bas, tracer, sans faire de calcul, une esquisse des graphes des fonctions $f(x)+3$, $f(x)-3$, $f(x+3)$, $f(x-3)$, $3f(x)$, $f(3x)$, $f(x/3)$ $f(x)/3$.

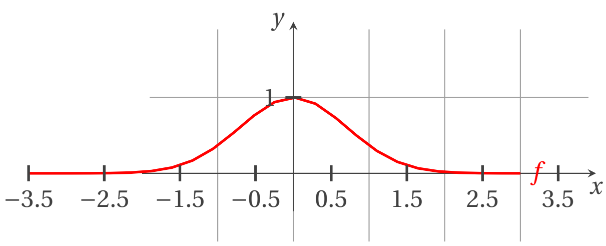


Correction

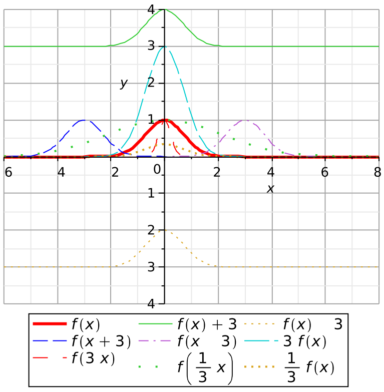


Exercice 3.20

Pour la fonction dont le graphe est reproduit plus bas, tracer, sans faire de calcul, une esquisse des graphes des fonctions $f(x)+3$, $f(x)-3$, $f(x+3)$, $f(x-3)$, $3f(x)$, $f(3x)$, $f(x/3)$ $f(x)/3$.



Correction

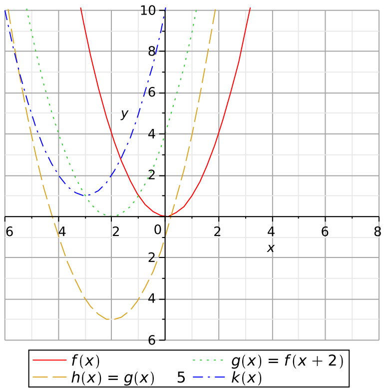


Exercice 3.21

Tracer dans un même plan cartésien le graphe des fonctions définies par $f(x) = x^2$, $g(x) = (x+2)^2$, $h(x) = (x+2)^2 - 5$, $k(x) = x^2 + 6x + 10$.

Correction

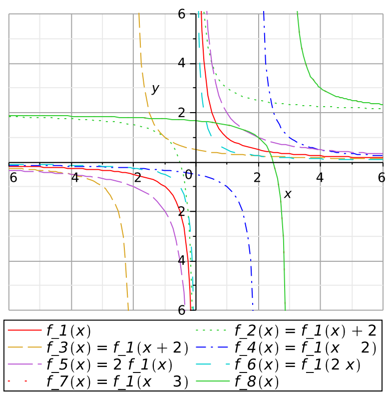
Notons que $k(x) = x^2 + 6x + 10 = (x+\alpha)^2 + \beta = x^2 + 2\alpha x + \alpha^2 + \beta$ ainsi $2\alpha = 6$ et $\beta = 10 - \alpha^2$ donc $k(x) = (x+3)^2 + 1$.



Exercice 3.22

Tracer dans un même plan cartésien le graphe des fonctions définies par $f_1(x) = \frac{1}{x}$, $f_2(x) = \frac{1}{x} + 2$, $f_3(x) = \frac{1}{x+2}$, $f_4(x) = \frac{1}{x-2}$, $f_5(x) = 2\frac{1}{x}$, $f_6(x) = \frac{1}{2x}$, $f_7(x) = \frac{1}{x-3} + 2$, $f_8(x) = \frac{2x-5}{x-3}$.

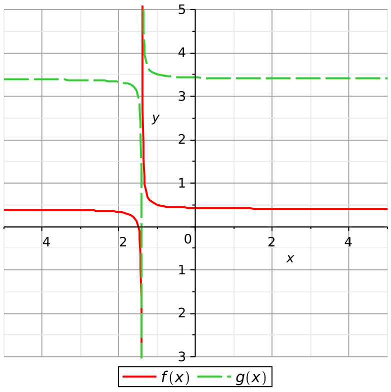
Correction



Exercice 3.23

Tracer dans le même repère le graphe des fonctions définies par $f(x) = \dfrac{3+2x}{7+5x}$, $g(x) = 3 + \dfrac{3+2x}{7+5x}$.

Correction

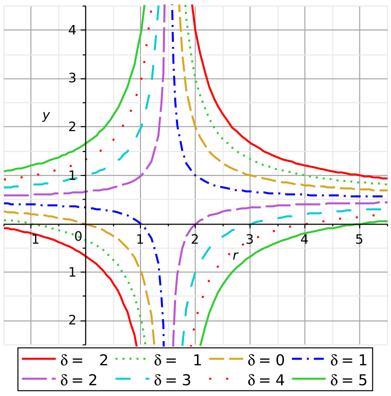


Exercice 3.24

Tracer le graphe de la fonction définie par $H(r) = \dfrac{r-\delta}{2r-3}$ où δ est une constante. Discuter les cas en fonction de δ.

Correction

Il s'agit d'hyperboles équilatères dont les asymptotes sont parallèles aux axes et se coupent en $(3/2, 1/2)$.

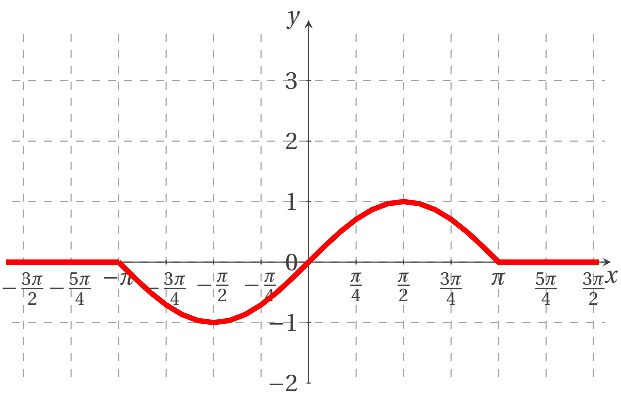


Exercice 3.25

Dans la figure ci-dessous on a représenté la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x) & \text{si } x \in [-\pi; \pi], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

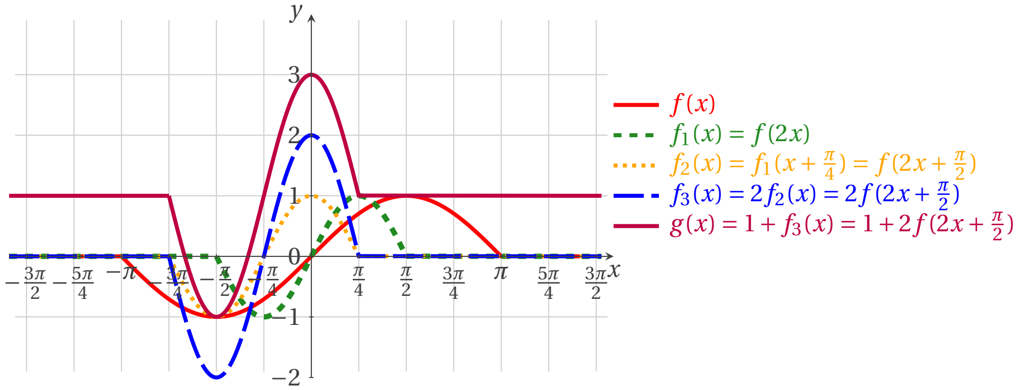
Tracer dans la même figure le graphe de la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = 1 + 2f\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$.



Correction

On pourra utiliser les transformations élémentaires suivantes :

- ⋆ $f_1(x)=f(2x)=f(u(x))$ avec $u(x)=2x$,
- ⋆ soit on considère $f_2(x)=f_1\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=f_1(v(x))$ avec $v(x)=x+\frac{\pi}{4}$ donc $f_2(x)=f_1(v(x))=f(u(v(x)))=f(2v(x))=f\left(2\left(+\frac{\pi}{4}\right)\right)=f\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$, soit on considère $f_2(x)=f\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)=f(w(u(x))$ avec $w(x)=x+\frac{\pi}{2}$ et $u(x)=2x$,
- ⋆ $f_3(x)=2f_2(x)=2f\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$
- ⋆ $g(x)=1+f_3(x)=1+2f\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$.

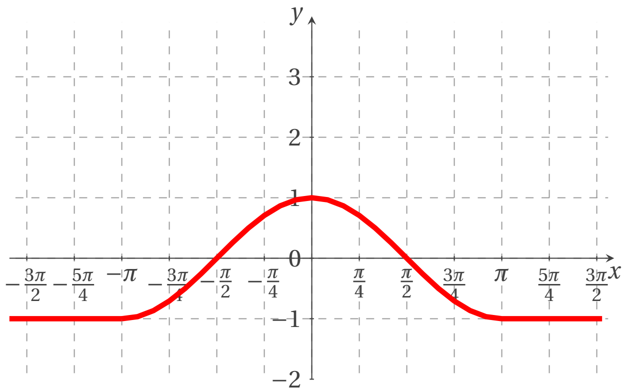


Exercice 3.26

Dans la figure ci-dessous on a représenté la fonction $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par

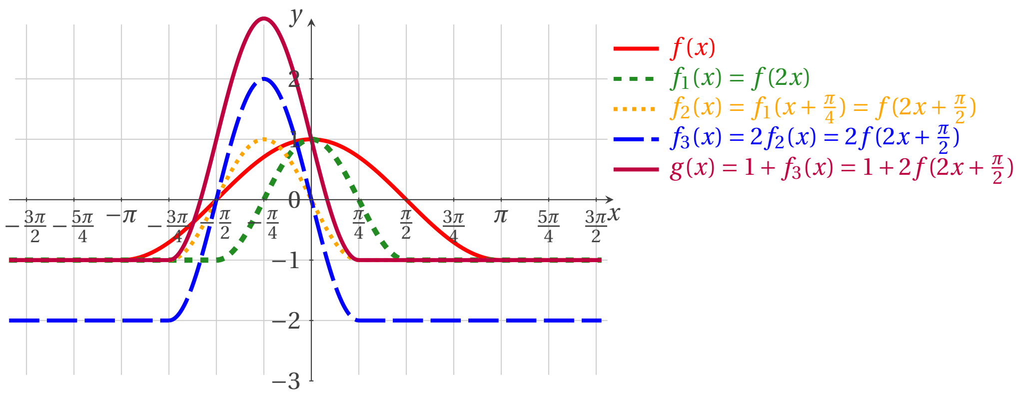
$$f(x)=\begin{cases}\cos(x) & \text{si } x\in[-\pi;\pi],\\ -1 & \text{sinon.}\end{cases}$$

Tracer dans la même figure le graphe de la fonction $g\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $g(x)=1+2f\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$.



Suggestion : utiliser les transformations élémentaires $f_1(x)=f(2x)$, $f_2(x)=f_1\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=f\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$, $f_3(x)=2f_2(x)=2f\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$ *et* $g(x)=1+f_3(x)=1+2f\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$.

Correction

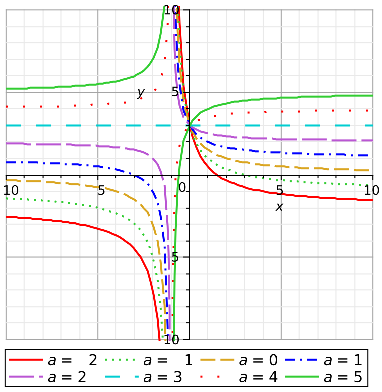


Exercice 3.27

Tracer le graphe de la fonction définie par $f(x) = \frac{ax+3}{x+1}$ pour différentes valeurs de a.

Correction

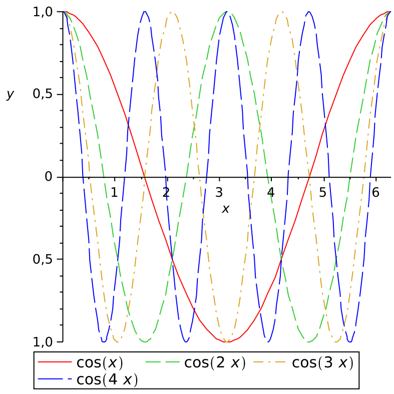
Si $a = 3$, $f(x) = 3$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, si $a \neq 3$ il s'agit d'hyperboles équilatères dont les asymptotes sont parallèles aux axes et se coupent en $(-1, a)$.



Exercice 3.28

Tracer le graphe de la fonction définie par $f(x) = \cos(nx)$ pour $n = 1, 2, 3, 4$.

Correction



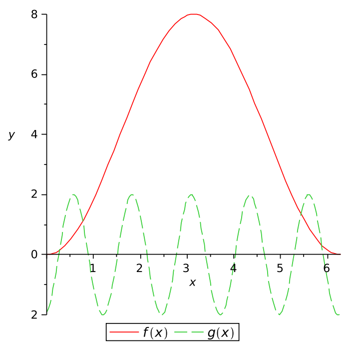
Exercice 3.29

Tracer le graphe des fonctions définies par $f(x) = 4(1 - \cos(x))$, $g(x) = -2\cos(5x - 6)$.

Correction

On considère la composition suivante :

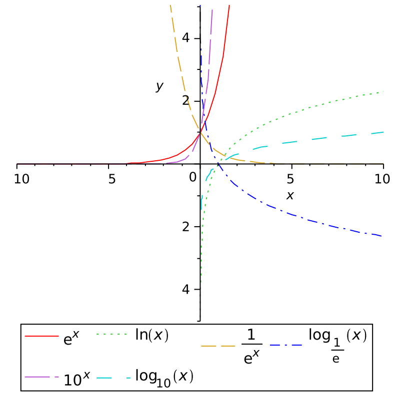
$$x \mapsto y = \cos(x) \mapsto z = -y = -\cos(x) \mapsto v = 1 + z = 1 - y = 1 - \cos(x) \mapsto w = 4v = 4(1+z) = 4(1-y) = 4(1-\cos(x))$$



Exercice 3.30

Tracer dans un même plan cartésien le graphe des fonctions définies par $f_1(x) = a^x$, $f_2(x) = \log_a(x)$ pour $a = e$, $a = 1/e$, $a = 10$.

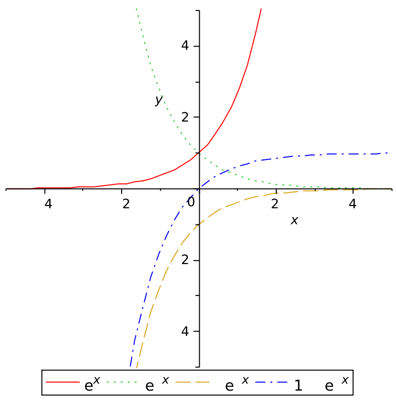
Correction



Exercice 3.31

Tracer dans un même plan cartésien le graphe des fonctions définies par $f_1(x) = e^x$, $f_2(x) = e^{-x}$, $f_3(x) = -e^{-x}$ et $f_4(x) = 1 - e^{-x}$.

Correction



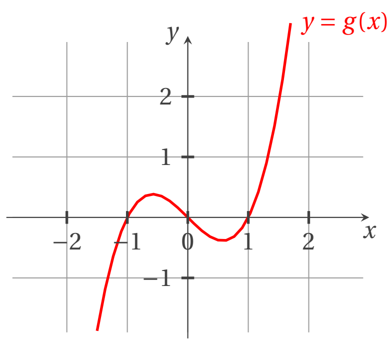
Exercice 3.32

Discuter graphiquement suivant la valeur du paramètre $m \in \mathbb{R}$ le nombre et la position des solutions de l'équation $f(x) = 0$ pour :

1. $f(x) = x^3 - x - m$,
2. $f(x) = \cos(5x) - m$.

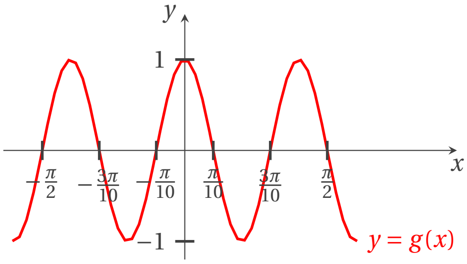
Correction

1. On cherche les intersections de la fonction définie par $g(x) = x^3 - x$ avec la droite d'équation $y = m$:



Si $|m| > \frac{1}{\sqrt{3^3}} - \frac{1}{\sqrt{3}}$, il y a une seule intersection ; si $|m| < \frac{1}{\sqrt{3^3}} - \frac{1}{\sqrt{3}}$ il y a trois intersections ; si $|m| = \frac{1}{\sqrt{3^3}} - \frac{1}{\sqrt{3}}$ il y a deux intersections.

2. On cherche les intersections de la fonction définie par $g(x) = \cos(5x)$ avec la droite d'équation $y = m$:



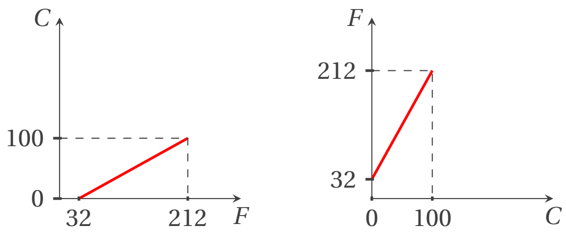
Si $|m| > 1$, il n'y a pas d'intersections, sinon il y a une infinité d'intersections.

Exercice 3.33 (Échelles de température)

Une température de 32°F correspondent à 0 °C tandis que 100 °C correspondent à 212°F. Les échelles de température sont linéaires. Donner les équations de conversion de Celsius en Fahrenheit et vice-versa. Comment évolue la température exprimée en degrés Celsius lorsqu'elle augmente d'un degré Fahrenheit ? Que vaut le zéro absolu (−273.15 °C) en degré Fahrenheit ?

Correction

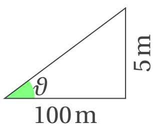
$F = \frac{9}{5}C + 32$, $C = \frac{5}{9}F - \frac{160}{9}$. Lorsqu'elle augmente d'un degré Fahrenheit, la température augmente de 5/9 degrés Celsius. −273.15 °C correspondent à −459.67°F



Exercice 3.34 (Inclinaison et panneaux routiers)

Les panneaux routiers indiquent les inclinaisons des routes au moyen de pourcentages. Une route dont l'inclinaison est de 7.5% est une route pour laquelle l'altitude augmente ou diminue de 7.5 m lorsque on se déplace horizontalement de 100 m. Sur autoroute, l'inclinaison maximale est de 5%. À quelle angle cette inclinaison correspond-t-elle ?

Correction

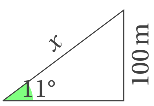


$7.5\% = \frac{7.5\,\text{m}}{100\,\text{m}} = 0.075$ donc $5\% = \frac{5\,\text{m}}{100\,\text{m}} = 0.05$ et $\arctan(0.05) \approx 2.86°$.

Exercice 3.35

Une route fait un angle de 11° avec l'horizontale. Quelle distance a-t-on parcouru lorsqu'on se trouve 100 m plus haut que le point de départ ?

Correction



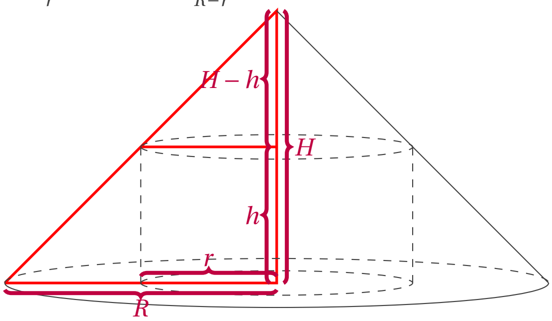
x vérifie l'équation $x\sin(11°) = 100$ donc $x = 524\,\text{m}$.

Exercice 3.36

Un cylindre circulaire droit de rayon r et de hauteur h est inscrit dans un cône de hauteur H et de rayon R. Exprimer H en fonction de r, h et R.

Correction

D'après le théorème de Thalès : $\frac{H}{R} = \frac{H-h}{r}$ donc $H = \frac{hR}{R-r}$.



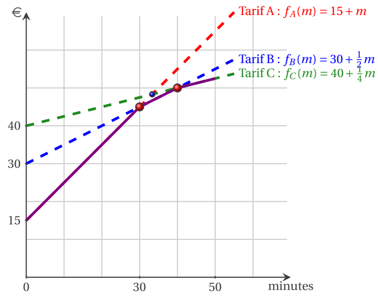
Exercice 3.37

Un réseau de mobilophonie annonce ses tarifs :
Tarif A : une redevance fixe de 15 € par mois et 1 € par minute.
Tarif B : une redevance fixe de 30 € par mois et 0.5 € par minute.
Tarif C : une redevance fixe de 40 € par mois et 0.25 € par minute.
Quelle formule choisir lorsque l'on téléphone m minutes par mois en moyenne ?

Correction

Soit m la durée de communication par mois en minutes. On choisira A, B ou C selon que $m \le 30$, $30 \le m \le 40$ ou $m \ge 40$:

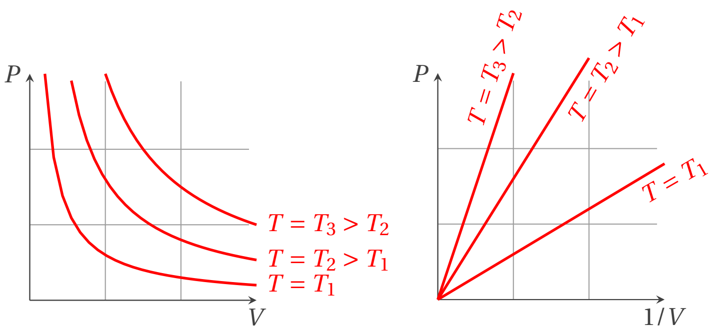
$$\text{Formule optimale}(m) = \begin{cases} 15+m & \text{si } m \le 30, \\ 30+m/2 & \text{si } 30 \le \le 40, \\ 40+m/4 & \text{si } m \ge 40, \end{cases}$$



Exercice 3.38 (Gas parfaits)

D'après la loi de Boyle-Mariotte pour les gaz parfaits, la pression P, le volume V et la température T d'un gaz obéissent à la loi $PV = nRT$ où R est une constante et n représente le nombre de moles du gaz. Représenter l'évolution de la pression en fonction du volume lorsque la température et le nombre de moles sont maintenus constants. Recommencer pour différentes valeurs de température.

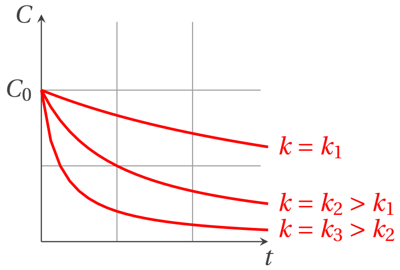
Correction



Exercice 3.39

La concentration C d'un réactif d'une réaction chimique de second ordre est donnée par $C(t) = \dfrac{C_0}{1+kC_0 t}$ où C_0 est la concentration initiale et $k>0$ est une constante cinétique chimique. Tracez le graphe de la fonction $C\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ pour différentes valeurs de k.

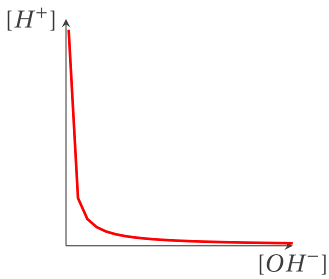
Correction



Exercice 3.40

Dans une solution à 25 °C, la liaison entre la concentration en ions OH^- et celle en ions H^+ est donnée par $[OH^-][H^+] = 10^{-14}$. Représenter une de ces deux concentrations en fonction de l'autre.

Correction



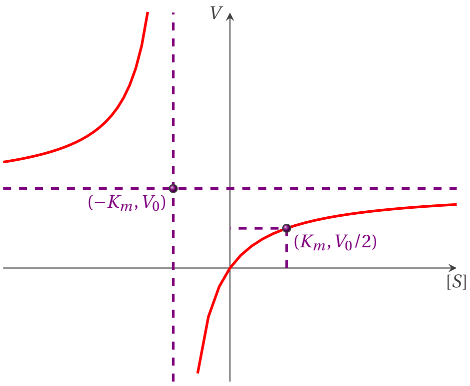
Exercice 3.41

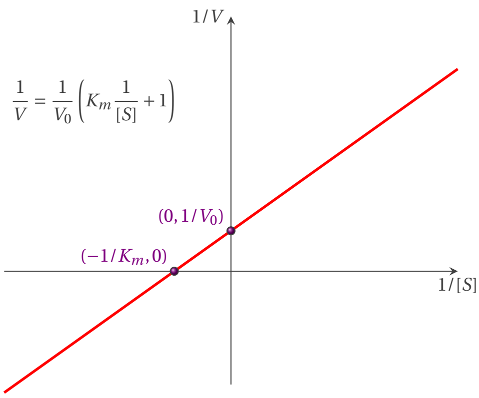
D'après Michaelis et Menten, la vitesse V de réaction enzymatique dépend de la concentration en substrat $[S]$ selon la loi

$$V([S]) = V_0 \frac{[S]}{[S]+K_m}$$

où $[S]$ est la concentration en substrat, $V_0>0$ est une constante propre à la réaction et $K_m>0$ est la constante de Michaelis-Menten spécifique de l'enzyme. Vérifier que K_m c'est la concentration en substrat pour laquelle la vitesse de la réaction est égale à $V_0/2$ et tracer une esquisse de l'évolution de V en fonction de $[S]$. Tracer ensuite le graphe de $1/V$ en fonction de $1/[S]$.

Correction
$V(K_m) = V_0\frac{K_m}{K_m+K_m} = \frac{V_0}{2}$. Le graphe de $[S] \mapsto V$ est une hyperbole équilatère dont les asymptotes sont parallèles aux axes et se coupent en $(-K_m, V_0)$; le graphe de $1/[S] \mapsto 1/V$ est une droite passant par $(-1/K_m, 0)$ et $(0, 1/V_0)$.



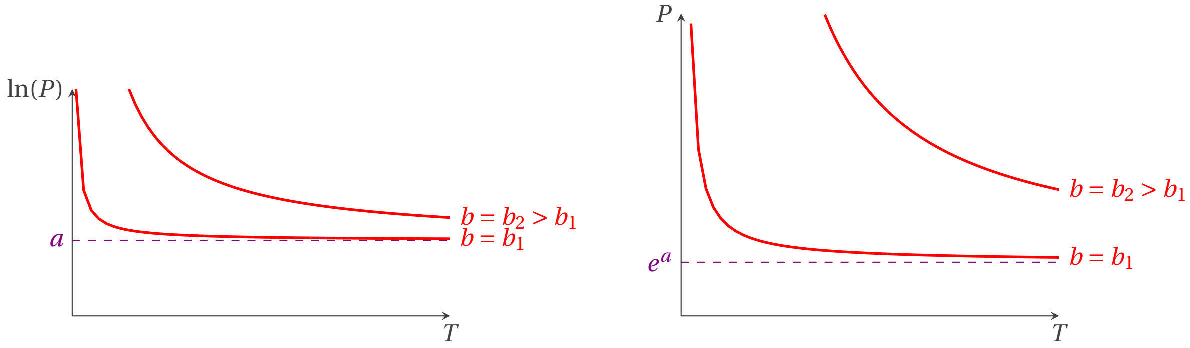


Exercice 3.42

La température T d'ébullition de l'eau est liée à la pression P qui règne au-dessus du liquide par la relation $\ln(P) = a + b/T$ où a et b sont des constantes. Tracer une esquisse de l'évolution de $\ln(P)$ en fonction de T. Exprimer P en fonction de T.

Correction

$P = e^{a+b/T}$



Exercice 3.43

Quel volume d'air faut-il insuffler dans un ballon sphérique pour que son rayon passe de R à $R+1$?

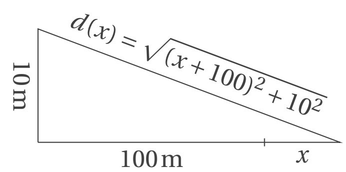
Correction

Le volume d'air d'un ballon sphérique de rayon R est $\frac{4}{3}\pi R^3$ et d'un ballon sphérique de rayon $R+1$ est $\frac{4}{3}\pi(R+1)^3$ donc il faut insuffler un volume d'air égal à $\frac{4}{3}\pi(R+1)^3 - \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi(3R^2+3R+1)$.

Exercice 3.44

Une tour de contrôle d'une hauteur de 10 m se situe à 100 m d'une piste d'envol. Exprimer la distance entre un avion sur la piste et le sommet de la tour de contrôle en fonction de la position de l'avion.

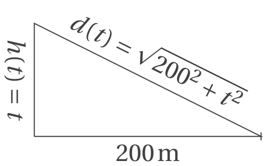
Correction



Exercice 3.45

Une montgolfière s'élève du sol à la verticale à une vitesse de $1\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Exprimer la distance entre la montgolfière et un observateur initialement situé à 200 m.

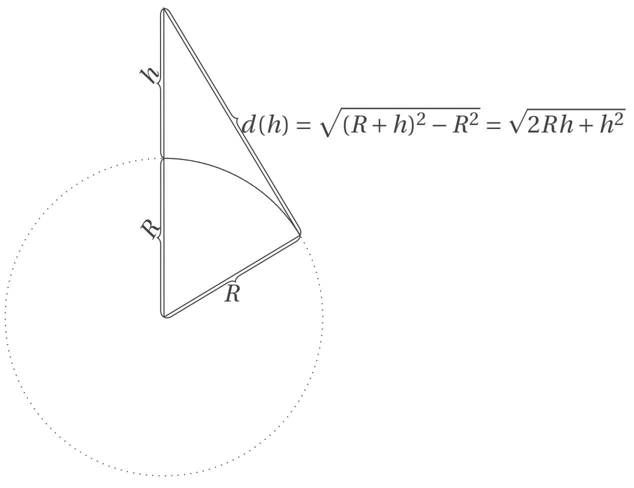
Correction



Exercice 3.46

Un observateur situé à une hauteur de h mètres du niveau de la mer observe l'horizon. Quel est le point le plus distant qu'il découvre si la Terre est parfaitement sphérique et l'équateur mesure 40000 km ? La plus courte distance entre la côte de la France et celle de la Grande-Bretagne est de 17 km. À quelle hauteur faut-il se placer pour découvrir la côte anglaise ?

Correction



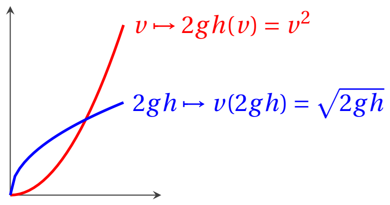
Deux possibilités :

- ⋆ si on considère $d = 17\,\text{km}$ il faut se placer à $h(d) = \sqrt{R^2 + d^2} - R = 3.61\,\text{m}$;
- ⋆ si on considère que la distance est mesurée au sol, alors $h = \frac{R}{\cos(\alpha)} - R = 3.60\,\text{m}$ avec $\alpha = 17/R$.

Exercice 3.47

D'après la loi de TORRICELLI, si on perce un trou à la base d'une colonne d'eau d'une hauteur h m, l'eau s'échappe à une vitesse de $\sqrt{2gh}\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ où g =9.81 $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$. Faire une représentation de l'évolution de $2gh$ en fonction de la vitesse de l'écoulement. Trouver la réciproque de cette fonction et tracer son graphe. Comment évolue la vitesse lorsque la hauteur est multipliée par deux ?

Correction
Lorsque la hauteur est multipliée par deux, la vitesse est multipliée par $\sqrt{2}$.



Exercice 3.48

Une approximation de l'angle ϑ qu'un pendule fait avec la verticale au temps t est donnée par

$$\vartheta(t) = \vartheta_0 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{\ell}}\,t\right)$$

où ϑ_0 est l'angle de départ, ℓ est la longueur du pendule en mètres, g est la constante de gravité (=9.81 $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$). Tracer le graphe de $t \mapsto \vartheta(t)$. Combien d'oscillations le pendule fait-il par seconde ? Combien de secondes faut-il au pendule pour faire une oscillation complète ?

Correction

$$v = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\ell}}, \qquad T = \frac{1}{v}$$

Exercice 3.49

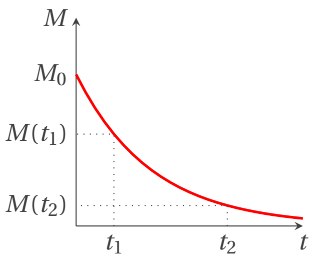
L'intensité de certaines étoiles varie en manière sinusoïdale. L'intensité d'une de ces étoile possède une période de 5.4 jours et une intensité qui varie entre $4 + 0.35$ et $4 - 0.35$. Trouver une expression pour l'intensité en fonction du temps.

Correction
$I(t) = 4 + 0.35\cos\left(\frac{2\pi t}{5.4} + \varphi\right)$ avec φ quelconque.

Exercice 3.50

Le radium se désintègre au cours du temps en obéissant à la loi $M(t) = M_0 \exp(-0.000436t)$, où M_0 représente la masse de radium présente au temps $t = 0$ et t est donné en années. Tracer le graphe de la fonction M. Au départ de $t = 0$, combien de temps faut-il attendre pour que la masse se réduise de moitié ? Et au départ de $t = 10$?

Correction



On cherche $(t_2 - t_1)$ tel que $M(t_2) = \frac{M(t_1)}{2}$.

$$M(t_2) = \frac{M(t_1)}{2} \iff t_1 - t_2 = -\ln(2)/0.000436$$

Pour que la masse se réduise de moitié il faut attendre $t = 1589.8$ années indépendamment du temps initial.

Exercice 3.51

L'évolution de la population mondiale P durant le XX^e siècle peut être approchée au moyen d'une fonction exponentielle par

$$P(t) = 0.0083 \times (1.0137)^t$$

où t désigne l'année considérée. Quand la population dépassera-t-elle 7 milliards d'habitants ? Soit $t = 1900$; combien de temps faut-il attendre pour que la population double ? Même question en $t = 2000$.

Correction

* $P(t) > 7\times10^9 \iff t > \log_{1.0137}\left(\frac{7\times10^9}{0.0083}\right) = \frac{\ln\left(\frac{7\times10^9}{0.0083}\right)}{\ln(1.0137)} = \frac{\ln(7)+9\ln(10)-\ln(0.0083)}{\ln(1.0137)} \simeq 2018$: la population dépassera 7 milliards d'habitants en 2018.
* On cherche $(t_2 - t_1)$ tel que $P(t_2) = 2P(t_1)$ et l'on a $P(t_2) = 2P(t_1) \iff t_2 = \log_{1.0137}(2) + t_1 = \frac{\ln(2)}{\ln(1.0137)} + t_1 \simeq 50.941 + t_1$: pour que la population double il faut attendre 51 années indépendamment de l'année initiale. En effet

$$P(1900) \simeq 1.4028990\times10^9, \quad P(1951) \simeq 2.8080717\times10^9, \quad P(2000) \simeq 5.4697953\times10^9, \quad P(2051) \simeq 10.948455\times10^9.$$

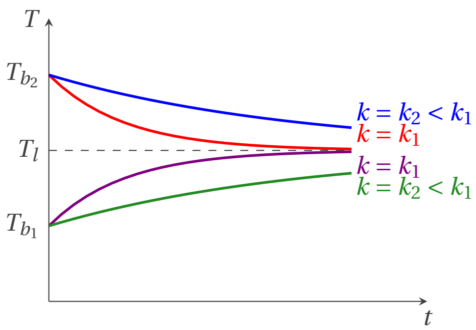
Exercice 3.52

L'évolution de la température T d'une bille de température initiale T_b plongée dans un liquide de température T_l est décrite par

$$T(t) = T_l + (T_b - T_l)e^{-kt}$$

où k est une constante propre au liquide. Tracer le graphe de cette fonction pour différentes valeurs de k.

Correction



Exercice 3.53

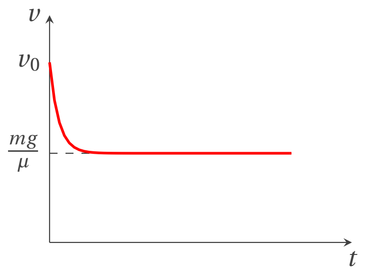
La vitesse v d'une masse m soumise à la pesanteur et à une force de frottement directement proportionnelle à v est donné par

$$v(t) = \frac{mg}{\mu} + Ke^{-\mu t/m},$$

où m, g et μ sont des constantes positives. Déterminer la valeur de K pour laquelle $v(0) = v_0$ et tracer le graphe de la fonction $t \mapsto v(t)$.

Correction

Pour que $v(0) = v_0$ il faut que $K = v_0 - \frac{mg}{\mu}$.



Exercice 3.54

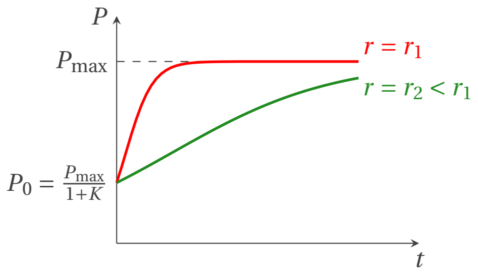
Le mathématicien P.F. Verhulst a proposé au XIX^e siècle un modèle de croissance de population. Dans ce modèle, la population P au temps t est donnée par

$$P(t) = P_{\max}\frac{\exp(rP_{\max}t)}{K + \exp(rP_{\max}t)}$$

où $P_{\max}$ est la population maximale et $r > 0$ et $K > 1$ sont des constantes. Simplifier l'expression et tracer le graphe de cette fonction pour différentes valeurs des constantes.

Correction

$P(t) = P_{\max}\dfrac{\exp(rP_{\max}t)}{K + \exp(rP_{\max}t)} = P_{\max}\dfrac{1}{1 + K\exp(-rP_{\max}t)}$



Exercice 3.55

Le rayon d'une sphère est multiplié par deux ; comment évolue son volume ? Comment évolue le volume d'un cube dont la longueur des côtés est multipliée par deux ?

Correction

Multiplié par 8 dans tous les cas car le volume de la sphère en fonction du rayon r s'écrit $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$ et le volume du cube en fonction de la longueur de son coté ℓ s'écrit $V(\ell) = \ell^3$.

4

Éléments de logique et notions fondamentales de la théorie des ensembles

Des êtres, aussi bien physique (élève, chat, chaise...), qu'objets de notre pensée (nombre, fonction...), seront représentés par des lettres a, b, E, μ ... et considérés comme bien définis si nous disposons d'un critère permettant d'affirmer que deux de ces objets (représentés par a et b) sont, ou bien identiques, ou bien distincts :

$$a = b \qquad \text{ou bien} \qquad a \neq b.$$

4.1 Logique et quantificateurs

4.1 Définition (Assertion)
Une ASSERTION est un énoncé dont on peut affirmer sans ambiguïté s'il est vrai ou s'il est faux.

EXEMPLE
"$1 < 2$" est une assertion vraie, "$4 < 3$" est une assertion fausse.

4.2 Définition (Proposition ou Prédicat)
Une PROPOSITION (ou prédicat) est un énoncé contenant des variables, qui est vrai pour certaines valeurs attribuées à ces variables, faux pour toutes les autres.

EXEMPLE
- ⋆ "$x < 2$" est une proposition, elle est vraie pour les nombres strictement inférieurs à 2, fausse pour tous les autres.
- ⋆ L'énoncé «Mon pays se situe en Europe» sera vrai ou faux en fonction de la valeur de la variable «Mon pays». Si le lecteur est français, on obtiendra la proposition «La France se situe en Europe», qui est vraie ; si le lecteur est canadien, on obtiendra la proposition «Le Canada se situe en Europe» qui est fausse

4.3 Définition (Négation d'une proposition)
La NÉGATION d'une proposition "P", notée "non(P)" ou "$\neg(P)$", est une proposition qui est vraie lorsque P est fausse et qui est fausse lorsque P est vraie. Par conséquent, la double négation correspond à une affirmation ; autrement dit, les propositions P et $\neg(\neg(P))$ sont logiquement équivalentes.

EXEMPLE
La proposition "$x < 2$" est la négation de la proposition "$x \geq 2$" .

4.4 Définition (Conjonction de deux propositions)
La CONJONCTION de deux propositions P, Q, notée "P et Q" ou "$P \wedge Q$", est une proposition vraie si les deux propositions sont vraies, fausse dans tous les autres cas.

EXEMPLE
La conjonction des propositions "$x \le 2$" et "$x \ge 2$" est "$x = 2$".

4.5 Définition (Incompatibilité de deux propositions)
Deux propositions P, Q sont incompatibles si la conjonction "P et Q" est toujours fausse.

EXEMPLE
Les propositions "$x \le 2$" et "$x \ge 5$" sont incompatibles.

4.6 Définition (Disjonction de deux propositions)
La DISJONCTION de deux propositions P, Q, notée "P ou Q" ou "$P \lor Q$', est une proposition vraie si au moins une des deux propositions est vraie, fausse dans tous les autres cas (le "ou" est inclusif).

EXEMPLE
La disjonction "$x > 2$ ou $x < 2$" est "$x \neq 2$".

4.7 Définition (Implication de deux propositions)
L'IMPLICATION de deux propositions P, Q, notée "$P \implies Q$", est la proposition "(non(P)) ou Q".
Sa contraposée (qui est logiquement équivalente) est la proposition "(non(non(Q))) ou (non$P$)", notée "(non(Q)) $\implies$ (non(P))".
Sa négation est la proposition "P et (non(Q))".
Sa réciproque est la proposition "(non(Q)) ou P", notée "$Q \implies P$".

Remarque
L'implication "$P \implies Q$" se lit "P implique Q" ou "P entraine Q" ou "P est une condition suffisante de Q" ou "Q est une condition nécessaire de P". Le fait que "$P \implies Q$" soit vraie signifie que pour que Q soit vraie il suffit que P soit vraie, ou encore, que pour que P soit fausse il suffit que Q soit fausse.
L'implication "$P \implies Q$" équivaut à l'implication "non(Q) $\implies$ non(P)" (sa contraposée) et on écrit

$$\text{“}P \implies Q\text{”} \qquad \equiv \qquad \text{“non}(Q) \implies \text{non}(P)\text{”}$$

4.8 Définition (Théorème)
P et Q étant deux assertions, si l'implication "$P \implies Q$" est vraie on dit que c'est un THÉORÈME (c'est-à-dire une assertion démontrée dont P est l'HYPOTHÈSE et Q la CONCLUSION).

ATTENTION
Soit P ="Jour férié" et Q ="le facteur ne passe pas". La phrase «Les jours fériés le facteur ne passe pas» signifie que "$P \implies Q$". Il ne viendrait à l'esprit de personne d'inverser le raisonnement en «Le facteur ne passe pas aujourd'hui donc c'est forcément un jour férié», autrement dit, si on sait juste que "$P \implies Q$", alors à partir de "$\neg P$" il n'est pas possible de déduire quoi que ce soit.

4.9 Définition (Équivalence de deux propositions)
L'ÉQUIVALENCE de deux propositions P, Q, notée "$P \iff Q$", est la proposition "($P \implies Q$) et ($Q \implies P$)".
Sa négation est la proposition "(P et non(Q)) ou (Q et non(P))" qui signifie "ou bien P, ou bien Q".

Tables de vérité La méthode des tables de vérité est une méthode élémentaire pour tester la validité d'une formule du calcul propositionnel. Les énoncés étant composés à partir des connecteurs «non», «et», «ou», «si. . ., alors», «si et seulement si», notés respectivement $\neg$, $\land$, $\lor$, $\implies$, $\iff$, les fonctions de vérités du calcul propositionnel classique sont données par la table de vérité suivante :

P	Q	$\neg(P)$	$\neg(Q)$	$P \land Q$	$P \lor Q$	$P \implies Q$	$Q \implies P$	$P \iff Q$
F	F	V	V	F	F	V	V	V
F	V	V	F	F	V	V	F	F
V	F	F	V	F	V	F	V	F
V	V	F	F	V	V	V	V	V

En logique classique, la double négation correspond à une affirmation ; autrement dit, les propositions P et $\neg(\neg(P))$ sont logiquement équivalentes (*i.e.* même table de vérité). Voici quelques règles d'utilisation des négations en logique classique :

- ⋆ “$\neg(P \lor Q)$” ≡ “$(\neg(P)) \land (\neg(Q))$”
- ⋆ “$\neg(P \land Q)$” ≡ “$(\neg(P)) \lor (\neg(Q))$”
- ⋆ “$\neg(P \implies Q)$” ≡ “$P \land (\neg(Q))$”

En effet

P	Q	$\neg(P)$	$\neg(Q)$	$\neg(P \land Q)$	$\neg(P \lor Q)$	$\neg(P \implies Q)$	$(\neg(P)) \land (\neg(Q))$	$(\neg(P)) \lor (\neg(Q))$	$P \land (\neg(Q))$
F	F	V	V	V	V	F	V	V	F
F	V	V	F	V	F	F	F	V	F
V	F	F	V	V	F	V	F	V	V
V	V	F	F	F	F	F	F	F	F

Implication $P \implies Q$	≡	Proposition $(\neg P) \lor Q$
≡		≡
Contraposée $(\neg Q) \implies (\neg P)$	≡	Proposition $(\neg(\neg Q)) \lor (\neg P)$

Négation $\neg(P \implies Q)$	≡	Proposition $P \land (\neg Q)$

Réciproque $Q \implies P$	≡	Proposition $(\neg Q) \lor P$
≡		≡
Contraposée de la réciproque $(\neg P) \implies (\neg Q)$	≡	Proposition $(\neg(\neg P)) \lor (\neg Q)$

Équivalence $P \iff Q$	≡	$(P \implies Q) \land (Q \implies P)$

4.2 Différents types de raisonnement

Prouver une implication “$P \implies Q$” Soient P et Q deux assertions, pour prouver que l'implication “$P \implies Q$” est vraie il existe différents types de raisonnements.

Raisonnement direct : on suppose que P est vraie et on montre que Q est vraie.

Raisonnement par contraposée : on sait que “$P \implies Q$” et “non(Q) $\implies$ non(P)” ont même véracité. Pour montrer “$P \implies Q$” on peut donc montrer que l'implication “non(Q) $\implies$ non(P)” est vraie, *i.e.* on suppose que Q est fausse et on montre que P est fausse.

Raisonnement par l'absurde : on suppose que “$P \implies Q$” est fausse (ou, ce qui est équivalent, que “P et (non(Q))” est vraie) et on montre que l'on obtient une contradiction.

Remarque

P et Q étant deux assertions, on veut prouver que l'implication “$P \implies Q$” est fausse. On peut utiliser le

Raisonnement par négation (ou contre-exemple) : on montre que sa négation, qui est la proposition “P et (non(Q))”, est vraie.

EXEMPLE

On veut montrer que $\sqrt{2} \not\in \mathbb{Q}$.

⋆ Montrons d'abord que p^2 pair $\implies p$ pair pour tout $p \in \mathbb{Z}$.
On note $A =$"p^2 pair" et $B =$"p pair". Pour montrer que $A \implies B$ on va utiliser un raisonnement «par contraposée» et montrer l'énoncé équivalent $\neg B \implies \neg A$:

$$\begin{aligned}
\neg B \text{ vrai} &\implies B \text{ faux}\\
&\implies p \text{ impair}\\
&\implies p = 2k+1 \text{ pour un certain } k \text{ dans } \mathbb{N}\\
&\implies p^2 = (2k+1)^2 = 2(2k^2+2k)+1\\
&\implies p^2 \text{ impair}\\
&\implies A \text{ faux}\\
&\implies \neg A \text{ vrai}
\end{aligned}$$

⋆ Montrons maintenant que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.
On va utiliser une démonstration «par l'absurde». Si l'on pouvait écrire $\sqrt{2} = p/q$, une fraction irréductible (*i.e.* qu'on ne peut pas simplifier), alors, en élevant au carré, on aurait $2 = p^2/q^2$, donc $p^2 = 2q^2$, donc p^2 serait un nombre pair et, par ce qu'on a montré au point précédent, p aussi serait un nombre pair, alors p^2 serait divisible par 4, donc q^2 serait pair et, par ce qu'on a montré au point précédent, q aussi serait pair, ce qui est contradictoire avec le fait que la fraction était irréductible.

Prouver une équivalence "$P \iff Q$" Soient P et Q deux assertions, pour prouver que l'équivalence "$P \iff Q$" est vraie on peut

1. soit montrer les deux implications $P \implies Q$ et $Q \implies P$ avec l'une des méthodes du paragraphe précédent,
2. soit procéder directement par équivalences : $P \iff P_1 \iff \dots \iff Q$.

Raisonnement par récurrence Soit $n_0 \in \mathbb{N}$. Pour tout entier naturel $n \geq n_0$, on considère une proposition $\mathscr{P}(n)$ dépendant de n. Alors, si $\mathscr{P}(n_0)$ est vraie et si pour tout entier $n \geq n_0$, l'implication $\mathscr{P}(n) \implies \mathscr{P}(n+1)$ est vraie, alors pour tout entier $n \geq n_0$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.
Le raisonnement par récurrence est une manière de démontrer qu'un résultat portant sur une infinité de nombres naturels est vrai. Mais avant de commencer la preuve par récurrence, il faut d'abord connaître le résultat à prouver ! C'est la partie créative des mathématiques ☺

EXEMPLE
Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $5^{n+2} \geq 4^{n+2} + 3^{n+2}$.
Raisonnons par récurrence : pour $n \in \mathbb{N}$, notons $\mathscr{P}(n)$ la proposition $5^{n+2} \geq 4^{n+2} + 3^{n+2}$.

Initialisation : $\mathscr{P}(0)$ est vraie puisque $5^2 = 4^2 + 3^2$.

Hérédité : Prouvons que pour tout $n \geq 0$, $\mathscr{P}(n) \implies \mathscr{P}(n+1)$. Soit un entier $n \geq 0$. On suppose que $\mathscr{P}(n)$ est vraie. Alors

$$5^{n+3} = 5 \times 5^{n+2} \overset{\mathscr{P}(n)}{\geq} 5 \times (4^{n+2} + 3^{n+2}) \geq 4 \times 4^{n+2} + 3 \times 3^{n+2}) = 4^{n+3} + 3^{n+3}.$$

Ainsi $\mathscr{P}(n+1)$ est vérifiée.

D'après le principe de récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$.

EXEMPLE
On trace n droites dans le plan. On veut montrer que les régions ainsi formées par les n droites peuvent toujours être coloriées avec deux couleurs, de manière à ce qu'aucune région ait la même couleur que sa ou ses régions voisines, c'est-à-dire les régions qui partagent avec elle un segment de droite comme frontière.
Raisonnons par récurrence :

Initialisation : on peut certainement colorier le plan avec deux couleurs, disons noir et blanc, lorsqu'il n'y a qu'une seule droite.

Hérédité : Notre hypothèse d'induction est qu'on peut colorier les régions d'un plan contenant n droites. On considère un plan avec $n+1$ droites. On enlève une droite parmi les $n+1$: il en reste seulement n et par l'hypothèse, il est possible de colorier les régions du plan formées par les n droites. On réintroduit la$(n+1)$-ième droite. Cette droite sépare le plan en deux demi-plans. On choisit un de ces deux demi-plans et on change systématiquement les couleurs dans chacune des régions de ce demi-plan : les régions noires deviennent blanches et les régions blanches deviennent noires. On laisse l'autre demi-plan (de l'autre côté de la droite) intact. Le plan est maintenant adéquatement colorié. En effet,

- ⋆ si deux régions du plan séparé par les $n+1$ droites ont une frontière composée d'un segment appartenant à une des premières n droites, alors ces régions avaient déjà des couleurs différentes avant l'introduction de la $(n+1)$-ième droite. En introduisant la $(n+1)$-ième droite, on laisse ces couleurs déjà différentes telles quelles ou on les changes toutes les deux;
- ⋆ si deux régions ont une frontière composée d'un segment appartenant à la $(n+1)$-ième droite, alors avant l'introduction de la $(n+1)$-ième droite, elles faisaient partie de la même région et donc étaient coloriées de la même couleur. En introduisant la $(n+1)$-ième droite, on change les couleurs d'une des deux régions, d'un côté de la droite, mais pas de l'autre. Ces régions nouvellement voisines ont donc maintenant des couleurs différentes.

Source : `http://www.thedudeminds.net/`

Exemple

Le nombre d'or est noté φ et vaut $\varphi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. On veut montrer par récurrence que toute puissance de φ s'écrit comme $a\varphi+b$ avec a et b deux constantes indépendantes de φ.
Pour cela on va d'abord démontrer une formule portant sur le nombre d'or :

$$\varphi^2=\varphi+1. \tag{4.1}$$

Preuve : $\varphi^2=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)=\frac{1+2\sqrt{5}+5}{4}=\frac{2+2\sqrt{5}+4}{4}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}+1=\varphi+1$. On peut alors énoncer le théorème : "pour tout $n\ge 0$, $P(n)$ est vraie" avec

$$P(n)=\text{“}\exists a_n,b_n\in\mathbb{N} \text{ tels que } \varphi^n=a_n\varphi+b_n\text{”}.$$

La démonstration se fait par récurrence sur n :

Initialisation Pour $n=$, $\varphi^0=1$ donc $a_0=0$ et $b_0=1$.

Hérédité Prouvons que pour $n\in\mathbb{N}$ fixé on a l'implication $P(n) \implies P(n+1)$. Soit $P(n)$ vraie, alors

$$\varphi^{n+1}=\varphi^n\varphi\overset{P(n)}{=}(a_n\varphi+b_n)\varphi=a_n\varphi^2+b_n\varphi\overset{(4.1)}{=}a_n(\varphi+1)+b_n\varphi=(a_n+b_n)\varphi+a_n$$

ainsi si on note $a_{n+1}=a_n+b_n$ et $b_{n+1}=a_n$ on a bien $\varphi^{n+1}=a_{n+1}\varphi+b_{n+1}$, *i.e.* $P(n+1)$ est vraie.

Si on note $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de Fibonacci :

$$\begin{cases} F_0=1,\\ F_1=1,;\\ F_{n+2}=F_{n+1}+F_n, \quad \forall n\in\mathbb{N}\end{cases}$$

on remarque que $a_n=F_n$ et $b_n=F_{n-1}$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

4.3 Théorie des ensembles et quantificateurs

4.10 Définition (Ensemble, élément)
Un ensemble E est constitué d'éléments. Il est bien défini si l'on possède un critère permettant d'affirmer pour tout objet a, s'il appartient à l'ensemble E ou non :

$$a\in E \qquad \text{ou bien} \qquad a\notin E.$$

Remarque
On dit aussi "a est élément de E" ou bien "a n'est pas élément de E" ou encore "E contient a" ou bien "E ne contient pas a". Si un ensemble E est constitué des éléments a,b,c, on écrira : $E=\{a,b,c\}$. L'ordre dans lequel les éléments sont écrits n'importe pas, ainsi $\{a,b,c\}=\{c,a,b\}$. Un même être mathématique ne peut pas être à la fois un ensemble et un élément de cet ensemble, c'est-à-dire qu'il est interdit d'écrire $a\in a$.

4.11 Définition (Inclusion)
Un ensemble F est inclus dans un ensemble E si tout élément de F appartient à E, ce que l'on note : $F\subset E$.

Remarque
On dit aussi "F est une partie de E" ou encore "F est un sous-ensemble de E".

4.12 Définition (Complémentaire)
Soit E un ensemble. Pour toute partie A de E, on note $C_E A := E \setminus A$ le complémentaire de A dans E.

4.13 Définition (Égalité)
Un ensemble F est égal à un ensemble E si $F \subset E$ et $E \subset F$, ce que l'on note : $F = E$.

4.14 Définition (Utilisation des quantificateurs)
Les quantificateurs $\exists$ et $\forall$ concernent les éléments d'un ensemble déterminé E.

Notation "Il existe x élément de E" s'écrit "$\exists x \in E$".
"Pour tout x de E" ou "Quel que soit un élément x de E" s'écrit "$\forall x \in E$".

Ordre Si l'on utilise deux fois le même quantificateur, l'ordre n'a pas d'importance ; on peut donc permuter les quantificateurs dans des écritures du type

$$\begin{aligned} &\forall x \in E \quad \forall y \in F \quad p(x,y),\\ &\exists x \in E \quad \exists y \in F \quad p(x,y). \end{aligned}$$

Mais si les quantificateurs sont différents, leur ordre est important :

- ⋆ dans l'écriture
$$\forall x \in E \quad \exists y \in F \quad p(x,y)$$
y dépend de x,
- ⋆ dans l'écriture
$$\exists y \in F \quad \forall x \in E \quad p(x,y)$$
y est indépendant de x.

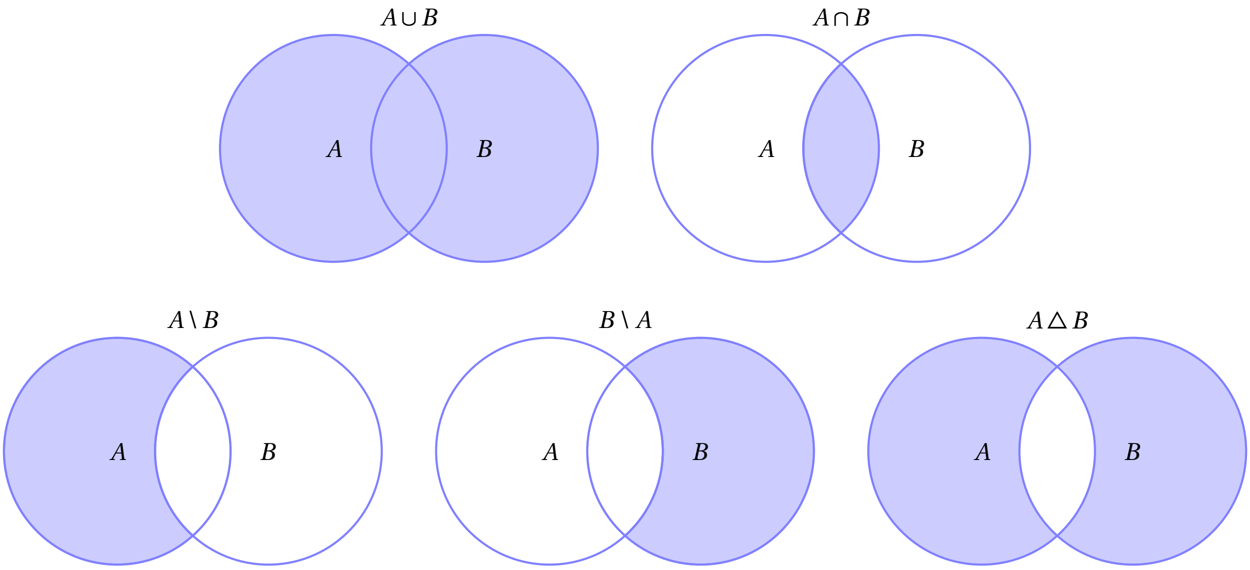
Négation La négation de "$\forall x \in E$, x vérifie p" est "$\exists x \in E$ tel que x ne vérifie pas p". La négation de "$\exists x \in E$, x vérifie p" est "$\forall x \in E$ tel que x ne vérifie pas p".

Remarque
Soit A une partie de E.

- ⋆ L'énoncé "A est la partie *vide*" (on note $A = \emptyset$) et sa négation "A est *non vide*" (on note $A \neq \emptyset$) correspondent respectivement à "quel que soit x élément de E, x n'est pas un élément de A" et "il existe au moins un élément de E qui est élément de A" et s'écrivent respectivement :
  - ⋆ $\forall x \in E \quad x \notin A$,
  - ⋆ $\exists x \in E \quad x \in A$.
- ⋆ L'énoncé "A est la partie *pleine*" (on note $A = E$) et sa négation "A n'est pas la partie *pleine*" (on note $A \neq E$) s'écrivent respectivement :
  - ⋆ $\forall x \in E \quad x \in A$,
  - ⋆ $\exists x \in E \quad x \notin A$.
- ⋆ Les propositions "$x \in A$" et "$x \notin A$" sont souvent remplacées respectivement par "x vérifie la propriété p" et "x ne vérifie pas la propriété p" où p est une propriété caractéristique des éléments de A, c'est à dire un critère permettant de décider pour tout élément x de E entre les deux propositions $x \in A$, $x \notin A$.

4.15 Définition (Opérations booléennes)
Soit E un ensemble. On note $\mathscr{P}(E)$ l'ensemble des parties de E. Soient A et B deux éléments de $\mathscr{P}(E)$. Les quatre éléments $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $A \triangle B$ de $\mathscr{P}(E)$ sont définies de la façon suivante : pour tout $x \in E$,

- ⋆ $x \in A \cup B \iff x \in A$ ou $x \in B$, [réunion des ensembles A et B]
- ⋆ $x \in A \cap B \iff x \in A$ et $x \in B$, [intersection des ensembles A et B]
- ⋆ $x \in A \setminus B \iff x \in A$ et $x \notin B$,
- ⋆ $x \in A \triangle B \iff x \in A \setminus B$ ou $x \in B \setminus A$.

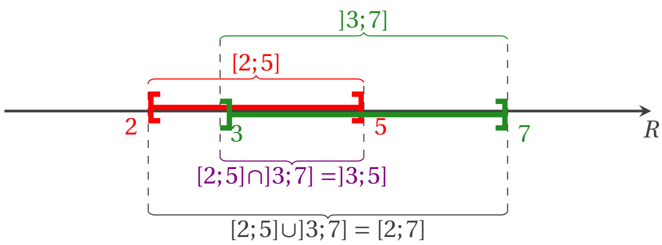


4.16 Définition (Réunion et intersection d'une famille de parties de E)

Soit E, I deux ensembles et $\{A_i\}_{i\in I}$ une partie de $\mathscr{P}(E)$. Les deux éléments $\bigcup_{i\in I} A_i$ et $\bigcap_{i\in I} A_i$ de $\mathscr{P}(E)$ sont définies de la façon suivante : pour tout $x \in E$,

$$x \in \bigcup_{i\in I} A_i \iff \exists i \in I \quad x \in A_i, \qquad\qquad x \in \bigcap_{i\in I} A_i \iff \forall i \in I \quad x \in A_i.$$

Exemple



EXEMPLE

A_n	$\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n$	$\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} A_n$
$\left[1+\frac{1}{n};5-\frac{1}{n}\right]$	$]1;5[$	$[2;4]$
$\left]1+\frac{1}{n};5-\frac{1}{n}\right]$	$]1;5[$	$]2;4]$
$\left[1+\frac{1}{n};5-\frac{1}{n}\right[$	$]1;5[$	$[2;4[$
$\left]1+\frac{1}{n};5-\frac{1}{n}\right[$	$]1;5[$	$]2;4[$
$\left[1-\frac{1}{n};5-\frac{1}{n}\right]$	$[0;5[$	$[1;4]$
$\left]1-\frac{1}{n};5-\frac{1}{n}\right]$	$]0;5[$	$[1;4]$
$\left[1-\frac{1}{n};5-\frac{1}{n}\right[$	$[0;5[$	$[1;4[$
$\left]1-\frac{1}{n};5-\frac{1}{n}\right[$	$]0;5[$	$[1;4[$
$\left[1+\frac{1}{n};5+\frac{1}{n}\right]$	$]1;6]$	$[2;5]$
$\left]1+\frac{1}{n};5+\frac{1}{n}\right]$	$]1;6]$	$]2;5]$
$\left[1+\frac{1}{n};5+\frac{1}{n}\right[$	$]1;6[$	$[2;5]$
$\left]1+\frac{1}{n};5+\frac{1}{n}\right[$	$]1;6[$	$]2;5]$
$\left[1-\frac{1}{n};5+\frac{1}{n}\right]$	$[0;6]$	$[1;5]$
$\left]1-\frac{1}{n};5+\frac{1}{n}\right]$	$]0;6]$	$[1;5]$
$\left[1-\frac{1}{n};5+\frac{1}{n}\right[$	$[0;6[$	$[1;5]$
$\left]1-\frac{1}{n};5+\frac{1}{n}\right[$	$]0;6[$	$[1;5]$

Exercices

Exercice 4.1
Écrire les tables de vérité suivantes :

1. "non(P) et Q"
2. "non(P et Q)"
3. "(non(P)) ou (non(Q))"
4. "(non(P)) ou Q"

Correction

P	Q	non(P)	non(Q)	(non(P)) et Q	non(P et Q)	(non(P)) ou (non(Q))	(non(P)) ou Q
F	F	V	V	F	V	V	V
F	V	V	F	V	V	V	F
V	F	F	V	F	V	V	F
V	V	F	F	F	F	F	V

On remarque l'équivalence

$$\text{“non}(P \text{ et } Q)\text{”} \qquad \equiv \qquad \text{“(non}(P)) \text{ ou } (\text{non}(Q))\text{”}$$

Exercice 4.2
Pour chaque proposition, écrire la contraposée, la négation et la réciproque (on ne demande pas de prouver la véridicité) :

1. $x > 3 \implies x > 2$
2. $x = 3 \implies x^2 = 9$
3. Si on est en décembre alors les vacances de Noël sont proches.

Correction

1. $x > 3 \implies x > 2$

   Proposition $x \le 3$ ou $x > 2$

   Contraposée $x \le 2 \implies x \le 3$

   Négation $x > 3$ et $x \le 2$

   Réciproque $x > 2 \implies x > 3$
2. $x = 3 \implies x^2 = 9$

   Proposition $x \neq 3$ ou $x^2 = 9$

   Contraposée $x^2 \neq 9 \implies x \neq 3$

   Négation $x = 3$ et $x^2 \neq 9$

   Réciproque $x^2 = 9 \implies x = 3$
3. Si on est en décembre alors les vacances de Noël sont proches

   Proposition On n'est pas en décembre ou les vacances de Noël sont proches

   Contraposée Si les vacances de Noël ne sont pas proches alors on n'est pas en décembre

   Négation On est en décembre et les vacances de Noël ne sont pas proches

   Réciproque Si les vacances de Noël sont proches alors on est en décembre

Exercice 4.3
Parmi les propositions suivantes, indiquer si elles sont vraies ou fausses :

1. Si Napoléon était chinois alors $3 - 2 = 2$
2. Cléopâtre était chinoise ou les grenouilles aboient.
3. Les roses sont des animaux ou les chiens ont 4 pattes.
4. Si l'homme est un quadrupède, alors il parle.
5. Paris est en France ou Madrid est en Chine.
6. La pierre ponce est un homme si et seulement si les femmes sont des sardines.
7. Les poiriers ne donnent pas de melons, et Cléopâtre n'est pas chinoise.
8. $(2 < 3)$ et (2 divise 4)

9. $(2 < 3)$ et (2 divise 5)
10. $(2 < 3)$ ou (2 divise 5)
11. $(2 < 3)$ et $\neg$(2 divise 5)
12. $\neg(2 < 3)$ ou (2 divise 5)

Attention : dans le langage courant la proposition “soit P soit Q” se traduit par un “ou” exclusif au lieu du “ou” logique.

Correction

1. Il s'agit de l'implication $P \implies Q$ (logiquement équivalente à $(\neg P) \vee Q$) où
   * $P =$“Napoléon était chinois”
   * $Q =$“$3-2=2$”

   Puisque P est fausse, $(\neg P)$ est vraie, par conséquent l'implication est vraie.
2. Il s'agit de la proposition $P \vee Q$ où
   * $P =$“Cléopâtre était chinoise”
   * $Q =$“les grenouilles aboient”

   Puisque P est fausse et Q est fausse, la proposition est fausse.
3. Il s'agit de la proposition $P \vee Q$ où
   * $P =$“les roses sont des animaux”
   * $Q =$“les chiens ont 4 pattes”

   Puisque Q est vraie, la proposition est vraie.
4. Il s'agit de l'implication $P \implies Q$ (logiquement équivalente à $(\neg P) \vee Q$) où
   * $P =$“l'homme est un quadrupède”
   * $Q =$“l'homme parle”

   Puisque P est fausse, $(\neg P)$ est vraie, par conséquent l'implication est vraie.
5. Il s'agit de la proposition $P \vee Q$ où
   * $P =$“Paris est en France”
   * $Q =$“Madrid est en Chine”

   Puisque P est vraie, la proposition est vraie.
6. Il s'agit de la double implication $P \iff Q$ (logiquement équivalente à $\big(P \implies Q\big) \wedge \big(Q \implies P\big)$) où
   * $P =$“La pierre ponce est un homme”
   * $Q =$“les femmes sont des sardines”

   Puisque P et Q sont fausses, la proposition est vraie.
7. Il s'agit de la proposition $P \wedge Q$ où
   * $P =$“Les poiriers ne donnent pas de melons”
   * $Q =$“Cléopâtre n'est pas chinoise”

   Puisque P et Q sont vraies, la proposition est vraie.
8. Il s'agit de la proposition $P \wedge Q$ où
   * $P =$“$2 < 3$”
   * $Q =$“2 divise 4”

   Puisque P et Q sont vraies, la proposition est vraie.
9. Il s'agit de la proposition $P \wedge Q$ où
   * $P =$“$2 < 3$”
   * $Q =$“2 divise 5”

   Puisque Q est fausse, la proposition est fausse.
10. Il s'agit de la proposition $P \vee Q$ où
    * $P =$“$2 < 3$”
    * $Q =$“2 divise 5”

    Puisque P est vraie, la proposition est vraie.
11. Il s'agit de la proposition $P \wedge Q$ où
    * $P =$“$2 < 3$”
    * $Q =$“$\neg$(2 divise 5)”

    Puisque P et Q sont vraies, la proposition est vraie.
12. Il s'agit de la proposition $P \vee Q$ où
    * $P =$“$\neg(2 < 3)$”

- ⋆ $Q =$"(2 divise 5)"

Puisque P et Q sont fausses, la proposition est fausse.

Exercice 4.4

Soient les propositions définies par $P(x) =$"$x \leq 1$" et $Q(x) =$"$x \geq 2$". Donner les valeurs de x dans $\mathbb{R}$ pour lesquelles

1. "$P \wedge Q$" est vraie
2. "$P \wedge Q$" est fausse
3. "$P \vee Q$" est vraie
4. "$P \vee Q$" est fausse

Correction

1. Pour aucune valeur de x dans $\mathbb{R}$
2. Pour toute valeur de x dans $\mathbb{R}$
3. $x \in]-\infty;1] \cup [2;+\infty[$
4. $x \in]1;2[$

Exercice 4.5

La relation $p \implies q$ se lit "si p, alors q". Que signifie-t-elle ?

- ☐ p est une condition suffisante de q
- ☐ q est une condition nécessaire de p
- ☐ pour que q, il suffit que p
- ☐ pour que p, il suffit que q
- ☐ pour que p, il est nécessaire que q
- ☐ p seulement si q
- ☐ q seulement si p

Correction

- ■ p est une condition suffisante de q
- ■ q est une condition nécessaire de p
- ■ pour que q, il suffit que p
- ☐ pour que p, il suffit que q
- ■ pour que p, il est nécessaire que q
- ■ p seulement si q
- ☐ q seulement si p

Exercice 4.6

1. "4 divise n" est-elle une condition nécessaire, suffisante, nécessaire et suffisante pour que "2 divise n" ?
2. "3 divise n" est-elle une condition nécessaire, suffisante, nécessaire et suffisante pour que "9 divise n" ?

Correction

1. "4 divise n" est une condition suffisante pour que "2 divise n". En effet, si on note P l'assertion "4 divise n" et Q l'assertion "2 divise n", on a que
   - ⋆ l'énonce "$P \implies Q$" est vrai car si 4 divise n alors il existe p dans $\mathbb{N}$ tel que $n = 4p = 2(2p)$ ce qui signifie que 2 divise n ;
   - ⋆ l'énonce "$Q \implies P$" est faux car pour $n = 2$ on a bien que 2 divise n mais 4 ne divise pas n.
2. "3 divise n" est une condition nécessaire pour que "9 divise n". En effet, si on note P l'assertion "3 divise n" et Q l'assertion "9 divise n", on a que
   - ⋆ l'énonce "$P \implies Q$" est faux car pour $n = 6$ on a bien que 3 divise n mais 9 ne divise pas n ;
   - ⋆ l'énonce "$Q \implies P$" est vrai car si 9 divise n alors il existe q dans $\mathbb{N}$ tel que $n = 9q = 3(3q)$ ce qui signifie que 3 divise n.

Exercice 4.7

On considère la proposition $\mathscr{I}$ suivante :

$\mathscr{I}$ = "Si l'entier naturel n se termine par 5, alors il est divisible par 5."

1. Écrire la contraposée de la proposition $\mathscr{I}$.
2. Écrire la négation de la proposition $\mathscr{I}$.
3. Écrire la réciproque de la proposition $\mathscr{I}$.

Correction
Rappels :

- ⋆ La proposition $\mathscr{I}$ correspond a l'implication "$P \implies Q$" avec P ="l'entier naturel n se termine par 5" et Q ="l'entier naturel n est divisible par 5". Elle est logiquement équivalent à la proposition "$(\neg P) \vee Q$".
- ⋆ La contraposée, qui a la même véridicité que "$P \implies Q$", s'écrit "$(\neg Q) \implies (\neg P)$".
- ⋆ La négation, qui est fausse si "$P \implies Q$" est vraie et qui est vraie si "$P \implies Q$" est fausse, s'écrit "$\neg[(\neg P) \vee Q]$", ce qui est équivalent à écrire "$P \wedge (\neg Q)$".
- ⋆ La réciproque s'écrit "$Q \implies P$".

Dans notre cas on a :

Implication : "Si l'entier naturel n se termine par 5, alors il est divisible par 5."
Prouvons que cette implication est vraie :

$$\begin{aligned} P \text{ vraie} &\implies \exists m \in \mathbb{N} \mid n = 10m+5 \\ &\implies \exists m \in \mathbb{N} \mid n = 5(2m+1) \\ &\implies Q \text{ vraie} \end{aligned}$$

Contraposée : "Si l'entier naturel n n'est pas divisible par 5 alors il ne se termine pas par 5."
Elle est vraie car elle a la même véridicité que l'implication "$P \implies Q$".

Négation : "L'entier naturel n se termine par 5 et n'est pas divisible par 5."
Elle est fausse car l'implication "$P \implies Q$" est vraie.

Réciproque : "Si l'entier naturel n est divisible par 5, alors il se termine par 5."
Cette proposition est fausse : l'entier naturel 10 ne se termine pas par 5 mais est divisible par 5.

Exercice 4.8

S'il pleut, Jean va au travail en bus. Hier Jean est allé au travail à vélo. Est-il possible d'établir avec certitude si hier il a plu ? Ce matin Jean est allé au travail en bus. Est-il possible d'établir avec certitude si ce matin il pleuvait ?

Correction
Soit P ="Il pleut" et Q ="Jean va au travail en bus". On a $P \implies Q$, ce qui équivaut à $\neg Q \implies \neg P$. Hier Jean est allé au travail à vélo, donc hier on est dans le cas $\neg Q$, ce qui implique $\neg P$, autrement dit hier il ne pleuvait pas. Ce matin Jean est allé au travail en bus, ce qui correspond à Q, ce qui n'implique rien sur la véracité de P : il n'est pas possible d'établir si ce matin il pleuvait ou pas.

Exercice 4.9

Sur le portail d'une maison il y a une pancarte : «Chien qui aboie, ne mord pas. Notre chien n'aboie pas.» Franchiriez-vous cette porte ?

Correction
Soit P ="Aboyer" et Q ="Ne pas mordre". On a $P \implies Q$, ce qui équivaut à $\neg Q \implies \neg P$: «Chien qui morde, n'aboie pas.» «Notre chien n'aboie pas» correspond à $\neg P$, ce qui n'implique rien sur la véracité de Q : il n'est pas possible d'établir si le chien mord ou pas.

Exercice 4.10 (Th. Champion)

On considère la proposition suivante :

"Si le TP de Chimie a commencé alors tous les étudiants ont mis leur blouse."

1. Écrire la contraposée et la négation de la proposition.
2. Si la proposition est vraie et on constate que tous les étudiants ont mis leur blouse, peut-on déduire que le TP a commencé ?

Correction

1. La contraposée de «$P \implies Q$» est «$(\neg Q) \implies (\neg P)$». On obtient donc comme contraposée :

   "S'il existe un étudiant qui n'a pas mis sa blouse alors le TP de Chimie n'a pas commencé."

Remarque : cette contraposée est logiquement équivalente au principe donné dans l'énoncé.
La négation de «$P \implies Q$», *i.e.* de «$(\neg P) \vee Q$», est «$P \wedge (\neg Q)$». On obtient donc comme négation :

> "Le TP de Chimie a commencé et il existe un étudiant qui n'a pas mis sa blouse."

Remarque : cette négation est vraie lorsque la proposition initiale est fausse et elle est fausse lorsque la proposition initiale est vraie.

2. On ne peut peut rien déduire.

Exercice 4.11 (Th. CHAMPION)

On peut déduire de la loi des gaz parfaits le principe suivant :

> "Si le volume du gaz est constant, alors la température du gaz est une fonction croissante de la pression."

1. Écrire la contraposée et la négation du principe ci-dessus.
2. On étudie un gaz qui a la propriété suivante : "quand son volume est constant et sa température augmente, sa pression diminue." Peut-on dire si c'est un gaz parfait ou non ?

Correction

Soit P ="le volume du gaz est constant" et Q ="la température du gaz est une fonction croissante de la pression".

1. La contraposée de «$P \implies Q$» est «$(\neg Q) \implies (\neg P)$». On obtient donc comme contraposée :

   > "Si la température du gaz n'est pas une fonction croissante de la pression alors le volume du gaz n'est pas constant."

   Remarque : cette contraposée est logiquement équivalente au principe donné dans l'énoncé.
   La négation de «$P \implies Q$», *i.e.* de «$(\neg P) \vee Q$», est «$P \wedge (\neg Q)$». On obtient donc comme négation :

   > "Le volume du gaz est constant et la température du gaz n'est pas une fonction croissante de la pression."

   Remarque : cette négation est vraie lorsque la proposition initiale est fausse et elle est fausse lorsque la proposition initiale est vraie.
2. Cette proposition correspond à «$P \wedge (\neg Q)$» donc on peut déduire qu'il n'est pas un gaz parfait.

Exercice 4.12 (Th. CHAMPION)

On effectue une expérience chimique pour laquelle on peut seulement faire varier la température ou ajouter un catalyseur. On connait le principe suivant :

> "Si on augmente la température de 10 degrés et si on n'ajoute pas de catalyseur alors la réaction va deux fois plus vite que normalement."

1. Écrire la contraposée du principe ci-dessus, c'est-à-dire compléter la phrase "Si la réaction ne va pas deux fois plus vite que normalement alors...".
2. On observe que la température a augmenté de 10 degrés et que la réaction va 3 fois plus vite que normalement, que peut-on en déduire ?
3. On observe que la réaction va 2 fois plus vite que normalement, peut-on en déduire quelque chose sur la variation de température ?
4. Que peut-on en déduire si la température n'augmente pas et la réaction va 3 fois plus vite que normalement ?

Correction

Soit les propositions suivantes :

$A =$ «on augmente la température de 10 degrés»

$B =$ «on n'ajoute pas de catalyseur»

$P =$ A et B = «on augmente la température de 10 degrés et on n'ajoute pas de catalyseur»

$Q =$ «la réaction va deux fois plus vite que normalement»

Le principe donné se traduit par «si (A et B) alors Q».

1. La contraposée de «si P alors Q» (autrement dit $P \implies Q$) est «si non(Q) alors non(P)». Ici la proposition P est de la forme «A et B», donc sa négation est de la forme «non(A) ou non(B)».
   On obtient donc comme contraposée :

   > "Si la réaction ne va pas deux fois plus vite que normalement alors on n'a pas augmenté la température de 10 degrés ou on a ajouté du catalyseur."

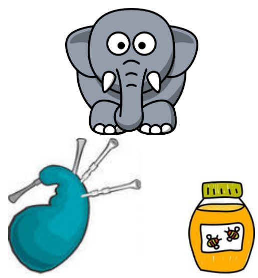
Remarque : cette contraposée est logiquement équivalente au principe donné dans l'énoncé.

2. La contraposée indique qu'on a ajouté du catalyseur : en effet, on est dans le cas où «la réaction ne va pas deux fois plus vite» (puisqu'elle va trois fois plus vite), donc «on n'a pas augmenté la température de 10 degrés ou on a ajouté du catalyseur». Comme la température a augmenté de 10 degrés, cela signifie qu'on a ajouté du catalyseur.
3. On ne peut peut rien déduire sur la variation de température : le principe ne donne aucune indication dans ce sens.
4. On ne peut peut rien déduire.

Exercice 4.13 (Th. Champion)

On considère les propositions suivantes

1. "les éléphants portent toujours des pantalons courts" ;
2. "si un animal mange du miel alors il peut jouer de la cornemuse" ;
3. "si un animal est facile à avaler alors il mange du miel" ;
4. "si un animal porte des pantalons courts alors il ne peut pas jouer de la cornemuse".



On suppose que ces propositions sont vraies. Quelqu'un prétend en déduire que les éléphants sont faciles à avaler. Cette conclusion est-elle correcte ?

Correction

Soit A ="Porter des pantalons courts", B ="Manger du miel", C ="Pouvoir jouer de la cornemuse", D ="Être facile à avaler". Les propositions données se formalisent comme suit :

1. $\forall$ éléphants, C ;
2. $B \implies C$ (logiquement équivalente à $\neg C \implies \neg B$) ;
3. $D \implies B$ (logiquement équivalente à $\neg B \implies \neg D$) ;
4. $A \implies \neg C$;

et on veut savoir si c'est vraie que "$\forall$ éléphants, D".

Les quatre propositions étant vraies, on a la chaîne d'implications $A \implies \neg C \implies \neg B \implies \neg D$, c'est-à-dire "Si un animal porte des pantalons courts alors il n'est pas facile à avaler". Étant donné que les éléphants portent toujours des pantalons courts, cela signifie "$\forall$ éléphants, $\neg D$" : la déduction est fausse.

Exercice 4.14

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et à valeur dans $\mathbb{R}$. Écrire avec les quantificateurs les propriétés suivantes :

1. f prend toujours la valeur 1
2. f prend au moins une fois la valeur 1
3. f prend ses valeurs entre -2 et 3
4. f ne prend que des valeurs entiers
5. f s'annule au moins une fois sur l'intervalle $[-1, 1[$

Correction

1. $f(x) = 1 \ \forall x \in \mathbb{R}$
2. $\exists x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = 1$
3. $f(x) \in [-2, 3] \ \forall x \in \mathbb{R}$
4. $f(x) \in \mathbb{Z} \ \forall x \in \mathbb{R}$
5. $\exists x \in [-1, 1[$ tel que $f(x) = 0$

Exercice 4.15

Pour chaque énoncé, écrire la négation, puis dire si l'énoncé original est vrai ou faux (en justifiant la réponse à l'aide d'une démonstration).

1. $\forall x \in \mathbb{R} \quad x > 1$
2. $\forall n \in \mathbb{N}, \exists p \in \mathbb{N}, p > n$
3. $\exists x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad x + y > 0$
4. $\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists y \in \mathbb{R} \quad x + y > 0$
5. $\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad x + y > 0$
6. $\exists x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad y^2 > x$
7. $\forall n \in \mathbb{N} \quad n^2 + n + 1 \leq n^3$
8. $\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad n \geq x$
9. $\exists n \in \mathbb{N} \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad \big(n > p \implies n + p > 2p\big)$

Correction

1. $P =$ "$\forall x \in \mathbb{R} \quad x > 1$"
   $\neg P =$ "$\exists x \in \mathbb{R} \quad x \leq 1$"
   P est faux. Pour cela on prouve que $\neg P$ est vrai : en effet $x = 0$ est un réel inférieur à 1.
2. $P =$ "$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists p \in \mathbb{N} \quad p > n$"
   $\neg P =$ "$\exists n \in \mathbb{N} \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad p \leq n$"
   P est vrai : étant donné $n \in \mathbb{N}$, il existe toujours un $p \in \mathbb{N}$ tel que $p > n$ car il suffit de prendre $p = n + 1$.
3. $P =$ "$\exists x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad x + y > 0$"
   $\neg P =$ "$\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists y \in \mathbb{R} \quad x + y \leq 0$"
   P est faux. Pour cela on prouve que $\neg P$ est vrai : étant donné $x \in \mathbb{R}$, il existe toujours un $y \in \mathbb{R}$ tel que $x + y \leq 0$ car il suffit de prendre $y = -(x+1)$ qui donne $x + y = -1 \leq 0$.
4. $P =$ "$\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists y \in \mathbb{R} \quad x + y > 0$"
   $\neg P =$ "$\exists x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad x + y \leq 0$"
   P est vrai : étant donné $x \in \mathbb{R}$, il existe toujours un $y \in \mathbb{R}$ tel que $x + y > 0$ car il suffit de prendre $y = -x + 1$ qui donne $x + y = 1 > 0$.
5. $P =$ "$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad x + y > 0$"
   $\neg P =$ "$\exists x \in \mathbb{R} \quad \exists y \in \mathbb{R} \quad x + y \leq 0$"
   P est faux. Pour cela on prouve que $\neg P$ est vrai : $x = -1$ et $y = 0$
6. $P =$ "$\exists x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad y^2 > x$"
   $\neg P =$ "$\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists y \in \mathbb{R} \quad y^2 \leq x$"
   P est vrai : il suffit de choisir $x < 0$.
7. $P =$ "$\forall n \in \mathbb{N} \quad n^2 + n + 1 \leq n^3$"
   $\neg P =$ "$\exists n \in \mathbb{N} \quad n^2 + n + 1 > n^3$"
   P est faux. Pour cela on prouve que $\neg P$ est vrai : $n = 0$
8. $P =$ "$\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad n \geq x$"
   $\neg P =$ "$\exists x \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n < x$"
   P est vrai : étant donné $x \in \mathbb{R}$, on peut prendre $n = E(|x|) + 1$ (par exemple), ce qui donne $n > x$
9. Soit $A =$"$n > p$ et $B =$"$n + p > 2p$"
   $P =$ "$\exists n \in \mathbb{N} \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad (A \implies B)$" qui équivaut à "$\exists n \in \mathbb{N} \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad (\neg B \implies \neg A)$" qui équivaut à "$\exists n \in \mathbb{N} \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad ((\neg A) \vee B)$"
   $\neg P =$ "$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists p \in \mathbb{N} \quad (A \wedge (\neg B))$" qui équivaut à "$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists p \in \mathbb{N} \quad \big(n > p \text{ et } n + p \leq 2p\big)$"
   P est vrai. Pour cela on prouve que $\neg P$ est faux : $\nexists (n, p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \quad \big(n > p \text{ et } n \leq p\big)$.

Exercice 4.16

On considère $x, y, z \in \mathbb{N}$. Soit la proposition

$$(P) \qquad \text{«si } (x = 3) \text{ alors } (y = 5 \text{ et } z = 1)\text{».}$$

Pour chaque affirmation dire si elle est vraie ou fasse :

a) (P) est équivalente à «si $y = 5$ et $z = 1$ alors $x = 3$».
b) (P) est équivalente à «pour que $y = 5$ et $z = 1$ il suffit que $x = 3$».
c) (P) est équivalente à «pour que $y = 5$ et $z = 1$ il faut que $x = 3$».
d) La négation de (P) est «$x = 3$, alors $y \neq 5$ ou $z \neq 1$».
e) La négation de (P) est «si $x = 3$, alors $y \neq 5$ ou $z \neq 1$».

Correction

a) Fausse b) Vraie c) Fausse d) Fausse e) Fausse

Exercice 4.17

Pour tout entier naturel n, soit P_n une assertion portant sur n et telle que si P_n est vraie alors P_{n+1} l'est également. On suppose qu'il existe un entier n_0 tel que P_{n_0} soit faux. Quelle conclusion peut-on en tirer ?

☐ P_{n_0-1} est faux

☐ P_n est faux pour tout entier $n \le n_0$

☐ P_{n_0+1} est faux

☐ P_n est faux pour tout entier $n \ge n_0$

☐ P_n est faux pour tout entier n

On suppose qu'il existe un entier n_0 tel que P_{n_0} soit vrai. Quelle conclusion peut-on en tirer ?

☐ P_{n_0-1} est vrai

☐ P_n est vrai pour tout entier $n \le n_0$

☐ P_{n_0+1} vrai faux

☐ P_n est vrai pour tout entier $n \ge n_0$

☐ P_n est vrai pour tout entier n

Correction

Le fait que P_{n_0} soit faux n'implique rien sur la véracité de P_n pour $n > n_0$. En revanche, il implique que P_n est faux pour tout $n \le n_0$. En effet, s'il existait un entier $m < n_0$ tel que P_m soit vrai, on aurait P_{m+1} vrai et, par récurrence, P_{n_0} vrai ce qui est une contradiction.

■ P_{n_0-1} est faux

■ P_n est faux pour tout entier $n \le n_0$

☐ P_{n_0+1} est faux

☐ P_n est faux pour tout entier $n \ge n_0$

☐ P_n est faux pour tout entier n

Le fait que P_{n_0} soit vrai n'implique rien sur la véracité de P_n pour $n < n_0$. En revanche, il implique que P_n est vrai pour tout $n \ge n_0$. En effet, s'il existait un entier $m > n_0$ tel que P_m soit faux, on aurait P_{m-1} vrai et, par récurrence, P_m faux ce qui est une contradiction.

☐ P_{n_0-1} est vrai

☐ P_n est vrai pour tout entier $n \le n_0$

■ P_{n_0+1} est vrai

■ P_n est vrai pour tout entier $n \ge n_0$

☐ P_n est vrai pour tout entier n

Exercice 4.18

Démontrer (par récurrence) les propositions

1) $\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$,

2) $\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (2i+1) = n(n+2)$,

3) $\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$,

4) $\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2$,

5) $\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^4 = \frac{n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30}$,

Correction

On considère une propriété P_n qui dépend d'un entier naturel n et on souhaite démontrer par récurrence qu'elle est vraie pour tout n à partir d'un certain rang n_0. Pour cela il faut

1. montrer que la propriété P_n est vraie pour un entier particulier n_0 (par exemple 0 ou 1) ;
2. montrer que si elle est vraie pour un certain n, cela implique qu'elle est vraie pour son successeur $n+1$.

1) Pour $n = 1$ la somme se réduit à 1 et elle est égale à $1\frac{2}{2} = 1$. On suppose maintenant que le résultat est vrai pour un certain n, c'est-à-dire que $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$. Alors $\sum_{i=1}^{n+1} i = \sum_{i=1}^{n} i + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$. Le résultat est donc vrai pour l'entier $n+1$.

2) Pour $n=1$ la somme se réduit à $2\times 1+1$ et elle est égale à $1(1+2)=2$. On suppose maintenant que le résultat est vrai pour un certain n, c'est-à-dire que $\sum_{i=1}^{n}(2i+1)=n(n+2)$. Alors $\sum_{i=1}^{n+1}(2i+1)=\sum_{i=1}^{n}(2i+1)+(2(n+1)+1)=n(n+2)+(2(n+1)+1)=(n+1)(n+3)$. Le résultat est donc vrai pour l'entier $n+1$.
3) Pour $n=1$ la somme des carrées se réduit à 1^2 et elle est égale à $\frac{1(1+1)(2+1)}{6}=1$. On suppose maintenant que le résultat est vrai pour un certain n, c'est-à-dire que $\sum_{i=1}^{n} i^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Alors $\sum_{i=1}^{n+1} i^2=\sum_{i=1}^{n} i^2+(n+1)^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$. Le résultat est donc vrai pour l'entier $n+1$.
4) Pour $n=1$ la somme des cubes se réduit à 1^3 et elle est égale à $\frac{(1\times 2)^2}{4}=1$. On suppose maintenant que le résultat est vrai pour un certain n, c'est-à-dire que $\sum_{i=1}^{n} i^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$. Alors $\sum_{i=1}^{n+1} i^3=\sum_{i=1}^{n} i^3+(n+1)^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2+(n+1)^3=\left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$. Le résultat est donc vrai pour l'entier $n+1$.
5) Pour $n=1$ la somme se réduit à 1^4 et elle est égale à $\frac{1(1+1)(6+9+1-1)}{30}=1$. On suppose maintenant que le résultat est vrai pour un certain n, c'est-à-dire que $\sum_{i=1}^{n} i^4=\frac{n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30}$. Alors $\sum_{i=1}^{n+1} i^4=\sum_{i=1}^{n} i^4+(n+1)^4=\frac{n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30}+(n+1)^4=\frac{(n+1)(n+2)(6(n+1)^3+9(n+1)^2+(n+1)-1)}{30}$. Le résultat est donc vrai pour l'entier $n+1$.

Exercice 4.19

Montrer que l'assertion suivante est vraie (n désigne un nombre entier, *i.e.* $n\in\mathbb{Z}$) : "n^2 impair $\implies$ n impair". Est-ce que la réciproque est vraie ?

Correction

On note $A=$"n^2 impair" et $B=$"n impair". Pour montrer que $A\implies B$ on va utiliser un raisonnement «par contraposée» et montrer l'énoncé équivalent $\neg B\implies\neg A$:

$$\begin{aligned}\neg B \text{ vrai} &\implies B \text{ faux}\\ &\implies n \text{ pair}\\ &\implies n=2k \text{ pour un certain } k \text{ dans } \mathbb{N}\\ &\implies n^2=(2k)^2=2(2k^2)\\ &\implies n^2 \text{ pair}\\ &\implies A \text{ faux}\\ &\implies \neg A \text{ vrai}\end{aligned}$$

ce qui termine la preuve.
La réciproque $B\implies A$ est vraie :

$$\begin{aligned}B \text{ vrai} &\implies n \text{ impair}\\ &\implies n=2k+1 \text{ pour un certain } k \text{ dans } \mathbb{N}\\ &\implies n^2=(2k+1)^2=2(2k^2+k)+1\\ &\implies n^2 \text{ impair}\\ &\implies A \text{ vrai}\end{aligned}$$

Donc on conclut que $A\iff B$, autrement dit "n^2 impair si et seulement si n impair".

Exercice 4.20

Montrer que l'assertion suivante est vraie (p et q désignent un nombre naturel, *i.e.* $p,q\in\mathbb{N}$) : "$\sqrt{pq}\neq\frac{p+q}{2}\implies p\neq q$".

Correction

On note $A=$"$\sqrt{pq}\neq\frac{p+q}{2}$" et $B=$"$p\neq q$". Pour montrer que $A\implies B$ on va utiliser un raisonnement «par contraposée» et montrer l'énoncé équivalent $\neg B\implies\neg A$:

$$\begin{aligned}\neg B \text{ vrai} &\implies B \text{ faux}\\ &\implies p=q\\ &\implies \sqrt{pq}=\sqrt{p^2}=p=\frac{p+p}{2}=\frac{p+q}{2}\\ &\implies \sqrt{pq}=\frac{p+q}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\implies A \text{ faux}\\&\implies \neg A \text{ vrai}\end{aligned}$$

ce qui termine la preuve.

Exercice 4.21

Soit $a, b, c \in \mathbb{N}$. À l'aide d'un raisonnement par l'absurde, démontrer que l'assertion suivante est vraie : "Dans $a^2 + b^2 = c^2$ il y a toujours au moins un des trois nombres, a, b ou c qui est pair".

Correction

Supposons que les trois nombres soient impaires, *i.e.* il existe $x, y, z \in \mathbb{N}$ tels que $a = 2x+1$, $b = 2y+1$ et $c = 2z+1$. L'équation $a^2 + b^2 = c^2$ devient $4(x^2 + x + y^2 + y - z^2 - z + 1) = 3$ ce qui amène à une contradiction puisque 4 n'est pas un diviseur de 3.

Triplets pythagoriciens Voici une méthode astucieuse pour produire des triplets pythagoriciens, c'est-à-dire des triplets de nombres entiers non-nuls qui satisfont la relation $a^2 + b^2 = c^2$. On choisit deux nombres entiers strictement positifs et on appelle le plus grand de ces deux nombres x et l'autre, le plus petit, y. On pose $a = 2xy$, $b = x^2 - y^2$ et $c = x^2 + y^2$. On obtient ainsi un triplet pythagoricien. En effet, on observe que

$$a^2 + b^2 = (2xy)^2 + (x^2 - y^2)^2 = 4x^2y^2 + x^4 + y^4 - 2x^2y^2 = x^4 + y^4 + 2x^2y^2 = (x^2 + y^2)^2 = c^2.$$

Exercice 4.22

Expliciter les sous-ensembles suivants de la droite réelle

$$\bigcup_{x\in[0,1]} \left]\frac{x}{2}, 2x\right[\qquad \bigcap_{x\in[0,1]} \left]\frac{x}{2}, 2x\right[\qquad \bigcup_{x\in[0,1]} \left[\frac{x}{2}, 2x\right] \qquad \bigcap_{x\in[0,1]} \left[\frac{x}{2}, 2x\right]$$

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left[-\frac{1}{n}, 2+\frac{1}{n}\right[\qquad \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \left[1+\frac{1}{n}, n\right] \qquad \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left[3, 3+\frac{1}{n^2}\right[\qquad \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left]-2-\frac{1}{n}, 4+n^2\right]$$

Correction

$$\bigcup_{x\in[0,1]} \left]\frac{x}{2}, 2x\right[=]0,2[\qquad \bigcap_{x\in[0,1]} \left]\frac{x}{2}, 2x\right[= \emptyset \qquad \bigcup_{x\in[0,1]} \left[\frac{x}{2}, 2x\right] = [0,2] \qquad \bigcap_{x\in[0,1]} \left[\frac{x}{2}, 2x\right] = \emptyset$$

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left[-\frac{1}{n}, 2+\frac{1}{n}\right[= [0,2[\qquad \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \left[1+\frac{1}{n}, n\right] = [1,+\infty[\qquad \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left[3, 3+\frac{1}{n^2}\right[= \{3\} \qquad \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left]-2-\frac{1}{n}, 4+n^2\right] = [-2,5]$$

Exercice 4.23

Soit E, I, J trois ensembles et $\{A_i\}_{i\in I}$ et $\{B_j\}_{j\in J}$ deux parties de $\mathscr{P}(E)$. Montrer que

$$\Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big) \cap \Big(\bigcup_{j\in J} B_j\Big) = \bigcup_{(i,j)\in I\times J} (A_i \cap B_j).$$

Correction

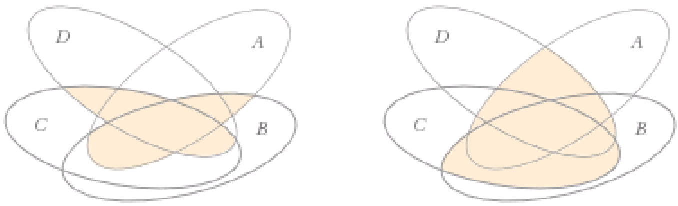
Notons

$$L = \Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big) \cap \Big(\bigcup_{j\in J} B_j\Big), \qquad R = \bigcup_{(i,j)\in I\times J} (A_i \cap B_j).$$

Pour prouver que $L = R$ il faut prouver les deux inclusions $L \subset R$ et $R \subset L$:

① on prouve que $L \subset R$, *i.e.* que si $\ell \in L$ alors $\ell \in R$:

$$\begin{aligned}\ell \in L &\implies \ell \in \bigcup_{i\in I} A_i \text{ ET } \ell \in \bigcup_{j\in J} B_j\\&\implies \exists i \in I,\ \ell \in A_i \text{ ET } \exists j \in J,\ \ell \in B_j\\&\implies \exists (i,j) \in I\times J,\ \ell \in (A_i \cap B_j)\\&\implies \ell \in R;\end{aligned}$$



(a) $(A\cap B)\cup(C\cap D)$ (b) $(A\cup B)\cap(C\cup D)$

FIGURE 4.1 – $(A\cap B)\cup(C\cap D)\subset(A\cup B)\cap(C\cup D)$

② on prouve que $R\subset L$, *i.e.* que si $\ell\in R$ alors $\ell\in L$:

$$\begin{aligned}\ell\in R &\implies \exists(i,j)\in I\times J,\ \ell\in(A_i\cap B_j)\\ &\implies \ell\in A_i\ \text{ ET }\ \ell\in B_j\\ &\implies \ell\in\bigcup_{i\in I}A_i\ \text{ ET }\ \ell\in\bigcup_{j\in J}B_j\\ &\implies \ell\in L.\end{aligned}$$

Exercice 4.24

Soit E, I et J trois ensembles non vides. Soit $\{A_{i,j}\}_{(i,j)\in I\times J}$ une partie de $\mathscr{P}(E)$. Montrer que

$$\bigcup_{i\in I}\Big(\bigcap_{j\in J}A_{i,j}\Big)\subset\bigcap_{j\in J}\Big(\bigcup_{i\in I}A_{i,j}\Big),$$

puis comparer (en terme d'inclusion)

$$\bigcup_{p\in\mathbb{N}^*}\Big(\bigcap_{q\in\mathbb{N}^*}\left[0,\frac{p}{q}\right]\Big)\quad\text{et}\quad\bigcap_{q\in\mathbb{N}^*}\Big(\bigcup_{p\in\mathbb{N}^*}\left[0,\frac{p}{q}\right]\Big)$$

Correction

$x\in\bigcup_{i\in I}\Big(\bigcap_{j\in J}A_{i,j}\Big)\implies\exists i\in I,\,x\in\bigcap_{j\in J}A_{i,j}\implies\exists i\in I,\,\forall j\in J,\,x\in A_{i,j}\implies\forall j\in J,\,x\in\bigcup_{i\in I}A_{i,j}\implies x\in\bigcap_{j\in J}\Big(\bigcup_{i\in I}A_{i,j}\Big)$ donc $\bigcup_{i\in I}\Big(\bigcap_{j\in J}A_{i,j}\Big)\subset\bigcap_{j\in J}\Big(\bigcup_{i\in I}A_{i,j}\Big)$.

Notons que l'inclusion inverse n'est pas vraie car $x\in\bigcap_{j\in J}\Big(\bigcup_{i\in I}A_{i,j}\Big)\implies\forall j\in J,\,x\in\bigcup_{i\in I}A_{i,j}\implies\forall j\in J,\exists i\in I$ dépendant de j, $x\in A_{i,j}$.

On peut le voir sur l'exemple proposé :

$$\bigcap_{q\in\mathbb{N}^*}\left[0,\frac{p}{q}\right]=\{0\},\qquad\bigcup_{p\in\mathbb{N}^*}\left[0,\frac{p}{q}\right]=[0;+\infty[,$$

$$\bigcup_{p\in\mathbb{N}^*}\Big(\bigcap_{q\in\mathbb{N}^*}\left[0,\frac{p}{q}\right]\Big)=\{0\},\qquad\bigcap_{q\in\mathbb{N}^*}\Big(\bigcup_{p\in\mathbb{N}^*}\left[0,\frac{p}{q}\right]\Big)=[0;+\infty[.$$

Exercice 4.25

Soient E un ensemble et F et G deux parties de E. Montrer que

1) $C_E\big(C_EF\big)=F$
2) $F\subset G \iff C_EF\supset C_EG$
3) $C_E(F\cup G)=\big(C_EF\big)\cap\big(C_EG\big)$ et $C_E(F\cap G)=\big(C_EF\big)\cup\big(C_EG\big)$ [Lois de Morgan]

Correction

1. $x\in C_E\big(C_EF\big)\iff x\notin C_EF\iff x\in F$
2. "$F\subset G$" $\iff$ "$(x\in F)\implies(x\in G)$" $\iff$ "non$(x\in G)\implies$ non$(x\in F)$" $\iff$ "$(x\in C_EG)\implies(x\in C_EF)$" $\iff$ "$C_EG\subset C_EF$"
3. $x\in C_E(F\cup G)\iff x\notin(F\cup G)\iff x\notin F$ ET $x\notin G\iff x\in C_E(F)$ ET $x\in C_E(G)\iff x\in\big(C_EF\big)\cap\big(C_EG\big)$
   $x\in C_E(F\cap G)\iff x\notin F$ OU $x\notin G\iff x\in C_E(F)$ OU $x\in C_E(G)\iff x\in\big(C_EF\big)\cup\big(C_EG\big)$

Exercice 4.26

Soit I un ensemble et $\{A\}_{i\in I}$ une partie de $\mathscr{P}(E)$. Montrer que

1. $C_E\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I} C_E A_i$
2. $C_E\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} C_E A_i$.

Correction

Soit I un ensemble et $\{A\}_{i\in I}$ une partie de $\mathscr{P}(E)$. Alors

1. $x \in C_E\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \iff x \notin \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \iff \forall i \in \mathbb{N}^*\ x \notin A_i \iff \forall i \in \mathbb{N}^*\ x \in C_E(A_i) \iff x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} C_E(A_i)$
2. $x \in C_E\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) \iff x \notin \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \iff \exists i \in \mathbb{N}^*$ tel que $x \notin A_i \iff \exists i \in \mathbb{N}^*$ tel que $x \in C_E(A_i) \iff x \in \bigcup_{i=1}^{\infty} C_E(A_i)$

Exercice 4.27

Pour $i \in \mathbb{N}$, soit $A_i = \left[-2, \frac{1}{-1-i^2}\right]$ un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. Trouver les ensembles

$$\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i, \qquad C_{\mathbb{R}}\left(\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i\right), \qquad C_{\mathbb{R}}(A_i), \qquad \bigcap_{i=0}^{\infty} C_{\mathbb{R}}(A_i).$$

Correction

En remarquant que $A_i \subset A_{i+1}$, que $A_0 = [-2,-1]$ et que $A_i \xrightarrow[i\to+\infty]{} [-2,0^-]$ on a

$$\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i = [-2,0[, \quad C_{\mathbb{R}}\left(\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i\right) =]-\infty;-2[\cup[0;+\infty[, \quad C_{\mathbb{R}}(A_i) =]-\infty;-2[\cup\left]\frac{1}{-1-i^2};+\infty\right[, \quad \bigcap_{i=0}^{\infty} C_{\mathbb{R}}(A_i) =]-\infty;-2[\cup[0;+\infty[.$$

Exercice 4.28

Pour $i \in \mathbb{N}$, soit $A_i = \left[-1, \frac{1}{1+i^2}\right[$ un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. Trouver les ensembles

$$\bigcap_{i=0}^{\infty} A_i, \qquad C_{\mathbb{R}}\left(\bigcap_{i=0}^{\infty} A_i\right), \qquad C_{\mathbb{R}}(A_i), \qquad \bigcup_{i=0}^{\infty} C_{\mathbb{R}}(A_i).$$

Correction

En remarquant que $A_{i+1} \subset A_i$, que $A_0 = [-1,1[$ et que $A_i \xrightarrow[i\to+\infty]{} [-1,0^+[$ on a

$$\bigcap_{i=0}^{\infty} A_i = [-1,0], \quad C_{\mathbb{R}}\left(\bigcap_{i=0}^{\infty} A_i\right) =]-\infty;-1[\cup]0;+\infty[, \quad C_{\mathbb{R}}(A_i) =]-\infty;-1[\cup\left[\frac{1}{1+i^2};+\infty\right[, \quad \bigcup_{i=0}^{\infty} C_{\mathbb{R}}(A_i) =]-\infty;-1[\cup]0;+\infty[.$$

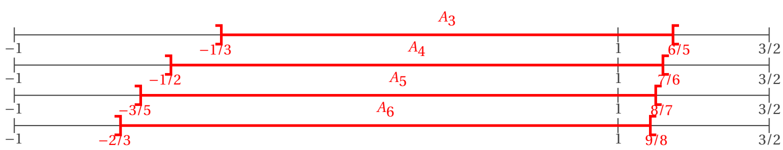
Exercice 4.29

Soit $\mathbb{M} = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq 3\}$. Considérons l'intervalle $A_m = \left]\frac{2-m}{m}; \frac{m+3}{m+2}\right[$ pour $m \in \mathbb{M}$. Expliciter les ensembles

1. $\bigcup_{m\in\mathbb{M}} A_m$, 2. $C_{\mathbb{R}}\left(\bigcup_{m\in\mathbb{M}} A_m\right)$, 3. $C_{\mathbb{R}}(A_m)$, 4. $\bigcap_{m\in\mathbb{M}} C_{\mathbb{R}}(A_m)$, 5. $\bigcap_{m\in\mathbb{M}} A_m$, 6. $C_{\mathbb{R}}\left(\bigcap_{m\in\mathbb{M}} A_m\right)$, 7. $\bigcup_{m\in\mathbb{M}} C_{\mathbb{R}}(A_m)$.

Correction

Notons que $\frac{2-m}{m} = -1 + \frac{2}{m} \to -1^+$ et que $\frac{m+3}{m+2} = 1 + \frac{1}{2+m} \to 1^+$:



On peut alors conclure que

1. $\bigcup\limits_{m\in\mathbb{M}} A_m = \left]-1; \frac{6}{5}\right[$
2. $C_{\mathbb{R}}\left(\bigcup\limits_{m\in\mathbb{M}} A_m\right) =]-\infty;-1] \cup \left[\frac{6}{5};+\infty\right[$
3. $C_{\mathbb{R}}(A_m) = \left]-\infty; \frac{2-m}{m}\right] \cup \left[\frac{m+3}{m-2};+\infty\right[$
4. $\bigcap\limits_{m\in\mathbb{M}} C_{\mathbb{R}}(A_m) =]-\infty;-1] \cup \left[\frac{6}{5};+\infty\right[$
5. $\bigcap\limits_{m\in\mathbb{M}} A_m = \left]-\frac{1}{3};1\right]$
6. $C_{\mathbb{R}}\left(\bigcap\limits_{m\in\mathbb{M}} A_m\right) = \left]-\infty;-\frac{1}{3}\right] \cup]1;+\infty[$
7. $\bigcup\limits_{m\in\mathbb{M}} C_{\mathbb{R}}(A_m) = \left]-\infty;-\frac{1}{3}\right] \cup]1;+\infty[$

Exercice 4.30

Soient les sous-ensembles de $\mathbb{R}$

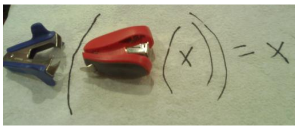
$$A_i = \left[0, 1+\frac{1}{i}\right], \qquad B_i = \left[0, 1-\frac{1}{i}\right], \qquad C_i = \left[-1-\frac{1}{i}, 1+\frac{1}{i}\right], \qquad D_i = \left[0, 1+\frac{1}{i}\right[,$$

avec $i \in \mathbb{N}^*$. Trouver les ensembles

1. $C_{\mathbb{R}}(A_i)$, 2. $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} C_{\mathbb{R}}(A_i)$, 3. $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i$, 4. $C_{\mathbb{R}}\left(\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i\right)$, 5. $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$, 6. $C_{\mathbb{R}}\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i\right)$, 7. $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} C_{\mathbb{R}}(A_i)$;
8. $C_{\mathbb{R}}(B_i)$, 9. $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} C_{\mathbb{R}}(B_i)$, 10. $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} B_i$, 11. $C_{\mathbb{R}}\left(\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} B_i\right)$, 12. $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} B_i$, 13. $C_{\mathbb{R}}\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} B_i\right)$, 14. $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} C_{\mathbb{R}}(B_i)$;
15. $C_{\mathbb{R}}(C_i)$, 16. $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} C_{\mathbb{R}}(C_i)$, 17. $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} C_i$, 18. $C_{\mathbb{R}}\left(\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} C_i\right)$, 19. $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} C_i$, 20. $C_{\mathbb{R}}\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} C_i\right)$, 21. $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} C_{\mathbb{R}}(C_i)$;
22. $C_{\mathbb{R}}(D_i)$, 23. $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} C_{\mathbb{R}}(D_i)$, 24. $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} D_i$, 25. $C_{\mathbb{R}}\left(\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} D_i\right)$, 26. $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} D_i$, 27. $C_{\mathbb{R}}\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} D_i\right)$, 28. $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} C_{\mathbb{R}}(D_i)$;

Correction

1. $C_{\mathbb{R}}(A_i) = \mathbb{R} \setminus A_i =]-\infty, 0[\cup \left]1+\frac{1}{i}, +\infty\right[$,
2. $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} C_{\mathbb{R}}(A_i) =]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$,
3. $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i = [0, 1]$,
4. $C_{\mathbb{R}}\left(\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i\right) =]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$,
5. $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i = [0, 2]$,
6. $C_{\mathbb{R}}\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i\right) =]-\infty, 0[\cup]2, +\infty[$,
7. $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} C_{\mathbb{R}}(A_i) =]-\infty, 0[\cup]2, +\infty[$;
8. $C_{\mathbb{R}}(B_i) =]-\infty, 0[\cup \left]1-\frac{1}{i}, +\infty\right[$,
9. $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} C_{\mathbb{R}}(B_i) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$,
10. $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} B_i = \{0\}$,
11. $C_{\mathbb{R}}\left(\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$,
12. $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} B_i = [0, 1[$,
13. $C_{\mathbb{R}}\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} B_i\right) =]-\infty, 0[\cup [1, +\infty[$,
14. $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} C_{\mathbb{R}}(B_i) =]-\infty, 0[\cup [1, +\infty[$;
15. $C_{\mathbb{R}}(C_i) = \left]-\infty, -1-\frac{1}{i}\right[\cup \left]1+\frac{1}{i}, +\infty\right[$,
16. $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} C_{\mathbb{R}}(C_i) =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$,
17. $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} C_i = [-1, 1]$,
18. $C_{\mathbb{R}}\left(\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} C_i\right) =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$,
19. $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} C_i = [-2, 2]$,
20. $C_{\mathbb{R}}\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} C_i\right) =]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$,
21. $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} C_{\mathbb{R}}(C_i) =]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$;
22. $C_{\mathbb{R}}(D_i) =]-\infty, 0[\cup \left[1+\frac{1}{i}, +\infty\right[$,
23. $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} C_{\mathbb{R}}(D_i) =]-\infty, 0[\cup [1, +\infty[$,
24. $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} D_i = [0, 1] = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i$,
25. $C_{\mathbb{R}}\left(\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} D_i\right) =]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$,
26. $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} D_i = [0, 2[$,
27. $C_{\mathbb{R}}\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} D_i\right) =]-\infty, 0[\cup [2, +\infty[$,
28. $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} C_{\mathbb{R}}(D_i) =]-\infty, 0[\cup [2, +\infty[$.



5

Relations, fonctions, applications

Soient E et F deux ensembles.

5.1 Définition (Produit cartésien)
$E \times F$ est l'ensemble des couples (x, y) où x est un élément de E et y un élément de F. L'égalité dans $E \times F$ est définie par : $(x, y) = (x', y') \iff x = x'$ et $y = y'$.

5.2 Définition (Relation binaire)
Une RELATION binaire (ou correspondance) de E dans (ou vers) F est un triplet $\mathscr{R} = (E, F; G)$ où G une partie de $E \times F$. L'ensemble E est appelé *ensemble de départ de* $\mathscr{R}$, l'ensemble F est appelé *ensemble d'arrivée de* $\mathscr{R}$. L'ensemble G est appelé *graphe* de $\mathscr{R}$.

Notation Pour tout $(x, y) \in E \times F$, on écrit "$x \mathscr{R} y$" et on dit "x est en relation avec y" ssi "$(x, y) \in G$".

5.3 Définition (Fonction)
Une FONCTION f de E dans F est une relation de E dans F vérifiant : pour tout $x \in E$, il existe au plus un élément $y \in F$ satisfaisant $x f y$.

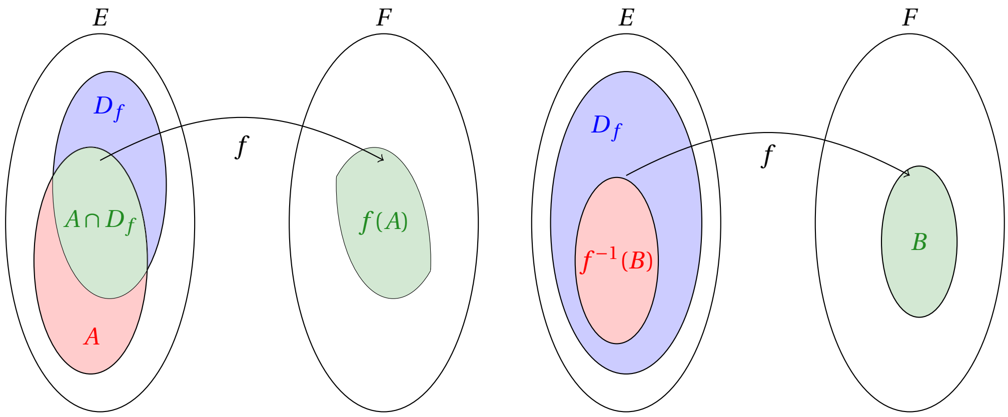
5.4 Définition (Domaine de définition)
Le DOMAINE DE DÉFINITION D_f d'une fonction f de E dans F est l'ensemble des $x \in E$ satisfaisant : il existe un et un seul $y \in F$ tel que $x f y$.

Notation Pour tout $x \in D_f$, on note $f(x)$ le seul point $y \in F$ satisfaisant $x f y$. Donc pour tout $(x, y) \in D_f \times F$, $x f y \iff y = f(x)$. Si $x \in D_f$ alors $f(x)$ est appelé "l'image de x par f". Si $y \in F$ alors tout point $x \in D_f$ satisfaisant $y = f(x)$ est appelé "un antécédent de x par f".

5.5 Définition (Image directe)
Soit f une fonction de E dans F et A une partie de E. L'IMAGE DIRECTE de A par f est la partie de F définie par $f(A) := \{y \in F \,:\, \exists x \in A \cap D_f \quad y = f(x)\}$.

5.6 Définition (Image réciproque)
Soit f une fonction de E dans F et B une partie de F. L'IMAGE RÉCIPROQUE de B par f est la partie de E définie par $f^{-1}(B) := \{x \in D_f \,:\, f(x) \in B\}$.

ATTENTION
Ne pas confondre l'image réciproque de B, qui existe toujours, avec l'image de B par f^{-1}, qui n'existe que si f est une bijection. Ici on ne suppose rien sur f.



5.7 Définition (Application)
Une application f de E dans F est une fonction de E dans F dont le domaine de définition est égal à E.

5.8 Définition (Injection)
Une injection f de E dans F est une application de E dans F vérifiant

$$\forall (x,x') \in E \times E \quad f(x) = f(x') \implies x = x'.$$

Attention
Ne pas confondre :

- la définition d'une application qui s'écrit

$$\begin{aligned} &\forall x \in E \quad \forall x' \in E \qquad x = x' \implies f(x) = f(x'),\\ &\forall x \in E \quad \forall x' \in E \qquad f(x) \neq f(x') \implies x \neq x', \end{aligned}$$

- la définition d'application injective qui s'écrit

$$\begin{aligned} &\forall x \in E \quad \forall x' \in E \qquad x \neq x' \implies f(x) \neq f(x'),\\ &\forall x \in E \quad \forall x' \in E \qquad f(x) = f(x') \implies x = x'. \end{aligned}$$

5.9 Définition (Surjection)
Une surjection f de E dans F est une application de E dans F vérifiant

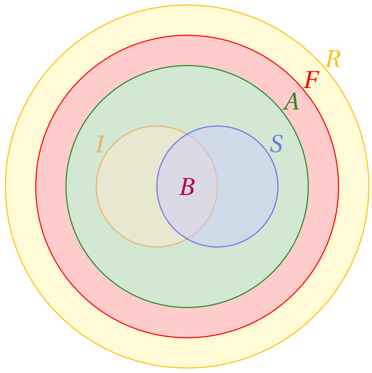
$$\forall y \in F \quad \exists x \in E \quad y = f(x).$$

5.10 Définition (Bijection)
Une bijection f de E dans F est une application de E dans F qui est injective et surjective.

Remarque
Soient

- R l'ensemble des relations
- F l'ensemble des fonctions
- A l'ensemble des applications
- I l'ensemble des applications injectives
- S l'ensemble des applications surjectives
- B l'ensemble des applications bijectives

Le dessin ci-contre se lit comme suit : “toute fonction est une relation mais il existe des relations qui ne sont pas des fonctions, de même toute application est une fonction mais il existe des fonctions qui ne sont pas des applications. Il existe des applications qui ne sont ni injectives ni surjectives, il existe des applications qui sont injectives mais qui ne sont pas surjectives, il existe des applications qui ne sont pas injectives mais qui sont surjectives et il existe des applications qui sont injectives et surjectives et sont appelées bijections.”



Astuce (Les droites)
Soit E et F deux sous-ensembles de $\mathbb{R}$. Alors

- ⋆ Une relation de E dans F est une **fonction** si toute droite **vertical** d'équation $x = k \in E$ intersecte le graphe de f **au plus une fois**.
- ⋆ Une fonction $f : E \to F$ est une **application** si toute droite **vertical** d'équation $x = k \in E$ intersecte le graphe de f **exactement une fois**.
- ⋆ Une application $f : E \to F$ est une application **injective** si toute droite **horizontale** d'équation $y = k \in F$ intersecte le graphe de f **au plus une fois**.
- ⋆ Une application $f : E \to F$ est une application **surjective** si toute droite **horizontale** d'équation $y = k \in F$ intersecte le graphe de f **au moins une fois**.
- ⋆ Une application $f : E \to F$ est une application **bijective** si toute droite **horizontale** d'équation $y = k \in F$ intersecte le graphe de f **exactement une fois**.

5.1 Composition, réciprocité

Soit E, F, G et H quatre ensembles.

5.11 Définition (Composition)
Si f est une application de E dans F et g une application de F dans G alors $g \circ f$ est l'application de E dans G définie par : $\forall x \in E \quad (g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$.

5.12 Théorème (Associativité)
Si f est une application de E dans F, g une application de F dans G et h une application de G dans H alors $h \circ \big(g \circ f\big) = \big(h \circ g\big) \circ f$.

5.13 Définition (Application réciproque)
Soit f une application de E dans F. On dit que f admet une réciproque (ou inverse) ssi il existe une application g de F dans E telle que

$$\forall (x, y) \in E \times F \qquad y = f(x) \iff g(y) = x.$$

Si une telle application g existe, elle est unique et notée f^{-1}.

5.14 Théorème (Réciprocité)
Soit f une application de E dans F. Alors f admet une réciproque ssi f est bijective.

5.2 Maximum, minimum

Soit X un ensemble ordonné (par exemple $\mathbb{R}$) et soit Y une partie de X.

5.15 Définition (Majorant)
Un élément $a \in X$ est appelé majorant de Y si $a \geq y$ pour tout $y \in Y$.

5.16 Définition (Minorant)
Un élément $a \in X$ est appelé minorant de Y si $a \leq y$ pour tout $y \in Y$.

5.17 Définition (Ensemble majoré, minoré, borné)

* Si Y admet des majorants, on dit que Y est majoré.
* Si Y admet des minorants, on dit que Y est minoré.
* Si Y est majoré et minoré, on dit que Y est borné.

5.18 Définition (Supremum)
$a \in X$ est appelé borne supérieure de Y si c'est le plus petit des majorants de Y. Si elle existe, elle est unique et est notée $\sup Y$.

5.19 Définition (Infimum)
$a \in X$ est appelé borne inférieure de Y si c'est le plus grand des minorants de Y. Si elle existe, elle est unique et est notée $\inf Y$.

5.20 Définition (Maximum)
$a \in X$ est appelé plus grand élément de Y ou élément maximale de Y ou max de Y si $a \in Y$ et a est majorant de Y.

5.21 Définition (Minimum)
$a \in X$ est appelé plus petit élément de Y ou élément minimale de Y ou min de Y si $a \in Y$ et a est minorant de Y.

Attention
On a les implications suivantes

1. "a est le max de Y" $\implies$ "a est le sup de Y" $\implies$ "a est majorant de Y";
2. "a est le min de Y" $\implies$ "a est le inf de Y" $\implies$ "a est minorant de Y".

Les réciproques sont fausses.

5.22 Définition (Supremum, infimum, maximum et minimum d'une fonction)
Soient E un ensemble et $f : E \mapsto \mathbb{R}$ une fonction. On appelle borne supérieure de f dans E la borne supérieure de l'image directe de E par f, c'est-à-dire $\sup f(E)$. De la même manière on définit la borne inférieure de f dans E, ainsi que le maximum et le minimum et on les note

$$\sup_E f(x) \qquad \inf_E f(x) \qquad \max_E f(x) \qquad \min_E f(x).$$

Exercices

Exercice 5.1

Comment doit-on compléter la définition suivante : “ Soient E et F deux ensembles et f une application de E dans F. On dit que f est **injective** si et seulement si…”

☐ tout élément x de E n'a qu'une image par f
☐ tout élément y de F a au moins un antécédent par f
☐ tout élément y de F a au plus un antécédent par f
☐ tout élément y de F a exactement un antécédent par f
☐ pour tous x et y de E, la relation $f(x) = f(y)$ implique $x = y$

Correction

☐ tout élément x de E n'a qu'une image par f
Cette assertion exprime que f est une application
☐ tout élément y de F a au moins un antécédent par f
Cette assertion pourrait compléter la définition d'une application surjective
■ tout élément y de F a au plus un antécédent par f
☐ tout élément y de F a exactement un antécédent par f
Cette assertion pourrait compléter la définition d'une application bijective
■ pour tous x et y de E, la relation $f(x) = f(y)$ implique $x = y$

Exercice 5.2

Comment doit-on compléter la définition suivante : “ Soient E et F deux ensembles et f une application de E dans F. On dit que f est **surjective** si et seulement si…”

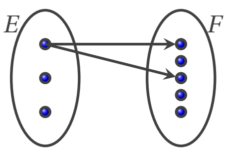
☐ tout élément x de E n'a qu'une image par f
☐ tout élément y de F a au moins un antécédent par f
☐ tout élément y de F a au plus un antécédent par f
☐ tout élément y de F a exactement un antécédent par f
☐ pour tous x et y de E, la relation $f(x) = f(y)$ implique $x = y$

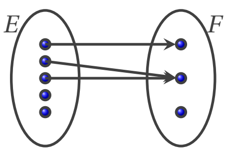
Correction

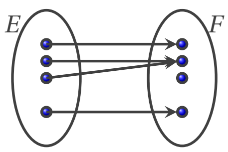
☐ tout élément x de E n'a qu'une image par f
Cette assertion exprime que f est une application
■ tout élément y de F a au moins un antécédent par f
☐ tout élément y de F a au plus un antécédent par f
Cette assertion pourrait compléter la définition d'une application injective
☐ tout élément y de F a exactement un antécédent par f
Cette assertion pourrait compléter la définition d'une application bijective
☐ pour tous x et y de E, la relation $f(x) = f(y)$ implique $x = y$
Cette assertion pourrait compléter la définition d'une application injective

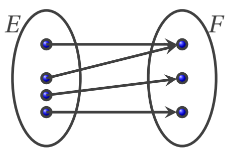
Exercice 5.3

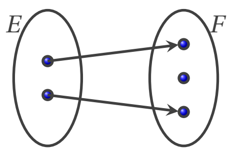
Soit E et F deux ensembles. Pour chaque relation $x\mathscr{R}y$ avec $x \in E$ et $y \in F$ déterminer celles qui sont des fonctions, puis le domaine de définition de chacune de ces fonctions, puis celles qui sont des applications et si elles sont injectives et/ou surjectives.

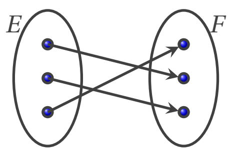
1. 

2. 

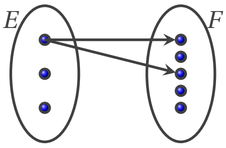
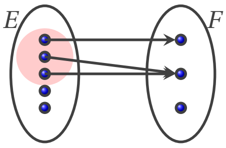
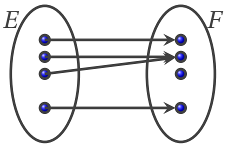
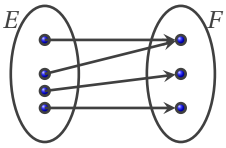
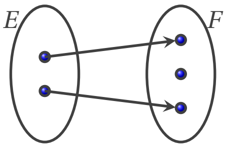
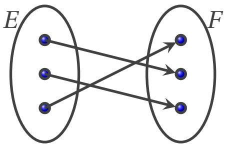
3. 

4. 

5. 

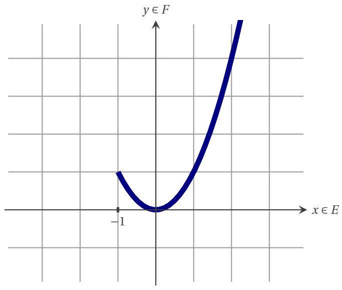
6. 

Correction

1.  Elle n'est pas une fonction.
2.  Elle est une fonction mais elle n'est pas une application.
3.  Elle est une application ni injective ni surjective.
4.  Elle est une application surjective non injective.
5.  Elle est une application injective non surjective.
6.  Elle est une bijection.

Exercice 5.4

Soit E et F deux sous ensembles de $\mathbb{R}$ et f une fonction de E dans F dont le graphe est tracé ci-dessous :

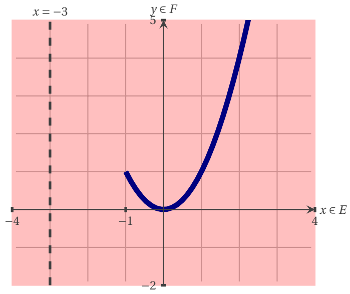


Pour chaque choix de E et de F déterminer si la fonction est une application et si elle est injective et/ou surjective :

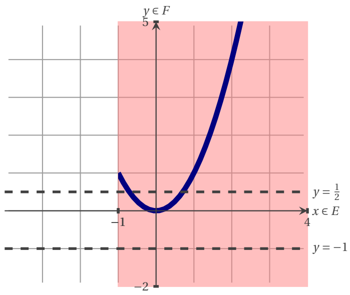
1. $E = \mathbb{R}$ et $F = \mathbb{R}$
2. $E = [-1; +\infty[$ et $F = \mathbb{R}$
3. $E = [-1; +\infty[$ et $F = [0; +\infty[$
4. $E = [-1; 0]$ et $F = [0; +\infty[$
5. $E = [-1; 0]$ et $F = [0; 1]$

Correction

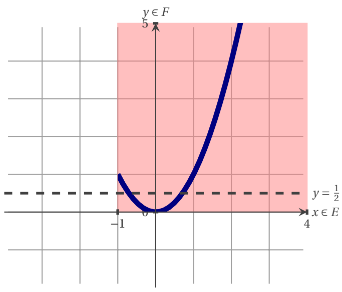
1. $E = \mathbb{R}$ et $F = \mathbb{R}$:
   - ⋆ elle est une fonction car toute droite d'équation $x = \kappa$ avec $\kappa \in \mathbb{R}$ intersecte le graphe de f au plus une fois,
   - ⋆ elle n'est pas une application car la droite d'équation $x = -3$ n'intersecte jamais le graphe de f.



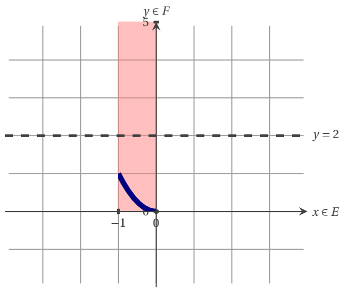
2. $E = [-1;+\infty[$ et $F = \mathbb{R}$:
   - ⋆ elle est une application car toute droite d'équation $x = \kappa$ avec $\kappa \in [-1;+\infty[$ intersecte le graphe de f exactement une fois,
   - ⋆ elle n'est pas injective car la droite d'équation $y = \frac{1}{2}$ intersecte le graphe de f plus d'une fois,
   - ⋆ elle n'est pas surjective car la droite d'équation $y = -1$ n'intersecte jamais le graphe de f.



3. $E = [-1;+\infty[$ et $F = [0;+\infty[$:
   - ⋆ elle est une application car toute droite d'équation $x = \kappa$ avec $\kappa \in [-1;+\infty[$ intersecte le graphe de f exactement une fois,
   - ⋆ elle n'est pas injective car la droite d'équation $y = \frac{1}{2}$ intersecte le graphe de f plus d'une fois,
   - ⋆ elle est surjective car toute droite d'équation $y = \kappa$ avec $\kappa \in [0;+\infty[$ intersecte au moins une fois le graphe de f.

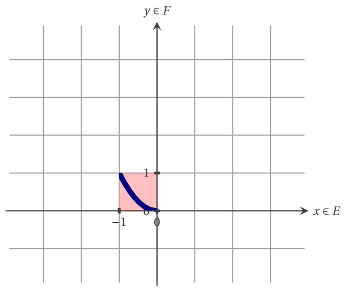


4. $E = [-1;0]$ et $F = [0;+\infty[$:
   - ⋆ elle est une application car toute droite d'équation $x = \kappa$ avec $\kappa \in [-1;0]$ intersecte le graphe de f exactement une fois,
   - ⋆ elle est injective car toute droite d'équation $y = \kappa$ avec $\kappa \in [-1;0]$ intersecte le graphe de f au plus une fois,
   - ⋆ elle n'est pas surjective car la droite d'équation $y = 2$ n'intersecte jamais le graphe de f.



5. $E = [-1;0]$ et $F = [0;1]$:
   - ⋆ elle est une application car toute droite d'équation $x = \kappa$ avec $\kappa \in [-1;0]$ intersecte le graphe de f exactement une fois,

- ⋆ elle est injective car toute droite d'équation $y = \kappa$ avec $\kappa \in [-1;0]$ intersecte le graphe de f au plus une fois,
- ⋆ elle est surjective car toute droite d'équation $y = \kappa$ avec $\kappa \in [0;1]$ intersecte au moins une fois le graphe de f.



Exercice 5.5

On note $E := \{1,2,3\}$ et $F := \{1,2,3,4\}$. Tracer le graphe des six relations binaires de E dans F définies ci-dessous.

① $\forall (x, y) \in E \times F \quad x\mathscr{R}_1 y \iff x - y + 3 \geq 0,$

② $\forall (x, y) \in E \times F \quad x\mathscr{R}_2 y \iff x + 1 \geq y,$

③ $\forall (x, y) \in E \times F \quad x\mathscr{R}_3 y \iff x \geq y,$

④ $\forall (x, y) \in E \times F \quad x\mathscr{R}_4 y \iff x - y + 2 = 0,$

⑤ $\forall (x, y) \in E \times F \quad x\mathscr{R}_5 y \iff y$ est pair,

⑥ $\forall (x, y) \in E \times F \quad x\mathscr{R}_6 y \iff x = y.$

Parmi les six relations ci-dessus, déterminer celles qui sont des fonctions, puis le domaine de définition de chacune de ces fonctions. L'une de ces fonction est-elle une application ?

Correction

① $\forall (x, y) \in E \times F \quad x\mathscr{R}_1 y \iff x - y + 3 \geq 0$: elle n'est pas une fonction

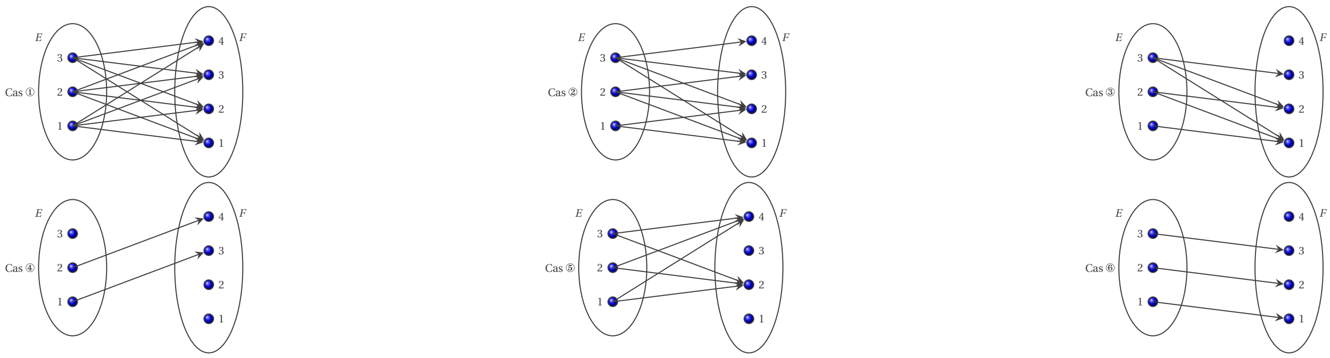
② $\forall (x, y) \in E \times F \quad x\mathscr{R}_2 y \iff x + 1 \geq y$: elle n'est pas une fonction

③ $\forall (x, y) \in E \times F \quad x\mathscr{R}_3 y \iff x \geq y$: elle n'est pas une fonction

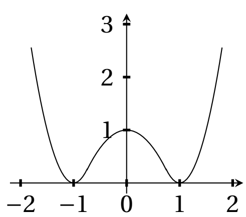
④ $\forall (x, y) \in E \times F \quad x\mathscr{R}_4 y \iff x - y + 2 = 0$: elle est une fonction mais n'est pas une application

⑤ $\forall (x, y) \in E \times F \quad x\mathscr{R}_5 y \iff y$ est pair : elle n'est pas une fonction

⑥ $\forall (x, y) \in E \times F \quad x\mathscr{R}_6 y \iff x = y$: elle est une application injective non surjective



Exercice 5.6



On considère l'application f définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dont la représentation graphique est donnée ci-contre.

1. Quelle est l'image de 0 par f ?
2. Donner, en fonction de y, le nombre d'antécédents de y par f.
3. f est-elle injective ? f est-elle surjective ?

Correction

1. $f(0) = 1$

2. Notons $n\colon \mathbb{R}\to\mathbb{N}$ la fonction qui donne le nombre d'antécédents de y par f en fonction de y. On trouve
$$n\colon \mathbb{R}\to\mathbb{N}$$
$$y\mapsto\begin{cases}2 & \text{si } y>1,\\ 3 & \text{si } y=1,\\ 4 & \text{si } 0<y<1,\\ 2 & \text{si } y=0,\\ 0 & \text{si } y<0.\end{cases}$$
3. f n'est pas injective car par exemple $f(-1)=f(1)$. f n'est pas surjective car par exemple $y=-1$ n'a pas d'antécédents.

Exercice 5.7

Soit $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $f(x)=\frac{2x}{1+x^2}$.

1. f est-elle injective ?
2. f est-elle surjective ?
3. Montrer que $f(\mathbb{R})=[-1,1]$.
4. Montrer que la restriction $g\colon[-1,1]\to[-1,1]$ avec $g(x)=f(x)$ est une bijection.

Correction
Remarquons que f est une application car $\mathscr{D}_f=\mathbb{R}$.

1. f n'est pas injective car $f(2)=f(\frac{1}{2})=\frac{4}{5}$
2. f n'est pas surjective car $y=2$ n'a pas d'antécédents
3. Pour montrer que $f(\mathbb{R})=[-1,1]$ on peut utiliser l'une des méthodes suivantes :
   ⋆ on étudie la fonction et on note que le maximum absolu est 1 et que le minimum absolu est -1
   ⋆ on résout $y=f(x)$ pour tout $y\in\mathbb{R}$: ceci est équivalente à résoudre $yx^2-2x+y=0$ qui admet des solutions réelles ssi $4-4y^2\ge 0$ ssi $y\in[-1,1]$. On a alors prouvé que $f(\mathbb{R})=[-1,1]$.
4. Soit $y\in[-1,1]$, alors les solutions possibles de $g(x)=y$ sont $x=\frac{1\pm\sqrt{1-y^2}}{y}$. Or, seul $x=\frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y}\in[-1,1]$ donc pour $g\colon[-1,1]\to[-1,1]$ on a trouvé un inverse $h\colon[-1,1]\to[-1,1]$ définie par $h(y)=\frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y}=\frac{y}{1+\sqrt{1-y^2}}$, donc g est une bijection.

Exercice 5.8

Soit $f\colon[1,+\infty[\to[0,+\infty[$ définie par $f(x)=x^2-1$. f est-elle bijective ?

Correction

⋆ f est injective car
$$\begin{cases}f(a)=f(b)\\ a,b\in[1,+\infty[\end{cases}\implies\begin{cases}a^2-1=b^2-1\\ a,b\in[1,+\infty[\end{cases}\implies\begin{cases}a=\pm b\\ a,b\in[1,+\infty[\end{cases}\implies a=b.$$

⋆ f est surjective car pour tout $y\in[0,+\infty[$, l'élément $x=\sqrt{y+1}$ est tel que $\begin{cases}x\in[1,+\infty[\\ f(x)=y\end{cases}$.

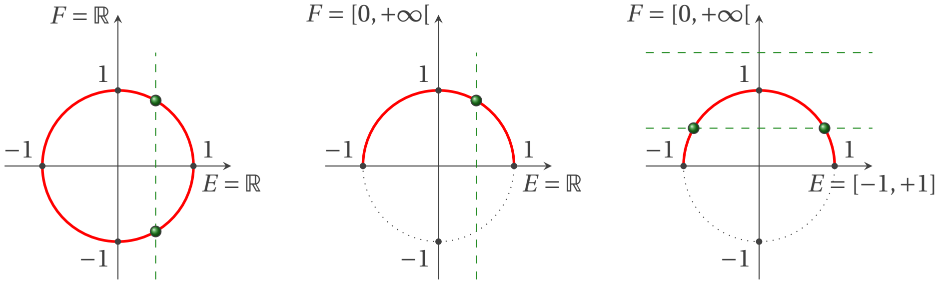
Exercice 5.9

Soit E et F deux parties de $\mathbb{R}$ et $\mathscr{R}$ la relation binaire de E dans F définie par
$$x\mathscr{R}y\iff x^2+y^2=1.$$

1. Montrer que si $E=\mathbb{R}$ et $F=\mathbb{R}$ alors $\mathscr{R}$ n'est pas une fonction.
2. Montrer que si $E=\mathbb{R}$ et $F=[0,+\infty[$ alors $\mathscr{R}$ est une fonction dont on déterminera le domaine de définition D. Pour tout $(x,y)\in D\times F$ tel que $x\mathscr{R}y$, expliciter y en fonction de x.
3. Montrer que si $E=[-1,+1]$ et $F=[0,+\infty[$ alors $\mathscr{R}$ est une application qui n'est ni injective ni surjective.

Correction

1. $E = \mathbb{R}$ et $F = \mathbb{R}$: $\mathscr{R}$ n'est pas une fonction car par exemple $x = \frac{1}{2}$ vérifie $x\mathscr{R}\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
2. $E = \mathbb{R}$ et $F = [0, +\infty[$: $\mathscr{R}$ est une fonction dont le domaine de définition est $D = [-1, 1]$. Pour tout $(x, y) \in D \times F$ tel que $x\mathscr{R}y$, $y = \sqrt{1-x^2}$.
3. $E = [-1, +1]$ et $F = [0, +\infty[$: $\mathscr{R}$ est une application qui n'est pas injective car $\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\mathscr{R}x$ ni surjective car par exemple $y = \frac{3}{2}$ n'as pas d'antécédents.



Exercice 5.10

Déterminer le nombre de fonctions (applications, injections, surjections, bijections) de E dans F dans chacun des cas suivants.

1. $E = \{1\}$ et $F = \{1\}$,
2. $E = \{1, 2\}$ et $F = \{1, 2, 3\}$,
3. $E = \{1, 2, 3\}$ et $F = \{1, 2\}$,
4. $E = \{1, 2, 3\}$ et $F = \{1, 2, 3\}$.

Correction

Soit A et B deux ensembles de cardinal $|A| = n$ et $|B| = m$.

- ⋆ Le nombre d'applications de A dans B est m^n.
- ⋆ Le nombre d'injections de A dans B est $n!\binom{m}{n} = n!\frac{m!}{n!(m-n)!} = \frac{m!}{(m-n)!}$ si $n \le m$, 0 sinon.
- ⋆ Le nombre de surjections de A dans B est 0 si $n < m$, $n!$ si $n = m$, $\sum_{0\le j\le m}(-1)^{m-j}\binom{m}{j}j^n$ sinon.
- ⋆ Le nombre de bijections de A dans B est 0 si $n \neq m$, $n!$ si $n = m$.

1. $n = m = 1$. Applications : 1, injections : 1, surjections : 1, bijections : 1.
2. $n = 2$, $m = 3$. Applications : $3^2 = 9$, injections : $\frac{3!}{(3-2)!} = 6$, surjections : 0, bijections : 0.
3. $n = 3$, $m = 2$. Applications : $2^3 = 8$, injections : 0, surjections : $\sum_{0\le j\le 2}(-1)^{2-j}j^3\frac{2!}{j!(2-j)!} = 0 - 2 + 8 = 6$, bijections : 0.
4. $n = m = 3$. Applications : $3^3 = 27$, injections : $3! = 6$, surjections : $3! = 6$, bijections : $3! = 6$.

Exercice 5.11

Soit $f : E \to F$ une application. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes

(a) f est injective

(b) pour tout A, B sous-ensembles de E on a $f(A\cap B) = f(A)\cap f(B)$.

Correction

(a) $\Longrightarrow$ (b) Par hypothèse f est injective, cela signifie que pour tout $x_1, x_2 \in E$, $f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$.

- ⋆ Soit $y \in f(A\cap B)$, alors il existe $x \in A\cap B$ tel que $y = f(x)$. Puisque $x \in A$ alors $y = f(x) \in f(A)$ et de même $x \in B$ alors $y = f(x) \in f(B)$. On a que $f(A\cap B) \subset f(A)\cap f(B)$.
- ⋆ Réciproquement, si $y \in f(A)\cap f(B)$ alors il existe $a \in A$ tel que $y = f(a)$ et de même il existe $b \in B$ tel que $y = f(b)$. Comme f est injective, on a $a = b$ qui appartient a $A\cap B$. On a que $f(A)\cap f(B) \subset f(A\cap B)$.

(b) $\Longrightarrow$ (a) Soit a et b deux éléments de E tels que $f(a) = f(b)$ et notons y cet élément de F. Définissons $A = \{a\}$ et $B = \{b\}$. Puisque $y = f(a)$ et $y = f(b)$ alors $\{y\} = f(A) = f(B)$. Par hypothèse $f(A)\cap f(B) = f(A\cap B)$ donc $f(A\cap B) = \{y\}$ d'où $a = b$: f est alors injective.

Exercice 5.12

Soit E, F deux ensembles non vides et f une application de E dans F.

1. Soit $\{A_i\}_{i\in I}$ une famille de parties de E. Montrer que
$$f\Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big)=\bigcup_{i\in I} f(A_i) \qquad \text{et} \qquad f\Big(\bigcap_{i\in I} A_i\Big)\subset\bigcap_{i\in I} f(A_i).$$
2. Soit $\{B_j\}_{j\in J}$ une famille de parties de F. Montrer que
$$f^{-1}\Big(\bigcup_{j\in J} B_j\Big)=\bigcup_{j\in J} f^{-1}(B_j) \qquad \text{et} \qquad f^{-1}\Big(\bigcap_{j\in J} B_j\Big)=\bigcap_{j\in J} f^{-1}(B_j).$$

Correction

1. Soit $\{A_i\}_{i\in I}$ une famille de parties de E.
   1.1. Prouvons que $f\Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big)\subset\bigcup_{i\in I} f(A_i)$: soit $y\in f\Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big)$, alors il existe $x\in\bigcup_{i\in I} A_i$ tel que $f(x)=y$, cela implique qu'il existe un indice $i\in I$ tel que $x\in A_i$inipage et $f(x)=y$, mais alors $y\in f(A_i)$ et donc $y\in\bigcup_{i\in I} f(A_i)$.
   1.2. Prouvons que $\bigcup_{i\in I} f(A_i)\subset f\Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big)$: soit $y\in\bigcup_{i\in I} f(A_i)$, alors il existe $i\in I$, $y\in f(A_i)$, cela implique qu'il existe $x\in A_i$ tel que $y=f(x)$, mais alors $x\in\bigcup_{i\in I} A_i$ et donc $y\in f\Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big)$.
   1.3. Prouvons que $f\Big(\bigcap_{i\in I} A_i\Big)\subset\bigcap_{i\in I} f(A_i)$: soit $y\in f\Big(\bigcap_{i\in I} A_i\Big)$, alors il existe $x\in\bigcap_{i\in I} A_i$ tel que $f(x)=y$, cela implique que $x\in A_i$ pour tout indice $i\in I$ et $f(x)=y$, mais alors $y\in f(A_i)$ pour tout indice $i\in I$ et donc $y\in\bigcap_{i\in I} f(A_i)$.
2. Soit $\{B_j\}_{j\in J}$ une famille de parties de F.
   2.1. Prouvons que $f^{-1}\Big(\bigcup_{j\in J} B_j\Big)\subset\bigcup_{j\in J} f^{-1}(B_j)$: soit $x\in f^{-1}\Big(\bigcup_{j\in J} B_j\Big)$, alors il existe $y\in\bigcup_{j\in J} B_j$ tel que $f^{-1}(x)=y$, cela implique qu'il existe un indice $j\in J$ tel que $y\in B_j$ et $y=f^{-1}(x)$, c'est-à-dire qu'il existe un indice $j\in J$ tel que $x\in f^{-1}(B_j)$, mais alors $x\in\bigcup_{j\in J} f^{-1}(B_j)$.
   2.2. Prouvons que $\bigcup_{j\in J} f^{-1}(B_j)\subset f^{-1}\Big(\bigcup_{j\in J} B_j\Big)$: soit $x\in\bigcup_{j\in J} f^{-1}(B_j)$, alors il existe un indice $j\in J$ tel que $x\in f^{-1}(B_j)$, c'est-à-dire qu'il existe $y\in B_j$ tel que $f^{-1}(y)=x$, cela implique que $y\in\bigcup_{j\in J} B_j$ et $f^{-1}(y)=x$, mais alors $x\in f^{-1}\big(\bigcup_{j\in J} B_j\big)$.
   2.3. Prouvons que $f^{-1}\Big(\bigcap_{j\in J} B_j\Big)\subset\bigcap_{j\in J} f^{-1}(B_j)$: soit $x\in f^{-1}\Big(\bigcap_{j\in J} B_j\Big)$, alors il existe $y\in\bigcap_{j\in J} B_j$ tel que $f^{-1}(y)=x$, c'est-à-dire que pour tout $j\in J$, $y\in B_j$ et $f^{-1}(y)=x$, cela implique que pour tout $j\in J$, $x\in f^{-1}(B_j)$, mais alors $x\in\bigcap_{j\in J} f^{-1}(B_j)$.
   2.4. Prouvons que $\bigcap_{j\in J} f^{-1}(B_j)\subset f^{-1}\Big(\bigcap_{j\in J} B_j\Big)$: soit $x\in\bigcap_{j\in J} f^{-1}(B_j)$, alors pour tout $j\in J$, $x\in f^{-1}(B_j)$, c'est-à-dire que pour tout $j\in J$, il existe $y\in B_j$ tel que $f^{-1}(y)=x$, cela implique que pour tout $y\in\bigcap_{j\in J} B_j$ et $f^{-1}(y)=x$, mais alors $x\in\bigcap_{j\in J} f^{-1}(B_j)$.

Exercice 5.13

Les fonctions suivantes sont-elles injectives ? Surjectives ? Bijectives ?

1. $f\colon\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ telle que $f(n)=2n$,
2. $f\colon\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ telle que $f(n)=-n$,
3. $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ telle que $f(x)=x^2$,
4. $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$ telle que $f(x)=x^2$,
5. $f\colon\mathbb{R}^-\to\mathbb{R}$ telle que $f(x)=x^2$,
6. $f\colon\mathbb{R}^-\to\mathbb{R}^+$ telle que $f(x)=x^2$,
7. $f\colon\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ telle que $f(n)=n+1$,
8. $f\colon\mathbb{N}\to\mathbb{N}^*$ telle que $f(n)=n+1$,
9. $f\colon\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ telle que $f(n)=n+1$,
10. $f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ telle que $f(x,y)=(x+y,x-y)$.

Correction

1. est injective car $f(n_1)=f(n_2)$ implique $n_1=n_2$ mais n'est pas surjective car tous les y impaires n'ont pas d'antécédents,
2. est bijective,
3. n'est pas injective car $f(-1)=f(1)=1$ ni surjective car $y=-2$ n'a pas d'antécédents,
4. n'est pas injective car $f(-1)=f(1)=1$ mais elle est surjective,
5. est injective mais n'est pas surjective car $y=-2$ n'a pas d'antécédents,
6. est bijective,

7. est injective mais n'est pas surjective car $y = 0$ n'a pas d'antécédents,
8. est bijective,
9. est bijective car pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $k = n + 1 \iff n = k - 1$,
10. est bijective :
    - ⋆ est injective car $f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2) \implies (x_1 + y_1, x_1 - y_1) = (x_2 + y_2, x_2 - y_2) \implies (x_1, y_1) = (x_2, y_2)$
    - ⋆ est surjective car tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ a comme antécédent $(\frac{a+b}{2}, \frac{a-b}{2}) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 5.14

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x) = \ln\left(|x| + \frac{1}{e}\right)$.

1. f est-elle injective ?
2. f est-elle surjective ?
3. Montrer que la restriction $g : [0, +\infty[\to [-1, +\infty[$ avec $g(x) = f(x)$ est une bijection et calculer la fonction réciproque h.

Attention : on peut s'aider en traçant le graphe de f et en considérant les intersections de ce graphe avec des droites horizontales, mais cela ne constitue pas une preuve !

Correction

1. f n'est pas injective car $f(x) = f(-x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (la fonction est paire)
2. f n'est pas surjective car tout $y < -1$ n'a pas d'antécédents
3. Soit $y \in [-1, +\infty[$, alors les solutions possibles de $g(x) = y$ sont $x = \pm(e^y - 1/e)$. Or, seul $x = e^y - 1/e \in [0, +\infty[$ donc pour $g : [0, +\infty[\to [-1, +\infty[$ on a trouvé une inverse $h : [-1, +\infty[\to [0, +\infty[$ définie par $h(y) = e^y - 1/e$, donc g est une bijection.

Attention, ne pas confondre $\ln\left(|x| + \frac{1}{e}\right)$ et $\ln\left(\left|x + \frac{1}{e}\right|\right)$.

Exercice 5.15

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x) = \ln\left(x^2 + \frac{1}{e}\right)$.

1. f est-elle injective ?
2. f est-elle surjective ?
3. Montrer que la restriction $g : [0, +\infty[\to [-1, +\infty[$ avec $g(x) = f(x)$ est une bijection et calculer la fonction réciproque h.

Attention : on peut s'aider en traçant le graphe de f et en considérant les intersections de ce graphe avec des droites horizontales, mais cela ne constitue pas une preuve !

Correction

1. f n'est pas injective car $f(x) = f(-x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (la fonction est paire)
2. f n'est pas surjective car tout $y < -1$ n'a pas d'antécédents
3. Soit $y \in [-1, +\infty[$, alors les solutions possibles de $g(x) = y$ sont $x = \pm\sqrt{e^y - 1/e}$. Or, seul $x = \sqrt{e^y - 1/e} \in [0, +\infty[$ donc pour $g : [0, +\infty[\to [-1, +\infty[$ on a trouvé une inverse $h : [-1, +\infty[\to [0, +\infty[$ définie par $h(y) = \sqrt{e^y - 1/e}$, donc g est une bijection.

Exercice 5.16

1. Soit $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ l'application telle que $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 2x + 1}$.
   - 1.1. Est-elle injective ? Surjective ?
   - 1.2. Soit $g :]1; +\infty[\to \mathbb{R}$ l'application telle que $g(x) = f(x)$. Est-elle injective ? Surjective ?
   - 1.3. Soit $h : [2; +\infty[\to [0; 1]$ l'application telle que $h(x) = f(x)$. Est-elle injective ? Surjective ?
2. Soit $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}$ l'application telle que $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 2x + 1}$.
   - 2.1. Est-elle injective ? Surjective ?
   - 2.2. Soit $g : [1; +\infty[\to \mathbb{R}$ l'application telle que $g(x) = f(x)$. Est-elle injective ? Surjective ?
   - 2.3. Soit $h : [0; +\infty[\to [0; 1]$ la fonction telle que $h(x) = f(x)$. Est-elle injective ? Surjective ?

Prouver chaque affirmation.

Correction

1. Remarquons que $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Soit x_1 et x_2 dans $\mathbb{R}$. On voit que $f(x_1) = f(x_2) \iff (x_1 - 1)^2 = (x_2 - 1)^2 \iff x_1 - 1 = \pm(x_2 - 1) \iff x_2 = x_1$ ou $x_2 = 2 - x_1$. Soit $y \in \mathbb{R}$. On voit que $y = \frac{1}{x^2 - 2x + 1} \iff (x - 1)^2 = \frac{1}{y} \iff x = 1 + \sqrt{\frac{1}{y}}$, ce qui impose $y > 0$. On peut alors répondre aux questions :

1.1. $f\colon \mathbb{R}\setminus\{1\} \to \mathbb{R}$ telle que $x \mapsto \frac{1}{x^2-2x+1}$.
   - ⋆ f n'est pas injective car $f(2) = f(0)$
   - ⋆ f n'est pas surjective car $y = -1$ n'as pas d'antécédents.

1.2. $g\colon]1;+\infty[\to \mathbb{R}$ telle que $x \mapsto \frac{1}{x^2-2x+1}$.
   - ⋆ $f(x_1) = f(x_2)$ ssi $x_2 = x_1$ ou $x_2 = 2 - x_1$. Si $x_1 \in]1;+\infty[$ alors $x_2 = 2 - x_1 \notin]1;+\infty[$ donc $g(x_1) = g(x_2)$ ssi $x_2 = x_1$: g est injective.
   - ⋆ g n'est pas surjective car $y = -1$ n'as pas d'antécédents.

1.3. $h\colon [0;+\infty] \setminus \{1\} \to [0;1]$ telle que $x \mapsto \frac{1}{x^2-2x+1}$.
   - ⋆ Même raisonnement que pour g.
   - ⋆ h n'est pas surjective car $y = 0$ n'as pas d'antécédents.

2. Remarquons que $D_f = \mathbb{R}\setminus\{-1\}$. Soit x_1 et x_2 dans $\mathbb{R}$. On voit que $f(x_1) = f(x_2) \iff (x_1+1)^2 = (x_2+1)^2 \iff x_1 + 1 = \pm(x_2+1) \iff x_2 = x_1$ ou $x_2 = -x_1 - 2$. Soit $y \in \mathbb{R}$. On voit que $y = \frac{1}{x^2+2x+1} \iff (x+1)^2 = \frac{1}{y} \iff x = -1 + \sqrt{\frac{1}{y}}$, ce qui impose $y > 0$. On peut alors répondre aux questions :

2.1. $f\colon \mathbb{R}\setminus\{-1\} \to \mathbb{R}$ telle que $x \mapsto \frac{1}{x^2+2x+1}$.
   - ⋆ f n'est pas injective car $f(-2) = f(0)$
   - ⋆ f n'est pas surjective car $y = -1$ n'as pas d'antécédents.

2.2. $g\colon [1;+\infty[\to \mathbb{R}$ telle que $x \mapsto \frac{1}{x^2-2x+1}$.
   - ⋆ $f(x_1) = f(x_2)$ ssi $x_2 = x_1$ ou $x_2 = -2 - x_1$. Si $x_1 \in [1;+\infty[$ alors $x_2 = -2 - x_1 \notin [1;+\infty[$ donc $g(x_1) = g(x_2)$ ssi $x_2 = x_1$: g est injective.
   - ⋆ g n'est pas surjective car $y = -1$ n'as pas d'antécédents.

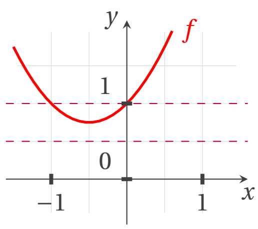
2.3. $h\colon [0;+\infty] \to [0;1]$ telle que $x \mapsto \frac{1}{x^2+2x+1}$.
   - ⋆ h n'est pas injective car $f(-2) = f(0)$
   - ⋆ h n'est pas surjective car $y = 0$ n'as pas d'antécédents.

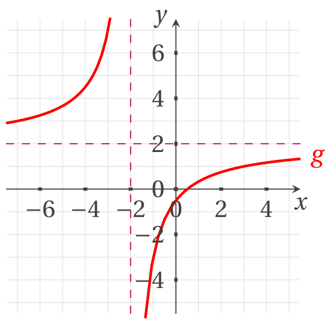
Exercice 5.17

1. Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1 + x + x^2$. Est-elle injective ? Est-elle surjective ?
2. Soit g l'application de $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $g(x) = \frac{2x-1}{x+2}$. Est-elle injective ? Est-elle surjective ?

Correction

1. f n'est pas injective car $f(-1) = f(0) = 1$ ni surjective car $y = 0$ n'a pas d'antécédents.
2. g est injective mais n'est pas surjective car $y = 2$ n'a pas d'antécédents.





Exercice 5.18 (composition, réciprocité)

1. Soient f, g les deux applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par $f(x) = 2x + 1$ et $g(x) = 7x^2 - 2$. Montrer que f admet une application réciproque (que l'on calculera), puis que g n'en admet pas. Calculer $g \circ f$ et $f \circ g$.
2. Soient les applications f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ et g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ définies par $f(x, y) = 2x + 3y + 1$ et $g(t) = (t, 2t - 1)$. Calculer $g \circ f$ et $f \circ g$. Montrer que $f \circ g$ admet une application réciproque (que l'on calculera), puis que $g \circ f$ n'en admet pas.
3. Soient les applications f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$, g de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ et h de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ définies par $f(x, y, z) = (2x, y + z)$, $g(u, v) = v - u$ et $h(t) = (3t + 1, 2t)$. Calculer $h \circ g$ puis $h \circ \left(g \circ f\right)$.
4. Soit les applications f de $\mathbb{R}$ dans $]-1,+1[$ et g de $]-1,+1[$ dans $\mathbb{R}$ définies par $f(x) = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$ et $g(y) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+y}{1-y}$. Calculer $f \circ g$ et $g \circ f$ puis en déduire que f admet une application réciproque (que l'on calculera).

Correction

1. ⋆ f est bijective donc elle admet une fonction réciproque ; comme $y = 2x+1$ ssi $x = (y-1)/2$ on obtient
$$\begin{aligned} f^{-1}\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ y &\mapsto \frac{y-1}{2} \end{aligned}$$
   ⋆ g n'admet pas d'application réciproque car elle n'est pas injective (ni surjective).
   ⋆ $g\circ f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ et l'on a $x\mapsto y = 2x+1 \mapsto 7y^2-2 = 7(2x+1)^2-2 = 28x^2+28x+5$ donc $g(f(x)) = 28x^2+28x+5$,
   ⋆ $f\circ g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ et l'on a $x\mapsto y = 7x^2-2\mapsto 2y+1 = 2(7x^2-2)+1 = 14x^2-3$ donc $f(g(x)) = 14x^2-3$.
2. ⋆ $g\circ f\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ et l'on a $(x,y)\mapsto t = 2x+3y+1\mapsto (t,2t-1) = (2x+3y+1, 2(2x+3y+1)-1) = (2x+3y+1, 4x+6y+1)$ donc $g(f(x)) = (2x+3y+1, 2(2x+3y)+1)$.
   ⋆ $f\circ g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ et l'on a $t\mapsto (x,y) = (t,2t-1)\mapsto 2x+3y+1 = 2t+3(2t-1)+1 = 8t-2$ donc $f(g(t)) = 8t-2$.
   ⋆ $f\circ g$ est bijective et son inverse est l'application $(f\circ g)^{-1}\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ telle que $(f\circ g)^{-1}(y) = (y+2)/8$.
   ⋆ $g\circ f$ n'est pas bijective car elle n'est pas injective, en effet $f(4,4) = f(1,6) = 21$, par conséquent $g(f(4,4)) = g(f(1,6))$.
3. ⋆ $h\circ g\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ et l'on a $t\mapsto (u,v) = (3t+1,2t)\mapsto v-u = 2t-3t-1 = -t-1$ donc $h(g(t)) = -t-1$.
   ⋆ $h\circ(g\circ f)\colon \mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ et l'on a $(x,y,z)\mapsto (u,v) = (2x, y+z)\mapsto t = v-u = y+z-2x\mapsto (3t+1,2t) = (3y+3z-6x+1, 2y+2z-4x)$ donc $h(g(f(x,y,z))) = (-6x+3y+3z+1, -4x+2y+2z)$.
4. $f\circ g\colon]-1,+1[\to]-1,+1[$ et l'on a
$$x\mapsto y = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}\mapsto \frac{e^{2y}-1}{e^{2y}+1} = \frac{e^{2\left(\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}\right)}-1}{e^{2\left(\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}\right)}+1} = \frac{\frac{1+x}{1-x}-1}{\frac{1+x}{1-x}+1} = x.$$
   $g\circ f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ et l'on a
$$x\mapsto y = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}\mapsto \frac{1}{2}\ln\frac{1+y}{1-y} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}}{1-\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}}\right) = x.$$
   Comme $f(g(x)) = g(f(x)) = x$ (attention, le domaine de définition n'est pas le même), on conclut que g est la réciproque de f.

Exercice 5.19 (réciprocité)

1. Soit l'application f de $E = \mathbb{R}^2$ dans $F = \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y) = (2x+y, x-2y)$. Démontrer que f admet une application réciproque (que l'on calculera).
2. Soit l'application f de $]1,+\infty[$ dans $]0,+\infty[$ définie par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^3-1}}$. Démontrer que f admet une application réciproque (que l'on calculera).
3. L'application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1+x+x^2$ admet-elle une application réciproque ?
4. L'application f de $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{2x-1}{x+2}$ admet-elle une application réciproque ?

Correction

1. f admet une réciproque ssi f et bijective :
   ⋆ démontrons que f est injective : soit $(a_1,b_1)\in F$ et $(a_2,b_2)\in F$. Alors il existe $(x_1,y_1)\in E$ et $(x_2,y_2)\in E$ tels que $f(x_1,y_1) = (a_1,b_1)$ et $f(x_2,y_2) = (a_2,b_2)$.
$$(a_1,b_1) = (a_2,b_2) \iff \begin{cases} 2x_1+y_1 = 2x_2+y_2 \\ x_1-2y_1 = x_2-2y_2 \end{cases} \iff (x_1,y_1) = (x_2,y_2);$$
   ⋆ f est surjective (trivial).

   La réciproque de f est la fonction $f^{-1}\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ telle que $(a,b)\mapsto ((2a+b)/5, (a-2b)/5)$.
2. $$\begin{cases} x\in]1,+\infty[\\ y\in]0,+\infty[\\ y = \frac{1}{\sqrt{x^3-1}} \end{cases} \iff \begin{cases} x\in]1,+\infty[\\ y\in]0,+\infty[\\ y^2 = \frac{1}{x^3-1} \end{cases} \iff \begin{cases} x\in]1,+\infty[\\ y\in]0,+\infty[\\ x^3 = \frac{1}{y^2}+1 \end{cases} \iff \begin{cases} x\in]1,+\infty[\\ y\in]0,+\infty[\\ x = \sqrt[3]{\frac{1}{y^2}+1} \end{cases}$$
3. No car elle n'est pas bijective ($f(-1) = f(0)$).

4. No car elle n'est pas bijective ($y = 2$ n'a pas d'antécédents).

Exercice 5.20 (composition, injection, surjection)

Démontrer que

1. la composée de deux injections est une injection,
2. la composée de deux surjections est une surjection,
3. la composée de deux bijections est une bijection,
4. si la composition $g \circ f$ est injective alors f est injective,
5. si la composition $g \circ f$ est surjective alors g est surjective.

Correction

Soit $f : A \to B$ et $g : B \to C$ deux fonctions. Alors $g \circ f : A \to C$.

1. Démontrons que la composée de deux injections est une injection. Soit a_1 et a_2 deux éléments de A tels que $g(f(a_1)) = g(f(a_2))$. Comme g est injective, $f(a_1) = f(a_2)$. Comme f est injective, $a_1 = a_2$. Cela prouve que $g \circ f$ est injective.
2. Démontrons que la composée de deux surjections est une surjection. Comme g est surjective, pour tout $c \in C$ il existe au moins un élément $b \in B$ tel que $g(b) = c$. Comme f est surjective, il existe au moins un élément $a \in A$ tel que $f(a) = b$. Par conséquent, pour tout $c \in C$ il existe au moins un élément $a \in A$ tel que $g(f(a)) = c$. Cela prouve que $g \circ f$ est surjective.
3. Démontrons que la composée de deux bijections est une bijection. Si f et g sont bijectives, alors elles sont injectives et surjectives, donc la composée est injective et surjective, autrement dit est bijective.
4. Démontrons que si la composition $g \circ f$ est injective alors f est injective. Soit a_1 et a_2 deux éléments de A tels que $f(a_1) = f(a_2)$. Alors $g(f(a_1)) = g(f(a_2))$. Par hypothèse $g \circ f$ est injective, donc $a_1 = a_2$, cela implique que f est injective.
5. Démontrons que si la composition $g \circ f$ est surjective alors g est surjective. Par hypothèse $g \circ f$ est surjective, cela signifie que pour tout $c \in C$ il existe $a \in A$ tel que $g(f(a)) = c$. Notons $b = f(a)$. Alors $g(b) = c$, ce qui prouve que g est surjective.

Exercice 5.21

Soit f la fonction de E dans F définie par $f(x) = 2 + x^2$.

1. Supposons que $E = F = \mathbb{R}$.
   1.1. Montrer que f est une application.
   1.2. Montrer que f n'est pas une application injective.
   1.3. Montrer que f n'est pas une application surjective.
2. Supposons que $E =]-\infty, 0]$ et $F = [2, +\infty[$.
   2.1. Montrer que f est une application bijective.
   2.2. Trouver l'application f^{-1} réciproque (inverse) pour f.

Attention : on peut s'aider en traçant le graphe de f et en considérant les intersections de ce graphe avec des droites horizontales, mais cela ne constitue pas une preuve !

Correction

1. Supposons que $E = F = \mathbb{R}$.
   1.1. Puisque $\mathscr{D}_f = E$, la fonction f est une application.
   1.2. Une application $f : E \to F$ est injective si $\forall (x_1, x_2) \in E^2$, $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$. Puisque $f(\pm 1) = 3$, f n'est pas une application injective.
   1.3. Une application $f : E \to F$ est surjective si $\forall y \in F\ \exists x \in E$ tel que $y = f(x)$. Puisque $1 \in F$ mais l'équation $1 = f(x)$ n'admet pas de solution $x \in E$, f n'est pas une application surjective.
2. Supposons que $E =]-\infty, 0]$ et $F = [2, +\infty[$.
   2.1. La restriction de f à ces nouveaux ensembles la rend injective et surjective car pour tout $y \in F$, il existe un et un seul $x \in E$ tel que $y = f(x)$:
   $$y = 2 + x^2 \Leftrightarrow x^2 = y - 2 \overset{x \in E}{\Leftrightarrow} x = -\sqrt{y-2} \text{ qui existe car } y \in F$$
   donc f est bijective.

2.2. Étant f une application bijective, l'application f^{-1} réciproque (inverse) pour f est

$$\begin{aligned} f^{-1}\colon F &\to E \\ y &\mapsto -\sqrt{y-2}. \end{aligned}$$

Exercice 5.22

Soit f la fonction de E dans F définie par $f(x) = -x^2$.

1. Supposons que $E = F = \mathbb{R}$.
   1.1. Montrer que f est une application.
   1.2. Montrer que f n'est pas une application injective.
   1.3. Montrer que f n'est pas une application surjective.
2. Supposons que $E =]-\infty, 0]$ et $F =]-\infty, 0]$.
   2.1. Montrer que f est une application bijective.
   2.2. Trouver l'application f^{-1} réciproque (inverse) pour f.

Attention : on peut s'aider en traçant le graphe de f et en considérant les intersections de ce graphe avec des droites horizontales, mais cela ne constitue pas une preuve !

Correction

1. Supposons que $E = F = \mathbb{R}$.
   1.1. Puisque $\mathscr{D}_f = E$, la fonction f est une application.
   1.2. Une application $f\colon E \to F$ est injective si $\forall (x_1, x_2) \in E^2$, $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$. Puisque $f(\pm 1) = -1$, f n'est pas une application injective.
   1.3. Une application $f\colon E \to F$ est surjective si $\forall y \in F\ \exists x \in E$ tel que $y = f(x)$. Puisque $1 \in F$ mais l'équation $1 = f(x)$ n'admet pas de solution $x \in E$, f n'est pas une application surjective.
2. Supposons que $E =]-\infty, 0]$ et $F =]-\infty, 0]$.
   2.1. La restriction de f à ces nouveaux ensembles la rend injective et surjective car pour tout $y \in F$, il existe un et un seul $x \in E$ tel que $y = f(x)$:
   $$y = -x^2 \iff x^2 = -y \overset{x \in E}{\iff} x = -\sqrt{-y}$$
   donc f est bijective.
   2.2. Étant f une application bijective, l'application f^{-1} réciproque (inverse) pour f est
   $$\begin{aligned} f^{-1}\colon F &\to E \\ y &\mapsto -\sqrt{-y}. \end{aligned}$$

Exercice 5.23

Soit f la fonction de E dans F définie par $f(x) = 1 - x^2$.

1. Supposons que $E = F = \mathbb{R}$.
   1.1. Montrer que f est une application.
   1.2. Montrer que f n'est pas une application injective.
   1.3. Montrer que f n'est pas une application surjective.
2. Supposons que $E = [0, +\infty[$ et $F =]-\infty, 1]$.
   2.1. Montrer que f est une application bijective.
   2.2. Trouver l'application f^{-1} réciproque (inverse) pour f.

Attention : on peut s'aider en traçant le graphe de f et en considérant les intersections de ce graphe avec des droites horizontales, mais cela ne constitue pas une preuve !

Correction

1. Supposons que $E = F = \mathbb{R}$.
   1.1. Puisque $\mathscr{D}_f = E$, la fonction f est une application.
   1.2. Une application $f\colon E \to F$ est injective si $\forall (x_1, x_2) \in E^2$, $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$. Puisque $f(\pm 1) = 0$, f n'est pas une application injective.
   1.3. Une application $f\colon E \to F$ est surjective si $\forall y \in F\ \exists x \in E$ tel que $y = f(x)$. Puisque $2 \in F$ mais l'équation $2 = f(x)$ n'admet pas de solution $x \in E$, f n'est pas une application surjective.
2. Supposons que $E = [0, +\infty[$ et $F =]-\infty, 1]$.

2.1. La restriction de f à ces nouveaux ensembles la rend injective et surjective car pour tout $y \in F$, il existe un et un seul $x \in E$ tel que $y = f(x)$:

$$y = 1 - x^2 \Leftrightarrow x^2 = 1 - y \overset{x\in E}{\Leftrightarrow} x = \sqrt{1-y}$$

donc f est bijective.

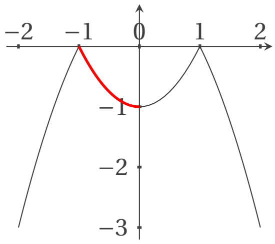
2.2. Étant f une application bijective, l'application f^{-1} réciproque (inverse) pour f est

$$\begin{aligned} f^{-1} \colon F &\to E \\ y &\mapsto +\sqrt{1-y}. \end{aligned}$$

Exercice 5.24

Après avoir rappelé la définition d'une application f de E dans F et la définition d'une application injective f de E dans F (faire attention à l'utilisation des quantificateurs), considérons l'application f définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $f(x) = -|x^2 - 1|$ dont la représentation graphique est donnée ci-contre.

1. Soit g l'application définie de $]-1;0]$ dans $[-1;0]$ par $g(x) = f(x)$.
   g est-elle injective ? g est-elle surjective ?
2. Soit h l'application définie de $]-1;0]$ dans $[-1;0[$ par $h(x) = f(x)$.
   Montrer que h est bijective et trouver l'application h^{-1} réciproque inverse de h.



Correction

f est une application si $\forall x \in E, \forall x' \in E,\ x = x' \implies f(x) = f(x')$ (ou, de façon équivalente, $\forall x \in E, \forall x' \in E,\ f(x) \neq f(x') \implies x \neq x'$) ; f est une application injective si $\forall x \in E, \forall x' \in E,\ x \neq x' \implies f(x) \neq f(x')$ (ou, de façon équivalente, $\forall x \in E, \forall x' \in E$, $f(x) = f(x') \implies x = x'$).

1. g est une application injective car pour $x_1, x_2 \in\,]-1;0]$, $f(x_1) = f(x_2) \implies -|x_1^2 - 1| = -|x_2^2 - 1| \overset{x_i^2-1\le 0}{\implies} x_1^2 - 1 = x_2^2 - 1 \implies x_1^2 = x_2^2 \overset{x_i \le 0}{\implies} x_1 = x_2$. Elle n'est pas surjective car 0 n'a pas d'antécédent.
2. h est une application bijective car elle est injective (même démonstration que pour g) et surjective (en effet, pour tout $y \in [-1;0[$, si on pose $x = -\sqrt{1-y}$ alors $x \in\,]-1;0]$ et $h(x) = y$). Pour trouver h^{-1} application réciproque (inverse) de h on doit isoler x dans l'expression $y = h(x)$ donc

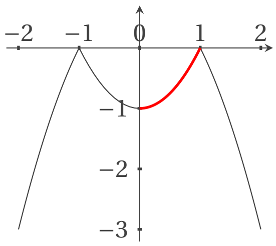
$$\begin{aligned} y = -|x^2 - 1| &\quad \text{pour } x \in\,]-1;0] \text{ et } y \in [-1;0[\\ \iff y = x^2 - 1 \iff x^2 = y + 1 &\iff x = -\sqrt{y+1} \end{aligned}$$

   donc h^{-1} est l'application de $[-1;0[$ dans $]-1;0]$ définie par $h^{-1}(x) = -\sqrt{x+1}$.

Exercice 5.25

Après avoir rappelé la définition d'une application f de E dans F et la définition d'une application injective f de E dans F (faire attention à l'utilisation des quantificateurs), considérons l'application f définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $f(x) = -|x^2 - 1|$ dont la représentation graphique est donnée ci-dessous.

1. Soit g l'application définie de $[0;1[$ dans $[-1;0]$ par $g(x) = f(x)$. g est-elle injective ? g est-elle surjective ?
2. Soit h l'application définie de $[0;1[$ dans $[-1;0[$ par $h(x) = f(x)$. Montrer que h est bijective et trouver l'application h^{-1} réciproque inverse de h.



Correction

f est une application si $\forall x \in E, \forall x' \in E,\ x = x' \implies f(x) = f(x')$ (ou, de façon équivalente, $\forall x \in E, \forall x' \in E,\ f(x) \neq f(x') \implies x \neq x'$) ; f est une application injective si $\forall x \in E, \forall x' \in E,\ x \neq x' \implies f(x) \neq f(x')$ (ou, de façon équivalente, $\forall x \in E, \forall x' \in E$, $f(x) = f(x') \implies x = x'$).

1. g est une application injective car pour $x_1, x_2 \in]-1;0]$, $f(x_1) = f(x_2) \implies -|x_1^2-1| = -|x_2^2-1| \overset{x_i^2-1\le 0}{\implies} x_1^2-1 = x_2^2-1$ $\implies x_1^2 = x_2^2 \overset{x_i\ge 0}{\implies} x_1 = x_2$. Elle n'est pas surjective car 0 n'a pas d'antécédent.
2. h est une application bijective car elle est injective (même démonstration que pour g) et surjective (en effet, pour tout $y \in [-1;0[$, si on pose $x = \sqrt{1+y}$ alors $x \in [0;1[$ et $h(x) = y$). Pour trouver h^{-1} application réciproque (inverse) de h on doit isoler x dans l'expression $y = h(x)$ donc

$$\begin{gathered} y = -|x^2-1| \quad \text{pour } x \in [0;1[\text{ et } y \in [-1;0[\\ \iff y = x^2-1 \iff x^2 = 1+y \iff x = +\sqrt{1+y} \end{gathered}$$

donc h^{-1} est l'application de $[-1;0[$ dans $[0;1[]$ définie par $h^{-1}(x) = +\sqrt{1+x}$.

Exercice 5.26

Calculer

$$\sup_{x\in[0,3/2]} (x-1)^2 \qquad \inf_{x\in[0,3/2]} (x-1)^2 \qquad \sup_{x\in[1,2]} \frac{1}{x} \qquad \sup_{x\in]1,2[} \frac{1}{x} \qquad \sup_{x>0} \frac{1}{x} \qquad \inf_{x>0} \frac{1}{x}$$

Correction

$$\sup_{x\in[0,3/2]} (x-1)^2 = 1 \qquad \inf_{x\in[0,3/2]} (x-1)^2 = 0 \qquad \sup_{x\in[1,2]} \frac{1}{x} = 1 \qquad \sup_{x\in]1,2[} \frac{1}{x} = 1 \qquad \sup_{x>0} \frac{1}{x} = +\infty \qquad \inf_{x>0} \frac{1}{x} = 0$$

Exercice 5.27

Soit $\mathscr{S}$ le sous-ensemble de $\mathbb{R}$ défini par

$$\mathscr{S} := \Big] -2, -1 \Big[\cup \Big] 0, \frac{1}{2} \Big[.$$

Calculer inf et sup de chacun des ensembles suivants en spécifiant s'ils sont respectivement aussi max et min.

$$\begin{aligned} \mathscr{A} &:= \left\{ \log_{10}\left|\frac{x}{y}\right| \ : \ x, y \in \mathscr{S} \right\}, & \mathscr{B} &:= \left\{ 2^{xy} \ : \ x, y \in \mathscr{S} \right\}, \\ \mathscr{C} &:= \left\{ 2^{x/y} \ : \ x, y \in \mathscr{S} \right\}, & \mathscr{D} &:= \left\{ \sin(x+y) \ : \ x, y \in \mathscr{S} \right\}, \\ \mathscr{E} &:= \left\{ \cos(x+y) \ : \ x, y \in \mathscr{S} \right\}. \end{aligned}$$

Correction

$$\begin{aligned}
\inf \mathscr{A} &= -\infty, && \text{il n'est pas minimum et on l'obtient pour } x \to 0^+, y = \frac{1}{2} \\
\sup \mathscr{A} &= +\infty, && \text{il n'est pas maximum et on l'obtient pour } x = \frac{1}{2}, y \to 0^+ \\
\inf \mathscr{B} &= \frac{1}{2}, && \text{il n'est pas minimum et on l'obtient pour } x \to -2^+, y = \frac{1}{2} \\
\sup \mathscr{B} &= 2^4 = 16, && \text{il n'est pas maximum et on l'obtient pour } x, y \to -2^+ \\
\inf \mathscr{C} &= 0, && \text{il n'est pas minimum et on l'obtient pour } x = -\frac{3}{2}, y \to 0^+ \\
\sup \mathscr{C} &= +\infty, && \text{il n'est pas maximum et on l'obtient pour } x = \frac{1}{2}, y \to 0^+ \\
\inf \mathscr{D} &= -1, && \text{il est minimum et on l'obtient pour } x = -\frac{\pi}{2} - \frac{1}{4}, y = \frac{1}{4} \\
\sup \mathscr{D} &= \sin(1), && \text{il est maximum et on l'obtient pour } x = y = \frac{1}{2} \\
\inf \mathscr{E} &= -1, && \text{il est minimum et on l'obtient pour } x = y = -\frac{\pi}{2} \\
\sup \mathscr{E} &= 1, && \text{il n'est pas maximum et on l'obtient pour } x, y \to 0^+
\end{aligned}$$

Exercice 5.28

Soit $\mathscr{S}$ le sous-ensemble de $\mathbb{R}$ défini par

$$\mathscr{S} := \Big[-1,0\Big[\cup \Big]1,2\Big[.$$

Calculer $\inf_{(x,y)\in\mathscr{S}^2} f(x,y)$ et $\sup_{(x,y)\in\mathscr{S}^2} f(x,y)$ de chacune des fonctions suivantes en spécifiant s'ils sont respectivement aussi max et min.

1. $f(x,y) = x\log_{10}|y|$
2. $f(x,y) = \sin(xy)$
3. $f(x,y) = \cos(xy)$
4. $f(x,y) = e^{-x} + (y-3/2)^2$

Correction

1. $f(x,y) = x\log_{10}|y|$
   1.1. $\inf_{(x,y)\in\mathscr{S}^2} f(x,y) = -\infty$, il n'est pas minimum et on l'obtient pour $x=-1$, $y\to 0^-$
   1.2. $\sup_{(x,y)\in\mathscr{S}^2} f(x,y) = +\infty$, il n'est pas maximum et on l'obtient pour $x=\frac{3}{2}$, $y\to 0^-$
2. $f(x,y) = \sin(xy)$
   2.1. $\inf_{(x,y)\in\mathscr{S}^2} f(x,y) = -1$, il est minimum et on l'obtient pour $x=-1$, $y=\frac{\pi}{2}$
   2.2. $\sup_{(x,y)\in\mathscr{S}^2} f(x,y) = 1$, il est maximum et on l'obtient pour $x=y=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$
3. $f(x,y) = \cos(xy)$
   3.1. $\inf_{(x,y)\in\mathscr{S}^2} f(x,y) = -1$, il est minimum et on l'obtient pour $x=y=\sqrt{\pi}$
   3.2. $\sup_{(x,y)\in\mathscr{S}^2} f(x,y) = 1$, il n'est pas maximum et on l'obtient pour $x=-1$, $y\to 0^-$
4. $f(x,y) = e^{-x} + (y-3/2)^2$
   4.1. $\inf_{(x,y)\in\mathscr{S}^2} f(x,y) = e^{-2}$, il n'est pas minimum et on l'obtient pour $x\to 2^-$, $y\to 0^-$
   4.2. $\sup_{(x,y)\in\mathscr{S}^2} f(x,y) = e+\frac{25}{4}$, il est maximum et on l'obtient pour $x=y=-1$

Exercice 5.29

Pour chacune des parties $A_i \subset \mathbb{R}$ ci-dessous, déterminer si A_i est majorée, minorée, bornée, si elle admet une borne supérieure, une borne inférieure, un maximum, un minimum (justifier chaque réponse).

$A_1 = \{1,2,3,5,12\}$
$A_2 = \mathbb{N}$
$A_3 = \mathbb{Z}$
$A_4 = \{3+7q \,:\, q\in\mathbb{N}\}$
$A_5 = \{3-7q \,:\, q\in\mathbb{N}\}$
$A_6 = \{p/3^n \,:\, p,n\in\mathbb{N}\}$
$A_7 = \{p/3^n \,:\, p,n\in\mathbb{N}^*\}$
$A_8 = \mathbb{R}$
$A_9 =]5,6]$

Correction

$A_1 = \{1,2,3,5,12\}$

1.1. $\forall x\in A_1$, $x\ge 1$ donc 1 est un minorant de A_1 et A_1 est minoré
1.2. $\forall x\in A_1$, $x\le 12$ donc 12 est un majorant de A_1 et A_1 est majoré
1.3. étant minoré et majoré, A_1 est borné
1.4. 1 est un minorant de A_1 qui appartient à A_1 donc 1 est le minimum de A_1
1.5. 12 est un majorant de A_1 qui appartient à A_1 donc 12 est le maximum de A_1
1.6. on en déduit que 1 est la borne inférieure de A_1
1.7. on en déduit que 12 est la borne supérieure de A_1

$A_2 = \mathbb{N}$

2.1. $\forall x\in A_2$, $x\ge 0$ donc 0 est un minorant de A_2 et A_2 est minoré
2.2. A_2 n'admet pas de majorant réel (en effet, si $r\in\mathbb{R}$ est un majorant de A_2, alors $E(r)+1\in A_2$ et $E(r)+1>r$) donc A_2 n'est pas majoré
2.3. n'étant pas majoré, A_2 n'est pas borné
2.4. 0 est un minorant de A_2 qui appartient à A_2 donc 0 est le minimum de A_2
2.5. comme A_2 n'admet pas de majorant, il n'admet pas de maximum
2.6. on en déduit que 0 est la borne inférieure de A_2

2.7. on en déduit que A_2 n'a pas de borne supérieure

$A_3 = \mathbb{Z}$

3.1. A_3 n'admet pas de minorant réel (en effet, si $r \in \mathbb{R}$ est un minorant de A_3, alors $E(r)-1 \in A_3$ et $E(r)-1 < r$) donc A_3 n'est pas minoré
3.2. A_3 n'admet pas de majorant réel (en effet, si $r \in \mathbb{R}$ est un majorant de A_3, alors $E(r)+1 \in A_3$ et $E(r)+1 > r$) donc A_3 n'est pas majoré
3.3. n'étant pas majoré, A_3 n'est pas borné
3.4. comme A_3 n'admet pas de minorant, il n'admet pas de minimum
3.5. comme A_3 n'admet pas de majorant, il n'admet pas de maximum
3.6. on en déduit que A_3 n'a pas de borne inférieure
3.7. on en déduit que A_3 n'a pas de borne supérieure

$A_4 = \{3+7q \,:\, q \in \mathbb{N}\}$

4.1. $\forall x \in A_4$, $x \geq 3$ donc 3 est un minorant de A_4 et A_4 est minoré
4.2. A_4 n'admet pas de majorant donc A_4 n'est pas majoré
4.3. n'étant pas majoré, A_4 n'est pas borné
4.4. 3 est un minorant de A_4 qui appartient à A_4 (il suffit de prendre $q=0$) donc 3 est le minimum de A_4
4.5. comme A_4 n'admet pas de majorant, il n'admet pas de maximum
4.6. on en déduit que 3 est la borne inférieure de A_4
4.7. on en déduit que A_4 n'a pas de borne supérieure

$A_5 = \{3-7q \,:\, q \in \mathbb{N}\}$

5.1. A_5 n'admet pas de minorant donc A_5 n'est pas minoré
5.2. $\forall x \in A_5$, $x \leq 3$ donc 3 est un majorant de A_5 et A_5 est majoré
5.3. n'étant pas minoré, A_5 n'est pas borné
5.4. comme A_5 n'admet pas de minorant, il n'admet pas de minimum
5.5. 3 est un majorant de A_5 qui appartient à A_5 (il suffit de prendre $q=0$) donc 3 est le maximum de A_5
5.6. on en déduit que A_5 n'a pas de borne inférieure
5.7. on en déduit que 3 est la borne supérieure de A_5

$A_6 = \{p/3^n \,:\, p,n \in \mathbb{N}\}$

6.1. $\forall x \in A_6$, $x \geq 0$ donc 0 est un minorant de A_6 et A_6 est minoré
6.2. comme $A_2 \subset A_6$, A_6 n'est pas majoré
6.3. n'étant pas majoré, A_6 n'est pas borné
6.4. 0 est un minorant de A_6 qui appartient à A_6 (avec $p=n=0$) donc 0 est le minimum de A_6
6.5. comme A_6 n'admet pas de majorant, il n'admet pas de maximum
6.6. on en déduit que 0 est la borne inférieure de A_6
6.7. on en déduit que A_6 n'a pas de borne supérieure

$A_7 = \{p/3^n \,:\, p,n \in \mathbb{N}^*\}$

7.1. $\forall x \in A_7$, $x \geq 0$ donc 0 est un minorant de A_7 et A_7 est minoré
7.2. A_7 n'admet pas de majorant donc A_7 n'est pas majoré
7.3. n'étant pas majoré, A_7 n'est pas borné
7.4. 0 est le plus grand des minorants de A_7 mais il n'appartient pas à A_7 donc A_7 n'a pas de minimum
7.5. comme A_7 n'admet pas de majorant, il n'admet pas de maximum
7.6. on en déduit que 0 est la borne inférieure de A_7
7.7. on en déduit que A_7 n'a pas de borne supérieure

$A_8 = \mathbb{R}$

8.1. il n'est pas minoré
8.2. il n'est pas majoré
8.3. comme il n'est pas minoré, il n'est pas borné
8.4. comme il n'est pas minoré, il n'a pas de minimum
8.5. comme il n'est pas majoré, il n'a pas de maximum
8.6. comme il n'est pas minoré, il n'a pas de borne inférieure
8.7. comme il n'est pas majoré, il n'a pas de borne supérieure

$A_9 = \,]5,6]$

9.1. $\forall x \in A_9$, $x > 5$ donc 5 est un minorant de A_9 et A_9 est minoré
9.2. $\forall x \in A_9$, $x \leq 6$ donc 6 est un majorant de A_9 et A_9 est majoré
9.3. étant minoré et majoré, A_9 est borné
9.4. 5 est le plus grand des minorants de A_9 mais il n'appartient pas à A_9 donc A_9 n'a pas de minimum (en effet, $\forall x \in A_9$, $(5+x)/2 \in A_9$ et $(5+x)/2 < x$; de plus, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a $5+1/n \not\in A_9$ et $5 < x < 5+1/n$)
9.5. 6 est un majorants de A_9 qui appartient à A_9 donc 6 est le maximum de A_9
9.6. on en déduit que 5 est la borne inférieure de A_9
9.7. on en déduit que 6 est la borne supérieure de A_9

Exercice 5.30

Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x)=1+x^2$. Déterminer l'image directe et réciproque par f des ensembles suivants

$A=[0,1]$ $\qquad$ $B=]-1,4[$ $\qquad$ $C=[0,+\infty[$ $\qquad$ $D=]-\infty,5]$

Correction

	f	f^{-1}
$A=[0,1]$	$[1,2]$	$\{0\}$
$B=]-1,4[$	$[1,17[$	$]-\sqrt{3},\sqrt{3}[$
$C=[0,+\infty[$	$[1,+\infty[$	$\mathbb{R}$
$D=]-\infty,5]$	$[1,+\infty[$	$[-2,2]$

Exercice 5.31

Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x)=x^2$. Soient $A:=[-2,1]$ et $B:=[-1,4]$.

1. Comparer $f(A\cap B)$ et $f(A)\cap f(B)$.
2. Comparer $f(A\cup B)$ et $f(A)\cup f(B)$.
3. Calculer $f^{-1}\big(f(A)\big)$ et $f\big(f^{-1}(A)\big)$ puis comparer ces deux ensembles et A.

Correction

On a $A:=[-2,1]$, $B:=[-1,4]$, $f(A)=[0,4]$ et $f(B)=[0,16]$.

1. $A\cap B=[-1,1]$, $f(A\cap B)=[0,1]$ et $f(A)\cap f(B)=[0,4]$ donc $f(A\cap B)\subset f(A)\cap f(B)$.
2. $A\cup B=[-2,4]$, $f(A\cup B)=[0,16]$ et $f(A)\cup f(B)=[0,16]$ donc $f(A\cup B)=f(A)\cap f(B)$.
3. $f^{-1}\big(f(A)\big)=f^{-1}([0,4])=[-2,2]$ donc $A\subset f^{-1}\big(f(A)\big)$
   $f^{-1}(A)=[-1,1]$, $f\big(f^{-1}(A)\big)=f([-1,1])=[0,1]$ donc $f\big(f^{-1}(A)\big)\subset f(A)$.

Exercice 5.32

Soit $f\colon\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}$ l'application définie par $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$. Trouver $f(\mathbb{R}_+^*)$.

Correction

$f(\mathbb{R}_+^*)=[1;+\infty[$.

Exercice 5.33

Soit $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ l'application définie par $f(x)=2x^2+1$. Soit $A=[-2,1]$. Trouver

(1) $f(A)$, $\qquad$ (2) $f^{-1}\big(f(A)\big)$, $\qquad$ (3) $\sup_A f$, $\qquad$ (4) $\inf_A f$.

Correction

(1) $f(A)=[1;9]$,

(2) $f^{-1}\big(f(A)\big)=[-2;2]$ et on remarque que $[-2,1]\subset[-2;2]$,

(3) $\sup_A f=9=\max_A f$,

(4) $\inf_A f=1=\min_A f$.

Exercice 5.34

Soit $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ l'application définie par $f(x)=1-2x^2$. Soit $A=[-2,1]$. Trouver

(1) $f(A)$, $\qquad$ (2) $f^{-1}\big(f(A)\big)$, $\qquad$ (3) $\sup_A f$, $\qquad$ (4) $\inf_A f$.

Correction

(1) $f(A)=[-7;1]$,

(2) $f^{-1}\big(f(A)\big)=[-2;2]$ et on remarque que $[-2,1]\subset[-2;2]$,

(3) $\sup_A f=1=\max_A f$,

(4) $\inf_A f=-7=\min_A f$.

Exercice 5.35

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x) = 1 - x^2$. Soit $B = [-3, 1]$. Trouver

(1) $f^{-1}(B)$, (2) $f\big(f^{-1}(B)\big)$, (3) $\sup_B f^{-1}$, (4) $\inf_B f^{-1}$.

Correction

(1) $f^{-1}(B) = [-2; 2]$,
(2) $f\big(f^{-1}(B)\big) = [-3; 1]$ et on remarque que $[-3, 1] \subset [-3; 1]$,
(3) $\sup_B f^{-1} = 2 = \max_B f^{-1}$,
(4) $\inf_B f^{-1} = -2 = \min_B f^{-1}$.

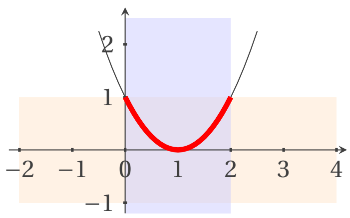
Exercice 5.36

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x) = (x-1)^2$. Soit $B = [-1; 1[$. Trouver

(1) $f^{-1}(B)$, (2) $f\big(f^{-1}(B)\big)$, (3) $\sup_B f^{-1}$, (4) $\inf_B f^{-1}$.

Correction

1. $f^{-1}(B) =]0; 2[$,
2. $f\big(f^{-1}(B)\big) = [0; 1[$ et on remarque que $[0, 1[\subset [-1; 1[$,
3. $\sup_B f^{-1} = 2$ mais ce n'est pas un maximum,
4. $\inf_B f^{-1} = 0$ mais ce n'est pas un minimum.



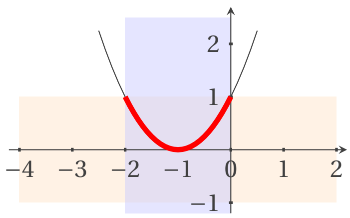
Exercice 5.37

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x) = (x+1)^2$. Soit $B = [-1; 1[$. Trouver

(1) $f^{-1}(B)$, (2) $f\big(f^{-1}(B)\big)$, (3) $\sup_B f^{-1}$, (4) $\inf_B f^{-1}$.

Correction

1. $f^{-1}(B) =]-2; 0[$,
2. $f\big(f^{-1}(B)\big) = [0; 1[$ et on remarque que $[0, 1[\subset [-1; 1[$,
3. $\sup_B f^{-1} = 0$ mais ce n'est pas un maximum,
4. $\inf_B f^{-1} = -2$ mais ce n'est pas un minimum.



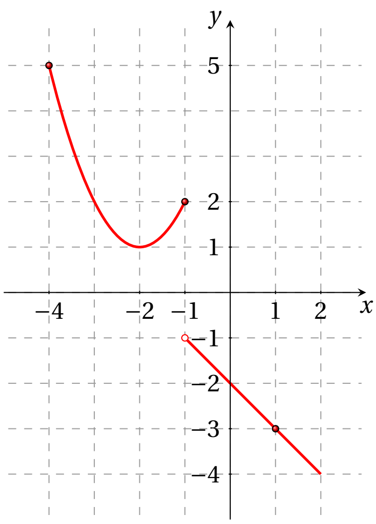
Exercice 5.38

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x + 5 = (x+2)^2 + 1 & \text{si } x \le -1, \\ -x - 2 & \text{si } x > -1, \end{cases}$$

et représentée ci-contre. Soit $A = [-4, 1]$. Trouver

1. $f(A)$,
2. $f^{-1}\big(f(A)\big)$,
3. $f^{-1}(A)$,
4. $f\big(f^{-1}(A)\big)$.



Correction

1. $f(A) = [-3; -1[\cup [1; 5]$,
2. $f^{-1}\big(f(A)\big) = [-4; -1] \cup]-1; 1] = A$,
3. $f^{-1}(A) =]-1; 2] \cup \{-2\}$,
4. $f\big(f^{-1}(A)\big) = [-4; -1[\cup \{1\}$.

Exercice 5.39

Soient E, F deux ensembles non vides et f une application de E dans F. Montrer que

1. $\forall A \subset E,\ A \subset f^{-1}\big(f(A)\big)$;
2. $\forall B \subset F,\ f\big(f^{-1}(B)\big) \subset B$;
3. f est injective ssi $\forall A \subset E,\ f^{-1}\big(f(A)\big) = A$;
4. f est surjective ssi $\forall B \subset F,\ f\big(f^{-1}(B)\big) = B$.

Correction

1. Image directe $f(A) = \{y \in F \mid \exists x \in \mathscr{D}_f,\ y = f(x)\}$, *i.e.* l'ensemble des $f(x) \in F$ pour x parcourant A ;
2. Image inverse (réciproque) $f^{-1}(B) = \{x \in \mathscr{D}_f \mid f(x) \in B\}$. L'image réciproque se note $f^{-1}(B)$ bien que f^{-1} ne soit pas définie en générale. Cependant, si f est bijective, le symbole f^{-1} a deux sens : il représente d'abord l'image réciproque I de B par f et aussi l'image directe I' de B par f^{-1}. Heureusement, $I = I'$.

On a

1. Soit $x_0 \in A$. Alors il existe un et un seul $y_0 \in F$ tel que $y_0 = f(x_0)$ et, par définition de $f(A)$, ce $y_0 \in f(A)$. De plus, il existe au moins un antécédent de ce y_0 par f, à savoir x_0. Donc $x_0 \in f^{-1}\big(f(A)\big)$, ce qui prouve que $A \subset f^{-1}\big(f(A)\big)$.
2. $x_0 \in f\big(f^{-1}(B)\big)$ ssi $\exists\, z \in f^{-1}(B)$ tel que $x_0 = f(z)$ et $z \in f^{-1}(B)$ ssi $f(z) \in B$. Ceci prouve que $f\big(f^{-1}(B)\big) \subset B$.
3. Si f est injective y_0 a comme unique antécédent x_0 et on a $A = f^{-1}\big(f(A)\big)$.
4. f est surjective ssi $\forall B,\ f\big(f^{-1}(B)\big) = B$.
   - ⋆ Supposons f surjective. On a toujours $f\big(f^{-1}(B)\big) \subset B$ Si $B = \emptyset$ alors $f\big(f^{-1}(B)\big) = \emptyset$. Soit donc $B \neq \emptyset$. Pour tout $b \in B$, il existe $x \in E$ tel que $f(x) = b$ car f est surjective. Donc $f(x) \in B$ alors $x \in f^{-1}(B)$ et $b = f(x) \in f\big(f^{-1}(B)\big)$; on a bien $f\big(f^{-1}(B)\big) = B$ pour tout $B \in \mathscr{P}(F)$.
   - ⋆ Supposons que pour tout $B \in \mathscr{P}(F)$, $f\big(f^{-1}(B)\big) = B$. Pour tout $b \in F$ on a $f\big(f^{-1}(\{b\})\big) = \{b\}$ donc $f\big(f^{-1}(\{b\})\big) \neq \emptyset$ ce qui prouve que f est surjective.

Exercice 5.40

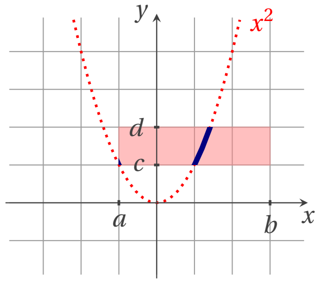
Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $c < d$. Soit $f\colon [a;b] \to [c;d]$ la fonction définie par $f(x) = x^2$.

1. Trouver quatre valeurs pour a, b, c, d tels que f ne soit ni une application injective ni une application surjective.
2. Trouver quatre valeurs pour a, b, c, d tels que f soit une application surjective mais ne soit pas une application injective.
3. Trouver quatre valeurs pour a, b, c, d tels que f soit une application injective mais ne soit pas une application surjective.
4. Trouver quatre valeurs pour a, b, c, d tels que f soit une application bijective.
5. Calculer l'image directe de $[-2;1[$ par $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$.
6. Calculer l'image réciproque de $[-2;1[$ par $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$.

Correction

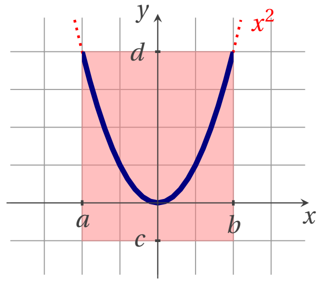
Remarquons que pour que la fonction soit une application il faut que pour tout $x \in [a;b]$ l'on ait $f(x) \in [c;d]$. Il faut alors choisir c et d tels que $c < \min f([a;b])$ et $d > \max f([a;b])$ où $f([a;b])$ est l'image directe de $[a;b]$ par $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$.

Par exemple, si $[a;b] = [-1;3]$ et $[c;d] = [1;2]$ alors f est une fonction mais n'est pas une application car $f(0) = 0 \notin [c;d]$.



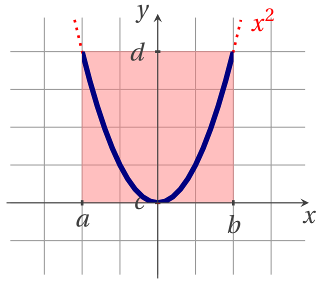
1. Si $[a;b]=[-2;2]$ et $[c;d]=[-1;4]$ alors f est une application mais elle n'est pas injective car $\pm1\in[a;b]$ et $f(-1)=f(1)$ ni surjective car $-1\in[c;d]$ n'as pas d'antécédents.

   Notons que puisque l'énoncé ne demande pas de trouver une application mais juste une fonction qui ne soit ni une application injective ni une application surjective, il aurait suffit de choisir les deux intervalles pour que f soit une fonction mais ne soit pas une application (comme dans la remarque ci-dessus).



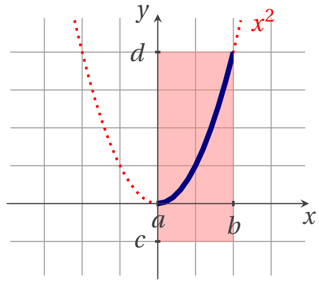
2. Si $[a;b]=[-2;2]$ et $[c;d]=[0;4]$ alors f est une application, elle n'est pas injective car $\pm1\in[a;b]$ et $f(-1)=f(1)$ mais est surjective car $\forall y\in[c;d]$, $\sqrt{y}\in[a;b]$ est un antécédent.

   Notons que cette fois-ci l'énoncé demande de trouver une application !



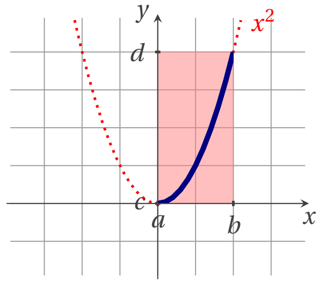
3. Si $[a;b]=[0;2]$ et $[c;d]=[-1;4]$ alors f est une application, elle est injective car $f(x_1)=f(x_2)\implies x_1^2=x_2^2$ avec $x_1,x_2\in[a,b]\implies x_1=x_2$ mais n'est pas surjective car $-1\in[c;d]$ n'a pas d'antécédents.

   Notons que cette fois-ci encore l'énoncé demande de trouver une application.

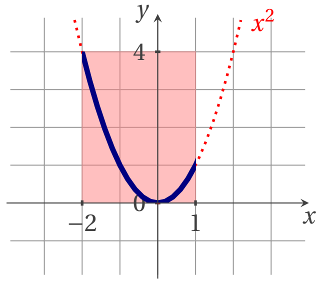


4. Si $[a;b]=[0;2]$ et $[c;d]=[0;4]$ alors f est une application, elle est injective car $f(x_1)=f(x_2)\implies x_1^2=x_2^2$ avec $x_1,x_2\in[a,b]\implies x_1=x_2$ et est surjective car $\forall y\in[c;d]$, $\sqrt{y}\in[a;b]$ est un antécédent.

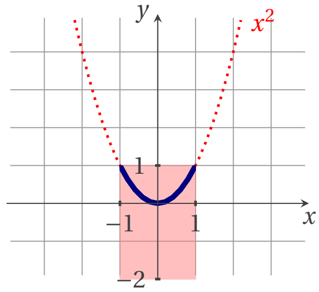
   Bien évidemment il s'agit de trouver une application.

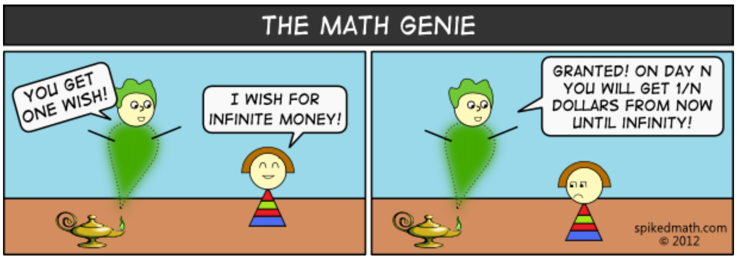


5. $f([-2;1[)=[0;4]$.



6. $f^{-1}([-2;1[)=]-1;1[$.





6 Suites numériques et limites

6.1 Définition (Suites)

Une suite numérique est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$. La notation traditionnelle est $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Remarque

En pratique, on dispose essentiellement de deux méthodes pour définir une suite :

1. on définit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ directement en fonction de n, par exemple
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, x_n = \frac{1}{n^2},$$
2. on définit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par récurrence, par exemple
$$u_0 = 10 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right).$$

6.2 Définition (Vocabulaire)

Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite

- **croissante** s'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $x_n \leq x_{n+1}$;
- **décroissante** s'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $x_n \geq x_{n+1}$;
- **monotone** si elle est soit croissante soit décroissante ;
- **majorée** s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout n, $x_n \leq M$. On dit que M est un majorant de la suite ;
- **minorée** s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout n, $x_n \geq m$. On dit que m est un minorant de la suite ;
- **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée, c'est-à-dire s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $|x_n| \leq M$ pour tout n.

6.3 Définition (Limite d'une suite.)

On dit qu'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $x \in \mathbb{R}$ (on écrit $\lim_n x_n = x$ ou $x_n \to x$) si
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n > N \implies |x_n - x| < \varepsilon.$$
On dit qu'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers plus l'infini (on écrit $\lim_n x_n = +\infty$) si
$$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n > N \implies x_n > M.$$
On dit qu'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers moins l'infini (on écrit $\lim_n x_n = -\infty$)
$$\forall m \in \mathbb{R} \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n > N \implies x_n < m.$$

6.4 Théorème (Unicité)

Si une suite converge, sa limite est unique.

Remarque

1. Une suite peut n'être ni convergente ni divergente vers $-\infty$ ni divergente vers $+\infty$. Par exemple, la suite $x_n = (-1)^n$ est la suite dont les termes d'indice pair valent 1 et ceux d'indice impair -1 : elle ne converge pas et ne diverge vers moins l'infini ni vers $+\infty$.
2. La suppression d'un nombre fini de termes ne modifie pas la nature de la suite, ni sa limite éventuelle.

6.5 Propriété (Opérations)

Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites convergent respectivement vers x et y, alors

- ⋆ la suite $(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $x + y$;
- ⋆ la suite $(x_n \times y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $x \times y$;
- ⋆ la suite $(\lambda x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers λx, $(\lambda \in \mathbb{R})$;
- ⋆ la suite $(1/x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $1/x$ (si $x \neq 0$) ;
- ⋆ la suite $(x_n/y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x/y (si $y \neq 0$).

6.6 Propriété (Limites de la somme de deux suites)

On remplace par un point d'interrogation les cas où on ne peut pas conclure, appelés cas d'indétermination.

	$x_n \to x \in \mathbb{R}$	$x_n \to +\infty$	$x_n \to -\infty$
$y_n \to y \in \mathbb{R}$	$x_n + y_n \to x + y$	$x_n + y_n \to +\infty$	$x_n + y_n \to -\infty$
$y_n \to +\infty$	$x_n + y_n \to +\infty$	$x_n + y_n \to +\infty$	$x_n + y_n \to ?$
$y_n \to -\infty$	$x_n + y_n \to -\infty$	$x_n + y_n \to ?$	$x_n + y_n \to -\infty$

6.7 Propriété (Limites du produit de deux suites)

On remplace par un point d'interrogation les cas où on ne peut pas conclure, appelés cas d'indétermination.

	$x_n \to x > 0$	$x_n \to 0$	$x_n \to x < 0$	$x_n \to +\infty$	$x_n \to -\infty$
$y_n \to y > 0$	$x_n y_n \to xy$	$x_n y_n \to 0$	$x_n y_n \to xy$	$x_n y_n \to +\infty$	$x_n y_n \to -\infty$
$y_n \to y = 0$	$x_n y_n \to 0$	$x_n y_n \to 0$	$x_n y_n \to 0$	$x_n y_n \to ?$	$x_n y_n \to ?$
$y_n \to y < 0$	$x_n y_n \to xy$	$x_n y_n \to 0$	$x_n y_n \to xy$	$x_n y_n \to -\infty$	$x_n y_n \to +\infty$
$y_n \to +\infty$	$x_n y_n \to +\infty$	$x_n y_n \to ?$	$x_n y_n \to -\infty$	$x_n y_n \to +\infty$	$x_n y_n \to -\infty$
$y_n \to -\infty$	$x_n y_n \to -\infty$	$x_n y_n \to ?$	$x_n y_n \to +\infty$	$x_n y_n \to -\infty$	$x_n y_n \to +\infty$

6.8 Définition (Suite de Cauchy)

On dit que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie le critère de Cauchy si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall (p,q) \in \mathbb{N}^2 \quad p,q > N \implies |x_q - x_p| < \varepsilon.$$

6.9 Théorème (de complétude)

Une suite est convergente si et seulement si elle vérifie le critère de Cauchy.

6.10 Théorème ((condition suffisante))

Tout suite convergente est bornée.

Une suite non bornée ne peut donc pas être convergente.

6.11 Théorème (de la convergence monotone (conditions suffisantes))

- ⋆ Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui est croissante et majorée est convergente et $\lim_n x_n = \sup_n x_n$.
- ⋆ Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui est croissante et non majorée diverge vers $+\infty$.
- ⋆ Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui est décroissante et minorée est convergente et $\lim_n x_n = \inf_n x_n$.
- ⋆ Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui est décroissante et non minorée diverge vers $-\infty$.

6.12 Théorème (d'encadrement ou des gendarmes ou sandwich ou de l'étau (condition suffisante))
Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. S'il existe deux suites convergentes $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ayant une même limite $x\in\mathbb{R}$ et satisfaisant

$$\exists N\in\mathbb{N}\quad \forall n\in\mathbb{N}\quad n>N \implies u_n\le x_n\le v_n,$$

alors $\lim_n x_n = x$.

EXEMPLE
$\lim_n \frac{\sin(n)}{n} = 0$ car $\frac{-1}{n} \le \frac{\sin(n)}{n} \le \frac{1}{n}$ et $\lim_n \frac{-1}{n} = \lim_n \frac{1}{n} = 0$.

6.13 Définition (Suite extraite ou sous-suite)
Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. On appelle suite extraite ou sous-suite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ toute suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la forme $y_n = x_{\varphi(n)}$ où $\varphi\colon\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ est une application strictement croissante.

EXEMPLE
$(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont des sous-suites de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

6.14 Définition (Valeur d'adhérence)
On dit que $\ell\in\mathbb{R}$ est une valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ si et seulement si il existe une sous-suite extraite qui converge vers ℓ.

6.15 Théorème
Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. Si (x_n) converge vers ℓ, toute sous-suite converge aussi vers ℓ.
Si une suite extraite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge, ou si deux suites extraites de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ont des limites différentes, alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge. Si deux suites extraites de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite ℓ et si x_n est un terme d'une de ces suites extraites, alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers ℓ. Par exemple, si (x_{2n}) et (x_{2n+1}) convergent vers ℓ, alors (x_n) converge vers ℓ.

EXEMPLE
1. Soit $x_n = 1/n$: la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 donc 0 est l'unique valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Soit $x_n = (-1)^n$: la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a deux valeurs d'adhérence, -1 et 1 (elle ne converge pas). En effet, si $n=2k$ alors $(-1)^n = ((-1)^k)^2 = 1$ pour tout k et si $n=2k+1$ alors $(-1)^n = ((-1)^k)^2(-1) = -1$ pour tout k.
3. Soit $x_n = (-1)^n/n$: la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. En effet, si $n=2k$ alors $(-1)^n/n = 1/n \to 0$ et si $n=2k+1$ alors $(-1)^n = -1/n \to 0$.

6.16 Définition (Suites adjacentes)
Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes si

* (u_n) est croissante,
* (v_n) est décroissante,
* $\lim_n (u_n - v_n) = 0$.

6.17 Théorème
Si deux suites sont adjacentes, elles convergent et ont la même limite.

EXEMPLE
Considérons les deux suites de terme générale $u_n = 1-1/n$ et $v_n = 1+1/n^2$. (u_n) est croissante, (v_n) est décroissante et $u_n - v_n = -\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right) \to 0$, donc elles sont adjacentes et, d'après ce théorème, $\lim_n u_n = \lim_n v_n$. En effet, $\lim_n u_n = 1$ et $\lim_n v_n = 1$.

EXEMPLE
On veut montrer que $\lim_{n\to+\infty} s_n = \ell \in \mathbb{R}$ où la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la somme des inverses des carrés de 1 à n, *i.e.*

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2}.$$

Pour prouver ce résultat on introduit deux suites et on prouve qu'elle sont adjacentes. Considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = s_n$ et la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = s_n + \frac{1}{n}$.

- ⋆ La suite (u_n) est croissante : en effet, $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{(n+1)^2} > u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- ⋆ La suite (v_n) est décroissante : en effet, $v_{n+1} - v_n = u_{n+1} + \frac{1}{n+1} - u_n - \frac{1}{n} = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = -\frac{1}{n(n+1)^2} < 0$
- ⋆ $\lim_n (u_n - v_n) = \lim_n -\frac{1}{n} = 0$.

Par conséquent, les deux suites sont adjacentes et elles convergent vers la même limite.

ATTENTION (LIMITES FONDAMENTALES)

$$\lim_n \frac{P(n)}{Q(n)} = \begin{cases} 0 & \text{si } a < b, \\ \frac{p_a}{q_b} & \text{si } a = b, \\ \infty & \text{si } a > b, \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{aligned} P(n) &= p_0 + p_1 n + \cdots + p_a n^a, \\ Q(n) &= q_0 + q_1 n + \cdots + q_b n^b. \end{aligned}$$

$\lim_n n \sin\left(\frac{1}{n}\right) = 1$	(n en radiant)	$\lim_n n^2\left(1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{1}{2}$	(n en radiant)
$\lim_n \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^n = e^\alpha$	($\alpha \in \mathbb{R}$)	$\lim_n n\left(\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) = 1$	
$\lim_n n\left(a^{1/n} - 1\right) = \ln a$	($a > 0$)	$\lim_n n\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^\alpha - 1\right) = \alpha$	($\alpha \in \mathbb{R}$)

EXEMPLE

a) $1^n \to 1$ car $1^n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$,

b) $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to e$,

c) $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \left(\left(1 + \frac{1}{-n}\right)^{-n}\right)^{-1} \to 1/e$,

d) $\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n = \left(\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right)^{1/n} \to e^0 = 1$,

e) $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} = \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)^n \to +\infty$.

Taux d'intérêt La somme placée dans une institution financière s'appelle le capital ; l'argent que le capital rapporte à son propriétaire suite à un tel placement s'appelle les intérêts ; les intérêts sont calculés en fonction du pourcentage du capital initial, ce pourcentage s'appelant le taux d'intérêt. Dans l'exemple ci-dessous on s'intéresse au calcul des taux d'intérêt simples, fixes et annuels. On s'intéresse aussi aux intérêts composés : il s'agit du taux d'intérêt applicable au capital et aux intérêts gagnés au cours des périodes de placement précédentes.

EXEMPLE (INTÉRÊT CONTINUS)

1. Un capital de 5000 € a été placé dans une banque sous 5%, taux annuel. Quelle somme sera disponible à l'investisseur au bout d'un an ?

   Réponse : calculons d'abord le montant des intérêts : 5000 € × 5% = 250 €. Ensuite, pour calculer la somme disponible, il faut ajouter ce montant à la somme placée : 5000 € + 250 € = 5250 €.

2. Un compte d'épargne donne 5% d'intérêts par an. Le premier janvier on met 10 000 € sur ce compte. La banquier nous laisse le choix entre plusieurs modes de virement des intérêts : soit 5% à la fin d'année (taux 5%), soit à la fin de chaque mois (taux 5%/12), soit tous les jours (taux 5%/365), soit toutes les heures (taux 5%/(365 × 24)), etc. Quel choix est le plus avantageux pour nous ? Est-ce que le montant augmente infiniment si le temps d'intervalle approche zéro ?

   Réponse : notons S la somme au bout d'un an.

   - ⋆ Virement annuel : $S = (1 + 0.05) \times 10\,000$ € = 10 500 €.
   - ⋆ Virement mensuel : $S = \left(1 + \frac{0.05}{12}\right)^{12} \times 10\,000$ € = 10 511.62 €.
   - ⋆ Virement quotidien : $S = \left(1 + \frac{0.05}{365}\right)^{365} \times 10\,000$ € = 10 512.67 €.

Ainsi, plus petit est intervalle de temps entre deux virements d'intérêts plus on touche d'intérêts.
Le montant n'augmente pas infiniment si le temps d'intervalle approche zéro. En effet, on a $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n = e^a$ pour tout $a \in \mathbb{R}$. En reprenant notre exemple on trouve $S = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{0.05}{n}\right)^n \times 10000 € = e^{0.05} \times 10000 € \simeq 10512.71 €$

Remarque (Limites connues)
Soit $q \in \mathbb{R}$, $k > 1$, $\alpha > 0$ et $\beta > 0$, alors

$$\lim_n \frac{k^n}{n!} = 0, \qquad \lim_n \frac{n!}{n^n} = 0, \qquad \lim_n \frac{n^\alpha}{k^n} = 0, \qquad \lim_n \frac{(\ln n)^\beta}{n^\alpha} = 0, \qquad \lim_n \sqrt[n]{n} = 1, \qquad \lim_n n^q = \begin{cases} 0, & \text{si } q < 0,\\ 1, & \text{si } q = 0,.\\ +\infty, & \text{si } q > 0.\end{cases}$$

6.18 Proposition (Critère du rapport (ou de D'ALEMBERT))
Soit $(u_n)_{n\in N}$ une suite telle que $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to \ell$,
- ⋆ si $0 \le \ell < 1$ alors $u_n \to 0$,
- ⋆ si $1 < \ell \le +\infty$ alors $u_n \to +\infty$
- ⋆ si $\ell = 1$ on ne peut pas conclure.

6.19 Proposition (Critère de la racine (ou de CAUCHY))
Soit $(u_n)_{n\in N}$ une suite telle que $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\sqrt[n]{u_n} \to \ell$,
- ⋆ si $0 \le \ell < 1$ alors $u_n \to 0$,
- ⋆ si $1 < \ell \le +\infty$ alors $u_n \to +\infty$
- ⋆ si $\ell = 1$ on ne peut pas conclure.

6.20 Proposition
Soit $(u_n)_{n\in N}$ une suite telle que $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \to \ell > 0 \implies \sqrt[n]{u_n} \to \ell.$$

6.21 Définition (Suite arithmétique)
Une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison $r \in \mathbb{R}$ et de premier terme v_0 si

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad v_{n+1} = v_n + r.$$

On remarque que $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 + nr$.

EXEMPLE
- ⋆ Les suites constantes sont des suites arithmétiques de raison 0.
- ⋆ Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite arithmétique définie par : $v_0 = 0$ et $v_{n+1} = v_n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a $v_n = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

6.22 Définition (Suite géométrique)
Une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $q \in \mathbb{R}$ et de premier terme v_0 si

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad v_{n+1} = q v_n.$$

On remarque que $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 q^n$.

EXEMPLE
- ⋆ Les suites constantes sont des suites géométriques de raison 1.
- ⋆ Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite géométrique définie par : $v_0 = 3$ et $v_{n+1} = 2v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a $v_n = 3 \times 2^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

6.23 Proposition
Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $q \in \mathbb{R}$ et de premier terme v_0, *i.e.* $v_n = v_{n-1}q = v_0 q^n$.
- ⋆ Si $q < -1$, la suite (v_n) diverge et ne possède pas de limite ;

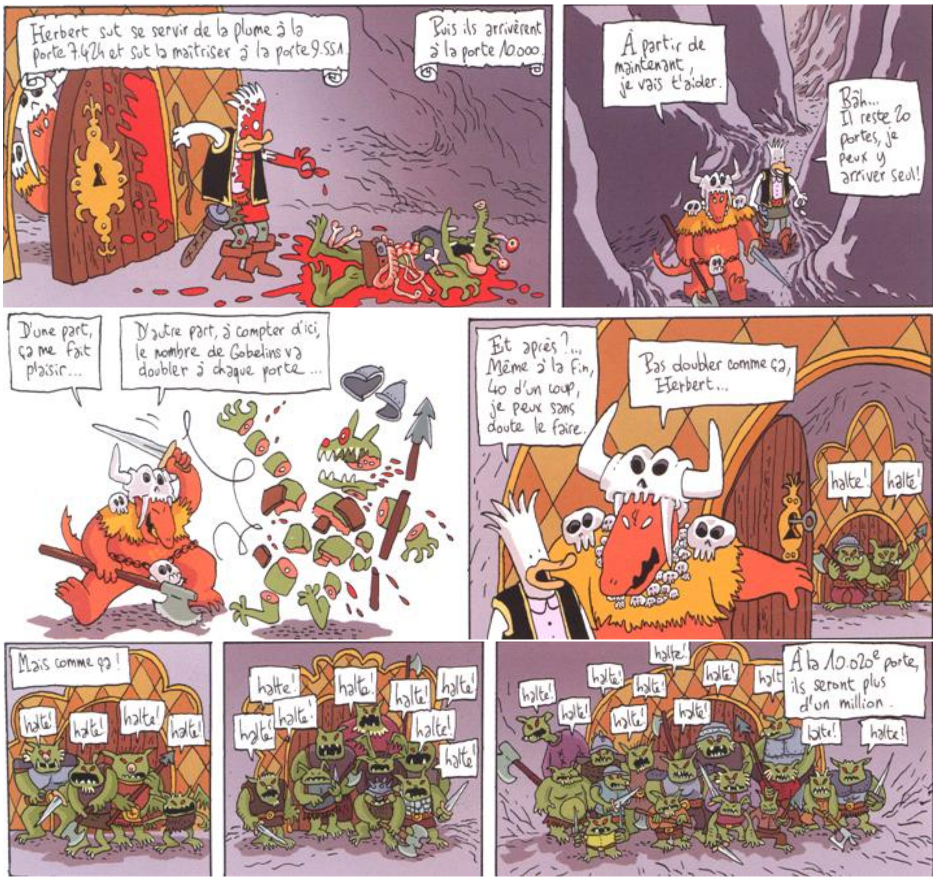


FIGURE 6.1 – Depuis “DONJON ZENITH tome 2”, éditions Delcourt, de Joann SFAR et Lewis TRONDHEIM.
Le nombre de Gobelins suit une progression géométrique de raison $q=2$ et de premier terme $v_0=1$ à la porte 10 000 ; à la 10 020ème porte, *i.e.* après 20 portes, il y aura donc $2^{20}=1\,048\,576$ gobelins.

- ⋆ si $q=-1$, la suite (v_n) diverge et possède deux valeurs d'adhérence 1 et -1 ;
- ⋆ si $|q|<1$, la suite (v_n) converge vers 0 ;
- ⋆ si $q=1$, la suite (v_n) est constante et converge vers 1 ;
- ⋆ si $q>1$, la suite (v_n) est divergente mais possède une limite égale à $+\infty$.

6.24 Définition (Suite arithmético-géométrique)
Une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmético-géométrique de premier terme v_0 si

$$\forall n\in\mathbb{N},\qquad v_{n+1}=qv_n+r$$

avec $q,r\in\mathbb{R}$. On remarque que

- ⋆ si $q=1$, la suite (v_n) est arithmétique de raison r,
- ⋆ si $r=0$, la suite (v_n) est géométrique de raison q.
- ⋆ si $q\neq 1$, $\forall n\in\mathbb{N}$ $v_n=v_0q^n+\frac{q^n-1}{q-1}r=q^n\left(v_0+\frac{r}{q-1}\right)-\frac{r}{q-1}$.

EXEMPLE
On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $v_0=2$ et $v_{n+1}=\frac{1}{2}v_n+3$. On a $v_n=-4\frac{1}{2^n}+6$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

6.25 Proposition
Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmético-géométrique de premier terme v_0, *i.e.* $v_n=q^n\left(v_0+\frac{r}{q-1}\right)-\frac{r}{q-1}$. Elle converge si et seulement si $|q|<1$ et la limite vaut $\frac{r}{1-q}$.

6.26 Définition (Sommes et Produits)

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $a_1, a_2, \dots, a_n$ des éléments de $\mathbb{R}$. On définit les suites $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ comme

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n, \qquad p_n = \prod_{i=1}^{n} a_i = a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n.$$

Remarque

L'indice i est muet : $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{\kappa=1}^{n} a_\kappa$ et $\prod_{i=1}^{n} a_i = \prod_{\kappa=1}^{n} a_\kappa$.

Exemple

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1+2+\cdots+n, \qquad \prod_{i=1}^{n} i = 1 \times 2 \times \cdots \times n = n!$$

6.27 Propriété

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $a_1, a_2, \dots, a_n$ et $b_1, b_2, \dots, b_n$ des éléments de $\mathbb{R}$, on a les propriétés suivantes :

Linéarité de la somme : soit $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i, \qquad \sum_{i=1}^{n} (\lambda a_i) = \lambda \sum_{i=1}^{n} a_i;$$

Relation de Chasles : pour tout entier r tel que $1 \le r \le n$,

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{r} a_i + \sum_{i=r+1}^{n} a_i;$$

Changement d'indice :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1} = \sum_{i=2}^{n+1} a_{i-1};$$

Inégalités :

$$\forall i \in \{1,\dots,n\}\ a_i \le b_i \qquad \Longrightarrow \qquad \sum_{i=1}^{n} a_i \le \sum_{i=1}^{n} b_i.$$

Exemple (Sommes classiques)

Somme des entiers de 1 à n :

$$1+2+\cdots+n = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2};$$

Somme des termes d'une suite arithmétique : soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison $r \in \mathbb{R}$ et de premier terme v_0, on a

$$v_0 + v_1 + \cdots + v_n = \sum_{k=0}^{n} v_k = (n+1)v_0 + r\frac{n(n+1)}{2}.$$

Somme des puissance d'un réel : soit $q \in \mathbb{R}$, on a

$$1 + q + \cdots + q^n = \sum_{i=1}^{n} q^i = \begin{cases} \frac{1+q^{n+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1, \\ n+1 & \text{si } q = 1; \end{cases}$$

Somme des termes d'une suite géométrique : soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $q \in \mathbb{R}$ et de premier terme v_0, on a

$$v_0 + v_1 + \cdots + v_n = \sum_{k=0}^{n} v_k = \begin{cases} v_0\frac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \\ (n+1)v_0 & \text{si } q = 1 \end{cases}$$

Soit la suite $s_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$, alors

- ⋆ si $q < -1$, la suite (s_n) est divergente et ne possède pas de limite ;

- ⋆ si $q=-1$, la suite (s_n) est divergente et possède deux valeurs d'adhérence 0 et 1 ;
- ⋆ si $|q|<1$, la suite (s_n) converge vers $\frac{1}{1-q}$;
- ⋆ si $q=1$, la suite (s_n) est divergente mais possède une limite égale à $+\infty$;
- ⋆ si $q>1$, la suite (s_n) est divergente mais possède une limite égale à $+\infty$.

Somme des termes d'une suite arithmético-géométrique : soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmético-géométrique de premier terme v_0, on a

$$v_0+v_1+\cdots+v_n=\sum_{k=0}^{n}v_k=\begin{cases}\left(v_0-\frac{r}{1-q}\right)\frac{1-q^{n+1}}{1-q}+\frac{r}{1-q}n & \text{si } q\neq 1\\ (n+1)v_0+r\frac{n(n+1)}{2} & \text{si } q=1\end{cases}$$

Somme des carrés des entiers de 1 à n :

$$1^2+2^2+\cdots+n^2=\sum_{i=1}^{n}i^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6};$$

Somme des cubes des entiers de 1 à n :

$$1^3+2^3+\cdots+n^3=\sum_{i=1}^{n}i^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2=\left(\sum_{i=1}^{n}i\right)^2.$$

6.28 Définition (Suite récurrente linéaire d'ordre 2)

Une suite récurrente linéaire d'ordre 2 s'écrit

$$\begin{cases}u_0=A, & (6.1a)\\ u_1=B, & (6.1b)\\ u_{n+2}=au_{n+1}+bu_n & (6.1c)\end{cases}$$

avec A, B, a et b fixés, b de préférence non nul.
Supposons a et b positifs. Le terme général de cette suite s'écrit $u_n=r^n$ avec $r^{n+2}-ar^{n+1}-br^n=0$, *i.e.* $r^2-ar-b=0$. Le discriminant de ce polynôme en r est a^2+4b, positif, donc nos deux racines sont distinctes et réelles :

$$r_1=\frac{a-\sqrt{a^2+4b}}{2}, \qquad r_2=\frac{a+\sqrt{a^2+4b}}{2}.$$

On peut remarquer que si deux suites v_n et w_n vérifient la relation (6.1c), toute combinaisons linéaires $\lambda v_n+\mu w_n$ de ces deux suites aussi. Donc, une suite correspondant à la relation (6.1c) et de type $u_n=\lambda r_1^n+\mu r_2^n$. Maintenant, il n'y a plus qu'à trouver les coefficients λ et μ, que l'on peut trouver quand on connait les deux premiers termes de la suite qui nous intéresse.

$$\begin{cases}\lambda+\mu=A,\\ \lambda r_1+\mu r_2=B,\end{cases} \implies \begin{cases}\lambda=\dfrac{A\frac{a-\sqrt{a^2+4b}}{2}-B}{\sqrt{a^2+4b}},\\ \mu=\dfrac{A\frac{a+\sqrt{a^2+4b}}{2}-B}{\sqrt{a^2+4b}}.\end{cases}$$

En conclusion

$$u_n=\frac{A\frac{a-\sqrt{a^2+4b}}{2}-B}{\sqrt{a^2+4b}}\left(\frac{a-\sqrt{a^2+4b}}{2}\right)^n+\frac{A\frac{a+\sqrt{a^2+4b}}{2}-B}{\sqrt{a^2+4b}}\left(\frac{a+\sqrt{a^2+4b}}{2}\right)^n.$$

EXEMPLE (SUITE DE FIBONACCI)

La suite de FIBONACCI est une suite d'entiers dans laquelle chaque terme est la somme des deux termes qui le précèdent. Elle commence généralement par les termes 0 et 1 (parfois 1 et 1). Elle doit son nom à Leonardo FIBONACCI, un mathématicien italien du XIIIe siècle qui, dans un problème récréatif posé dans un de ses ouvrages, le *Liber Abaci*, décrit la croissance d'une population de lapins :

> «Un homme met un couple de lapins dans un lieu isolé de tous les côtés par un mur. Combien de couples obtient-on en un an si chaque couple engendre tous les mois un nouveau couple à compter du troisième mois de son existence ?»

Le problème de FIBONACCI est à l'origine de la suite dont le n-ième terme correspond au nombre de paires de lapins au n-ème mois. Dans cette population (idéale), on suppose que :

- ⋆ au (début du) premier mois, il y a juste une paire de lapereaux ;
- ⋆ les lapereaux ne procréent qu'à partir du (début du) troisième mois ;

- ⋆ chaque (début de) mois, toute paire susceptible de procréer engendre effectivement une nouvelle paire de lapereaux;
- ⋆ les lapins ne meurent jamais (donc la suite de FIBONACCI est strictement croissante).

Notons F_n le nombre de couples de lapins au début du mois n. Jusqu'à la fin du deuxième mois, la population se limite à un couple (ce qu'on note $F_1 = F_2 = 1$). Dès le début du troisième mois, le couple de lapins a deux mois et il engendre un autre couple de lapins; on note alors $F_3 = 2$. Plaçons-nous maintenant au mois n et cherchons à exprimer ce qu'il en sera deux mois plus tard, soit au mois $n+2$: F_{n+2} désigne la somme des couples de lapins au mois $n+1$ et des couples nouvellement engendrés. Or, n'engendrent au mois $(n+2)$ que les couples pubères, c'est-à-dire ceux qui existent deux mois auparavant. On a donc, pour tout entier n strictement positif, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. On choisit alors de poser $F_0 = 0$, de manière que cette équation soit encore vérifiée pour $n = 0$. On obtient ainsi la forme récurrente de la suite de FIBONACCI : chaque terme de cette suite est la somme des deux termes précédents :

$$\begin{cases} F_0 = 0, \\ F_1 = 1, \\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \end{cases}$$

On souhaite maintenant établir une expression fonctionnelle de la suite de FIBONACCI, c'est-à-dire une expression telle que le calcul du nombre de couples pour une valeur de n donnée ne présuppose la connaissance d'aucun nombre de couples pour une quelconque autre valeur de n, ce que ne permet pas la formule de récurrence. Comme la suite de FIBONACCI est linéaire d'ordre deux, on peut écrire son équation caractéristique. On obtient une équation du second degré $x^2 - x - 1 = 0$ qui a pour solutions $x_1 = \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (le nombre d'or) et $x_2 = 1 - \varphi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Il en résulte que $F_n = \alpha\varphi^n + \beta(1-\varphi)^n$ où α et β sont deux constantes à déterminer à partir de F_0 et F_1. On a $\alpha + \beta = 0$ et $(\alpha - \beta)\varphi + \beta = 1$ ce qui donne $\alpha = -\beta = 1/\sqrt{5}$. On trouve alors l'expression générale de la suite de FIBONACCI (appelée formule de BINET) :

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^n - (1-\varphi)^n\right).$$

Si on calcule la limite du rapport de deux nombres consécutifs de la suite de FIBONACCI on trouve le nombre d'or :

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{\varphi^{n+1} - (1-\varphi)^{n+1}}{\varphi^n - (1-\varphi)^n} = \varphi\frac{1 - \left(\frac{1-\varphi}{\varphi}\right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{1-\varphi}{\varphi}\right)^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \varphi$$

car $1 < \varphi < 2$ et donc $-1 < \frac{1-\varphi}{\varphi} < 1$.

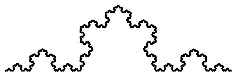
Le jeu d'échecs Selon la légende, le jeu d'échecs fut inventé en Inde par un savant. Le roi, séduit par ce nouveau loisir, le convoqua au palais : "Ton jeu m'a redonné la joie de vivre! Je t'offre ce que tu désires!" lui dit-il. Le sage ne voulait rien et ne dit mot. Le roi offensé s'énerva : "Parle donc, insolent! Tu as peur que je ne puisse exaucer tes souhaits?" Le sage fut blessé par ce ton et décida de se venger : "J'accepte votre présent. Vous ferez déposer un grain de riz sur la première case de l'échiquier. Vous ferez mettre ensuite 2 grains sur la deuxième case, 4 sur la troisième et ainsi de suite..." Le roi s'énerva pour de bon : "Puisque tu honores si mal ma générosité, vas-t-en! Ton sac de riz te sera porté demain et ne me dérange plus!" Le lendemain matin, le roi fut réveillé par son intendant affolé : "Sire, c'est une catastrophe! Nous ne pouvons pas livrer le blé! Nos mathématiciens ont travaillé toute la nuit : il n'y a pas assez de riz dans tout le royaume pour exaucer le souhait du savant!" Pourquoi une telle affirmation?
Notons b_n le nombre de grains de blé sur la case n, n allant de 0 à 63. La suite (g_n) est géométrique de raison 2 car $g_{n+1} = 2g_n$ donc $g_n = 2^n g_0 = 2^n$. Ainsi la somme totale des grains de blé sera

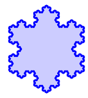
$$\sum_{n=0}^{63} g_n = \sum_{n=0}^{63} 2^n = \frac{1-2^{64}}{1-2} = 2^{64} - 1 = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,615 \simeq 18\cdot 10^{18}.$$

Pour des nombres aussi grands, notre intuition nous fait défaut. Essayons de faire ne serait-ce qu'une approximation. Un grain de riz est, grosso modo, un cylindre de diamètre 1 mm et de hauteur 5 mm. Ainsi on pourrait faire tenir 200 grains de riz dans un centimètre cube (= 1000 mm^3). On peut commencer nos calculs. Si l'on peut faire tenir 200 grains de riz dans un centimètre cube, alors il nous en faut $200\cdot 100^3$ pour un mètre cube et $200\cdot 100^3\cdot 1000^3$ pour un kilomètre cube. Si on divise cette quantité de grains par $2\cdot 10^{17}$ on obtient le volume de total de notre montagne rizière : 92 kilomètres cubes. Ce volume est tout aussi difficile à imaginer. En remarquant que la France a une superficie d'environ 375 000 km^2, on peut se représenter la quantité de riz demandée par l'inventeur du jeu d'échecs de la manière suivante : avec elle on pourrait couvrir toute la France d'une couche de riz de 13 centimètres de haut (car 13 centimètres correspondent à peu près à 7.5 millièmes de kilomètre et $675000/7500 = 90$).

Combien de fois peut-on plier une feuille ? Combien de fois peut-on plier une feuille de papier en son milieu ? La plupart de gens surestiment largement la réponse. Lors du pliage il faut considérer deux aspects du problème. Primo, l'épaisseur du papier plié croît de manière exponentielle, puisqu'elle double à chaque pliage. Après sept opérations on a déjà atteint 128 fois l'épaisseur standard de la feuille (environ 0.01 mm). Cela fait déjà plus d'un centimètre, et si on faisait cela encore cinq fois, on atteindrait une épaisseur de 41 centimètres. Or cela est impossible : quand on superpose plusieurs couches de papier, d'épaisseur totale d, alors la situation pour la couche supérieure – qui devient inférieure lors du pliage – est différente de celle de la couche inférieure. La couche inférieure doit se dilater d'une quantité égale à la longueur d'un demi-cercle de rayon d. Le périmètre de ce cercle étant $2\pi d$, la feuille doit se dilater d'une longueur égale à πd. Un exemple : prenons une liasse d'épaisseur 1 cm, plions-la cinq fois, lors du sixième pliage elle devra se dilater d'environ 3.14 cm. On voit donc que le processus s'arrête très vite, pour des raisons d'extensibilité du matériau papier. L'expérience nous dit que le nombre de pliages possibles se situe autour de huit. En revanche, si on utilise du papier toilette... `http://www.newscientist.com/blogs/nstv/2012/01/paper-folding-limits-pushed.html`

Courbe et flocon de VON KOCH

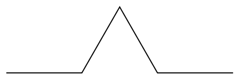




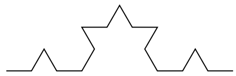
La courbe de von Koch se construit de manière itérative : à partir d'un segment donné, on le divise en 3 segments de même longueur et on remplace le segment central par les 2 côtés d'un triangle équilatéral construit extérieurement à partir de ce segment central.

1. Prenons un segment initial de longueur ℓ_0 :

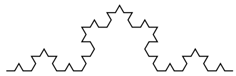
2. Après la première itération, la longueur de la courbe est égale à $(4/3)\ell_0$:



3. Après la seconde, la longueur de la courbe est égale à $(4/3)^2\ell_0$:



4. Après la troisième, la longueur de la courbe est égale à $(4/3)^3\ell_0$:



On continue la construction ainsi de suite jusqu'à l'itération i qui produit une courbe de longueur $(4/3)^i\ell_0$. À la limite on obtient une courbe de longueur infinie (car $\lim_{n\to+\infty}(4/3)^n=+\infty$) entièrement contenue dans un espace fini.

Le flocon de von Koch est obtenu en appliquant cet algorithme aux côtés d'un triangle équilatéral. Notons n_i le nombre de côté de la figure à l'étape i, ℓ_i la longueur de chaque côtés, p_i le périmètre et S_i la surface. On a

$$
\begin{aligned}
&n_0=3, && n_i=4^i n_0,\\
&\ell_0 \text{ donné}, && \ell_i=\frac{\ell_0}{3^i},\\
&p_0=n_0\ell_0, && p_i=n_i\ell_i,\\
&S_0=\frac{\sqrt{3}}{4}\ell_0^2, && S_i=S_0+\sum_{k=0}^{i-1}n_k\frac{\sqrt{3}}{4}\ell_i^2=\frac{\sqrt{3}}{4}\ell_0^2\left(1+\frac{1}{3}\sum_{k=0}^{i-1}\left(\frac{4}{9}\right)^k\right)=\frac{\sqrt{3}}{4}\ell_0^2\left(1+\frac{1}{3}\frac{1-\left(\frac{4}{9}\right)^i}{1-\frac{4}{9}}\right).
\end{aligned}
$$

À la limite on obtient une figure de périmètre infini (car $\lim_{n\to+\infty}p_n=+\infty$) mais de surface finie (car $\lim_{n\to+\infty}S_n=\frac{5\sqrt{3}}{32}\ell_0^2$).

Remarque (Conversion de nombres décimaux périodiques vers des fractions rationnelles)
Un nombre périodique est un nombre à décimales ayant une tranche de décimales qui se répètent. Pour matérialiser sans ambiguïté les chiffres qui se répètent, les décimales récurrentes, on les surmonte d'une barre sur le bloc de chiffres répétés. Par exemple : $78/17=4,\overline{5882352941176470}$, $111/90=1,2\overline{3}=1,233333\dots$.

- Montrons tous d'abord que $0,\overline{9}=1$: on a

$$0,\overline{9}=0.9+0.09+0.009+\cdots=9\times\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{10^i}=\frac{9}{10}\times\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{10^i}=\frac{9}{10}\times\frac{1}{1-\frac{1}{10}}=1.$$

  Cette idée se généralise à n'importe quel nombre à écriture décimale infinie périodique.

- Comme tous les nombres périodiques sont rationnels, on va illustrer une méthode pour convertir un nombre périodique en fraction ordinaire. Soit α la partie entière du nombre, β la partie décimale sans la période et p le nombre de chiffres de β, γ la période et q le nombre de chiffres de γ, alors on a

$$\alpha,\beta\overline{\gamma}=\alpha+10^{-p}\beta+\gamma10^{-p}\left(10^{-q}+10^{-2q}+10^{-3q}+\dots\right)=\alpha+10^{-p}\beta+\gamma10^{-p}\sum_{i=1}^{\infty}(10^{-q})^i.$$

Comme

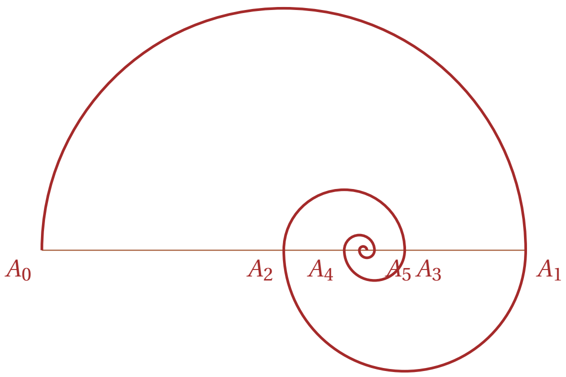
$$\alpha+10^{-p}\beta+\gamma10^{-p}\sum_{i=1}^{\infty}(10^{-q})^i=\alpha+10^{-p}\beta+\gamma10^{-p}\frac{1}{10^q-1}=\frac{\left(\alpha10^{p+q}+\beta10^q+\gamma\right)-\left(\alpha10^p+\beta\right)}{(10^q-1)10^p}=\frac{\alpha\beta\gamma-\alpha\beta}{\underbrace{9\dots9}_{q}\underbrace{0\dots0}_{p}},$$

pour convertir un nombre périodique $x=\alpha,\beta\overline{\gamma}$ en fraction ordinaire y/z on peut utiliser la méthode suivante :

- ⋆ on prend comme numérateur y la différence entre le nombre constitué par toutes les chiffres de x moins le nombre constitué par toutes les chiffres qui n'appartiennent pas à la période : $y=\alpha\beta\gamma-\alpha\beta$
- ⋆ on prend comme dénominateur z le nombre formé d'autant de 9 que de chiffres de la période et de 0 que de chiffres entre la virgule et la période : $z=\underbrace{9\dots9}_{q}\underbrace{0\dots0}_{p}$.

Par exemple : $0,5\overline{12}=\frac{512-5}{990}$.

Spirale Les points A_0 et A_1 sont fixés. Pour i supérieur ou égal à 2, A_i est le milieu du segment d'extrémités A_{i-2} et A_{i-1}. On construit une spirale avec des demis arcs de cercle de diamètre A_iA_{i+1}. Autour de quel point la spirale s'enroule-t-elle ?



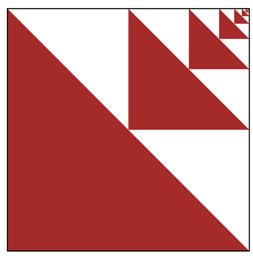
Les points A_i sont alignés, sans perte de généralité on peut supposer qu'ils se trouvent tous sur la droite d'équation $y=0$. Notons x_i l'abscisse du point A_i et prenons $x_0=0$ et $x_1=\ell$. Alors $x_i=\frac{(-1)^{i-1}}{2}x_{i-1}$ pour tout $i\le 2$, ce qui donne

$$x_i=\ell\sum_{k=0}^{i}\left(-\frac{1}{2}\right)^k=\ell\frac{1+\left(-\frac{1}{2}\right)^{i+1}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{2}{3}\ell\left(1+\left(-\frac{1}{2}\right)^{i+1}\right)$$

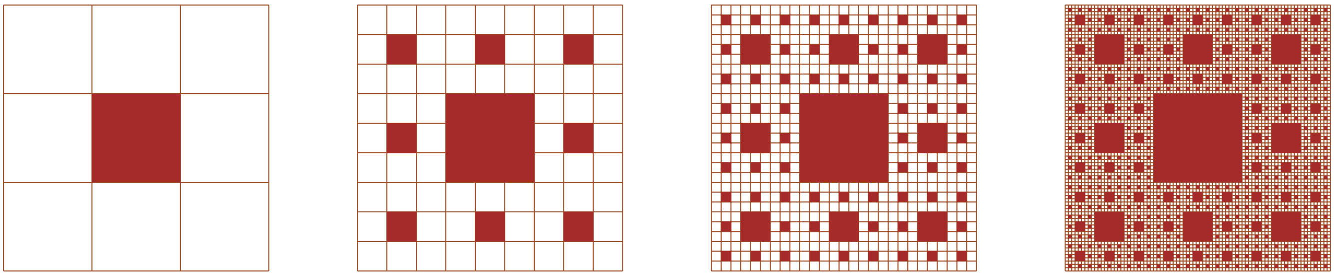
À la limite on trouve $x_i\xrightarrow[i\to+\infty]{}\frac{2}{3}\ell$.

Mise en abîme Un carré unité est colorié comme dans la figure ci-contre. Sachant qu'il y a une infinité de triangles coloriés, on veut calculer l'aire de la surface totale qu'ils occupent. Le premier triangle à pour côté 1, donc son aire est égale à $\frac{1}{2}$. Le deuxième triangle à pour côté $\frac{1}{2}$, donc son aire est égale à $\frac{1}{8}$. Le troisième triangle à pour côté $\frac{1}{4}$, donc son aire est égale à $\frac{1}{32}$. Ainsi, la surface totale aura une aire égale à

$$\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{4^k}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{2}{3}.$$



Le crible de Sierpinsky Un carré unité est divisé en 9 carrés identiques, le carré central étant colorié (Étape 1). Chacun des huit carrés restants est divisé selon le même principe, et nous réitérons ce procédé à l'infini. Quelle sera l'aire de la surface coloriée ?



Notons s_n l'aire de la surface coloriée à l'étape n, $n \in \mathbb{N}^*$. Ainsi $s_1 = \frac{1}{9}$. Pour calculer l'aire du domaine colorié à l'étape n, il suffit d'ajouter à celle du domaine de l'étape précédente un neuvième de l'aire de la surface qu'il reste. On obtient alors la relation suivante :

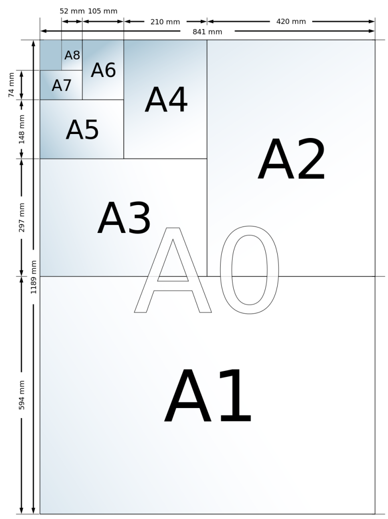
$$s_{n+1} = s_n + \frac{1-s_n}{9} = \frac{8}{9}s_n + \frac{1}{9}.$$

Il s'agit d'une suite arithmético-géométrique ; à la limite l'aire du domaine colorié est donc égal à $\lim_n s_n = 1$.

Format d'une feuille de papier Le format d'une feuille de papier rectangulaire est le couple formé par sa largeur et sa longueur. Ce format varie en fonction de l'usage de la feuille, de l'époque et de la zone géographique. Pour les usages courants, notamment en bureautique, le format A4 est aujourd'hui très largement répandu dans le monde, à l'exception de l'Amérique du Nord, où le format US Letter reste le plus utilisé. Le format A suivi d'un chiffre est conçu pour que les proportions de la feuille soient conservées lorsqu'on la plie ou coupe en deux dans sa longueur, permettant ainsi le massicotage sans perte, la confection de livres par pliage, ainsi que l'assemblage, l'agrandissement et la réduction par facteur de deux. Ce chiffre indique le nombre de fois où le format de base a été divisé en deux : une division en moitiés d'une feuille A0 donne deux feuilles A1, dont la division en deux donne deux fois deux feuilles A2, etc.
Prenons donc une feuille de papier A4, elle mesure 21 cm × 29.7 cm dans le sens normal d'écriture. Si on la retourne dans le sens de la largeur (format dit *à l'italienne*) et on en met une autre au-dessus (au-dessus, pas par-dessus) on obtient du A3 (29.7 cm × 42 cm). Si on continue ainsi de suite on construit deux suites L_n (longueur) et l_n (largeur) avec deux caractéristiques amusantes : la longueur d'une feuille devient la largeur de la suivante ($L_n = l_{n-1}$) et la longueur et la largeur sont toujours dans le même rapport $L_n = \sqrt{2}l_n$. Les suites sont définies par leurs conditions initiales : le format A0 fait 1 m^2, ce qui donne l'unique solution $L_0 \times l_0 = 1$ soit $l_0^2 \times \sqrt{2} = 1$, d'où l'on tire $l_0 = 84.1$ cm et $L_0 = 118.9$ cm.

On obtient (au millimètre près) :

Format A0 : 84.1 cm × 118.9 cm
Format A1 : $84.1/\sqrt{2} = 59.4$ cm × 84.1 cm
Format A2 : $59.4/\sqrt{2} = 42.0$ cm × 59.4 cm
Format A3 : $42.0/\sqrt{2} = 29.7$ cm × 42.0 cm
Format A4 : $29.7/\sqrt{2} = 21.0$ cm × 29.7 cm
Format A5 : $21.0/\sqrt{2} = 14.8$ cm × 21.0 cm
Format A6 : $14.8/\sqrt{2} = 10.5$ cm × 14.8 cm
Format A7 : $10.5/\sqrt{2} = 7.4$ cm × 10.5 cm
Format A8 : $7.4/\sqrt{2} = 5.2$ cm × 7.4 cm

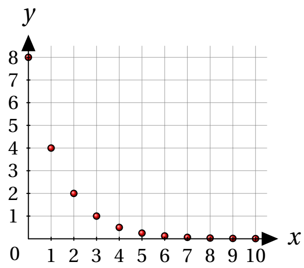


Exercices

Exercice 6.1 (Lecture graphique, suite géométrique)

Soit (u_n) la suite représentée sur la figure ci-contre.

1. Déterminer graphiquement u_0, u_1, et u_2.
2. En supposant que la nature de la suite est géométrique, en préciser la raison.
3. Exprimer u_n en fonction de n.
4. En déduire la valeur de u_{10}.
5. Calculer $S_{10} = u_0 + u_1 + \ldots + u_{10}$.



Correction

1. $u_0 = 8$, $u_1 = 4$, et $u_2 = 2$.
2. Une suite est géométrique de raison $q \in \mathbb{R}$ si $\frac{u_{n+1}}{u_n} = q$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme $\frac{u_2}{u_1} = \frac{u_1}{u_0} = \frac{1}{2}$, on en déduit que la suite est géométrique de raison $1/2$, *i.e.* $u_{n+1} = u_n/2$.
3. $u_n = 2^{-1}u_{n-1} = 2^{-2}u_{n-2} = \cdots = 2^{-n}u_0 = 8 \times 2^{-n} = 2^{3-n}$.
4. $u_{10} = 2^{3-10} = 1/2^7 \simeq 0.0078125$.
5. $S_{10} = \sum_{n=0}^{10} u_n = 8 \times \frac{1-2^{-10}}{1-2^{-1}} = 0.015625$.

Exercice 6.2 (Pression atmosphérique, suite géométrique)

Au niveau de la mer, la pression atmosphérique est de 1013 hPa (hectopascals). On admet que la pression atmosphérique diminue de 1.25% à chaque élévation de 100 m. On note pour les besoins de l'exercice P_n la pression en hectopascal à $100n$ mètres d'altitude et on considère la suite numérique (P_n).

1. Déterminer les pressions P_0, P_1, et P_2 aux altitudes respectivement 0 m, 100 m et 200 m.
2. Exprimer la pression P_{n+1} à l'altitude $100n + 100$ mètres en fonction de la pression P_n à l'altitude $100n$ mètres. En déduire la nature de la suite et sa raison.
3. Donner le terme général de la suite (P_n).
4. Calculer la pression atmosphérique à 3200 m d'altitude.
5. Déterminer à partir de quelle altitude, à 100 m près, la pression atmosphérique devient inférieure à 600 hPa. Justifier par un encadrement.

Correction

1. $P_0 = 1013$, $P_1 = (1-1.25\%)P_0 = \frac{98.75}{100}P_0 = 1000.3375$ et $P_2 = 987.83328125$.
2. $P_{n+1} = \frac{98.75}{100}P_n$: il s'agit d'une suite géométrique de raison $q = 0.9875 = 98.75\%$.
3. $P_n = P_0 q^n = 1013 \times (0.9875)^n$.
4. La pression atmosphérique à 3200 m d'altitude correspond à $P_{32} = 1013 \times (0.9875)^{32} = 677.324496629$.
5. $P_n < 600$ ssi $1013 \times (0.9875)^n < 600$ ssi $(0.9875)^n < \frac{600}{1013}$ ssi $n > \log_{0.9875}(\frac{600}{1013}) = \ln(\frac{600}{1013})/\ln(0.9875) \simeq 41$. En effet, $P_{41} = 604.826375239$ et $P_{42} = 597.266045549$.

Exercice 6.3 (Suite géométrique)

Une population microbienne voit son effectif augmenter d'à peu près 10% toutes les heures. Sachant qu'elle comporte 200 individus au moment où nous l'observons, qu'en sera-t-il au bout de 24 heures ? Au bout de n heures (où n est un entier naturel) ?

Correction

Notons g_i le nombre d'individu après i heures. D'après nos informations, $g_0 = 200$ et comme la population augmente d'à peu près 10% toutes les heures $g_{i+1} \simeq (1+10\%)g_i$. La suite (g_i) est donc géométrique de raison 1.1. Donc $g_n \simeq (1.1)^n g_0$ et au but de 24 heures il y aura à peu près $g_{24} \simeq 1970$ individus.

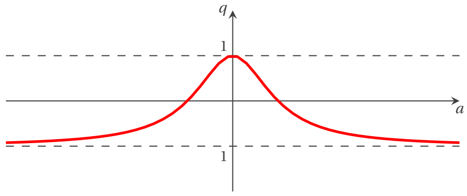
Exercice 6.4 (Suite géométrique)

Étudier la convergence de la suite

$$\left(\frac{1-a^2}{1+a^2}\right)^n, \qquad a \in \mathbb{R}.$$

Correction

Il s'agit d'une suite géométrique de raison $q(a) = \frac{1-a^2}{1+a^2}$ donc on trace d'abord la fonction q et on la compare au droites d'équation $q = \pm 1$.



On sait que

★ u_n ne converge pas et ne possède pas de limite si $q(a) < -1$, c'est-à-dire pour aucun a réel.

★ u_n ne converge pas et possède deux valeurs d'adhérence 1 et -1 si $q(a) = -1$, c'est-à-dire pour aucun a réel.

★ u_n converge vers 0 si $-1 < q(a) < 1$, c'est-à-dire pour tout $a \neq 0$.

★ u_n est constante et converge vers 1 si $q(a) = 1$, c'est-à-dire si $a = 0$.

★ u_n est divergente et possède une limite égale à $+\infty$ si $q(a) > 1$, c'est-à-dire pour aucun a réel.

En résumé :

$$\lim_n u_n = \begin{cases} 0, & \text{si } a \neq 0, \\ 1, & \text{si } a = 0. \end{cases}$$

Exercice 6.5 (Suite arithmétique)

Le prix de vente d'une voiture commercialisée initialement en 1995 diminue tous les ans de la même valeur. En 2002, elle est affichée au prix de 13200 €. On relève en 2006 un prix de vente de 11600 €. On note v_n le prix de vente de ce modèle l'année $(1995+n)$ et on considère la suite (v_n).

1. Donner la nature de la suite (v_n) et en déterminer la raison.
2. Quel était le prix initial de vente en 1995 ?
3. À partir de quel année sera-t-il possible d'acquérir la voiture pour moins de 10000 € ?
4. De début 1999 à fin 2010, un concessionnaire achète chaque année dix de ces modèles. Déterminer la somme totale dépensée pour acheter l'ensemble de ces véhicules.

Correction

1. Comme le prix de vente diminue tous les ans de la même valeur, la suite (v_n) est arithmétique $v_{n+1} = v_n + r = v_0 + nr$. On a $v_{11} = 11600$ et $v_7 = 13200$ donc la raison de la suite est $r = \frac{v_{11}-v_7}{11-7} = \frac{11600-13200}{4} = -400$.
2. $v_0 = v_{n+1} - nr$ donc $v_0 = 13200 - 7 \times (-400) = 16000$ €
3. $v_n < 10000$ ssi $v_0 + (n-1)r < 10000$ ssi $n > \frac{10000-16000}{-400} = \frac{-6000}{-400} = 15$: à partir de 2010 il sera possible d'acquérir la voiture pour moins de 10000 €.
4. $v_4 + v_5 + \cdots + v_{15} = \sum_{k=0}^{15} v_k - \sum_{k=0}^{3} v_k = \left((15+1)v_0 + r\frac{15(15+1)}{2}\right) - \left((3+1)v_0 + r\frac{3(3+1)}{2}\right) = 146400$ €

Exercice 6.6 (Le nénuphar glouton)

Un nénuphar vit paisible dans sa mare et double de taille tous les jours. Au 50ème jour de son existence, il a déjà recouvert la moitié de sa mare, combien de temps va-t-il mettre pour recouvrir la totalité de la mare ?

Correction

1 jour.

Exercice 6.7

Étudier la limite pour $n \to +\infty$ des suites suivantes :

a) $\dfrac{1}{n} + n^2 + 1$ b) $\dfrac{n^2-1}{n+1}$ c) $\dfrac{\sin(n)+2}{n+3}$ d) $\dfrac{2n}{n^3+1}$

e) $\sqrt{n^5+3n} - n$ f) $n - \sqrt{n^3-3n}$ g) $\dfrac{\cos^5(\sqrt{n})}{n^2}$ h) $\left(1+\dfrac{\pi}{n}\right)^n$

i) $\left(1-\dfrac{e}{n}\right)^n$ j) $n - \sqrt{n^2-3n}$ k) $\dfrac{n-(-1)^{n+1}}{n+(-1)^{n+1}}$ l) $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$

Correction

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}+n^2+1=+\infty$,

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2-1}{n+1}=\lim\limits_{n\to+\infty}(n-1)=+\infty$,

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sin(n)+2}{n+3}=0^+$ (théorème d'encadrement),

d) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n}{n^3+1}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2}{n^2+\frac{1}{n}}=0$,

e) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n^5+3n}-n=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^5+3n-n^2}{\sqrt{n^5+3n}+n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^5\left(1+\frac{3}{n^4}-\frac{1}{n^3}\right)}{n^{5/2}\sqrt{1+\frac{3}{n^4}}+\frac{1}{n^{3/2}}}=+\infty$,

f) $\lim\limits_{n\to+\infty} n-\sqrt{n^3-3n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^2-(n^3-3n)}{n+\sqrt{n^3-3n}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{-n^3}{n^{3/2}}=-\infty$,

g) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\cos^5(\sqrt{n})}{n^2}=0$ (théorème d'encadrement),

h) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{\pi}{n}\right)^n=e^{\pi}$,

i) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\dfrac{e}{n}\right)^n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{-e}{n}\right)^n=e^{-e}$,

j) $\lim\limits_{n\to+\infty} n-\sqrt{n^2-3n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{3n}{n\left(1+\sqrt{1-\frac{3}{n}}\right)}=\dfrac{3}{2}$,

k) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n-(-1)^{n+1}}{n+(-1)^{n+1}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1-\frac{(-1)^{n+1}}{n}}{1+\frac{(-1)^{n+1}}{n}}=1$,

l) $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{k=n}\dfrac{1}{\sqrt{n^2+k}}=1$ car $\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}}\le\sum\limits_{k=1}^{k=n}\dfrac{1}{\sqrt{n^2+k}}\le\dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}=1$.

Exercice 6.8

Calculer, en fonction de $\alpha\in\mathbb{R}$, la limite

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^\alpha-2\sqrt{n}}{(\sqrt{n}-3)(2-3\sqrt{n})}.$$

Correction

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^\alpha-2\sqrt{n}}{(\sqrt{n}-3)(2-3\sqrt{n})}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^\alpha-2\sqrt{n}}{-3n+11\sqrt{n}-6}=\begin{cases}-\infty & \text{si } \alpha>1,\\ -\frac{1}{3} & \text{si } \alpha=1,\\ 0 & \text{si } \alpha<1.\end{cases}$$

Exercice 6.9

Calculer, si elles existent, les limites suivantes :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{n},\qquad \lim_{n\to+\infty}n\sin\left(\frac{1}{n}\right),\qquad \lim_{n\to+\infty}\frac{\sin(n)}{n},\qquad \lim_{n\to+\infty}n\sin(n).$$

Correction

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sin\left(\frac{1}{n}\right)=0\times0=0,$$

$$\lim_{n\to+\infty}n\sin\left(\frac{1}{n}\right)=1,\qquad \text{(limite fondamentale)}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sin(n)}{n}=0,\qquad \text{(théorème d'encadrement)}$$

$$\lim_{n\to+\infty}n\sin(n)\ \text{n'existe pas}$$

En effet, considérons les deux sous-suites $n=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ et $n=\frac{3\pi}{2}+2k\pi$ ($n\to+\infty$ ssi $k\to+\infty$) :

$$\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)=\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)\xrightarrow[k\to+\infty]{}+\infty,$$

$$\left(\frac{3\pi}{2}+2k\pi\right)\sin\left(\frac{3\pi}{2}+2k\pi\right)=-\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)\xrightarrow[k\to+\infty]{}-\infty.$$

Exercice 6.10

Calculer, si elles existent, les limites suivantes :

a) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n^2\left(1-\cos\left(\frac{2}{n}\right)\right)$,
b) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n^2\left(1-\cos\frac{2}{\sqrt{n}}\right)$,
c) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n\left(1-\cos\left(\frac{2}{n}\right)\right)$,

d) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n^2\left((-1)^n-\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)$,
e) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(n\sin\left(\frac{2}{n}\right)\right)$,
f) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(n\sin\frac{2}{\sqrt{n}}\right)$,

g) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n}\sin\left(\frac{2}{n}\right)\right)$,
h) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(n\sin\frac{(-1)^n}{n}\right)$,
i) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{2}{n}\right)^n$,

j) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{2}{\sqrt{n}}\right)^n$,
k) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{2}{n}\right)^{\sqrt{n}}$,
l) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)^n$,

m) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{3}{n}\right)^{4n}$,
n) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n^3\left(\tan\left(\frac{3}{n}\right)-\sin\left(\frac{3}{n}\right)\right)$,
o) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\left(3+\frac{1}{n}\right)^{2n}}{9^n}$.

Correction

a) $\lim_{n\to+\infty} n^2\left(1-\cos\left(\frac{2}{n}\right)\right)=\lim_{n\to+\infty} 4\left(\frac{n}{2}\right)^2\left(1-\cos\left(\frac{1}{n/2}\right)\right)=2$,

b) $\lim_{n\to+\infty} n^2\left(1-\cos\frac{2}{\sqrt{n}}\right)=\lim_{n\to+\infty}(4n)n\left(1-\cos\frac{2}{\sqrt{n}}\right)=+\infty$,

c) $\lim_{n\to+\infty} n\left(1-\cos\left(\frac{2}{n}\right)\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{4}{n}n^2\left(1-\cos\left(\frac{2}{n}\right)\right)=0$,

d) $\lim_{n\to+\infty} n^2\left((-1)^n-\cos\frac{1}{n}\right)$ n'existe pas car la suite extraite constituée par les termes d'indices paire converge vers $\frac{1}{2}$ et la suite extraite constituée par les termes d'indices impaire diverge vers $-\infty$,

e) $\lim_{n\to+\infty}\left(n\sin\left(\frac{2}{n}\right)\right)=\lim_{n\to+\infty}2\left(\frac{n}{2}\sin\left(\frac{2}{n}\right)\right)=2$,

f) $\lim_{n\to+\infty}\left(n\sin\frac{2}{\sqrt{n}}\right)=\lim_{n\to+\infty}2\sqrt{n}\left(\frac{\sqrt{n}}{2}\sin\frac{2}{\sqrt{n}}\right)=+\infty$,

g) $\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n}\sin\left(\frac{2}{n}\right)\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{n}}\left(\frac{n}{2}\sin\left(\frac{2}{n}\right)\right)=0$,

h) $\lim_{n\to+\infty}\left(n\sin\frac{(-1)^n}{n}\right)$ n'existe pas car la suite extraite constituée par les termes d'indices paire converge vers 1 et la suite extraite constituée par les termes d'indices impaire converge vers -1,

i) $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n=\lim_{n\to+\infty}\left(\left(1+\frac{2}{n}\right)^{\frac{n}{2}}\right)^2=e^2$,

j) $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{2}{\sqrt{n}}\right)^n=\lim_{n\to+\infty}\left(\left(1+\frac{2}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}}=+\infty$,

k) $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{\sqrt{n}}=\lim_{n\to+\infty}\left(\left(1+\frac{2}{n}\right)^n\right)^{\frac{1}{\sqrt{n}}}=1$,

l) $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)^n$ n'existe pas car la suite extraite constituée par les termes d'indices paire converge vers e et la suite extraite constituée par les termes d'indices impaire converge vers e^{-1},

m) $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^{4n}=\lim_{n\to+\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n/3}\right)^{n/3}\right)^{4\times 3}=e^{12}$,

n) $\lim_{n\to+\infty} n^3\left(\tan\left(\frac{3}{n}\right)-\sin\left(\frac{3}{n}\right)\right)\overset{t=n/3}{=}\lim_{t\to+\infty}(3t)^3\left(\frac{\sin\left(\frac{1}{t}\right)}{\cos\left(\frac{1}{t}\right)}-\sin\left(\frac{1}{t}\right)\right)=27\lim_{t\to+\infty}\left(t\sin\left(\frac{1}{t}\right)\right)t^2\left(1-\cos\left(\frac{1}{t}\right)\right)\frac{1}{\cos\left(\frac{1}{t}\right)}=27\cdot 1\cdot\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{27}{2}$,

o) $\lim_{n\to+\infty}\frac{\left(3+\frac{1}{n}\right)^{2n}}{9^n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{3^{2n}\left(\left(1+\frac{1}{3n}\right)^{3n}\right)^{2n/3n}}{3^{2n}}=e^{2/3}$.

Exercice 6.11 (Série harmonique)

Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, où $x_n:=\sum_{k=1}^n\frac{1}{k}$, diverge vers $+\infty$.

Correction
Idée : $x_n=\sum_{k=1}^n\frac{1}{k}=1+\frac12+\left(\frac13+\frac14\right)+\left(\frac15+\frac16+\frac17+\frac18\right)\dots\ge1+\frac12+\frac12+\frac12\dots\to+\infty$. Sinon, on peut utiliser un raisonnement par l'absurde. Si la suite de terme général x_n convergeait vers une limite finie, la suite de terme général x_{2n}, en tant que suite extraite, convergerait vers la même limite, et donc la suite de terme général $x_{2n}-x_n$ convergerait vers 0. Or, on peut minorer les termes de cette suite :

$$x_{2n}-x_n=\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}\ge\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{2n}=\frac12.$$

Ainsi, la suite de terme général x_n ne peut converger vers une limite finie. En tant que suite croissante de réels, elle diverge donc vers $+\infty$.

Exercice 6.12
Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, où $x_n:=\sum_{k=1}^n\left(\frac1k-\frac1{1+k}\right)$, est convergente ;

Correction
$x_n=\sum_{k=1}^n\left(\frac1k-\frac1{1+k}\right)=\left(\frac11-\cancel{\frac12}\right)+\left(\cancel{\frac12}-\cancel{\frac13}\right)+\dots\left(\cancel{\frac1{n-2}}-\cancel{\frac1{n-1}}\right)+\left(\cancel{\frac1{n-1}}-\frac1n\right)=1-\frac1n\to1.$

Exercice 6.13
Calculer, si elles existent, les limites des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ suivantes : $\forall n\in\mathbb{N}^*$

a) $u_n>\ln n$	*b)* $\dfrac{1}{n+1}\le u_n\le\dfrac1n$	*c)* $u_0<1$, $(u_n)_n\nearrow$ et $u_n<1+\dfrac1n$	*d)* $u_n=\sqrt[n]{n}$
e) $u_n=\ln n+\sin(n)$	*f)* $u_n=\sin\dfrac{n\pi}{3}$	*g)* $u_n=\dfrac{n}{e}+\dfrac{1}{e^n}$	*h)* $u_n=\dfrac{n}{n+1}\ln n$
i) $u_n=\dfrac{n^2}{n!}$	*j)* $u_n=\dfrac{(2n)!}{n!}$	*k)* $u_n=\dfrac{n\sin(n)}{n^2+1}$	*l)* $u_n=\dfrac{n+(-1)^n}{3n-(-1)^n}$
m) $u_n=(n^2+n+1)^{1/n}$	*n)* $u_n=\dfrac{n^2}{n^2+1}$	*o)* $u_n=(-1)^n\dfrac{n^2}{n^2+1}$	*p)* $u_n=\sqrt{3n+1}-\sqrt{2n+1}$
q) $u_n=\sin\left(\pi+\dfrac{\pi}{n}\right)$	*r)* $u_n=\dfrac{2n\sqrt{n}+1}{n^2+1}$	*s)* $u_n=(-1)^n\dfrac{4n-1}{2n+3}$	*t)* $u_n=\sqrt{2n+1}-\sqrt{3n+1}$
u) $u_n=\sin\left(\pi-\dfrac{\pi}{n}\right)$	*v)* $u_n=\dfrac{n^2+1}{2n\sqrt{n}+1}$	*w)* $u_n=(-1)^n\dfrac{6n+3}{2n-1}$	

Correction
a) $u_n\to+\infty$ car $\ln n\to+\infty$ (théorème d'encadrement)

b) $u_n\to1$ car $\frac{1}{n+1}\to1$ et $\frac1n\le u_n\le$ (théorème d'encadrement)

c) $u_n\to\ell\le1$ car u_n est monotone croissante et majorée par 2 donc $\ell\le\lim_n(1+\frac1n)=1$

d) $u_n=\sqrt[n]{n}=\exp(\frac{\ln n}{n})\to\exp(0)=1$

e) $u_n=\ln(n)+\sin(n)\to+\infty$ car $(\ln(n)-1)\le u_n\le(\ln(n)+1)$ et $(\ln(n)\pm1)\to+\infty$ (théorème d'encadrement)

f) $u_n=\sin\frac{n\pi}{3}$ n'existe pas car la suite extraite $u_{3n}=\sin(n\pi)=0$ et la suite extraite $u_{6n+1}=\sin(2n\pi+\pi/3)=\sqrt3/2$

g) $u_n\to+\infty$

h) $u_n=\frac{\ln n}{1+\frac1n}\to+\infty$

i) $u_n>0$ et $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{(n+1)^2n!}{(n+1)!n^2}=\frac{n+1}{n^2}<1$ pour $n>2$; comme $u_n\searrow$ et $u_n>0$ alors $u_n\to\ell\ge0$. Sinon on peut utiliser directement le critère du rapport : $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{n+1}{n^2}\to0$ donc $u_n\to0$.

j) $u_n=(2n)(2n-1)\cdots(2n-n+1)\to+\infty$

k) $u_n\to0$ car $\frac{-n}{n^2+1}\le\frac{n\sin(n)}{n^2+1}\le\frac{n}{n^2+1}$ et $\pm\frac{n}{n^2+1}\to0$ (théorème d'encadrement)

l) $u_n\to\frac13$ car $\frac{n-1}{3n+1}\le\frac{n+(-1)^n}{3n-(-1)^n}\le\frac{n+1}{3n-1}$ et $\lim_n\frac{n-1}{3n+1}=\lim_n\frac{n+1}{3n-1}=\frac13$

m) On sait que si $(u_n)_{n\in N}$ est une suite positive telle que $\frac{u_{n+1}}{u_n}\to\ell>0$ alors $\sqrt[n]{u_n}\to\ell$. On pose $u_n=n^2+n+1$; comme $\frac{(n+1)^2+(n+1)+1}{n^2+n+1}=\frac{n^2+3n+1}{n^2+n+1}\to1$ alors $\sqrt[n]{n^2+n+1}\to1$.

n) $u_n\to1$

o) Cette suite ne converge pas car la sous-suite u_{2n} tend vers 1 tandis que la sous-suite u_{2n+1} tend vers -1

p) $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt{3n+1}-\sqrt{2n+1})\frac{\sqrt{3n+1}+\sqrt{2n+1}}{\sqrt{3n+1}+\sqrt{2n+1}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{(3n+1)-(2n+1)}{\sqrt{3n+1}+\sqrt{2n+1}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{\frac{3n+1}{n^2}}+\sqrt{\frac{2n+1}{n^2}}}=+\infty$

q) $\lim_{n\to+\infty} \sin\left(\pi+\frac{\pi}{n}\right)=0$

r) $\lim_{n\to+\infty} \frac{2n\sqrt{n}+1}{n^2+1}=0$

s) Cette suite ne converge pas car la sous-suite u_{2n} tend vers 2 tandis que la sous-suite u_{2n+1} tend vers -2

t) $\lim_{n\to+\infty} u_n=\lim_{n\to+\infty}(\sqrt{2n+1}-\sqrt{3n+1})\frac{\sqrt{2n+1}+\sqrt{3n+1}}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{3n+1}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{(2n+1)-(3n+1)}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{3n+1}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{-1}{\sqrt{\frac{2n+1}{n^2}}+\sqrt{\frac{3n+1}{n^2}}}=-\infty$

u) $\lim_{n\to+\infty} \sin\left(\pi-\frac{\pi}{n}\right)=0$

v) $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+1}{2n\sqrt{n}+1}=+\infty$

w) Cette suite ne converge pas car la sous-suite u_{2n} tend vers 3 tandis que la sous-suite u_{2n+1} tend vers -3

Exercice 6.14

Étudier le comportement des suites

$$a_n=\frac{\cos(n)}{e^{3n}+1} \qquad \text{et} \qquad b_n=\left(e^{-4n}+\frac{1}{n}\right)(\sin(n))$$

Correction

Soit u_n une suite. S'il existe deux suites v_n et w_n ayant une même limite $\ell\in\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ et satisfaisant

$$\exists M\in\mathbb{N} \text{ tel que } v_n\le u_n\le w_n\ \forall n\in\mathbb{N},\ n\ge M,$$

alors $\lim u_n=\ell$.

Étant donné que pour tout $n\in\mathbb{N}$ on a $-\frac{1}{e^{3n}+1}\le a_n\le\frac{1}{e^{3n}+1}$ et que $\lim_{n\to+\infty}\frac{\pm1}{e^{3n}+1}=0$, on conclut que $\lim_{n\to+\infty}a_n=0$.

Étant donné que pour tout $n\in\mathbb{N}$ on a $-(e^{-4n}+\frac{1}{n})\le b_n\le(e^{-4n}+\frac{1}{n})$ et que $\lim_{n\to+\infty}\pm(e^{-4n}+\frac{1}{n})=0$, on conclut que $\lim_{n\to+\infty}b_n=0$.

Exercice 6.15

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{R}\cup\{-\infty\}\cup\{+\infty\}$. Pour chacune des assertions (1) à (4) suivantes, associer celle des phrases (a) à (d) qui signifie la même chose (On donnera les correspondances sans justifier).

(1) $\forall n\in\mathbb{N},\exists M\in\mathbb{R},u_n\ge M$

(2) $\exists M\in\mathbb{R},\forall n\in\mathbb{N},u_n\ge M$

(3) $\exists n\in\mathbb{N},\forall M\in\mathbb{R},u_n\ge M$

(4) $\forall M\in\mathbb{R},\exists n\in\mathbb{N},u_n\ge M$

(a) “La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ prend (au moins) une fois la valeur $+\infty$.”

(b) “La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne prend jamais la valeur $-\infty$.”

(c) “La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée supérieurement”

(d) “La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée inférieurement par M.”

Correction

(1)-(b), (2)-(d), (3)-(a), (4)-(c).

Exercice 6.16

Soit (u_n) une suite à valeurs dans $\mathbb{R}\cup\{-\infty\}\cup\{+\infty\}$. Que signifient les assertions suivantes ?

1. $\forall n\in\mathbb{N},\exists M\in\mathbb{R},u_n\le M$
2. $\exists M\in\mathbb{R},\forall n\in\mathbb{N},u_n\le M$
3. $\exists n\in\mathbb{N},\forall M\in\mathbb{R},u_n\le M$
4. $\forall M\in\mathbb{R},\exists n\in\mathbb{N},u_n\le M$

Correction

(a) “La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne prend jamais la valeur $+\infty$.”

(b) “La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée supérieurement par M.”

(c) “La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ prend (au moins) une fois la valeur $-\infty$.”

(d) “La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée inférieurement”

Exercice 6.17

$\boxed{\text{V}}$rai ou $\boxed{\text{F}}$aux ?

1. Si une suite $(|u_n|)$ est majorée, la suite (u_n) est bornée.

2. Si une suite $(|u_n|)$ converge vers 0, alors la suite (u_n) converge vers 0.
3. Si une suite (u_n) converge vers ℓ et si elle est a termes strictement positif, alors $\ell > 0$.
4. Si une suite (u_n) converge vers 0, alors la suite $(u_n v_n)$ converge vers 0 quelque soit la suite (v_n).
5. Si $(|u_n|)$ et $(|v_n|)$ sont deux suites convergentes, la suite $(|u_n + v_n|)$ est aussi convergente.
6. Si la suite $(|u_n + v_n|)$ est convergente alors les deux suites $(|u_n|)$ et $(|v_n|)$ sont aussi convergentes.
7. Si (u_n) et (v_n) sont deux suites telles qu'à partir d'un certain rang on ait $u_n \le v_n$, alors la convergence de (v_n) implique celle de (u_n).
8. Si (u_n) et (v_n) sont deux suites telles qu'à partir d'un certain rang on ait $u_n \le v_n$, alors la convergence de (u_n) implique celle de (v_n).
9. Si (u_n) et (v_n) sont deux suites telles qu'à partir d'un certain rang on ait $u_n \ge v_n$, alors la convergence de (v_n) implique celle de (u_n).
10. Si (u_n) et (v_n) sont deux suites telles qu'à partir d'un certain rang on ait $u_n \ge v_n$, alors la convergence de (u_n) implique celle de (v_n).
11. Si une suite (u_n) converge, alors elle est monotone.
12. Si une suite (u_n) est monotone, alors elle converge.
13. Si une suite (u_n) est croissante et majorée, alors elle converge.
14. Si une suite (u_n) est croissante et minorée, alors elle converge.
15. Si une suite (u_n) est décroissante et majorée, alors elle converge.
16. Si une suite (u_n) est décroissante et minorée, alors elle converge.

Correction

1. Vrai : s'il existe un réel positif a tel que $|u_n| \le a$ alors $-a \le u_n \le a$ donc la suite (u_n) est bornée.
2. Vrai (Théorème des gendarmes).
3. Faux : $u_n = 1/n > 0$ pour tout n mais $u_n \to 0$.
4. Faux : $u_n = 1/n \to 0$ et $v_n = n$.
5. Vrai
6. Faux : $u_n = n$ et $v_n = -n$.
7. Faux : $u_n = -n < 0$, $v_n = 1/n > 0$ mais $u_n \to -\infty$ bien que $v_n \to 0$.
8. Faux : $u_n = 1/n < v_n = n$ mais $v_n \to +\infty$ bien que $u_n \to 0$.
9. Faux : $u_n = n > v_n = 1/n$ mais $u_n \to +\infty$ bien que $v_n \to 0$.
10. Faux : $u_n = 1/n > 0 > v_n = -n$ mais $u_n \to 0$ bien que $v_n \to -\infty$.
11. Faux : $u_n = (-1)^n/n$
12. Faux : $u_n = n$
13. Vrai
14. Faux : $u_n = n$ est minorée par 0 et croissante mais elle diverge.
15. Faux : $u_n = -n$ majorée par 0 et décroissante mais $u_n \to -\infty$.
16. Vrai

Exercice 6.18 (Suite récurrente)

Étudier la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 & \text{donné,} \\ u_{n+1} = \varphi(u_n) & \forall n \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

avec

a) $u_0 > 1$ et $u_{n+1} = 2 - \dfrac{1}{u_n}$

b) $1 \le u_0 < 2$ et $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$

c) $u_0 > 2$ et $u_{n+1} = u_n^2 + 1$

d) $u_0 > 2$ et $u_{n+1} = u_n^2 - 2$

e) $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1 + u_n^2}$

f) $0 < u_0 < 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 + u_n}{2}$

g) $u_0 > \frac{3}{2}$ et $u_{n+1} = u_n^2 - \dfrac{3}{4}$

h) $u_0 > 2$ et $u_{n+1} = u_n^2 - 1$

i) $u_0 > \frac{15}{2}$ et $u_{n+1} = u_n^2 - \dfrac{15}{4}$

j) $u_0 \ge 2$ et $u_{n+1} = 3 - \dfrac{4}{2 + u_n}$

k) $u_0 \in]1;4[$ et $u_{n+1} = 5 - \dfrac{4}{u_n}$

l) $u_0 > 4$ et $u_{n+1} = 5 - \dfrac{4}{u_n}$

Correction

1. [a)]

   Par récurrence :

   Suite bornée. ⋆ $u_0 > 1$;
   - ⋆ soit $u_n > 1$, alors $u_{n+1} = 2 - \frac{1}{u_n} > 2 - 1 = 1$.

   Monotonie. Puisque $u_n > 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} - u_n = 2 - \frac{1}{u_n} - u_n = -\frac{(u_n-1)^2}{u_n} < 0$, autrement dit la suite u_n est monotone décroissante.

   Convergence. Étant une suite monotone décroissante vérifiant $u_n > 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors elle converge et $\lim u_n = \ell \geq 1$.

   Limite. En passant à la limite dans la définition, on a $\ell = 2 - \frac{1}{\ell}$ d'où $\ell = 1$.

2. **Suite bornée.** Par récurrence :
   - ⋆ $1 \leq u_0 < 2$;
   - ⋆ soit $1 \leq u_n < 2$, alors $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n} < \sqrt{2+2} = 2$ et $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n} > \sqrt{2-1} = 1 \geq 1$.

   Candidates limites. Soit $\ell = \lim u_n$ avec $\ell \in \mathbb{R}$. Alors, en passant à la limite dans la définition, on a $\ell = \sqrt{\ell+2}$ d'où $\ell = -1$ ou $\ell = 2$.

   Monotonie. Puisque $-1 < u_n < 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n+2} - u_n = -\frac{u_n^2-u_n-2}{\sqrt{u_n+2}+u_n} = -\frac{(u_n-2)(u_n+1)}{\sqrt{u_n+2}+u_n} > 0$, autrement dit la suite u_n est monotone croissante.

   Convergence. Étant une suite monotone croissante vérifiant $-1 < u_n < 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et puisque les uniques limites réelles possibles sont $\ell = -1$ et $\ell = 2$, on conclut que $\lim u_n = 2$.

3. **Suite bornée.** Par récurrence :
   - ⋆ $u_0 > 2$;
   - ⋆ soit $u_n > 2$, alors $u_{n+1} = u_n^2 + 1 > 5$.

   Candidates limites. Soit $\ell = \lim u_n$ avec $\ell \in \mathbb{R}$. Alors, en passant à la limite dans la définition, on a $\ell = \ell^2 + 1$ qui n'a pas de solution réelle : la suite est alors divergente.

   Monotonie. Puisque $u_n > 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} - u_n = u_n^2 - u_n + 1 > u_n^2 - 2u_n + 1 = (u_n - 1)^2 > 0$, autrement dit la suite u_n est monotone croissante.

   Convergence. Étant une suite monotone croissante qui diverge, on conclut que $\lim u_n = +\infty$

4. **Suite bornée.** Par récurrence :
   - ⋆ $u_0 > 2$;
   - ⋆ soit $u_n > 2$, alors $u_{n+1} = u_n^2 - 2 > 4 - 2 = 2$.

   Candidates limites. Soit $\ell = \lim u_n$ avec $\ell \in \mathbb{R}$. Alors, en passant à la limite dans la définition, on a $\ell = \ell^2 - 1$ d'où $\ell = \frac{1-\sqrt{5}}{2} < 2$ ou $\ell = \frac{1+\sqrt{5}}{2} < 2$. Comme $u_n > 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite diverge.

   Monotonie. Puisque $u_n > 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} - u_n = u_n^2 - u_n - 1 > u_n^2 - 2u_n - 1 = (u_n - \frac{1-\sqrt{5}}{2})(u_n - \frac{1+\sqrt{5}}{2}) > 0$, autrement dit la suite u_n est monotone croissante.

   Convergence. Étant une suite monotone croissante qui diverge, on conclut que $\lim u_n = +\infty$.

5. **Suite bornée.** Par récurrence :
   - ⋆ $u_0 = 1 > 0$;
   - ⋆ soit $u_n > 0$, alors $u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n^2} > 0$.

   Candidates limites. Soit $\ell = \lim u_n$ avec $\ell \in \mathbb{R}$. Alors, en passant à la limite dans la définition, on a $\ell = \frac{\ell}{1+\ell^2}$ d'où $\ell = 0$.

   Monotonie. Puisque $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n}{1+u_n^2} - u_n = -\frac{u_n^3}{1+u_n^2} < 0$, autrement dit la suite u_n est monotone décroissante.

   Convergence. Étant une suite monotone décroissante minorée par 0 pour tout $n \in \mathbb{N}$ et puisque l'unique limite réelle possible est $\ell = 0$, on conclut que $\lim u_n = 0$.

6. **Suite bornée.** Par récurrence :
   - ⋆ $0 < u_0 = 1/2 < 1$;
   - ⋆ soit $0 < u_n < 1$, alors $u_{n+1} = \frac{u_n^2+u_n}{2} > 0$ et $u_{n+1} = \frac{u_n^2+u_n}{2} < \frac{2}{2} = 1$

   Candidates limites. Soit $\ell = \lim u_n$ avec $\ell \in \mathbb{R}$. Alors, en passant à la limite dans la définition, on a $\ell = \frac{\ell(\ell+1)}{2}$ d'où $\ell = 0$ ou $\ell = 1$.

Monotonie. Puisque $0 < u_n < 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n(u_n-1)}{2} < 0$, autrement dit la suite u_n est monotone décroissante.

Convergence. Étant une suite monotone décroissante minorée par 0 pour tout $n \in \mathbb{N}$ et puisque les uniques limites réelles possibles sont $\ell = 0$ et $\ell = 1$, on conclut que $\lim u_n = 0$.

7. **Suite bornée.** Par récurrence :
   - ⋆ $u_0 > \frac{3}{2}$;
   - ⋆ soit $u_n > \frac{3}{2}$, alors $u_{n+1} = u_n^2 - \frac{3}{4} > \frac{9}{4} - \frac{3}{4} = \frac{3}{2}$.

   Candidates limites. Soit $\ell = \lim u_n$ avec $\ell \in \mathbb{R}$. Alors, en passant à la limite dans la définition, on a $\ell = \ell^2 - \frac{3}{4}$ d'où $\ell = -\frac{1}{2}$ ou $\ell = \frac{3}{2}$. Puisque $u_n > \frac{3}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, seul $\ell = \frac{3}{2}$ est une limite finie acceptable.

   Monotonie. Puisque $u_n > \frac{3}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} - u_n = u_n^2 - u_n - \frac{3}{4} > 0$, autrement dit la suite u_n est monotone croissante.

   Convergence. Étant une suite monotone croissante vérifiant $u_n > \frac{3}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et puisque l'unique limite réelle possible est $\ell = \frac{3}{2}$, on conclut que $\lim u_n = +\infty$.

8. **Suite bornée.** Par récurrence :
   - ⋆ $u_0 > 2$;
   - ⋆ soit $u_n > 2$, alors $u_{n+1} = u_n^2 - 1 > 4 - 1 = 3 > 2$.

   Candidates limites. Soit $\ell = \lim u_n$ avec $\ell \in \mathbb{R}$. Alors, en passant à la limite dans la définition, on a $\ell = \ell^2 - 1$ d'où $\ell = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ ou $\ell = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Puisque $u_n > 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, aucune limite finie n'est acceptable.

   Monotonie. Puisque $u_n > 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} - u_n = u_n^2 - u_n - 1 > 0$, autrement dit la suite u_n est monotone croissante.

   Convergence. Étant une suite monotone croissante tel que $u_n > 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et puisque il n'y a pas de limite finie réelle possible, on conclut que $\lim u_n = +\infty$.

9. **Suite bornée.** Par récurrence :
   - ⋆ $u_0 > \frac{15}{2}$;
   - ⋆ soit $u_n > \frac{15}{2}$, alors $u_{n+1} = u_n^2 - \frac{15}{4} > 7\frac{15}{2} > \frac{15}{2}$.

   Candidates limites. Soit $\ell = \lim u_n$ avec $\ell \in \mathbb{R}$. Alors, en passant à la limite dans la définition, on a $\ell = \ell^2 - \frac{15}{4}$ d'où $\ell = -\frac{3}{2}$ ou $\ell = \frac{5}{2}$. Puisque $u_n > \frac{15}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, aucune limite finie n'est acceptable.

   Monotonie. Puisque $u_n > \frac{15}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} - u_n = u_n^2 - u_n - \frac{15}{4} > 0$, autrement dit la suite u_n est monotone croissante.

   Convergence. Étant une suite monotone croissante tel que $u_n > \frac{15}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et puisque aucune limite réelle finie n'est possible, on conclut que $\lim u_n = +\infty$.

10. **Suite bornée.** La propriété se démontre par récurrence. On a bien $u_0 = 4 > 1$. Il reste à démontrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, si $u_k > 1$ alors $u_{k+1} > 1$. On a

$$u_{k+1} > 1 \iff 3 - \frac{4}{u_k + 2} > 1 \iff \frac{4}{u_k + 2} < 2 \overset{u_k+2>0}{\iff} 2 < u_k + 2 \iff 0 < u_k.$$

   Comme $u_k > 1 > 0$ alors $u_{k+1} > 1$.

   Monotonie. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$u_{n+1} - u_n = 3 - \frac{4}{u_n + 2} - u_n = \frac{-u_n^2 + u_n + 2}{u_n + 2} = 1 - u_n^2 < 0.$$

   Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 1$, alors $1 - u_n^2 < 0$ donc (u_n) est une suite monotone décroissante.

   Convergence. On a montré que la suite (u_n) est décroissante et minorée. Elle est donc convergente.

   Candidates limites. Notons ℓ sa limite. La suite (u_{n+1}) tend vers ℓ et la suite $f(u_n)$ tend vers $f(\ell)$. La limite vérifie donc

$$\ell = 3 - \frac{4}{\ell + 2} \iff \ell^2 - \ell - 2 = 0 \iff (\ell - 2)(\ell + 1) = 0.$$

   Comme $u_n > 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, il faut $\ell \geq 1$; on a donc $\ell = 2$.

11. **Suite bornée.** Par récurrence : on a bien $1 < u_0 < 4$; montrons que si $1 < u_k < 4$ alors $1 < u_{k+1} < 4$. On a

$$1 < u_{k+1} < 4 \iff 1 < 5 - \frac{4}{u_k} < 4 \iff 1 < \frac{4}{u_k} < 4 \iff 1 < u_k < 4.$$

Monotonie. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$u_{n+1} - u_n = 5 - \frac{4}{u_n} - u_n = \frac{-u_n^2 + 5u_n - 4}{u_n} = -\frac{(u_n - 4)(u_n - 1)}{u_n} > 0$$

car $1 < u_{n+1} < 4$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Convergence. (u_n) est une suite monotone croissante et majorée. Elle est donc convergente.

Limite. Notons ℓ sa limite. La suite (u_{n+1}) tend vers ℓ et la suite $f(u_n)$ tend vers $f(\ell)$. La limite vérifie donc

$$\ell = 5 - \frac{4}{\ell} \iff (\ell - 4)(\ell - 1) = 0 \iff (\ell - 2)(\ell + 1) = 0.$$

Comme $u_n < 4$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, il faut $\ell \leq 4$; on a donc $\ell = 4$.

12. **Suite bornée.** Par récurrence : on a bien $u_0 > 4$; montrons que si $u_k > 4$ alors $u_{k+1} > 4$. On a

$$u_{k+1} > 4 \iff 5 - \frac{4}{u_k} > 4 \iff \frac{4}{u_k} < 1.$$

Comme $u_k > 4$, alors $\frac{4}{u_k} < 1$, donc $u_{k+1} > 4$.

Monotonie. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$u_{n+1} - u_n = 5 - \frac{4}{u_n} - u_n = \frac{-u_n^2 + 5u_n - 4}{u_n} = -\frac{(u_n - 4)(u_n - 1)}{u_n} < 0$$

car $u_{n+1} > 4$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Convergence. (u_n) est une suite monotone décroissante et minorée. Elle est donc convergente.

Limite. Notons ℓ sa limite. La suite (u_{n+1}) tend vers ℓ et la suite $f(u_n)$ tend vers $f(\ell)$. La limite vérifie donc

$$\ell = 5 - \frac{4}{\ell} \iff (\ell - 4)(\ell - 1) = 0 \iff (\ell - 2)(\ell + 1) = 0.$$

Comme $u_n > 4$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, il faut $\ell \geq 4$; on a donc $\ell = 4$.

Exercice 6.19 (Suite récurrente)

Soit $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite récurrente définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = \dfrac{a + 1 + u_n}{a}$. On pose $v_n := u_{n+1} - u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $s_n := \sum_{k=0}^{k=n-1} v_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Exprimer v_n en fonction de v_{n-1}. En déduire qu'il existe une valeur a_0 de a (à préciser) pour laquelle $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite constante.
2. Montrer que pour tout $a \neq a_0$, la suite (v_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison.
3. Calculer $\lim_n s_n$ en fonction des valeurs de a.
4. Montrer que $u_n = 1 + s_n$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$. En déduire $\lim_n u_n$ en fonction des valeurs de a.

Correction

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$v_n = u_{n+1} - u_n = \frac{a + 1 + u_n}{a} - \frac{a + 1 + u_{n-1}}{a} = \frac{u_n - u_{n-1}}{a} = \frac{v_{n-1}}{a}.$$

On trouve la suite

$$\begin{cases} v_0 = u_1 - u_0 = \frac{a+1+1}{a} - 1 = \frac{2}{a}, \\ v_{n+1} = \frac{v_n}{a}. \end{cases}$$

On en déduit que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite constante égale à 2 lorsque $a = 1 =: a_0$.

2. Pour tout $a \neq a_0$

$$v_n = \frac{v_{n-1}}{a} = \frac{v_{n-2}}{a^2} = \cdots = \frac{v_0}{a^n} = 2a^{-n}$$

donc la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $1/a$.

3. On sait que si $w_{n+1} = q w_n$ pour tout $q \in \mathbb{R}^*$, alors $w_n = w_0 q^n$ et

$$\sum_{k=0}^{n} w_k = w_0 \sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} w_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}, & \text{si } q \neq 1 \\ w_0(n+1) & \text{si } q = 1 \end{cases}$$

donc ici

$$s_n=\sum_{k=0}^{n-1}v_k=v_0\sum_{k=0}^{n-1}a^{-k}=\begin{cases}\frac{2}{a}\frac{1-a^{-n}}{1-a^{-1}}, & \text{si } a\neq 1\\ 2n, & \text{si } a=1\end{cases}=\begin{cases}\frac{2}{a^n}\frac{a^n-1}{a-1}, & \text{si } a\neq 1,\\ 2n, & \text{si } a=1.\end{cases}$$

Par conséquent

$$\lim_n s_n=\begin{cases}+\infty & \text{si } a=1,\\ \frac{2}{a-1} & \text{si } a>1,\\ +\infty & \text{si } 0<a<1.\end{cases}$$

4. On a

$$s_n=\sum_{k=0}^{n-1}v_k=v_0\sum_{k=0}^{n-1}u_{k+1}-u_k=u_1-u_0+u_2-u_1+\dots+u_n-u_{n-1}=u_n-u_0=u_n-1$$

donc $u_n=1+s_n\ \forall n\in\mathbb{N}^*$. Alors

$$\lim_n u_n=1+\lim_n s_n=\begin{cases}+\infty & \text{si } a=1,\\ \frac{a+1}{a-1} & \text{si } a>1,\\ +\infty & \text{si } 0<a<1.\end{cases}$$

Exercice 6.20

On sait que $\sqrt{a}$ désigne le nombre positif dont le carré vaut a. Cette écriture n'as de sens que si a est positif. Pourtant on peut donner un sens au nombre b qui s'écrit

$$b=\sqrt{-\frac{1}{4}+\sqrt{-\frac{1}{4}+\sqrt{-\frac{1}{4}+\sqrt{-\frac{1}{4}+\dots}}}}$$

Lequel et que vaut b ?

Correction

Introduisons la suite récurrente de premier terme $u_0>\frac{1}{4}$ telle que $u_{n+1}=\sqrt{u_n-\frac{1}{4}}$.

Suite minorée. On montre par récurrence que $u_n>\frac{1}{4}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$: on a bien $u_0>\frac{1}{4}$; montrons que si $u_k>\frac{1}{4}$ alors $u_{k+1}>\frac{1}{4}$. On a

$$u_{k+1}>\frac{1}{4}\iff\sqrt{u_k-\frac{1}{4}}>-\frac{1}{4}\iff u_k\geq\frac{1}{4}.$$

Monotonie. Pour tout $n\in\mathbb{N}$ on a

$$u_{n+1}-u_n=\sqrt{u_n-\frac{1}{4}}-u_n=\frac{u_n-\frac{1}{4}-u_n^2}{\sqrt{u_n-\frac{1}{4}}+u_n}=\frac{-\frac{1}{4}(2u_n-1)^2}{\sqrt{u_n-\frac{1}{4}}+u_n}\leq 0$$

pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Convergence. (u_n) est une suite monotone décroissante et minorée. Elle est donc convergente et b est sa limite.

Limite. La suite (u_{n+1}) tend vers b et la suite $f(u_n)$ tend vers $f(b)$. La limite vérifie donc

$$b=\sqrt{b-\frac{1}{4}}.$$

On a donc $b=\frac{1}{2}$.

Exercice 6.21 (Suites adjacentes)

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites adjacentes, c'est à dire telle que (u_n) est croissante, (v_n) est décroissante et $\lim_n\big(v_n-u_n\big)=0$. Montrer que $(v_n-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante puis que les deux suites convergent vers une même limite.

Correction

On sait que (u_n) est croissante donc $u_{n+1}\geq u_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$; (v_n) est décroissante donc $v_{n+1}\leq v_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$; alors $v_{n+1}-u_{n+1}\leq v_n-u_n$: la suite $(v_n-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
Si $\ell_1=\lim_n u_n$ et $\ell_2=\lim_n v_n$ alors $\lim_n\big(v_n-u_n\big)=\ell_2-\ell_1$; par hypothèse $\lim_n\big(v_n-u_n\big)=0$ donc $\ell_1=\ell_2$.

Exercice 6.22 (Moyenne arithmético-harmonique)

Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites telles que $a_0 > b_0 > 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \qquad \text{et} \qquad b_{n+1} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n}.$$

1. Montrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites bien définies puis que
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n > b_n.$$
2. Vérifier que la suite $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire.
3. En supposant qu'elle existe, calculer la limite commune au deux suites.
4. Montrer que les deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.

Correction

1. On montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $a_n > b_n > 0$:
   - ⋆ vraie pour $n = 0$ car $a_0 > b_0 > 0$
   - ⋆ supposons que $a_n > b_n > 0$, alors $a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2} - \frac{2a_nb_n}{a_n+b_n} = \frac{(a_n-b_n)^2}{2(a_n+b_n)} > 0$, ainsi $a_{n+1} > b_{n+1}$ et comme $b_{n+1} = \frac{2a_nb_n}{a_n+b_n}$ alors $b_{n+1} > 0$.
2. La suite $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire, en effet
$$a_{n+1}b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}\frac{2a_nb_n}{a_n + b_n} = a_nb_n = \cdots = a_0b_0$$
3. Si $\alpha = \lim_n a_n$ et $\beta = \lim_n b_n$, alors $\alpha = \frac{\alpha+\beta}{2}$ donc $\alpha = \beta$. De plus, comme la suite $(a_nb_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite constante égale à a_0b_0 et comme $\lim_n(a_nb_n) = \alpha\beta$ on conclut que $\alpha = \beta = \sqrt{a_0b_0}$.
4. Les deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent. On peut soit prouver qu'elle sont adjacentes soit prouver directement la convergence.
   - ⋆ Montrons que $a_n \searrow$: $a_{n+1} - a_n = \frac{a_n+b_n}{2} - a_n = \frac{b_n-a_n}{2} < 0$,
   - ⋆ montrons que $b_n \nearrow$: $b_{n+1} - b_n = \frac{2a_nb_n}{a_n+b_n} - b_n = \frac{(a_n-b_n)b_n}{a_n+b_n} > 0$,
   - ⋆ montrons que a_n est minorée par b_0 : $a_n > b_n$ et $b_n > b_0$ car $b_n \nearrow$,
   - ⋆ montrons que b_n est majorée par a_0 : $b_n < a_n$ et $a_n < a_0$ car $a_n \searrow$,
   - ⋆ on conclut que a_n converge car décroissante et minorée, b_n converge car croissante et majorée. De plus, elle sont adjacentes.

Exercice 6.23 (Moyenne géometrico-harmonique)

Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites telles que $a_0 > b_0 > 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \qquad \text{et} \qquad b_{n+1} = \sqrt{a_nb_n}.$$

Montrer que ces deux suites convergent et ont même limite (appelée *moyenne géométrico-harmonique* de a_0 et b_0).

Correction

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont bien définies. On montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $a_n \ge b_n$:
   - ⋆ vraie pour $n = 0$ car $a_0 > b_0 > 0$
   - ⋆ supposons que $a_n > b_n > 0$, alors $a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2} - \sqrt{a_nb_n} = \frac{(\sqrt{a_n}-\sqrt{b_n})^2}{2} > 0$, ainsi $a_{n+1} > b_{n+1}$.
2. Les deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes, en effet :
   - ⋆ $a_n \searrow$ car $a_{n+1} - a_n = \frac{a_n+b_n}{2} - a_n = \frac{b_n-a_n}{2} < 0$,
   - ⋆ $b_n \nearrow$ car $b_{n+1} - b_n = \sqrt{a_nb_n} - b_n = (\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n})\sqrt{b_n} > 0$,
   - ⋆ a_n converge car décroissante et minorée par b_0 car $a_n \ge b_n \ge b_0$,
   - ⋆ b_n converge car croissante et majorée par a_0 car $b_n \le a_n \le a_0$.
3. Si $\alpha = \lim_n a_n$ et $\beta = \lim_n b_n$, alors $\alpha = \frac{\alpha+\beta}{2}$ donc $\alpha = \beta$.

Calcul de logarithmes et moyenne arithmético-géométrique Lorsque l'on désire calculer un sinus, un logarithme, une exponentielle, etc., avec une précision allant de quelques dizaines à quelques milliers de chiffres, la solution la plus couramment retenue consiste à approcher la fonction désirée par un polynôme. Pour obtenir de bien plus grandes précisions à un coût raisonnable, on utilise la moyenne arithmético-géométrique de GAUSS-LEGENDRE. Si on part de deux valeurs a_0 et b_0, et que l'on construit les suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$, les deux suites convergent très vite (c'est-à-dire s'approchent très vite). Notons $\ell(a_0, b_0)$ cette limite. La table ci-dessous donne les premières étapes du calcul de $\ell(1,2)$:

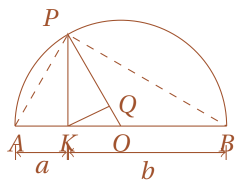
i	a_i	b_i
0	1	2
1	1.5	1.4142135623730
2	1.4571067811865	1.4564753152197
3	1.4567910481542	1.4567910139395
4	1.4567910310469	1.4567910310469

En utilisant (pour un x grand) la relation

$$\frac{\pi}{2\ell(1,4/x)} = \log(x) + \frac{4\log(x)-4}{x^2} + \frac{36\log(x)-42}{x^4} + \cdots$$

on se ramène au calcul d'une moyenne arithmético-géométrique bien choisie pour calculer des logarithmes avec une très grande précision.
Source : Vincent LEFÈVRE et Jean-Michel MULLER, «Erreurs en arithmétique des ordinateurs» — Images des Mathématiques, CNRS, 2009. En ligne, URL : `http://images.math.cnrs.fr/Erreurs-en-arithmetique-des.html`

Moyennes arithmétique, géométrique et harmonique : interprétation géométrique Soient a et b les longueurs des deux segments contigus, et considérons le demi-cercle dont le diamètre est l'union de ces deux segments. Construisons la perpendiculaire au point K (où les deux segments se rencontrent), et soit P le point d'intersection de cette perpendiculaire avec le demi-cercle. Soit O le centre du demi-cercle et soit Q le pied de la perpendiculaire au rayon OP passant par K.



On a $\overline{PQ} < \overline{PK} < \overline{PO}$ et en utilisant les théorèmes sur les triangles rectangles on trouve

$$\underbrace{\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}}_{\text{Moyenne harmonique}} < \underbrace{\sqrt{ab}}_{\text{Moyenne géométrique}} < \underbrace{\frac{a+b}{2}}_{\text{Moyenne arithmetique}}$$

Exercice 6.24

Donner l'exemple

1. d'une suite bornée et sans limite ;
2. d'une suite non bornée ayant une limite ;
3. d'une suite non bornée et sans limite ;
4. de deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que (u_n) converge et (v_n) diverge et (u_nv_n) diverge ;
5. de deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que (u_n) converge et (v_n) diverge et (u_nv_n) converge ;
6. de deux suites bornées $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que (u_n) ne converge pas, (v_n) ne converge pas, mais (u_nv_n) converge.

Correction
1. $u_n = (-1)^n$, $u_n = \sin(n)$; 2. $u_n = n$, $u_n = n\sin(n)$; 3. $u_n = (-1)^n n\sin(n)$; 4. $u_n = 1/n$ et $v_n = n^2$; $u_n = n^\alpha$ avec $\alpha < 0$, $v_n = n^\beta$ avec $\beta > 0$ et $\alpha + \beta > 0$; 5. $u_n = 1/n^2$ et $v_n = n$; $u_n = n^\alpha$ avec $\alpha < 0$, $v_n = n^\beta$ avec $\beta > 0$ et $\alpha + \beta < 0$; 6. $u_n = v_n = (-1)^n$.

Exercice 6.25

Déterminer l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ dans les cas suivants

$$(1)\quad u_n := (-1)^n, \qquad (2)\quad u_n := \frac{(-1)^n}{1+\frac{1}{n}}, \qquad (3)\quad u_n := \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right).$$

Correction

$$(1)\quad \{-1;1\}, \qquad (2)\quad \{-1;1\}, \qquad (3)\quad \{-1;0;1\}.$$

Exercice 6.26

Considérons un polygone régulier à n cotés inscrit dans un disque de rayon r. Montrer que son périmètre tend vers la longueurs du cercle lorsque n tend vers $+\infty$.

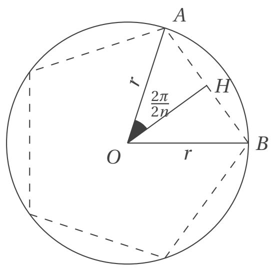
Correction

$\overline{AB} = 2\overline{AH} = r\sin\left(\frac{2\pi}{2n}\right)$ donc le périmètre est

$$p(n) = 2n\overline{AH} = 2rn\sin\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

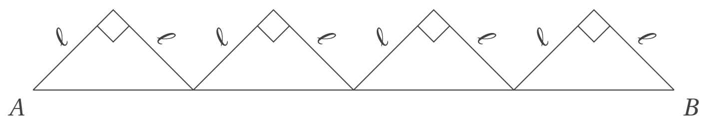
On a alors

$$\lim_{n\to+\infty} p(n) = 2\pi r \lim_{n\to+\infty} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\frac{\pi}{n}} = 2\pi r.$$



Exercice 6.27

Le segment AB de longueur 1 est subdivisé en n segments égaux et sur chacun d'eux on construit un triangle rectangle isocèle comme en figure. On obtient une ligne de segments de longueur $L = 2n\ell$. Montrer que L ne tend pas vers 1 lorsque n tend vers $+\infty$ même si elle tend à se confondre avec le segment AB. Vers quelle valeur tend-elle ?

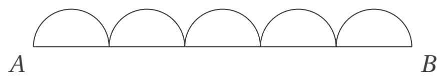


Correction

Le segment AB de longueur 1 est subdivisé en n segments égaux de longueur $\frac{1}{n}$ donc $\ell = \frac{1}{\sqrt{2}n}$. Alors $L(n) = 2n\ell(n) = \sqrt{2}$ pour tout n et $\lim_{n\to+\infty} L(n) = \sqrt{2}$.

Exercice 6.28

Le segment AB de longueur 1 est subdivisé en n segments égaux et sur chacun d'eux on construit un demi-cercle comme en figure. On obtient une ligne de longueur L. Montrer que L ne tend pas vers 1 lorsque n tend vers $+\infty$ même si elle tend à se confondre avec le segment AB. Vers quelle valeur tend-elle ?



Correction

Le segment AB de longueur 1 est subdivisé en n segments égaux de longueur $\frac{1}{n}$ donc chaque demi-cercle a rayon $r(n) = \frac{1}{2n}$. Alors $L(n) = n\pi r(n) = \frac{\pi}{2}$ pour tout n et $\lim_{n\to+\infty} L(n) = \frac{\pi}{2}$.

7 Limites et continuité

Soient f, g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$.

7.1 Définition (Limite en un point (définition intuitive))
On dit que f admet ℓ pour limite en x_0 si $f(x)$ est aussi proche que l'on veut de ℓ dès que x est suffisamment proche de x_0.
On dit que f admet $+\infty$ pour limite en x_0 si $f(x)$ est de plus en plus grand dès que x est suffisamment proche de x_0.
On dit que f admet $-\infty$ pour limite en x_0 si $f(x)$ est de plus en plus petit dès que x est suffisamment proche de x_0.

7.2 Définition (Limite en un point (définition rigoureuse))
On dit que la limite de f quand x tend vers x_0 est égale à $\ell \in \mathbb{R}$ (et on écrit $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$) si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D_f \quad |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

Cette limite peut exister même si f n'est pas définie en x_0.
On dit que la limite de f quand x tend vers x_0 est égale à $+\infty$ (et on écrit $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$) si

$$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D_f \quad |x - x_0| < \delta \implies f(x) > M.$$

On dit que la limite de f quand x tend vers x_0 est égale à $-\infty$ (et on écrit $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$) si

$$\forall m \in \mathbb{R} \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D_f \quad |x - x_0| < \delta \implies f(x) < m.$$

Remarque
Dans la définition précédente, il est important de noter que pour calculer la limite de f on ne considère que les valeurs de $f(x)$ pour x proche de x_0 et différent de x_0. Par exemple, si on considère la fonction

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq 0, \\ 2 & \text{si } x = 0, \end{cases} \end{aligned}$$

alors $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$ mais $f(0) = 2$. On verra plus loin que les fonctions qui satisfont à la condition $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ sont appelées fonction continue en x_0.

7.3 Définition (Limite en plus l'infini (définition intuitive))
On dit que f admet ℓ pour limite en $+\infty$ si $f(x)$ est aussi proche que l'on veut de ℓ dès que x est de plus en plus grand.
On dit que f admet $+\infty$ pour limite en $+\infty$ si $f(x)$ est de plus en plus grand dès que x est de plus en plus grand.
On dit que f admet $-\infty$ pour limite en $+\infty$ si $f(x)$ est de plus en plus petit dès que x est de plus en plus grand.

7.4 Définition (Limite en plus l'infini (définition rigoureuse))
On dit que la limite de f quand x tend vers $+\infty$ est égale à $\ell \in \mathbb{R}$ (et on écrit $\lim_{x\to +\infty} f(x) = \ell$) si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta \in \mathbb{R} \quad \forall x \in D_f \quad x > \delta \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

On dit que la limite de f quand x tend vers $+\infty$ est égale à $+\infty$ (et on écrit $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$) si

$$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists \delta \in \mathbb{R} \quad \forall x \in D_f \quad x > \delta \implies f(x) > M.$$

On dit que la limite de f quand x tend vers $+\infty$ est égale à $-\infty$ (et on écrit $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$) si

$$\forall m\in\mathbb{R}\quad \exists\delta\in\mathbb{R}\quad \forall x\in D_f\quad x>\delta \implies f(x)<m.$$

7.5 Définition (Limite en moins l'infini (définition rigoureuse))

Les définitions sont du même type que ci-dessus. Il faut simplement remplacer $x>\delta$ par $x<\delta$.

7.6 Théorème (Unicité)

Si une fonction admet une limite ℓ en x_0, cette limite est unique.

7.7 Théorème (d'encadrement (ou des gendarmes ou sandwich ou de l'étau))

Soit f, g et h trois fonctions définies au voisinage de x_0 et vérifiant $f\le g\le h$ au voisinage de x_0. Si f et h ont la même limite ℓ (finie ou infinie) en x_0 alors g a pour limite ℓ en x_0.

7.8 Propriété (Limites en $x_0\in\overline{\mathbb{R}}=\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ de la somme de f et g)

On remplace par un point d'interrogation les cas où on ne peut pas conclure, appelés cas d'indétermination.

	$\lim_{x\to x_0} f(x)=\ell_1\in\mathbb{R}$	$\lim_{x\to x_0} f(x)=+\infty$	$\lim_{x\to x_0} f(x)=-\infty$
$\lim_{x\to x_0} g(x)=\ell_2\in\mathbb{R}$	$\lim_{x\to x_0}(f+g)(x)=\ell_1+\ell_2$	$\lim_{x\to x_0}(f+g)(x)=+\infty$	$\lim_{x\to x_0}(f+g)(x)=-\infty$
$\lim_{x\to x_0} g(x)=+\infty$	$\lim_{x\to x_0}(f+g)(x)=+\infty$	$\lim_{x\to x_0}(f+g)(x)=+\infty$	$\lim_{x\to x_0}(f+g)(x)=?$
$\lim_{x\to x_0} g(x)=-\infty$	$\lim_{x\to x_0}(f+g)(x)=-\infty$	$\lim_{x\to x_0}(f+g)(x)=?$	$\lim_{x\to x_0}(f+g)(x)=-\infty$

7.9 Propriété (Limites en $x_0\in\overline{\mathbb{R}}=\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ du produit de f et g)

On remplace par un point d'interrogation les cas où on ne peut pas conclure, appelés cas d'indétermination.

	$\lim_{x\to x_0} f(x)=\ell_1\in\mathbb{R}_+^*$	$\lim_{x\to x_0} f(x)=0$	$\lim_{x\to x_0} f(x)=\ell_1\in\mathbb{R}_-^*$	$\lim_{x\to x_0} f(x)=+\infty$	$\lim_{x\to x_0} f(x)=-\infty$
$\lim_{x\to x_0} g(x)=\ell_2\in\mathbb{R}_+^*$	$\lim_{x\to x_0}(fg)(x)=\ell_1\ell_2$	$\lim_{x\to x_0}(fg)(x)=0$	$\lim_{x\to x_0}(fg)(x)=\ell_1\ell_2$	$\lim_{x\to x_0}(fg)(x)=+\infty$	$\lim_{x\to x_0}(fg)(x)=-\infty$
$\lim_{x\to x_0} g(x)=0$	$\lim_{x\to x_0}(fg)(x)=0$	$\lim_{x\to x_0}(fg)(x)=0$	$\lim_{x\to x_0}(fg)(x)=0$	$\lim_{x\to x_0}(fg)(x)=?$	$\lim_{x\to x_0}(fg)(x)=?$
$\lim_{x\to x_0} g(x)=\ell_2\in\mathbb{R}_-^*$	$\lim_{x\to x_0}(fg)(x)=\ell_1\ell_2$	$\lim_{x\to x_0}(fg)(x)=0$	$\lim_{x\to x_0}(fg)(x)=\ell_1\ell_2$	$\lim_{x\to x_0}(fg)(x)=-\infty$	$\lim_{x\to x_0}(fg)(x)=+\infty$
$\lim_{x\to x_0} g(x)=\infty$	$\lim_{x\to x_0}(fg)(x)=+\infty$	$\lim_{x\to x_0}(fg)(x)=?$	$\lim_{x\to x_0}(fg)(x)=-\infty$	$\lim_{x\to x_0}(fg)(x)=+\infty$	$\lim_{x\to x_0}(fg)(x)=-\infty$
$\lim_{x\to x_0} g(x)=-\infty$	$\lim_{x\to x_0}(fg)(x)=-\infty$	$\lim_{x\to x_0}(fg)(x)=?$	$\lim_{x\to x_0}(fg)(x)=+\infty$	$\lim_{x\to x_0}(fg)(x)=-\infty$	$\lim_{x\to x_0}(fg)(x)=+\infty$

7.10 Propriété (Limites en $x_0\in\overline{\mathbb{R}}=\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ du quotient de f et g)

On remplace par un point d'interrogation les cas où on ne peut pas conclure, appelés cas d'indétermination.

	$\lim_{x\to x_0} f(x)=\ell_1\in\mathbb{R}_+^*$	$\lim_{x\to x_0} f(x)=0$	$\lim_{x\to x_0} f(x)=\ell_1\in\mathbb{R}_-^*$	$\lim_{x\to x_0} f(x)=+\infty$	$\lim_{x\to x_0} f(x)=-\infty$
$\lim_{x\to x_0} g(x)=\ell_2\in\mathbb{R}_+^*$	$\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{\ell_1}{\ell_2}$	$\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f}{g}\right)(x)=0$	$\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{\ell_1}{\ell_2}$	$\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f}{g}\right)(x)=+\infty$	$\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f}{g}\right)(x)=-\infty$
$\lim_{x\to x_0} g(x)=0$ et $g>0$	$\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f}{g}\right)(x)=+\infty$	$\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f}{g}\right)(x)=?$	$\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f}{g}\right)(x)=-\infty$	$\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f}{g}\right)(x)=+\infty$	$\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f}{g}\right)(x)=-\infty$
$\lim_{x\to x_0} g(x)=0$ et $g<0$	$\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f}{g}\right)(x)=-\infty$	$\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f}{g}\right)(x)=?$	$\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f}{g}\right)(x)=+\infty$	$\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f}{g}\right)(x)=-\infty$	$\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f}{g}\right)(x)=+\infty$
$\lim_{x\to x_0} g(x)=\ell_2\in\mathbb{R}_-^*$	$\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{\ell_1}{\ell_2}$	$\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f}{g}\right)(x)=0$	$\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{\ell_1}{\ell_2}$	$\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f}{g}\right)(x)=-\infty$	$\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f}{g}\right)(x)=+\infty$
$\lim_{x\to x_0} g(x)=\pm\infty$	$\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f}{g}\right)(x)=0$	$\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f}{g}\right)(x)=0$	$\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f}{g}\right)(x)=0$	$\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f}{g}\right)(x)=?$	$\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f}{g}\right)(x)=?$

ATTENTION (LIMITES FONDAMENTALES)

Soit deux polynômes $P(x)=p_0+p_1x+\dots+p_ax^a$ et $Q(x)=q_0+q_1x+\dots+q_bx^b$. Alors

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}=\begin{cases}0 & \text{si } a<b,\\ \frac{p_a}{q_b} & \text{si } a=b,\\ \infty & \text{si } a>b,\end{cases}\qquad\qquad \lim_{x\to0^\pm}\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{p_0}{q_0}.$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} x\sin\left(\tfrac{1}{x}\right)=1 \qquad \lim_{x\to0^\pm}\frac{\sin(x)}{x}=1 \qquad (x \text{ en radiant})$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} x^2\left(1-\cos\left(\tfrac{1}{x}\right)\right)=\tfrac{1}{2} \qquad \lim_{x\to0^\pm}\frac{1-\cos(x)}{x^2}=\tfrac{1}{2} \qquad (x \text{ en radiant})$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\tfrac{\alpha}{x}\right)^x=e^\alpha \qquad \lim_{x\to0^\pm}(1+\alpha x)^{1/x}=e^\alpha \qquad (\alpha\in\mathbb{R})$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} x\left(\ln\left(1+\tfrac{1}{x}\right)\right)=1 \qquad \lim_{x\to0^\pm}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} x\left(a^{1/x}-1\right)=\ln a \qquad \lim_{x\to0^\pm}\frac{a^x-1}{x}=\ln a \qquad (a>0)$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} x\left(\left(1+\tfrac{1}{x}\right)^\alpha-1\right)=\alpha \qquad \lim_{x\to0^\pm}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha \qquad (\alpha\in\mathbb{R})$$

Exemple

On veut montrer que $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(x)}{x}=1$.

L'observation des aires des triangles $\overset{\triangle}{OAP}$, $\overset{\triangle}{OAT}$ et du secteur OAP lorsque $0<x<\frac{\pi}{2}$ conduit aux inégalités

$$\text{Aire } \overset{\triangle}{OAP} < \text{Aire secteur } OAP < \text{Aire } \overset{\triangle}{OAT}.$$

Soit $|OA|=1$, alors l'aire du triangle $\overset{\triangle}{OAP}$ est $\sin(x)/2$, l'aire du secteur OAP est égale à $x/2$ et l'aire du triangle $\overset{\triangle}{OAT}$ est $\tan(x)/2$, donc

$$\frac{\sin(x)}{2}<\frac{x}{2}<\frac{\tan(x)}{2}.$$

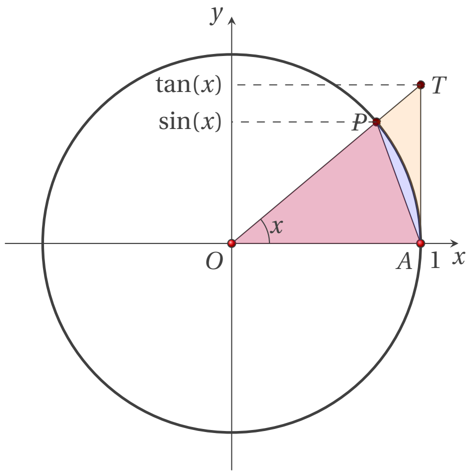
Lorsque $0<x<\frac{\pi}{2}$ on peut multiplier par $2/\sin(x)$ en conservant le sens des inégalités

$$1<\frac{x}{\sin(x)}<\frac{1}{\cos(x)}$$

soit encore

$$1>\frac{\sin(x)}{x}>\cos(x).$$

Les fonctions $\sin(x)/x$ et $\cos(x)$ étant paires, les mêmes inégalités restent satisfaites lorsque $-\frac{\pi}{2}<x<0$. En prenant la limite de ces inégalités lorsque $x\to0$ on conclut que $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin(x)}{x}=1$.



7.11 Définition (Équivalence)

Soit f et g deux applications de $\mathscr{D}$ vers $\mathbb{R}$ et soit $x_0\in\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$. On dit que f est équivalente à g au voisinage de x_0 s'il existe un voisinage $\mathscr{V}$ de x_0 et une fonction $\varphi\colon\mathscr{V}\to\mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall x\in\mathscr{V}\cap\mathscr{D},\quad f(x)=g(x)[1+\varphi(x)],\qquad\text{et}\qquad \lim_{x\to x_0}\varphi(x)=0.$$

On note alors $f\underset{x_0}{\sim}g$.

Si g ne s'annule pas dans un voisinage de x_0, cette définition est équivalente à

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=1.$$

Exemple

- ⋆ Soit $P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_nx^n$, $(a_n\neq0)$ une fonction polynomiale, alors

$$P(x)\underset{+\infty}{\sim}a_nx^n,\qquad P(x)\underset{-\infty}{\sim}a_nx^n,\qquad P(x)\underset{0}{\sim}a_0 \text{ si } a_0\neq0.$$

- ⋆ Soit $F(x)=\dfrac{a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_nx^n}{b_0+b_1x+b_2x^2+\dots+b_px^p}$, $(a_n\neq0$ et $b_p\neq0)$ une fonction rationnelle, alors

$$F(x)\underset{+\infty}{\sim}\frac{a_nx^n}{b_px^p},\qquad F(x)\underset{-\infty}{\sim}\frac{a_nx^n}{b_px^p},\qquad F(x)\underset{0}{\sim}\frac{a_0}{b_0}\text{ si } a_0,b_0\neq0.$$

- ⋆ Fonctions trigonométriques :

$$\sin(x) \underset{0}{\sim} x, \qquad \tan(x) \underset{0}{\sim} x, \qquad 1-\cos(x) \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{2}.$$

- ⋆ Fonctions logarithmes, exponentielles, puissance :

$$\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x, \qquad e^x - 1 \underset{0}{\sim} x, \qquad a^x - 1 \underset{0}{\sim} x\ln(a)\ (a>0), \qquad (1+x)^\alpha - 1 \underset{0}{\sim} \alpha x\ (\alpha \in \mathbb{R}).$$

7.12 Théorème

Soit f et g deux applications de $\mathscr{D}$ vers $\mathbb{R}$ et soit $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ et si $f \underset{x_0}{\sim} g$, alors $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \ell$.

Ce résultat est fondamentale car il permet de remplacer une limite par une limite plus simple.

Attention

Si deux fonctions ont même limite, elles ne sont pas nécessairement équivalentes. Par exemple, $\lim_{x\to+\infty} x = \lim_{x\to+\infty} x^2$ mais $x \mapsto x$ et $x \mapsto x^2$ ne sont pas équivalentes en $+\infty$.

7.13 Propriété

- ⋆ $f \sim f_1$ et $g \sim g_1 \implies fg \sim f_1 g_1$
- ⋆ $f \sim f_1 \implies \frac{1}{f} \sim \frac{1}{f_1}$ si f et f_1 ne s'annulent pas au voisinage de x_0
- ⋆ $f \sim f_1$ et $g \sim g_1 \implies \frac{f}{g} \sim \frac{f_1}{g_1}$ si g et g_1 ne s'annulent pas au voisinage de x_0
- ⋆ $f \sim f_1 \implies f^n \sim f_1^n$, $n \in \mathbb{N}$
- ⋆ $f \sim f_1 \implies f^\alpha \sim f_1^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$ si f et f_1 sont strictement positives au voisinage de x_0

Attention

- ⋆ $f \sim f_1$ et $g \sim g_1 \not\Rightarrow f+g \sim f_1 + g_1$
- ⋆ $f \sim f_1 \not\Rightarrow e^f \sim e^{f_1}$
- ⋆ $f \sim f_1 \not\Rightarrow \ln(f) \sim \ln(f_1)$

7.14 Définition (Continuité en un point)

On dit que f est continue en x_0 si $x_0 \in D_f$ et $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

7.15 Définition (Continuité)

On dit que f est continue si elle est continue dans tout point de son ensemble de définition.

L'idée intuitive de se dire qu'une fonction est continue si et seulement si on peut tracer son graphe sans jamais soulever le crayon n'est valable que si l'ensemble de définition est constitué d'un seul et unique morceau ! Lorsque l'ensemble de définition est constitué de deux ou plusieurs morceaux, on a le droit de soulever le crayon. Ainsi par exemple la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$ est continue car son domaine de définition est $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}^*$ qui est constitué des deux morceaux $]-\infty;0[$ et $]0;+\infty$ et f est continue dans tout point de son ensemble de définition.

7.16 Définition (Prolongement par continuité)

Soit f une fonction définie sur I et $x_0 \notin I$. Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell$, la fonction $\tilde{f}$ définie sur $I \cup \{x_0\}$ par $\tilde{f}(x_0) = \ell$ et $\tilde{f}(x) = f(x)$ pour $x \in I$ est la seule fonction continue en x_0 dont la restriction à I soit f. On l'appelle le prolongement par continuité de f à x_0.

Par conséquent la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$ n'est pas prolongeable par continuité en $x = 0$ car $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = \infty$.

7.17 Théorème (Fonctions composées)

Si $(x_0, f(x_0)) \in D_f \times D_g$ et f est continue en x_0 et g est continue en $f(x_0)$, alors $x_0 \in D_{g\circ f}$ et $g\circ f$ est continue en x_0.

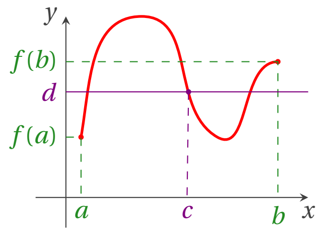
7.18 Théorème (de Bolzano ou des Valeurs intermédiaires)

Formulation 1 L'image d'un intervalle de $\mathbb{R}$ par une fonction continue est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Formulation 2 Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et soient a, $b \in I$ avec $f(a) \le f(b)$. Alors f atteint toutes les valeurs intermédiaires entre $f(a)$ et $f(b)$. Autrement dit :

$$\forall d \in [f(a), f(b)], \exists c \text{ compris entre } a \text{ et } b \text{ tel que } f(c) = d.$$

On n'a pas forcement $f([a,b]) = [f(a), f(b)]$ *ou* $f([a,b]) = [f(b), f(a)]$ *:*



Exemple

Ce théorème permet d'affirmer par exemple que si un marcheur parcourt 12 km en une heure alors il existe un intervalle d'une demi-heure pendant lequel il parcourt exactement 6 km. En effet, soit $f\colon [0;1] \to [0;12]$ l'application telle que $f(t)$ soit le nombre de kilomètres parcourus par le marcheur en t heures (on suppose que f est continue). On se demande s'il existe $T \in [0;0.5]$ tel que $f(T+0.5) - f(T) = 6$. Posons alors $g\colon [0;0.5] \mapsto [0;12]$ l'application définie par $g(t) = f(t+0.5) - f(t)$ Comme $6 \in [0;12]$ et g est continue, alors il existe au moins un $T \in [0;0.5]$ tel que $g(T) = 6$: pendant la demi-heure $[T, T+6]$ le marcheur a parcourus 6 km.

Ce théorème donne alors le corollaire immédiat suivant.

7.19 Corollaire (des zéros d'une fonction continue)

Soit une fonction continue $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Si $f(a)f(b) < 0$, alors il existe (au moins un) $\alpha \in]a,b[$ tel que $f(\alpha) = 0$.

Ce théorème garantit juste l'existence d'un zéro. Pour l'unicité on a besoin d'autres hypothèses, comme par exemple la bijectivité.

7.20 Théorème (de la bijection)

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, alors f induit une bijection de I dans $f(I)$. De plus, sa bijection réciproque est continue sur I, monotone sur I et de même sens de variation que f.

7.21 Théorème (de Weierstrass ou des Valeurs extrêmes)

Soit une fonction continue $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Alors elle admet un maximum et un minimum (appelés «valeurs extrêmes») .

7.22 Définition (Asymptotes)

Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ (resp. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell$), la droite d'équation $y = \ell$ est une asymptote horizontale de la courbe représentative de f.
Si $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ (resp. $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$), la droite d'équation $x = x_0$ est une asymptote verticale de la courbe représentative de f.
Si $\lim_{x\to+\infty} (f(x) - (ax+b)) = 0$ (resp. $\lim_{x\to-\infty} f(x)(f(x) - (ax+b)) = 0$), la droite d'équation $y = ax+b$ est une asymptote oblique de la courbe représentative de f.

Méthodes numériques de recherche de zéros - partie ① : méthode de bissection Un des problèmes classiques en mathématiques appliquées est celui de la recherche des valeurs pour lesquelles une fonction donnée s'annule. Dans certains cas bien particuliers, comme pour les fonctions $x \mapsto x+1$, $x \mapsto \cos(2x)$ ou $x \mapsto x^2 - 2x + 1$, le problème est simple car il existe pour ces fonctions des formules qui donnent les zéros explicitement. Toutefois, pour la plupart des fonctions il n'est pas possible de résoudre l'équation $f(x) = 0$ explicitement et il faut recourir à des méthodes numériques. Ainsi par exemple une brève étude de la fonction $f(x) = \cos(x) - x$ montre qu'elle possède un zéro à proximité de 0.7 mais ce zéro ne s'exprime pas au moyen de fonctions usuelles et pour en obtenir une valeur approchée il faut recourir à des méthodes numériques.
Plusieurs méthodes existent et elles différent pas leur vitesse de convergence et par leur robustesse. Lorsqu'il s'agit de calculer les zéros d'une seule fonction, la vitesse de la méthode utilisée n'est souvent pas cruciale. Cependant, dans certains applications il est nécessaire de calculer les zéros de plusieurs milliers de fonctions et la vitesse devient alors un élément stratégique. Par exemple, si on veut représenter graphiquement l'ensemble de points (x, y) du plan pour lequel

$x^2\sin(y)+e^{x+y}-7=0$, on peut procéder comme suit : pour une valeur donnée de x, on cherche l'ensemble des valeurs de y pour lesquelles $x^2\sin(y)+e^{x+y}-7=0$, *i.e.* l'ensemble des zéros de la fonction $f(y)=x^2\sin(y)+e^{x+y}-7=0$, et on représente tous les couples obtenus. On choisit une nouvelle valeur pour x et on répète l'opération. Pour obtenir une courbe suffisamment précise, il faut procéder à la recherche des zéros d'un très grand nombre de fonction et il est alors préférable de disposer d'une méthode rapide.
Nous allons voir deux méthodes de recherche de zéros d'une fonction : la méthode de la bissection (décrite ci-dessous) et la méthode de NEWTON (décrite au prochain chapitre à la page 186).

La **méthode de la bissection** est la méthode la plus ancienne, la plus simple et la plus naturelle. La méthode ne s'applique que lorsque la fonction dont on cherche les zéros est continue. Supposons que la fonction $f\colon[a;b]\to\mathbb{R}$ est continue, monotone et que $f(a)\cdot f(b)<0$. Par les théorèmes de BOLZANO et de la bijection, la fonction possède alors exactement un zéro quelque part dans l'intervalle $]a;b[$. Pour approcher ce zéro nous allons construire une suite d'intervalles emboîtés de plus en plus petits dans lesquels ce zéro s'enferme. L'intervalle initiale $[a;b]$ est divisé en deux sous-intervalles d'égales longueurs au moyen du point milieu $(a+b)/2$. On détermine ensuite, au moyen du signe de la fonction f évaluée au point milieu, lequel de ces deux sous-intervalles contient le zéro. La méthode se poursuit jusqu'à ce qu'une précision suffisante ait été atteinte.

Require: a et $b>a$ les bornes de l'intervalle, ε la précision souhaitée, $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ la fonction dont on cherche le zéro
$x\leftarrow\dfrac{a+b}{2}$ le point milieu de l'intervalle $[a;b]$
while $b-a>\varepsilon$ **do**
  if $f(a)f(x)>0$ (*i.e.* si le zéro est contenu dans le sous-intervalle de droite) **then**
    $a\leftarrow x$
  else
    $b\leftarrow x$
  end if
  $x\leftarrow\dfrac{a+b}{2}$ le point milieu de l'intervalle $[a;b]$
end while

L'avantage majeur de la méthode est qu'elle fonctionne toujours. De plus, on peut connaître dès le départ le nombre d'itérations nécessaires pour atteindre une précision donnée puisque le sous-intervalle obtenu après n itérations est de taille $(b-a)/2^n$.
Un désavantage de cette méthode est qu'il faut disposer d'un intervalle $[a;b]$ pour lequel les signes de $f(a)$ et $f(b)$ sont différents. Or, de tels intervalles ne sont pas toujours disponibles (par exemple, on ne peut pas utiliser la méthode de la bissection pour calculer le zéro de la fonction $f(x)=x^2-2x+1$).

EXEMPLE (CALCUL APPROCHÉ DE $\sqrt{2}$)
On veut calculer le zéro de la fonction

$$f(x)=x^2-2$$

dans l'intervalle $[0;2]$.

k	a_k	x_k	b_k	signe de $f(a_k)$	signe de $f(x_k)$	signe de $f(b_k)$	$\lvert x_k-\sqrt{2}\rvert$
0	0.00000	1.00000	2.00000	–	–	+	0.41421
1	1.00000	1.50000	2.00000	–	+	+	0.08578
2	1.00000	1.25000	1.50000	–	–	+	0.01642
3	1.25000	1.37500	1.50000	–	–	+	0.03921

Exercices

Exercice 7.1
Lorsqu'un objet de température initiale T_0 est plongé dans un milieu de température constante T_m, l'évolution de sa température est donnée par $T(t) = T_m + (T_0 - T_m)e^{-kt}$ où k est une constante positive qui dépend de l'objet et du milieu dans lequel il est plongé. Qu'elle est la limite de cette fonction lorsque t tend vers l'infini ?

Correction
$\lim_{t\to+\infty} T(t) = T_m$.

Exercice 7.2
En l'absence de frottement, une masse soumise à la pesanteur possède une accélération constante de g m·s^{-2}. Sa vitesse $v(t)$ évolue suivant $v(t) = v_0 + gt$. En présence d'un frottement, la masse $m > 0$ subit une résistance à sa progression dans l'air qui est d'autant plus élevée que sa vitesse est élevée. Dans le modèle d'un fluide très visqueux (par exemple le miel), la force de frottement $\mu > 0$ est directement proportionnelle à la vitesse de la masse. Dans ce cas, la vitesse est donnée par

$$v(t) = v_0 e^{-\frac{\mu}{m}t} + \frac{mg}{\mu}(1 - e^{-\frac{\mu}{m}t}).$$

Quelle est la limite de cette fonction pour $t \to +\infty$?

Correction
$\lim_{t\to+\infty} v(t) = \frac{mg}{\mu}$.

Exercice 7.3
La force d'attraction entre deux masses est donnée par la loi de NEWTON $F(r) = \frac{Gm_1m_2}{r^2}$ où F est la force d'attraction (en newtons), $G = 6.67\times10^{-11}$ N·m^2·kg^{-2} est une constante universelle, r est la distance (en mètres) entre les masses et m_1 et $_2$ sont les masses. Soit la masse de la Terre 6×10^{24} kg et celle, approximative, d'un satellite 10^4 kg. À partir de quelle distance la force exercée par la Terre sur le satellite est-elle inférieure à 10 N ? Et inférieure à $\varepsilon > 0$ N ? Que vaut la limite $\lim_{r\to+\infty} F(t)$?

Correction
À partir de $r = \sqrt{\frac{Gm_1m_2}{10}}$ mètres la force exercée par la Terre sur le satellite est inférieure à 10 N. À partir de $r = \sqrt{\frac{Gm_1m_2}{\varepsilon}} \approx \frac{2\times10^9}{\varepsilon}$ m la force exercée par la Terre sur le satellite est inférieure à $\varepsilon > 0$ N. On a $\lim\limits_{r\to+\infty} F(r) = 0$.

Exercice 7.4
Dans le modèle de croissance de population de VERHULST la taille de la population est donnée par

$$P(t) = P_m \frac{e^{rP_m t}}{K + e^{rP_m t}}$$

où K, r et P_m désignent des constantes positives. Trouver la limite de $P(t)$ pour $t \to +\infty$.

Correction
$\lim_{t\to+\infty} P(t) = \lim_{t\to+\infty} P_m \frac{1}{\frac{K}{e^{rP_m t}}+1} = P_m$.

Exercice 7.5 (F.I.)
Calculer lorsqu'elles existent les limites suivantes :

a) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}$,

b) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{x^2+2|x|}{x}$,

c) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+2|x|}{x}$,

d) $\displaystyle\lim_{x\to2} \frac{x^2-4}{x^2-3x+2}$,

e) $\displaystyle\lim_{x\to\pi} \frac{\sin^2(x)}{1+\cos(x)}$,

f) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{x}$,

g) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x+5}-\sqrt{x-3}$,

h) $\displaystyle\lim_{x\to1} \frac{x-1}{x^n-1}$, $(n\in\mathbb{N})$,

i) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$,

j) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}+\sin(x)}{\ln(x)}$,

k) $\displaystyle\lim_{x\to0^+} \frac{2^x-\cos(x)}{x}$,

l) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{x^2\ln(1+2x)}{2\sin(x)(\cos(3x)-1)}$,

m) $\displaystyle\lim_{x\to3} \frac{x^2-4x+3}{4x-12}$.

Correction

a) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x} \cdot \frac{\sqrt{1+x+x^2}+1}{\sqrt{1+x+x^2}+1} = \lim_{x\to 0} \frac{(1+x+x^2)-1}{x(\sqrt{1+x+x^2}+1)} = \lim_{x\to 0} \frac{1+x}{\sqrt{1+x+x^2}+1} = \frac{1}{2}$,

b) La limite $\lim_{x\to 0} \frac{x^2+2|x|}{x}$ n'existe pas car on a $\lim_{x\to 0^\pm} \frac{x^2+2|x|}{x} = \pm 2$,

c) $\lim_{x\to -\infty} \frac{x^2+2|x|}{x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2-2x}{x} = \lim_{x\to -\infty} x-2 = -\infty$,

d) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^2-3x+2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-1)} = 4$,

e) $\lim_{x\to \pi} \frac{\sin^2(x)}{1+\cos(x)} = \lim_{x\to \pi} \frac{1-\cos^2(x)}{1+\cos(x)} = \lim_{x\to \pi} \frac{(1-\cos(x))(1+\cos(x))}{1+\cos(x)} = \lim_{x\to \pi} 1-\cos(x) = 2$,

f) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{x} \cdot \frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)-(1+x^2)}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2})} = \lim_{x\to 0} \frac{1-x}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{2}$,

g) La limite $\lim_{x\to -\infty} \sqrt{x+5}-\sqrt{x-3}$ n'existe pas car l'existence des racines impose $x \ge 3$,

h) $\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^n-1} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{x^{n-1}+x^{n-2}+\dots+x+1} = \frac{1}{n}$,

i) $\lim_{x\to +\infty} (\sqrt{x+1}-\sqrt{x}) = \lim_{x\to +\infty} (\sqrt{x+1}-\sqrt{x}) \frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = 0^+$;

j) $\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x}+\sin(x)}{\ln(x)} = \lim_{x\to +\infty} \left(\frac{\sqrt{x}}{\ln(x)} + \frac{\sin(x)}{\ln(x)}\right) = +\infty$ car $\frac{-1}{\ln(x)} \le \frac{\sin(x)}{\ln(x)} \le \frac{1}{\ln(x)}$ et $\lim_{x\to +\infty} \frac{\pm 1}{\ln(x)} = 0$;

k) $\lim_{x\to 0^+} \frac{2^x-\cos(x)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2^x-1+1-\cos(x)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{2^x-1}{x} + x\frac{1-\cos(x)}{x^2}\right) = \ln(2)+0\cdot\frac{1}{2} = \ln(2)$,

l) En se rappelant que $\frac{\ln(1+x)}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$, $\frac{\sin(x)}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$ et $\frac{1-\cos(x)}{x^2} \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{1}{2}$ on conclut que

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2\ln(1+2x)}{2\sin(x)(\cos(3x)-1)} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln(1+2x)}{2x} \times \frac{x}{\sin(x)} \times \frac{(3x)^2}{\cos(3x)-1} \times \frac{1}{9}\right) = 1\times 1\times(-2)\times\frac{1}{9} = -\frac{2}{9};$$

m) Comme $\frac{x^2-4x+3}{4x-12} = \frac{(x-1)(x-3)}{4(x-3)} = \frac{x-1}{4}$ alors $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-4x+3}{4x-12} = \frac{3-1}{4} = \frac{1}{2}$.

Exercice 7.6

Compléter le tableau suivant :

	$f(x) = x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$	$f(x) = \frac{1}{x}\sin(x)$	$f(x) = x\cos\left(\frac{1}{x}\right)$	$f(x) = \frac{1}{x}\cos(x)$
$\lim_{x\to 0} f(x)$				
$\lim_{x\to +\infty} f(x)$				
$\lim_{x\to -\infty} f(x)$				

Correction

	$f(x) = x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$	$f(x) = \frac{1}{x}\sin(x)$	$f(x) = x\cos\left(\frac{1}{x}\right)$	$f(x) = \frac{1}{x}\cos(x)$
$\lim_{x\to 0} f(x)$	0	1	0	$\nexists$
$\lim_{x\to +\infty} f(x)$	1	0	$+\infty$	0
$\lim_{x\to -\infty} f(x)$	1	0	$-\infty$	0

On connaît la limite fondamentale $\lim_{n} n\sin\left(\frac{1}{n}\right) = 1$. À partir de cette limite on va démontrer les réponses données au tableau ci-dessus.

- ⋆ D'après le théorème d'encadrement $\lim_{x\to 0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ car $-1 \le \sin(x) \le 1$
- ⋆ D'après la limite fondamentale on a immédiatement $\lim_{x\to +\infty} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 1$
- ⋆ Par changement de variable on trouve $\lim_{x\to -\infty} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) \overset{x=-t}{=} \lim_{t\to +\infty} -t\sin\left(-\frac{1}{t}\right) \overset{\sin(-a)=-\sin(a)}{=} \lim_{t\to +\infty} t\sin\left(\frac{1}{t}\right) = 1$

- ⋆ Par changement de variable on trouve $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\sin(x) \overset{x=1/t}{=} \lim_{t\to\pm\infty} t\sin\left(\frac{1}{t}\right) = 1$
- ⋆ D'après le théorème d'encadrement $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x}\sin(x) = 0$ car $-1 \le \sin(x) \le 1$
- ⋆ D'après le théorème d'encadrement $\lim_{x\to 0} x\cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ car $-1 \le \cos(x) \le 1$
- ⋆ $\lim_{x\to+\infty} x\cos\left(\frac{1}{x}\right) = +\infty$
- ⋆ $\lim_{x\to-\infty} x\cos\left(\frac{1}{x}\right) = -\infty$
- ⋆ $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\cos(x)$ n'existe pas car $\lim_{x\to 0^\pm} \frac{1}{x}\cos(x) = \pm\infty$
- ⋆ D'après le théorème d'encadrement $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x}\cos(x) = 0$ car $-1 \le \cos(x) \le 1$

Exercice 7.7

Étudier les limites quand x tend vers $+\infty$ des fonctions suivantes

$$f(x) := \sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x} \qquad \text{et} \qquad g(x) := \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} - \sqrt{x}.$$

Correction

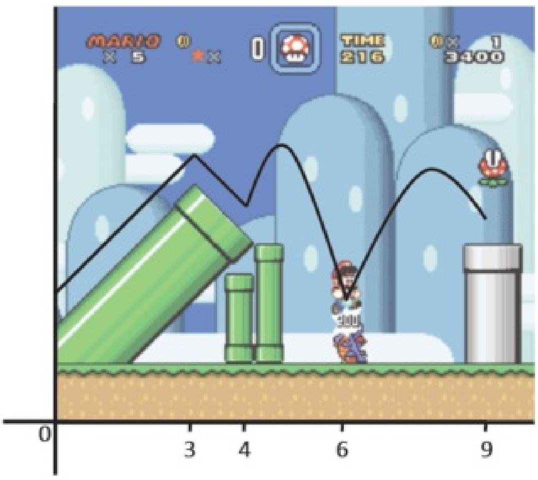
$$\begin{aligned}
f(x) &= \sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x} = \left(\sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x}\right)\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}} = \frac{x+\sqrt{x}-x}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}}\\
&= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{x+\sqrt{x}}{x}}+1} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}+1} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{1}{2};\\
g(x) &= \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} - \sqrt{x} = \left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} - \sqrt{x}\right)\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}} = \frac{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}-x}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}}\\
&= \frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}}{\sqrt{x}\left(\sqrt{1+\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{x}}+1\right)} = \frac{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}}{\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x^3}}}}+1} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Exercice 7.8

Au niveau 1 de `Super Mario World`, Mario court et saute vers la droite. Notons x sa position horizontale. Sa hauteur h est décrite en fonction de x par la fonction définie par morceaux suivante :

$$h(x) = \begin{cases} x+3, & \text{si } 0 \le x < 3,\\ 9-x, & \text{si } 3 \le x < 4,\\ -4x^2+39x-87, & \text{si } 4 \le x < 6,\\ -x^2+16x-57, & \text{si } 6 \le x \le 9. \end{cases}$$

Montrer que le parcours de Mario est continu sur l'intervalle $[0;9]$. Autrement dit, vérifier que la fonction h est continue en $x=3$, $x=4$ et $x=6$.



Correction

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 3^-} h(x) = \lim_{x\to 3^-} x+3 = 6, && \lim_{x\to 3^+} h(x) = \lim_{x\to 3^+} 9-x = 6;\\
&\lim_{x\to 4^-} h(x) = \lim_{x\to 4^-} 9-x = 5, && \lim_{x\to 4^+} h(x) = \lim_{x\to 4^+} -4x^2+39x-87 = 5;\\
&\lim_{x\to 6^-} h(x) = \lim_{x\to 6^-} -4x^2+39x-87 = 3, && \lim_{x\to 6^+} h(x) = \lim_{x\to 6^+} -x^2+16x-57 = 3.
\end{aligned}$$

Exercice 7.9 (Discontinuité de première espèce)
Soit f une application de $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ dans $\mathbb{R}$ satisfaisant

$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \qquad f(x) := \frac{x}{|x|}.$$

Montrer que f n'est pas prolongeable par continuité en 0.

Correction
On ne peut pas définir une application $g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue telle que $g(x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ car

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -1, \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = +1.$$

Exercice 7.10 (Discontinuité de seconde espèce)
Soit f une application de $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ dans $\mathbb{R}$ satisfaisant

$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \qquad f(x) := \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

Montrer que f n'est pas prolongeable par continuité en 0.

Correction
La limite de $f(x)$ pour x qui tend vers 0 n'existe pas.

Exercice 7.11 (Fonction prolongeable par continuité)
Soit f l'application de $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \qquad f(x) := x\sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

Montrer que f est prolongeable par continuité en 0.

Correction
Comme $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$, on peut définir la fonction

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq 0, \\ 1 & \text{si } x = 0, \end{cases} \end{aligned}$$

qui est continue.

Exercice 7.12
Étudier, en fonction des deux entiers positif n et m, si f est prolongeable en 0

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+x^m} - \sqrt{1-x^m}}{x^n}.$$

Correction
En faisant intervenir l'expression conjuguée on réécrit la fonction sous la forme

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+x^m} - \sqrt{1-x^m}}{x^n} = \frac{\sqrt{1+x^m} - \sqrt{1-x^m}}{x^n}\,\frac{\sqrt{1+x^m} + \sqrt{1-x^m}}{\sqrt{1+x^m} + \sqrt{1-x^m}} = \frac{2x^{m-n}}{\sqrt{1+x^m} + \sqrt{1-x^m}}.$$

L'étude de la limite en 0 est alors le même que celle de la fonction $x \mapsto x^{m-n}$:

$$\lim_{x\to 0^+} x^{m-n} = \begin{cases} 0 & \text{si } m > n, \\ 1 & \text{si } m = n, \\ +\infty & \text{si } m < n \text{ et } m-n \text{ est pair}, \\ +\infty & \text{si } m < n \text{ et } m-n \text{ est impair}, \end{cases} \qquad \lim_{x\to 0^-} x^{m-n} = \begin{cases} 0 & \text{si } m > n, \\ 1 & \text{si } m = n, \\ +\infty & \text{si } m < n \text{ et } m-n \text{ est pair}, \\ -\infty & \text{si } m < n \text{ et } m-n \text{ est impair}. \end{cases}$$

Exercice 7.13

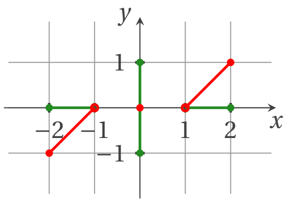
Soient $E := [-2,-1[\cup\{0\}\cup]+1,+2]$ et $F := [-1,+1]$. Soit f l'application de E dans F définie par

$$\forall x \in E \qquad f(x) := \begin{cases} x+1 & \text{si } x \in [-2,-1[,\\ 0 & \text{si } x = 0,\\ x-1 & \text{si } x \in]+1,+2]. \end{cases}$$

Montrer que f est bijective et continue en tout point de E mais qu'il existe un point de F en lequel f^{-1} n'est pas continue.

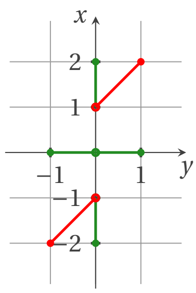
Correction

f est clairement bijective car pour tout $x \in E$ il existe un et un seul $y \in F$ tel que $f(x) = y$



et est continue. De plus on a

$$\forall y \in F \qquad f^{-1}(y) := \begin{cases} y-1 & \text{si } y \in [-1,0[,\\ 0 & \text{si } y = 0,\\ y+1 & \text{si } y \in]0,+1]. \end{cases}$$



La réciproque n'est pas continue car

$$\lim_{y\to 0^\pm} f^{-1}(y) = \pm 1 \neq f^{-1}(0) = 0.$$

Exercice 7.14

Étudier la continuité en 0 de la fonction

$$f(x) := \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0,\\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Correction

Elle est continue car $\frac{\sin(x)}{x}$ est continue pour $x \neq 0$ et $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 = f(0)$.

Exercice 7.15

Étudier la continuité en 0 de la fonction

$$f(x) := \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x > 0,\\ 0 & \text{si } x = 0,\\ x\cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Correction

Elle est continue car $x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ est continue pour $x > 0$, $x\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ est continue pour $x < 0$ et

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0 = f(0),$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x\cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0 = f(0).$$

Exercice 7.16

1. Soit f l'application définie par
$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = \begin{cases} x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases} \end{aligned}$$
Établir si f est continue.
2. Soit f l'application définie par
$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = \begin{cases} x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases} \end{aligned}$$
Établir si f est continue.
3. Soit f l'application définie par
$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = \begin{cases} -x\sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases} \end{aligned}$$
Établir si f est continue.
4. Soit f l'application définie par
$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^* &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = \frac{x}{1+e^{1/x}}. \end{aligned}$$
   4.1. Montrer que f est continue.
   4.2. f est-elle prolongeable par continuité en 0 ?
   4.3. Calculer $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.
5. Soit f l'application définie par
$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^* &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = x-1-\ln|x|. \end{aligned}$$
   5.1. Calculer les limites de f en 0, en $-\infty$ et en $+\infty$.
   5.2. Établir si f est prolongeable par continuité en 0.

Correction

1. À partir des inégalités $-x^2 \le x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right) \le x^2$ et en utilisant le théorème de l'encadrement on déduit que $\lim\limits_{x\to0} x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right) = f(0) = 0$ donc f est continue en 0.
2. À partir des inégalités $-x^2 \le x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) \le x^2$ et en utilisant le théorème de l'encadrement on déduit que $\lim\limits_{x\to0} x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) = f(0) = 0$ donc f est continue en 0.
3. À partir des inégalités $-x \le x\sin\left(\frac{1}{x}\right) \le x$ et en utilisant le théorème de l'encadrement on déduit que $\lim\limits_{x\to0} -x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = f(0) = 0$ donc f est continue en 0.
4. 4.1. La fonction $1/x$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^*$. En composant par la fonction exponentielle qui est définie et continue sur $\mathbb{R}$, on en déduit que $e^{1/x}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^*$. De même, la fonction $1+e^{1/x}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^*$ et la fonction f, qui est le quotient de x et $1+e^{1/x}$, est définie et continue sur $\mathbb{R}^*$ sauf en les points où le dénominateur s'annule. Comme $1+e^{1/x}>0$ pour tout $x\in\mathbb{R}^*$, on conclut que f est définie et continue sur $\mathbb{R}^*$.
   4.2. Comme $\lim_{x\to0} f(x) = 0$, on peut prolonger par continuité f en 0 en posant $f(0)=0$.
   4.3. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
5. 5.1. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(x-1-\ln(-x)) = \lim_{x\to-\infty} x\left(1-\frac{1}{x}-\frac{\ln(-x)}{x}\right) = -\infty$,
   $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(x-1-\ln(x)) = \lim_{x\to+\infty} x\left(1-\frac{1}{x}-\frac{\ln(x)}{x}\right) = +\infty$,
   $\lim_{x\to0} f(x) = +\infty$.
   5.2. f n'est pas prolongeable par continuité en 0.

Exercice 7.17

Établir si les fonctions suivantes sont prolongeables par continuité en 0.

$$f\colon \mathbb{R}^*\to\mathbb{R} \qquad x\mapsto\begin{cases} x\sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } x>0,\\ \frac{\sin(x)}{x}, & \text{si } x<0,\end{cases}$$

$$f\colon \mathbb{R}^*\to\mathbb{R} \qquad x\mapsto\begin{cases} \frac{1-\cos(x)}{x^2}, & \text{si } x>0,\\ x\sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } x<0,\end{cases}$$

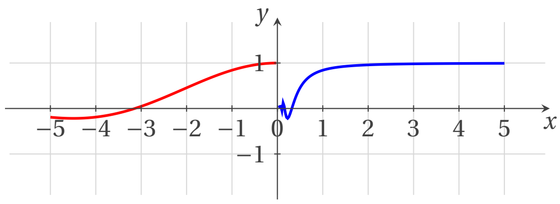
$$f\colon \mathbb{R}^*\to\mathbb{R} \qquad x\mapsto\begin{cases} x\cos\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } x>0,\\ \frac{1-\cos(x)}{x^2}, & \text{si } x<0,\end{cases}$$

Correction

1. Étant donné que $\lim_{x\to0^+} f(x)\neq\lim_{x\to0^-} f(x)$ car

$$\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0^+} x\sin\left(\frac{1}{x}\right)=0, \qquad \text{(on a utilisé le théorème d'encadrement)}$$
$$\lim_{x\to0^-} f(x)=\lim_{x\to0^-} \frac{\sin(x)}{x}=1, \qquad \text{(on a utilisé une limite connue)}$$

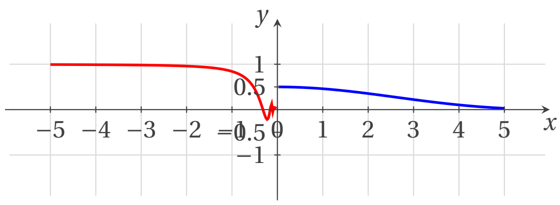
la fonction n'est pas prolongeable par continuité en $x=0$.



2. Étant donné que $\lim_{x\to0^+} f(x)\neq\lim_{x\to0^-} f(x)$ car

$$\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0^+} \frac{1-\cos(x)}{x^2}=\frac{1}{2}, \qquad \text{(on a utilisé une limite connue)}$$
$$\lim_{x\to0^-} f(x)=\lim_{x\to0^-} x\sin\left(\frac{1}{x}\right)=0, \qquad \text{(on a utilisé le théorème d'encadrement)}$$

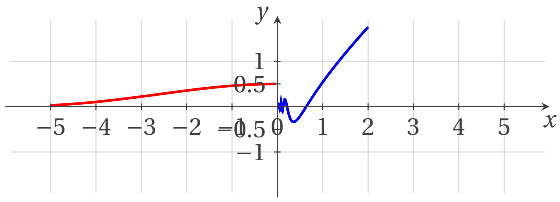
la fonction n'est pas prolongeable par continuité en $x=0$.



3. Étant donné que $\lim_{x\to0^+} f(x)\neq\lim_{x\to0^-} f(x)$ car

$$\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0^+} x\cos\left(\frac{1}{x}\right)=0, \qquad \text{(on a utilisé le théorème d'encadrement)}$$
$$\lim_{x\to0^-} f(x)=\lim_{x\to0^-} \frac{1-\cos(x)}{x^2}=\frac{1}{2}, \qquad \text{(on a utilisé une limite connue)}$$

la fonction n'est pas prolongeable par continuité en $x=0$.



Exercice 7.18

Soit $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ l'application définie par

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x\ln|x|}{x-1} & \text{si } x\notin\{0,1\},\\ 1 & \text{si } x=1,\\ 0 & \text{si } x=0.\end{cases}$$

Est-elle continue ?

Correction
En utilisant les propriétés générales sur les ensembles de définition de la somme, du produit, du quotient et de la composition de fonctions, on obtient aisément que la fonction $x \mapsto \frac{x\ln|x|}{x-1}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$, donc f est définie sur $\mathbb{R}$. De plus $\lim_{x\to0} f(x) = \lim_{x\to0}\frac{x\ln|x|}{x-1} = 0$ et $\lim_{x\to1} f(x) = \lim_{x\to1}\frac{x\ln|x|}{x-1} = \lim_{t\to0}(t+1)\frac{\ln|1+t|}{t} = 1$: la fonction f est donc continue.

Exercice 7.19

1. Dire si l'application $f\colon \mathbb{R}\setminus\{\pm1\}\to\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{2}{1-x^2}$ se prolonge par continuité en -1 et en 1. Donner le prolongement par continuité le cas échéant.
2. Dire si l'application $f\colon \mathbb{R}\setminus\{\pm1\}\to\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2}$ se prolonge par continuité en -1 et en 1. Donner le prolongement par continuité le cas échéant.

Correction

1. On a $f(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{2}{1-x^2} = \frac{1}{x-1}$ donc $\lim_{x\to-1} f(x) = -1/2$ et $\lim_{x\to1^\pm} f(x) = \pm\infty$. La fonction f n'est donc pas prolongeable par continuité en 1 mais elle est prolongeable par continuité en -1 et ce prolongement vaut $-1/2$.
2. On a $f(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2} = -\frac{1}{1+x}$ donc $\lim_{x\to1} f(x) = -1/2$ et $\lim_{x\to(-1)^\pm} f(x) = \mp\infty$. La fonction f n'est donc pas prolongeable par continuité en -1 mais elle est prolongeable par continuité en 1 et ce prolongement vaut $-1/2$.

Exercice 7.20 (Application du théorème de la bijection)

Soit f l'application de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x-2+\ln(x)$.

1. Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique qu'on notera a.
2. Soit g la bijection réciproque de f. Étudier monotonie et continuité de g en précisant son comportement aux bornes de l'ensemble de définition.
3. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$.

Correction

1. f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $f'(x) = 1+\frac{1}{x} > 0$ donc f est monotone croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Par conséquent f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans $f(\mathbb{R}_+^*) =]\lim_{x\to0} f(x); \lim_{x\to+\infty} f(x)[= \mathbb{R}$. Comme $0 = \inf(\mathbb{R}_+^*)$ on déduit qu'il existe un et un seul $a\in\mathbb{R}_+^*$ tel que $f(a)=0$. On peut donc conclure que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique.
2. Comme f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$, la bijection réciproque g réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$. Sachant que f est continue et monotone croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on peut en déduire que g est continue et monotone croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et que l'on a $\lim_{x\to-\infty} g(x) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.
3. $\frac{f(x)}{x} = 1 - \frac{2}{x} + \frac{\ln(x)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$.

Exercice 7.21

Soit f et g deux fonctions continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ telles que $f(a) < g(a)$ et $f(b) > g(b)$. Prouver qu'il existe $x_0 \in]a,b[$ tel que $f(x_0) = g(x_0)$.

Correction
On considère la fonction $h\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ définie par $h(x) = f(x)-g(x)$. On remarque que $h(a)<0$ et $h(b)>0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $x_0\in[a,b]$ tel que $h(x_0)=0$. Comme $h(a)<0$ et $h(b)>0$, alors $x_0 \in]a,b[$. Comme $h(x_0)=0$ alors $f(x_0)=g(x_0)$.

Exercice 7.22

Soit f une fonction continue et injective de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. Prouver que f est strictement monotone.

Correction
On considère trois points x_i tels que $a < x_1 < x_2 < x_3 < b$. Supposons par absurde que $f(x_1) > f(x_2) < f(x_3)$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, si on considère l'intervalle $I = [f(x_2), \min f(x_1), f(x_3)]$, pour tout $u\in I$ il existe $s \in]x_1,x_2[$ et $t\in]x_2,x_3[$ tels que $f(s) = u = f(t)$. Puisque f est injective, $s=t$, en contradiction avec le fait que $x_1 < s < x_2 < t < x_3$.

Exercice 7.23

Soit f une fonction continue de $[0,1]$ dans $[0,1]$. Montrer qu'il existe $\alpha \in [0,1]$ tel que $f(\alpha) = \alpha$ (un tel point est appelé *point fixe* de f).

Correction

Si $f(0) = 0$ alors $\alpha = 0$ est solution du problème. Si $f(1) = 1$ alors $\alpha = 1$ est solution du problème. Supposons $f(0) \neq 0$ et $f(1) \neq 1$. Soit g la fonction de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ telle que $g(x) = f(x) - x$. Comme $f(0) > 0$ alors $g(0) > 0$. Comme $f(1) < 1$ alors $g(1) < 0$. Or g est continue sur $[0,1]$ donc il existe $\alpha \in [0,1]$ tel que $g(\alpha) = 0$, ce qui implique $f(\alpha) = \alpha$.

Exercice 7.24

Considérons l'équation $x(1+e^x) = e^x$. Montrer qu'elle admet une unique solution réelle ℓ dans $[0;1]$.

Correction

Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x(1+e^x) - e^x$. $f(x) = 0$ si et seulement si x est solution de l'équation donnée. f est de classe $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$, $f(0) = -1 < 0$ et $f(1) = 1 > 0$ donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaire, la fonction f admet au moins une racine sur $[0;1]$. De plus, f est monotone sur $[0;1]$ (car $f'(x) = 1 + xe^x > 0$ pour tout $x \in [0;1]$), donc cette racine est unique.

Exercice 7.25 (Application du théorème des valeurs intermédiaires)

Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^{35} + x - 10^{-35}$. Montrer qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ satisfaisant à $f(x) = 0$ et $0 < x < \frac{1}{10}$.

Correction

Puisque $f(0) = -10^{-35} < 0$, $f(10^{-1}) = 10^{-35} + 10^{-1} - 10^{-35} = 10^{-1} > 0$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe (au moins un) $x \in [0;10^{-1}]$ tel que $f(x) = 0$.

Exercice 7.26 (Application du théorème des valeurs intermédiaires)

Montrer que toute fonction polynomiale de degré impair possède au moins un zéro réel.

Correction

Soit le polynôme $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ avec n impair. Si $a_n > 0$ alors $\lim_{x\to-\infty} P(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} P(x) = +\infty$; P étant une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $P(\alpha) = 0$. De même, si $a_n < 0$ alors $\lim_{x\to-\infty} P(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} P(x) = -\infty$; P étant une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $P(\alpha) = 0$.

Exercice 7.27

En utilisant le théorème des valeurs intermédiaires, déduire le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ sur l'intervalle I dans les cas suivants (sans résoudre l'équation) :

a) $f(x) = x^2 - 16$, $I =]0,+\infty[$,

b) $f(x) = x^2 - 160$, $I =]-\infty,0[$,

c) $f(x) = x^2 - \sqrt{2}$, $I =]-\infty,0[$,

d) $f(x) = x^3 - \sqrt{\pi}$, $I =]0,+\infty[$.

Correction

Les énoncés du *théorème des valeurs intermédiaires* suivants sont équivalents :

- ⋆ Si f est définie et continue en tout point d'un intervalle I alors pour tout sous-intervalle J de I, l'image $f(J)$ est un intervalle.
- ⋆ L'image d'un intervalle de $\mathbb{R}$ par une fonction continue est un intervalle de $\mathbb{R}$.
- ⋆ Soient f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et $a, b \in I$ avec $f(a) \le f(b)$. Alors f atteint toutes les valeurs intermédiaires entre $f(a)$ et $f(b)$; plus précisément :

$$\forall d \in [f(a), f(b)] \quad \exists c \text{ compris entre } a \text{ et } b \text{ tel que } f(c) = d.$$

a) On considère la fonction $f\colon x \mapsto x^2 - 16$. f est une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$. Étant une parabole convexe de sommet $(0,-16)$, la fonction f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$. De plus $f(0) = -16$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Par conséquent, la fonction f, strictement croissante sur $]0;+\infty[$, est négative en $x = 0$ et positive pour $x \to +\infty$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation associée à la fonction f admet une unique solution sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

b) On considère la fonction $f: x \mapsto x^2 - 16$. f est une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$. Étant une parabole convexe de sommet $(0, -16)$, la fonction f est strictement décroissante sur $]-\infty; 0[$. De plus $f(0) = -16$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$. Par conséquent, la fonction f, strictement décroissante sur $]-\infty; 0[$, est négative en $x = 0$ et positive pour $x \to -\infty$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation associée à la fonction f admet une unique solution sur l'intervalle $]-\infty; 0[$.

c) On considère la fonction $f: x \mapsto x^2 - \sqrt{2}$. f est une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$. Étant une parabole convexe de sommet $(0, -\sqrt{2})$, la fonction f est strictement décroissante sur $]-\infty, 0[$. De plus $f(0) = -\sqrt{2}$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$. Par conséquent, la fonction f, strictement décroissante sur $]-\infty, 0[$, est négative en $x = 0$ et positive pour $x \to -\infty$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation associée à la fonction f admet une unique solution sur l'intervalle $]-\infty, 0[$.

d) Soit $f:]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3 - \sqrt{\pi} = 0$. f est définie et continue sur $]0, +\infty[$. Elle est strictement croissante, $\lim_{x\to0^+} f(x) = -\sqrt{\pi} < 0$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty > 0$. Par conséquent, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un et un seul $c \in]0, +\infty[$ tel que $f(c) = 0$ et ce c est l'unique solution de l'équation $f(x) = 0$ sur $]0, +\infty[$.

Exercice 7.28

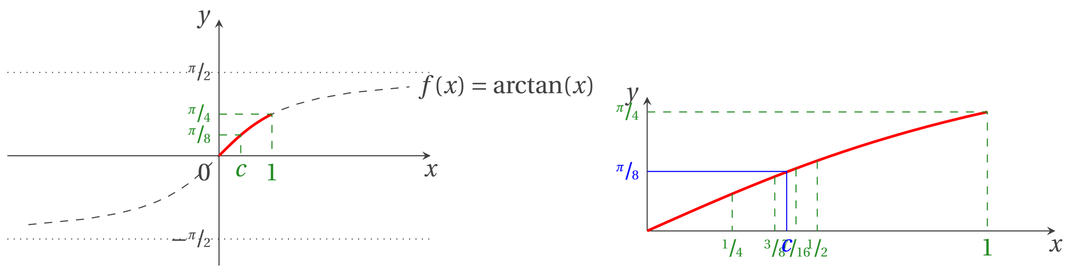
Montrer qu'il existe $x \in]0, 1[$ tel que $\arctan(x) = \pi/8$, puis qu'il est unique. Déterminer x par dichotomie avec une précision de $1/8$.

Correction

Rappelons le théorème des valeurs intermédiaires : *soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$. Alors pour toute valeur y comprise entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = y$.* Comme la fonction arctan est définie et continue de $\mathbb{R}$ dans $]-\pi/2, \pi/2[$, elle est donc continue sur l'intervalle $[0; 1]$. Puisque $\pi/8$ est compris entre $\arctan(0) = 0$ et $\arctan(1) = \pi/4$, alors il existe un $c \in [0, 1]$ tel que $\arctan(c) = \pi/8$. De plus, la fonction arctan est monotone croissante donc ce c est unique.

Dichotomie :

k	a_k	b_k	x_k	$\text{erreur}_k \le$
1	0	1	1/2	1
2	0	1/2	1/4	1/2
3	1/4	1/2	3/8	1/4
4	3/8	1/2	7/16	1/8



8 Dérivabilité

Soient f, g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$.

8.1 Définition (Dérivabilité en un point)
On dit que f est dérivable en x_0 si f est définie en tout point d'un intervalle ouvert contenant x_0 et si

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

existe dans $\mathbb{R}$. Lorsque cette limite existe, elle est notée $f'(x_0)$ et appelée *dérivée de f en x_0*.
Le rapport $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ est appelé *quotient différentiel*.

8.2 Définition (Dérivées successives)
Soit f dérivable sur E. Pour $n \in \mathbb{N}$ on définit par récurrence la dérivée n-ième, ou dérivée d'ordre n, de f en posant $f^{(0)} = f$ puis $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$ lorsque $f^{(n-1)}$ est dérivable sur E.
On dit que f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur E, et on écrit $f \in \mathscr{C}^n(E)$, lorsque f est n fois dérivable sur E et $f^{(n)}$ est continue sur E.

8.3 Proposition (Opérations algébriques sur les fonctions dérivées)
Soient λ un réel, f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I. Alors les fonctions $f + g$, λf et fg sont dérivables sur I et on a

$$(f+g)' = f' + g', \qquad (\lambda f)' = \lambda f', \qquad (fg)' = f'g + fg'.$$

Soient f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I telles que g ne s'annule pas sur I. Alors $\frac{f}{g}$ est dérivable sur I et on a

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

8.4 Théorème (Fonctions composées)
Soient $f : \mathscr{D}_f \to \mathbb{R}$ et $g : \mathscr{D}_g \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables telles que $f(\mathscr{D}_f) \subset \mathscr{D}_g$. Alors $g \circ f$ est dérivable sur $\mathscr{D}_f$ et on a

$$(g \circ f)' = f' \times g' \circ f$$

c'est-à-dire

$$(g \circ f)'(x) = f'(x) \times g'(f(x)) \qquad \forall x \in \mathscr{D}_f.$$

EXEMPLE
On considère la fonction $h : x \mapsto \sqrt{1-x}$ définie sur $]-\infty, 1[$. On sait que :

- ⋆ la fonction $f : x \mapsto 1 - x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc sur $]-\infty, 1[$,
- ⋆ la fonction $g : x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$,
- ⋆ $f(]-\infty, 1[) =]1, +\infty[\subset \mathbb{R}_+^*$.

Ainsi la fonction h est dérivable sur $]-\infty, 1[$ et on a

$$h'(x) = (-1) \times \frac{1}{2\sqrt{1-x}} = -\frac{1}{2\sqrt{1-x}}.$$

8.5 Théorème (Fonctions réciproques)
Si f est continue strictement monotone sur un intervalle I, dérivable en $x_0 \in I$ et $f'(x_0) \neq 0$ alors la réciproque f^{-1} est dérivable en $f(x_0)$ et

$$(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(f(x_0))}.$$

Attention (Tableaux des dérivées fondamentales et composition)

$(x^n)' = nx^{n-1}$	$\left([f(x)]^n\right)' = n[f(x)]^{n-1} f'(x)$	pour $n \neq -1$
$(e^x)' = e^x$	$\left(e^{f(x)}\right)' = e^{f(x)} f'(x)$	
$(a^x)' = a^x \ln(a)$	$\left(a^{f(x)}\right)' = a^{f(x)} \ln(a) f'(x)$	pour $a > 0$
$(\ln(x))' = \frac{1}{x}$	$\left(\ln(f(x))\right)' = \frac{f'(x)}{f(x)}$	
$(\sin(x))' = \cos(x)$	$\left(\sin(f(x))\right)' = f'(x)\cos(f(x))$	
$(\cos(x))' = -\sin(x)$	$\left(\cos(f(x))\right)' = -f'(x)\sin(f(x))$	
$(\tan(x))' = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$	$\left(\tan(f(x))\right)' = \frac{f'(x)}{\cos^2(f(x))} = 1 + \tan^2(f(x))$	
$(\arcsin(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\left(\arcsin(f(x))\right)' = \frac{f'(x)}{\sqrt{1-(f(x))^2}}$	
$(\arccos(x))' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\left(\arccos(f(x))\right)' = -\frac{f'(x)}{\sqrt{1-(f(x))^2}}$	
$(\arctan(x))' = \frac{1}{1+x^2}$	$\left(\arctan(f(x))\right)' = \frac{f'(x)}{1+(f(x))^2}$	
$(\sinh(x))' = \cosh(x)$	$\left(\sinh(f(x))\right)' = f'(x)\cosh(f(x))$	
$(\cosh(x))' = \sinh(x)$	$\left(\cosh(f(x))\right)' = f'(x)\sinh(f(x))$	

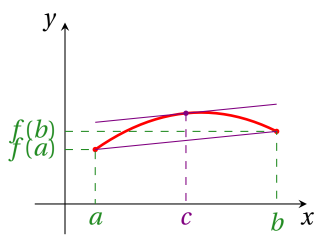
8.6 Théorème
Si f est dérivable en x_0 alors f est continue en x_0.

Attention
La réciproque est fausse : par exemple, les fonctions $f(x) = |x|$ et $g(x) = \sqrt[3]{x-1}$ sont continues en 0 mais non dérivables en 0.

8.7 Théorème (de Lagrange ou de la Valeur moyenne ou des Accroissements finis)
Si f est continue en tout point d'un intervalle $[a,b]$ (avec $a < b$) et dérivable en tout point de $]a,b[$ alors il existe au moins un point $c \in]a,b[$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

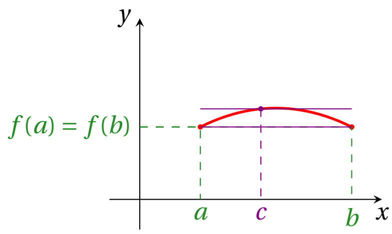
Il est simple de donner une interprétation géométrique de ce théorème : le rapport $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ est la pente de la droite qui relie le point $(a, f(a))$ au point $(b, f(b))$ et $f'(c)$ est la pente de la droite tangente au graphe de f au point $(c, f(c))$. Le théorème affirme donc qu'il existe au moins un point c tel que la droite tangente au graphe de f en ce point est parallèle à la droite qui relie le point $(a, f(a))$ au point $(b, f(b))$.



8.8 Théorème (de Rolle)
1. Si f est continue sur $[a,b]$ (avec $a < b$), dérivable sur $]a,b[$ et si elle vérifie $f(a) = f(b)$ alors il existe au moins un point $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.

2. Si f est continue sur $[a,+\infty[$, dérivable sur $]a,+\infty[$ et si elle vérifie $\lim_{x\to+\infty} = f(a)$ alors il existe au moins un point $c \in]a,+\infty[$ tel que $f'(c) = 0$.
3. Si f est continue sur $]-\infty,b]$, dérivable sur $]-\infty,b[$ et si elle vérifie $\lim_{x\to-\infty} = f(b)$ alors il existe au moins un point $c \in]a,+\infty[$ tel que $f'(c) = 0$.
4. Si f est continue et dérivable sur $]-\infty,+\infty[$ et si elle vérifie $\lim_{x\to-\infty} = \lim_{x\to+\infty}$ alors il existe au moins un point $c \in]-\infty,+\infty[$ tel que $f'(c) = 0$.

Le premier point de ce théorème est un cas particulier du théorème des accroissements finis, *i.e.* le cas où $f(b) = f(a)$ et donc $f(b) - f(a) = 0$.

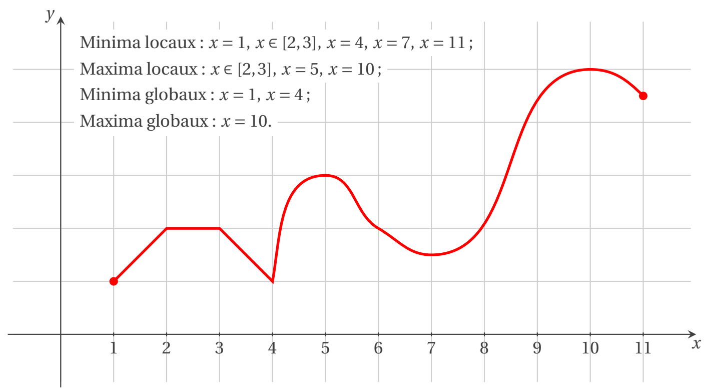


8.1 Localisation et nature des extrema

8.9 Définition
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que

- ⋆ f est bornée dans $[a,b]$ s'il existe un nombre réel $M \geq 0$ tel que
$$\text{pour tout } x \in [a,b],\ |f(x)| \leq M;$$
- ⋆ f admet un maximum (resp. minimum) *global* (ou absolu) en $c \in [a,b]$ si
$$\text{pour tout } x \in [a,b],\ f(x) \leq f(c) \text{ (resp. } f(x) \geq f(c)\text{)};$$
- ⋆ f admet un maximum (resp. minimum) *local* (ou relatif) en $c \in [a,b]$ s'il existe un intervalle $\varepsilon > 0$ telle que
$$\text{pour tout } x \in [a,b] \cap [c-\varepsilon, c+\varepsilon],\ f(x) \leq f(c) \qquad \text{(resp. } f(x) \geq f(c)\text{)}.$$

Exemple



On sait par le théorème des valeurs intermédiaires qu'une fonction continue sur un intervalle fermé y admet un maximum global et un minimum global. La dérivée de la fonction est d'une aide précieuse pour en localiser les minima et les maxima locaux.

8.10 Définition (Point stationnaire (ou critique))
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable en $c \in]a,b[$. Si $f'(c) = 0$, on dit que c est un point stationnaire (ou critique.)

8.11 Proposition
Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable en $c \in]a,b[$. Si f admet un extremum local en c, alors c est un point stationnaire.

Attention
La réciproque de cette proposition n'est pas vraie : une fonction dérivable peut posséder une dérivée nulle en un point sans pour autant y admettre un extremum. C'est le cas de la fonction $f\colon x \mapsto x^3$ pour laquelle $f'(0) = 0$ et pour laquelle l'origine n'est pas un extrémum (il s'agit d'un point d'inflexion à tangente horizontale).

Remarque
On déduit de cette proposition que si c est un extremum de $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ alors

- soit f est dérivable en c et $f'(c) = 0$,
- soit f n'est pas dérivable en c,
- soit c est un point frontière de l'intervalle, c'est-à-dire $c = a$ ou $c = b$.

8.12 Définition (Tangente)
f dérivable en x_0 signifie que le graphe de f admet au point d'abscisse x_0 une tangente de pente $f'(x_0)$. Son équation est $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

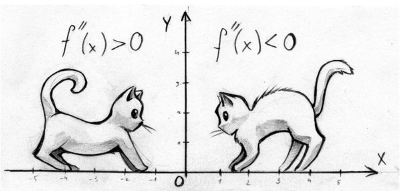
8.13 Proposition (Sens de variation : dérivée première)
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction dérivable sur I.

1. Si $\forall x \in I$, $f'(x) \geq 0$ alors f est croissante sur I ;
2. si $\forall x \in I$, $f'(x) \leq 0$ alors f est décroissante sur I ;
3. si $\forall x \in I$, $f'(x) = 0$ alors f est constante sur I.
4. Si $\forall x \in I$, $f'(x) > 0$, alors f est strictement croissante sur I ;
5. si $\forall x \in I$, $f'(x) < 0$, alors f est strictement décroissante sur I.

La dérivée première d'une fonction f donne le taux instantané de variation de la variable y par rapport à la variable x lorsque $y = f(x)$. La dérivée seconde de f donne le taux instantané de variation par rapport à x du taux instantané de variation de y par rapport x. Donc, si la dérivée seconde d'une fonction est positive, c'est que le taux instantané de variation de la pente de la tangente est positif et donc la pente de la tangente augmente (*la fonction est convexe*). Si la dérivée seconde est négative, la pente de la tangente diminue (*la fonction est concave*). Enfin, il se peut que la dérivée de f soit nulle en un point c. Dans ce cas, si la dérivée seconde change de signe au point c, nous disons que c est un point d'inflexion de f. La dérivée seconde d'une fonction permet alors de déterminer la nature de ses points stationnaires.

8.14 Proposition (Classification des extrema : dérivée seconde)
Soient $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable en un point stationnaire $c \in]a,b[$. Alors

1. si $f''(c) < 0$, la fonction admet un maximum local en c,
2. si $f''(c) > 0$, la fonction admet un minimum local en c.



Remarque
Le théorème ne dit rien du cas $f''(c) = 0$. Un tel point peut être un point de maximum, comme dans le cas de l'origine pour la fonction $x \mapsto -x^4$, un point de minimum, comme dans le cas de l'origine pour la fonction $x \mapsto x^4$, ou encore un point d'inflexion, comme dans le cas de l'origine pour la fonction $x \mapsto x^3$.

8.2 Approximations : polynômes de Taylor

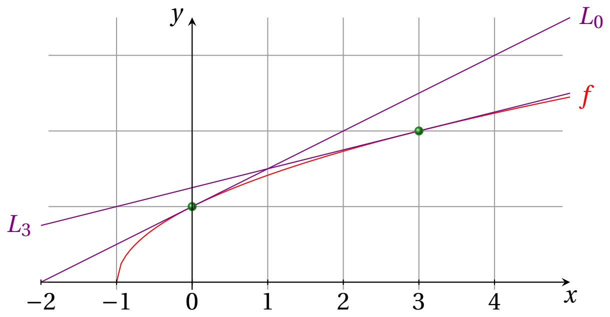
Il est souvent plus avantageux de remplacer des fonctions compliquées par des fonctions plus simples qui les approchent.

8.15 Définition (Linéarisation)
Si on approche une fonction f au voisinage d'un point x_0 au moyen d'une fonction affine $L(x) = q + mx$, il est naturel de choisir la fonction L dont le graphe est tangent au graphe de la fonction f en x_0 :

$$L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

C'est ce qu'on appelle la linéarisation de f en x_0. Dans certains cas on mentionne explicitement le point auquel la linéarisation est obtenue et on note la linéarisation de f en x_0 par L_{x_0}.

ATTENTION
La linéarisation d'une fonction dépend du point auquel on linéarise la fonction. Par exemple, la linéarisation de la fonction $f(x) = \sqrt{1+x}$ en 0 donne $L_0(x) = 1 + x/2$ (car $f'(x) = 1/(2\sqrt{1+x})$ et $L_0(x) = f(0) + f'(0)x = 1 + x/2$) tandis que la linéarisation en 3 donne $L_3(x) = (5 + x)/4$. La linéarisation L_0 fournit une meilleure approximation de f tant que $x < 1$, la linéarisation L_3 devient meilleure lorsque $x > 1$. En $x = 1$, les deux linéarisations fournissent la même valeur.



8.16 Définition (Notation)
Lorsqu'elle est évaluée en x_0, la linéarisation de la fonction f en x_0 coïncide avec la fonction f. Lorsque x reste proche de x_0, la linéarisation de L_{x_0} fournit une approximation de f. On note

$$f(x) \simeq L(x) \qquad \text{lorsque } x \simeq x_0.$$

Le signe $\simeq$ signifie "*est approximativement égal à*" sans que l'on attache ici de sens plus précis à cette notation.

EXEMPLE
La dérivée de $f(x) = (1+x)^n$ est égale à $f'(x) = n(1+x)^{n-1}$. La linéarisation de f à l'origine est donc égale à $L_0(x) = f(0) + f'(0)x = 1 + nx$ est on a

$$(1+x)^n \simeq 1 + nx \qquad \text{lorsque } x \simeq 0.$$

Cette formule particulièrement simple à retenir est valable pour des valeurs quelconques de n. Elle permet de calculer rapidement des approximations de racines et de puissances de nombres *proches de l'unité*. Ainsi, par exemple

$$\sqrt[3]{1.2} = (1+0.2)^{0.3} \simeq 1 + \frac{0.2}{3} = 1.0\overline{6}.$$

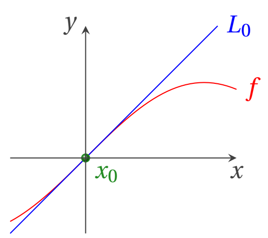
La même formule permet d'évaluer immédiatement 1.002^{100} à 1.2 (la valeur exacte est $1.221\ldots$).

EXEMPLE
La linéarisation de la fonction sin à l'origine est $L_0(x) = x$, donc

$$\sin(x) \simeq x \qquad \text{lorsque } x \simeq 0.$$

C'est la linéarisation que l'on effectue pour résoudre l'équation du pendule en physique.

La qualité de cette approximation peut être également appréciée au moyen de quelques valeurs :



x	−0.2	−0.1	−0.05	0	0.05	0.1	0.2
$f(x) = \sin(x)$	−0.1986	−0.0998	−0.0499	0	0.0499	0.0998	0.1986
$L_0(x) = x$	−0.2	−0.1	−0.05	0	0.05	0.1	0.2

La linéarisation d'une fonction f en un point x_0 est un polynôme de degré inférieur ou égal à 1 tel que

$$\begin{cases} L(x_0) = f(x_0), \\ L'(x_0) = f'(x_0). \end{cases}$$

Les polynômes de TAYLOR généralisent cette construction pour des polynômes de degrés quelconques.

8.17 Définition (Polynôme de TAYLOR)

Le polynôme de TAYLOR d'ordre n généré par f au point x_0 est le (seul) polynôme P_n de degré inférieur ou égal à n qui satisfait les conditions

$$P_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0) \qquad \text{pour } k = 0, 1, \dots, n,$$

i.e. le polynôme

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k.$$

Le graphe du polynôme de TAYLOR d'une fonction f en x_0 est une courbe polynomiale tangente au graphe de f en x_0.

Remarque

Soit la fonction $f(x) = x^2 + 1$. On a $f'(x) = 2x$, $f''(x) = 2$ et $f^{(k)}(x) = 0$ lorsque $k \ge 3$. Les polynômes de TAYLOR d'ordre 0, 1 et 2 générés par f à l'origine s'obtiennent par $P_0(x) = P_1(x) = 1$ et $P_2(x) = P_k(x) = f(x)$ lorsque $k \ge 3$: les polynômes de TAYLOR d'ordre ≥ 2 sont tous égaux à $1 + x^2$. C'est la raison pour laquelle on définit un *polynôme de* TAYLOR *d'ordre n et non pas de degré n* : le degré d'un polynôme de TAYLOR peut être inférieur à son ordre.

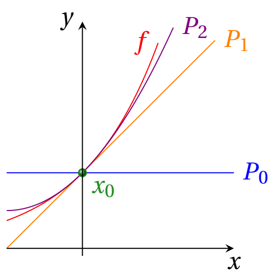
8.18 Proposition

Le polynôme de TAYLOR d'ordre n généré au point x_0 par un polynôme f de degré $m \le n$ coïncide avec f quel que soit x_0.

EXEMPLE

Le polynôme de TAYLOR d'ordre n généré au point 0 par la fonction $f(x) = e^x$ est

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots \frac{x^n}{n!}.$$

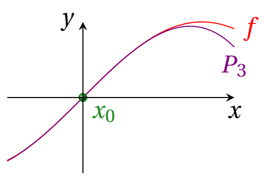


EXEMPLE

Le polynôme de TAYLOR d'ordre 4 généré au point 0 par le fonction $f(x) = \sin(x)$ est

$$P_n(x) = x - \frac{x^3}{6}$$

La qualité de l'approximation des fonctions circulaires par leurs polynômes de TAYLOR est excellente.



EXEMPLE

Le polynôme de TAYLOR d'ordre n généré au point 0 par le fonction $f(x) = (1-x)^m$, $m > n$ est

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k.$$

Comme

$$f^{(k)}(x) = m(m-1)\cdots(m-(k-1))(1-x)^{m-k} = \frac{m!}{(m-k)!}(1-x)^{m-k} = \binom{m}{k} k!(1-x)^{m-k}$$

on trouve

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{m}{k} x^k.$$

8.19 Propriété

Soit f et g deux fonctions n fois dérivables en un point x_0 et P_f et P_g leurs polynômes de TAYLOR d'ordre n en x_0. Alors

1. le polynôme de TAYLOR d'ordre n généré par la somme $f+g$ au point x_0 est le polynôme $P_f + P_g$;
2. le polynôme de TAYLOR d'ordre n généré par le produit fg au point x_0 est la somme des termes de degré inférieur ou égaux à n du polynôme $P_f P_g$;
3. le polynôme de TAYLOR d'ordre nk généré par $f(x^k)$ au point x_0 est le polynôme $P_f(x^k)$;
4. le polynôme de TAYLOR d'ordre $n-1$ généré par f' au point x_0 est le polynôme P_f'.

EXEMPLE (SOMME)

Sachant que le polynôme de TAYLOR d'ordre 3 généré par $\sin(x)$ à l'origine est égal à $x - x^3/6$, on peut conclure que le polynôme de TAYLOR d'ordre 3 généré par $4x+3x^2-\sin(x)$ à l'origine est égal à $4x+3x^2-(x-x^3/6)$, *i.e.* $P_3(x) = 3x+3x^2+x^3/6$.

EXEMPLE (PRODUIT)

Sachant que le polynôme de TAYLOR d'ordre 3 généré par e^x à l'origine est égal à $1+x+x^2/2+x^3/6$, on peut conclure que le polynôme de TAYLOR d'ordre 3 généré par $(x+2x^2-x^3)e^x$ à l'origine est donné par le polynôme obtenu par la somme des termes de degré inférieur ou égaux à 3 du produit $(x+2x^2-x^3)(1+x+x^2/2+x^3/6)$, *i.e.* $P_3(x) = x+3x^2+3x^3/2$.

EXEMPLE (COMPOSITION)

Sachant que le polynôme de TAYLOR d'ordre n généré par $1/(1-x) = (1-x)^{-1}$ à l'origine est égal à $1+x+x^2+\cdots+x^n$, on peut conclure que le polynôme de Taylor d'ordre n généré par $1/(1-(-x)) = (1-(-x))^{-1}$ à l'origine est égal à $1+(-x)+(-x)^2+\cdots+(-x)^n$, *i.e.* $1-x+x^2+\cdots+(-1)^n x^n$ et que le polynôme de Taylor d'ordre n généré par $1/(1+x^2)$ à l'origine est égal à $1+(-x^2)+(-x^2)^2+\cdots+(-x^2)^n$, *i.e.* $1-x^2+x^4+\cdots+(-1)^n x^{2n}$.

EXEMPLE (GRAVITATION ET APPROXIMATION)

À l'altitude z, la norme du champ de gravitation de la Terre est la fonction

$$\begin{aligned} g\colon \mathbb{R}_+ &\to \mathbb{R}_+ \\ z &\mapsto \frac{GM}{(R+z)^2} \end{aligned}$$

où G est la constante de gravitation, M la masse de la Terre et R le rayon de la Terre.
Posons $u = z/R$. On a $\tilde{g}(u) = (1+u)^{-2}GM/R^2$. Si $z \ll R$ alors $u \simeq 0$. Le polynôme de TAYLOR de $\tilde{g}$ à l'ordre 2 au voisinage de 0 est

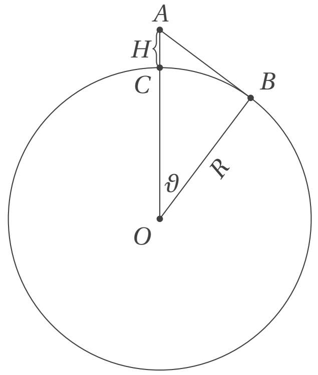
$$\tilde{g}(u) = \frac{GM}{R^2}\left(1-2u+3u^2\right).$$

Une expression approchée de g pour $z \ll R$ est alors

$$g(z) = \frac{GM}{R^4}\left(R^2-2zR+3z^2\right).$$

EXEMPLE

On veut déterminer la limite de visibilité depuis un point d'altitude H au-dessus du niveau de la mer. Du point A on voit jusqu'au point B.



L'on a

$$\cos(\vartheta) = \frac{OB}{OA} = \frac{R}{R+H} = \frac{1}{1+\frac{H}{R}}.$$

Pour une altitude «raisonnable», $\frac{H}{R}$ est petit et ϑ également ($R \approx 6371$ km). On utilise les deux équivalences

$$\cos(\vartheta) \approx 1 - \frac{\vartheta^2}{2}, \qquad \frac{1}{1+\frac{H}{R}} = \left(1+\frac{H}{R}\right)^{-1} \approx 1 - \frac{H}{R},$$

qui conduisent à $\vartheta \approx \sqrt{2\frac{H}{R}}$. On conclut que la distance CB

à la surface de la Terre, c'est-à-dire la longueur de l'arc de cercle, est $\ell = R\vartheta = \sqrt{2RH}$. Par exemple, du sommet de la tour Eiffel ($H = 324$ m) on peut voir à une distance de 66 kilomètres.

L'utilisation d'un polynôme de Taylor d'ordre n d'une fonction f en x_0 pour approcher f à proximité de x_0 induit une erreur qui est d'autant plus élevée que le graphe de la fonction s'écarte du graphe de f. L'erreur commise n'est nulle partout que lorsque la fonction f est un polynôme de degré inférieur ou égal à n. Lorsqu'on dispose d'une borne sur la dérivée $(n+1)$-ème de f, il est possible de borner l'erreur. De plus, lorsque l'on utilise un polynôme de Taylor d'ordre de plus en plus grand pour approcher f, on s'attend à ce que l'approximation s'améliore.

8.20 Théorème (Erreur d'approximation)
Soit $f\colon [a;b] \to \mathbb{R}$ une fonction $n+1$ fois dérivable et soit P_n le polynôme de Taylor d'ordre n généré par f en x_0. Si $|f^{(n+1)}(x)| \le M$ pour tous les x dans $[a;b]$, alors

$$|f(x) - P_n(x)| \le \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}M$$

pour tous les x dans $[a;b]$.

Exemple
La linéarisation de $f(x) = \sin(x)$ en $x = 0$ donne $\sin(x) \simeq x$. Quelle est la précision de cette approximation lorsque $|x| \le 0.5$? Comme $\max\limits_{|x|\le 0.5} |f''(x)| = \max\limits_{|x|\le 0.5} |-\sin(x)| = \sin(0.5)$, une application directe du théorème permet d'écrire

$$|\sin(x) - x| \le \frac{(0.5)^2}{2}\sin(0.5) \le 0.06$$

pour tous les x dans $[-0.5;0.5]$.

Exemple
Le polynôme d'ordre 2 généré par la fonction $f(x) = 1/(1-x)$ à l'origine est donné par

$$P_2(x) = 1 + x + x^2.$$

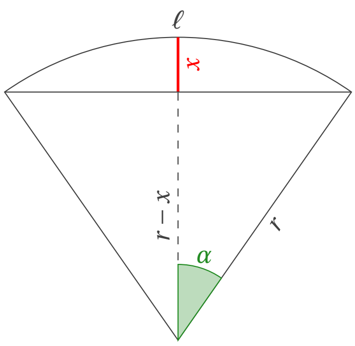
Considérons ces fonctions sur l'intervalle $[0;0.1]$. La fonction f''' est dérivable sur cet intervalle et $\max_{x\in[0;0.1]} |f'''(x)| = \max_{x\in[0;0.1]} |6/(1-x)^4| = 6/(1-0.1)^4 = M$. Par conséquent

$$|f(x) - P_2(x)| \le \frac{(0.1-0)^{2+1}}{(2+1)!} 6/(1-0.1)^4 \le 0.00152$$

pour tous les x dans $[0;0.1]$.

Exemple
Considérons un secteur circulaire de rayon r et angle 2α, avec α petit.On veut approcher x par un polynôme en α et r. Pour cela, on exprime x en fonction de $\cos(\alpha)$ et on calcule le polynôme de Taylor en 0 à l'ordre 3 de $\cos(\alpha)$:

$$r - x = r\cos(\alpha).$$



Lorsque $\alpha \simeq 0$ on a

$$\cos(\alpha) \simeq \frac{\cos(0)}{0!}(\alpha-0)^0 + \frac{-\sin(0)}{1!}(\alpha-0)^1 + \frac{-\cos(0)}{2!}(\alpha-0)^2 + \frac{\sin(0)}{3!}(\alpha-0)^3 = 1 - \frac{1}{2}\alpha^2$$

donc

$$x \simeq \frac{r\alpha^2}{2} \qquad \text{lorsque } \alpha \simeq 0.$$

En approchant la Terre par une sphère de rayon $r = 6360$ km, on peut par exemple estimer de combien un arc de $\ell = 100$ km s'écarte de sa corde (*i.e.* estimer x) : $\alpha = \frac{\ell}{r} = \frac{100}{6360} = \frac{5}{318} \simeq 0$ donc $x \simeq \frac{6360\times 100^2}{2\times 6360^2} = \frac{125}{159} \simeq 0.79$ km.

8.21 Théorème (de l'Hôpital — F.I. $\left[\frac{0}{0}\right]$ ou $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$)
Soient f et g deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle $]a;b[$, avec $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ et $g'(x) \ne 0$ pour tout $x \in]a;b[$. Si

1. il existe $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ tel que $\lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$,
2. $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} g(x) = 0$ ou $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} g(x) = \infty$

alors

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell.$$

Le résultat est valable en remplaçant a^+ par b^- ou par $x_0 \in]a;b[$.

Attention

L'existence de la limite du rapport des dérivées est une condition suffisante mais non nécessaire pour l'existence de la limite du rapport des deux fonctions. Considérons par exemple les deux fonctions $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ et $g(x) = e^x - 1$. On a

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{e^x - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{x\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{e^x-1}{x}} = 0.$$

Cependant

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)}{e^x}$$

qui n'existe pas.

Remarque (F.I. $[0\cdot\infty]$)

Lorsqu'on doit calculer $\lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x)$ avec $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ et $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ il suffit de réécrire le produit comme

$$f(x)\cdot g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \qquad \text{ou} \qquad f(x)\cdot g(x) = \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$$

et on pourra essayer d'appliquer le théorème de l'Hôpital.

Remarque (F.I. $[\infty - \infty]$)

Lorsqu'on doit calculer $\lim_{x\to a} f(x) - g(x)$ avec $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = +\infty$ il suffit de réécrire la différence comme

$$f(x) - g(x) = \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)\cdot g(x)}}$$

et on pourra essayer d'appliquer le théorème de l'Hôpital.

Exemple

1. Calculons la limite $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)}$ avec $f(x) = e^x - 1$ et $g(x) = x$.
   On applique le théorème de l'Hôpital aux fonctions f et g définies et dérivables sur $\mathbb{R}$. On a $g'(x) = 1 \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} g(x) = 0$ et $\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{1} = 1$. Donc $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.
2. Calculons la limite $\lim_{x\to 2} \frac{f(x)}{g(x)}$ avec $f(x) = x^2 - 4x + 4$ et $g(x) = x^2 - 4$.
   On applique le théorème de l'Hôpital aux fonctions f et g définies et dérivables sur $\mathbb{R}$. On a $g'(x) = 2x \neq 0$ pour tout $x \in \mathscr{D} =]0;+\infty[$, $\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} g(x) = 0$ et $\lim_{x\to 2} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 2} \frac{2x-4}{2x}$ qui est encore une forme indéterminée.
   On applique le théorème de l'Hôpital aux deux nouvelles fonctions f' et g' définies et dérivables sur $\mathscr{D}$. On a $g''(x) = 2 \neq 0$ pour tout $x \in \mathscr{D}$, $\lim_{x\to 2} f'(x) = \lim_{x\to 2} g'(x) = 0$ et $\lim_{x\to 2} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \lim_{x\to 2} \frac{2}{2} = 1$. Donc $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.
3. Calculons la limite $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin(x)}$. On peut utiliser la règle de l'Hôpital car

   $$n(x) = e^x - e^{-x} - 2x, \qquad \lim_{x\to 0} n(x) = 0; \qquad d(x) = x - \sin(x), \qquad \lim_{x\to 0} d(x) = 0.$$

   On a

   $$\begin{aligned} n'(x) &= e^x + e^{-x} - 2, & \lim_{x\to 0} n'(x) &= 0; & d'(x) &= 1 - \cos(x), & \lim_{x\to 0} d'(x) &= 0 \\ n''(x) &= e^x - e^{-x}, & \lim_{x\to 0} n''(x) &= 0; & d''(x) &= \sin(x), & \lim_{x\to 0} d''(x) &= 0; \end{aligned}$$

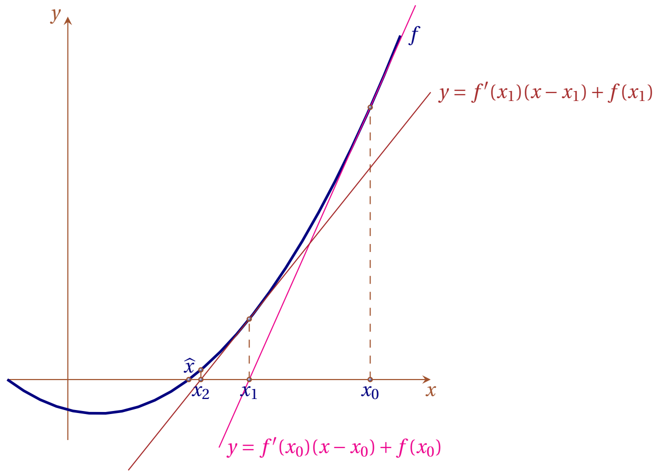
$$n'''(x) = e^x + e^{-x}, \qquad \lim_{x\to 0} n''(x) = 2; \qquad d'''(x) = \cos(x), \qquad \lim_{x\to 0} d''(x) = 1;$$

donc

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{n'''(x)}{d'''(x)} = 2.$$

Méthodes numériques de recherche de zéros - partie ② : méthode de Newton On a déjà vu au chapitre précédent (voir à la page 165) la méthode de la bissection pour le calcul approché des zéros d'une fonction continue. La méthode de la bissection est une méthode qui fonctionne toujours mais qui n'est pas très rapide. On va voir maintenant une méthode beaucoup plus rapide, la méthode de Newton. C'est probablement la méthode la plus utilisée pour le calcul approché des zéros d'une fonction et on voit bien que la recherche des zéro est une souci bien plus ancien que l'avènement des ordinateurs.

Le principe est le suivant : soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continûment dérivable et soit $\widehat{x}$ un zéro simple de f, c'est-à-dire $f(\widehat{x}) = 0$ et $f'(\widehat{x}) \neq 0$. Supposons que l'on connaisse une valeur x_k proche de $\widehat{x}$. Pour calculer x_{k+1} on prend l'intersection de l'axe des abscisses avec la droite tangente au graphe de f passant par le point $(x_k, f(x_k))$, *i.e.* on cherche x solution du système linéaire



$$\begin{cases} y = f'(x_k)(x - x_k) + f(x_k), \\ y = 0. \end{cases}$$

On obtient

$$x = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}.$$

On définit ainsi la suite récurrente

$$\begin{cases} x_0 \text{ donné}, \\ x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}. \end{cases}$$

Comme critère d'arrêt on peut choisir de s'arrêter lorsque les itérées sont proches les unes des autres ou lorsque la valeur prise par la fonction est suffisamment proche de zéro.
L'avantage essentiel de cette méthode réside dans sa rapidité. Là où la méthode de bissection prend plusieurs centaines d'itérations, la méthode de Newton n'en prend souvent que quelques-unes. Il y a toutefois un prix à payer : d'abord la méthode exige que l'on dispose de la dérivée de la fonction, ensuite il existe une série de situations pour lesquelles la méthode ne converge pas vers le zéro de la fonction (par exemple si à une itération on tombe sur un point pour lequel la dérivée de f s'annule). En conclusion, la méthode est très rapide mais doit être mise en œuvre avec précaution.

Exemple (Calcul approché de $\sqrt{2}$)
On veut calculer le zéro de la fonction

$$f(x) = x^2 - 2$$

dans l'intervalle $[0;2]$ avec une précision de 10^{-5}. On construit la suite récurrente

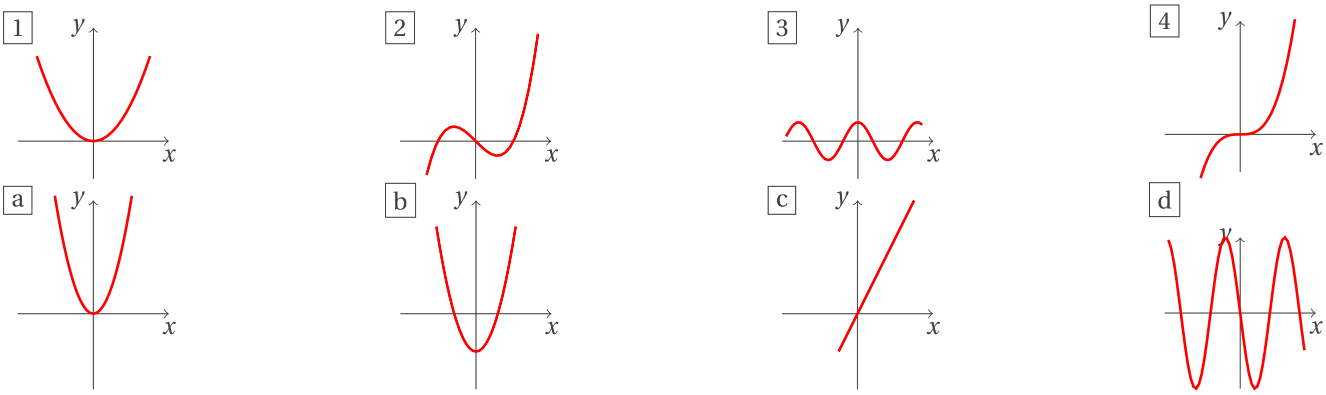
$$\begin{cases} x_0 \text{ donné}, \\ x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^2-2}{2x_k} = \frac{1}{2}\left(x_k + \frac{2}{x_k}\right). \end{cases}$$

k	x_k	$\lvert f(x_k)\rvert$	$\lvert x_k - \sqrt{2}\rvert$
0	1.000000	|-1.000000|>0.00001	|0.414214|>0.00001
1	1.500000	| 0.250000|>0.00001	|0.085786|>0.00001
2	1.416667	| 0.006945|>0.00001	|0.002453|>0.00001
3	1.414216	| 0.000007|<0.00001	|0.000002|<0.00001

Exercices

Exercice 8.1

Pour les fonctions représentées en figure, trouver les appariements entre les fonction 1, 2, 3, 4 et les dérivées a, b, c, d.

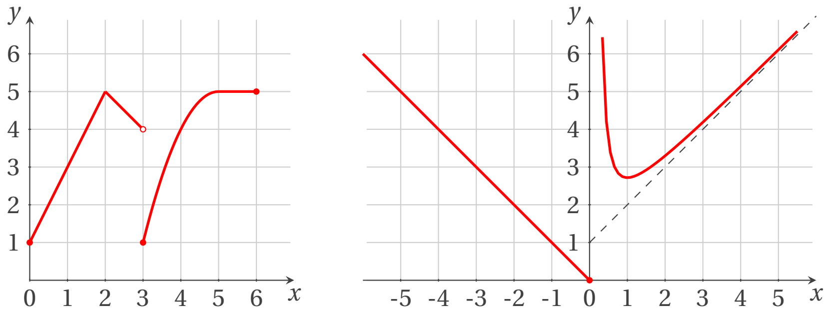


Correction

(1)-(c), (2)-(b), (3)-(d), (4)-(a).

Exercice 8.2

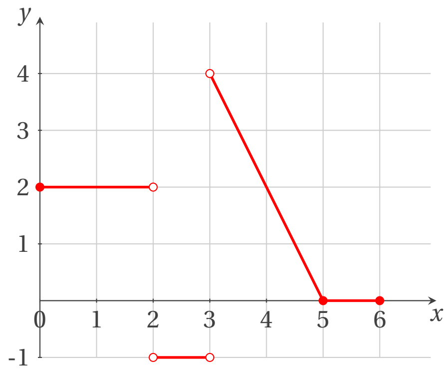
Pour chacune des fonctions représentées, tracer une esquisse du graphe de leur dérivée.

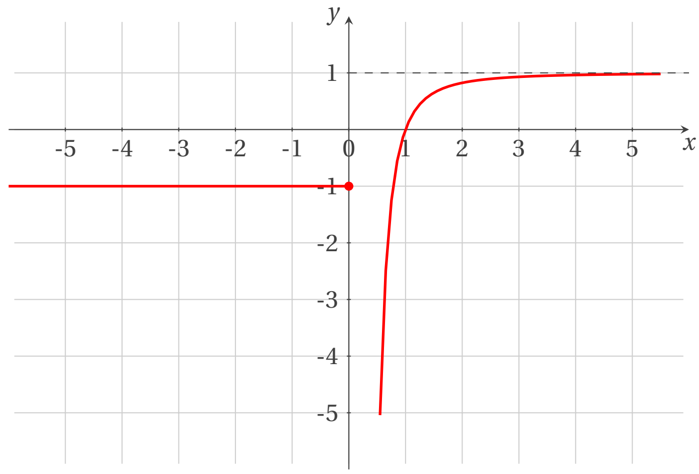


Correction

Pour la fonction de gauche on remarque que

- ⋆ $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si } 0 \le x \le 2, \\ -x+7 & \text{si } 2 \le x < 3, \\ 5-(x-5)^2 & \text{si } 3 \le x \le 5, \\ 5 & \text{si } x \ge 5 \end{cases}$
- ⋆ $f'(2)$ n'existe pas car $\lim_{x\to 2^-} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = 2$ tandis que $\lim_{x\to 2^+} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = -1$
- ⋆ $f'(3)$ n'existe pas car f n'est pas continue en $x=3$
- ⋆ $f'(5) = 0$





Exercice 8.3
Calculer les dérivées des fonctions :

a) $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^3}}$ b) $f(t) = 4t^3 + 2t - 1$ c) $H(z) = \sin(z)\cos(z)$ d) $f(x) = \dfrac{x^2+3}{x^3+3x-7}$

e) $g(t) = t^3\sin(t)$ f) $T(r) = r^2\tan(r)$ g) $G(v) = 5v^2$ h) $R(\omega) = \dfrac{\cos(\omega)}{1-\sin(\omega)}$

i) $\sin(x)\cos(x)$ j) $\cos(-2x+1)$ k) $\frac{x}{\sin(2x)}$ l) $\ln(x^2+1)$

m) e^{x^2-3} n) $\frac{4x}{\cos(x)}$ o) $2xe^{\cos(x)}$ p) $\sqrt{\cos(x)+2}$

q) $\sin(2x+1)$ r) $x\cos(5x)$ s) $\left(1-\frac{x}{7}\right)^7$ t) $\sin(x^2)$

u) $(3x+2)^9$ v) $\sin\left(\frac{x-2}{x+3}\right)$ w) $\frac{1}{(2x+1)^4}$ x) $\sin(2x)\cos(7x)$

Correction

a) $g'(x) = (x^{-3/2})' = -\frac{3}{2}x^{-5/2} = -\frac{3}{2\sqrt{x^5}}$

b) $f'(t) = 12t^2 + 2$

c) $H'(z) = \cos^2(z) - \sin^2(z) = 2\cos^2(z) - 1$

d) $f'(x) = \frac{2x(x^3+3x-7)-(x^2+3)(3x^2+3)}{(x^3+3x-7)^2} = -\frac{x^4+6x^2+14x+9}{(x^3+3x-7)^2}$

e) $g'(t) = t^3(3\sin(t) + t\cos(t))$

f) $T'(r) = 2r\tan(r) + r^2(1+\tan^2(r))$

g) $G'(v) = 10v$

h) $R'(\omega) = \dfrac{1}{1-\sin(\omega)}$

i) $\cos^2(x) - \sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1$

j) $-2\sin(-2x+1)$

k) $\frac{\sin(2x)-2x\cos(2x)}{\sin^2(2x)}$

l) $\frac{2x}{(x^2+1)^2}$

m) $2xe^{x^2-3}$

n) $\frac{4\cos(x)+4x\sin(x)}{\cos^2(x)}$

o) $2(1-x\sin(x))e^{\cos(x)}$

p) $\frac{-\sin(x)}{2\sqrt{\cos(x)+2}}$

q) $2\cos(2x+1)$

r) $\cos(5x) - 5x\sin(5x)$

s) $-(1-x/7)^6$

t) $2x\cos(x^2)$

u) $27(3x+2)^8$

v) $\frac{5}{(x+3)^2}\cos\left(\frac{x-2}{x+3}\right)$

w) $-8/(2x+1)^5$

x) $2\cos(2x)\cos(7x) - 7\sin(2x)\sin(7x)$

Exercice 8.4
Calculer la dérivée 100-ème de la fonction $f(x) = (x^2-x)^{-1}$.

Correction
On a

- ⋆ $f(x) = \frac{1}{x(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1}$ ssi $A = -1$ et $B = 1$
- ⋆ $\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\frac{1}{x} = (-1)^n n! \frac{1}{x^{n+1}}$
- ⋆ $\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\frac{1}{x-1} = (-1)^n n! \frac{1}{(x-1)^{n+1}}$

donc $(x^2-x)^{-1} = (x-1)^{-1} - x^{-1}$ donc $f^{(100)}(x) = 100!\big((x-1)^{-101} - x^{-101}\big)$ et plus généralement

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}f(x) = (-1)^n n! \frac{1}{(x-1)^{n+1}} - (-1)^n n! \frac{1}{x^{n+1}} = (-1)^n n!\big((x-1)^{-n-1} - x^{-n-1}\big)$$

Exercice 8.5 (Tangentes)
1. Trouver l'équation de la tangente au graphe de la fonction définie par $f(x) = x^2 + 1$ en 1.
2. Trouver l'équation de la tangente au graphe de la fonction définie par $f(x) = \frac{4x}{x^2+1}$ en 0.
3. Trouver l'équation de la tangente au graphe de la fonction définie par $f(x) = \frac{4x}{x^2+1}$ en 1.

4. Le graphe de la fonction définie par $f(x) = ax^2 + bx + 3$ passe par le point $(2,0)$. La tangente au graphe de f en ce point est parallèle à la droite d'équation $y = 3x + 2$. Trouver a et b.
5. Le graphe de f passe par le point $(2,3)$ et la pente de la tangente au graphe de f en $x = a$ est égale à $2a$. Passe-t-il par le point $(3,9)$?
6. La pente de la tangente au graphe de f en $x = 1$ est égale à 3. La pente de la tangente au graphe de g en $x = 1$ est égale à 7. Calculer la pente de la tangente au graphe de $f + g$ en $x = 1$. Que peut-on dire de la pente de la tangente au graphe de fg en $x = 1$? Que peut-on dire de la pente de la tangente au graphe de fg en $x = 1$ si $f(1) = 3$ et $g(1) = 2$?

Correction

1. Pente : $f'(1) = 2$. Équation : $y = 2(x-1) + f(1) = 2x$.
2. Pente : $f'(0) = 4$. Équation : $y = 4x + f(0) = 4x$.
3. Pente : $f'(1) = 0$. Équation : $y = f(1) = 2$.
4. $f'(2) = 3$ et $f(2) = 0$ donc $a = 9/4$ et $b = -6$.
5. $f'(a) = 2a$ pour tout $a \in \mathbb{R}$ donc $f(x) = x^2 + \kappa$, $\kappa \in \mathbb{R}$. Comme $f(2) = 3$, $\kappa = -1$ et $f(x) = x^2 - 1$. Puisque $f(3) = 8$, le graphe de f ne passe pas par le point $(3,9)$.
6. $f'(1) = 3$ et $g'(1) = 7$, alors $(f+g)'(1) = 10$ (pente de la tangente au graphe de $f+g$ en $x = 1$). Comme $(fg)'(1) = f'(1)g(1) + f(1)g'(1)$ on ne peut rien dire sans connaitre $f(1)$ et $g(1)$. Si $f(1) = 3$ et $g(1) = 2$ alors $(fg)'(1) = 23$ (pente de la tangente au graphe de fg en $x = 1$).

Exercice 8.6

On considère une fonction exponentielle $f : x \mapsto c^x$. Soit P le point d'intersection du graphe de f avec la tangente à ce graphe passant par l'origine du plan cartésien. Montrer que l'ordonnée de P ne dépend pas du choix de la base de l'exponentielle, *i.e.* qu'importe la valeur choisie pour c.

Correction

Notons (x_P, y_P) les coordonnées de P.

- ⋆ P appartient au graphe de la courbe, donc $y_P = c^{x_P}$.
- ⋆ P appartient à la tangente au graphe de f passant par l'origine. Cette droite a pour équation $y = f'(x_P)x$ et l'on a $f'(x) = \ln(c)c^x$ donc on a aussi $y_P = \ln(c)c^{x_P}x_P$.

x_P est alors solution de l'équation $c^{x_P} = \ln(c)c^{x_P}x_P$, ce qui équivaut à $x_P = \frac{1}{\ln(c)} = \log_c(e)$. Alors $y_P = c^{x_P} = e$ quelque soit la base c choisie.

Exercice 8.7

Le volume V et la pression P d'un gaz maintenu à une température constante sont liés par la loi de Van der Waals qui s'écrit $P(V) = nRT/(V - nb) - an^2/V^2$ où a et b sont des constantes propres au gaz, n désigne le nombre de moles, T est la température et R est une constante. Calculer P'.

Correction

$P'(V) = -\frac{nRT}{(V-nb)^2} + \frac{2an^2}{V^3}$.

Exercice 8.8

Trouver la vitesse au temps $t = 2$ d'une masse attachée à un ressort et dont la position au temps t est donnée par $x(t) = A\cos(2\pi\omega t)$. Que se passe-t-il avec la vitesse si on double l'amplitude A ?

Correction

$x'(t) = -2\pi\omega A\sin(2\pi\omega t)$. Lorsque l'amplitude double, la vitesse double.

Exercice 8.9

Un ballon s'élève verticalement à la vitesse de $10\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. S'il se trouve initialement au sol à une distance de $200\,\mathrm{m}$ d'un observateur, quel est le taux de variation $\vartheta'(t)$ de son angle d'élévation par rapport à l'observateur lorsque l'angle d'élévation est égal à $\pi/4$?

Correction
$h(t) = 10t$ et $\frac{h(t)}{200} = \tan(\vartheta(t))$ donc $\vartheta(t) = \arctan\frac{t}{20}$ et $\vartheta'(t) = \frac{20}{400+t^2}$. Si $\bar{t}$ est l'instant tel que $\vartheta(\bar{t}) = \pi/4$, alors $\bar{t} = 20\tan(\pi/4) = 20$ et $\vartheta'(\bar{t}) = \frac{20}{400+400} = \frac{1}{40}$ radians par second.

Exercice 8.10
Un ballon s'élève verticalement à la vitesse de $10\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. S'il se trouve initialement au sol à une distance de $100\,\mathrm{m}$ d'un observateur, quel est le taux de variation $\vartheta'(t)$ de son angle d'élévation par rapport à l'observateur après $10\,\mathrm{s}$?

Correction
$h(t) = 10t$ et $\frac{h(t)}{100} = \tan(\vartheta(t))$ donc $\vartheta(t) = \arctan\frac{t}{10}$ et $\vartheta'(t) = \frac{10}{100+t^2}$ et $\vartheta'(10) = \frac{1}{20}$ radians par second.

Exercice 8.11
Une masse tombe avec une accélération constante a. Comment évolue sa vitesse ?

Correction
$v(t) = at + v(0)$.

Exercice 8.12
Quelle accélération constante (en $\mathrm{m\cdot s^{-2}}$) un véhicule doit-il avoir pour passer d'une vitesse de $0\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$ à une vitesse de $100\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$ en $10\,\mathrm{s}$?

Correction
$100\,\mathrm{km\cdot h^{-1}} = 100\,000/3600\,\mathrm{m\cdot s^{-1}} = 1000/36\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ donc $a = (1000/36 - 0)/10\mathrm{m\cdot s^{-2}} = 100/36\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

Exercice 8.13
Une ligne de téléphone relie deux pylônes distants de $14\,\mathrm{m}$. Les sommets des pylônes se trouvent aux points $(-7,0)$ et $(7,0)$. La ligne décrit une courbe d'équation $y = 8(\cosh(x/7) - \cosh(1)$. Trouver l'angle entre le pylône et la tangente à la ligne au point d'attache.

Correction
$y' = \frac{8}{7}\sinh(x/7)$. L'angle entre le pylône et la tangente à la ligne au point d'attache est égal à $\frac{8}{7}\sinh(-1) \approx -1.3431$ radians.

Exercice 8.14 (Théorème de l'Hôpital - F.I. $\left[\frac{0}{0}\right]$)
Calculer les limites suivantes :

(1)	$\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2-4x+4}{x^2-4}$	(2)	$\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^2-1}{x^2+x}$	(3)	$\lim\limits_{x\to0}\frac{2x^2+x}{x^2-x}$	(4)	$\lim\limits_{x\to3}\frac{x^2-5x+6}{x^2-6x+9}$
(5)	$\lim\limits_{x\to-3}\frac{x^2+10x+21}{x^2-9}$	(6)	$\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2+3x-4}{x^2-x}$	(7)	$\lim\limits_{x\to1}\frac{x^3+x^2-5x+3}{x-1}$	(8)	$\lim\limits_{x\to1}\frac{x^3+x^2-5x+3}{x^2-1}$
(9)	$\lim\limits_{x\to1}\frac{x^3+x^2-5x+3}{x^3-1}$	(10)	$\lim\limits_{x\to2}\frac{x-2}{x^3-3x^2+4}$	(11)	$\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2-4}{x^3-3x^2+4}$	(12)	$\lim\limits_{x\to2}\frac{x^3-8}{x^3-3x^2+4}$
(13)	$\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2-4}{(x-2)^2}$	(14)	$\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2-4}{x^2-4x}$	(15)	$\lim\limits_{x\to2}\frac{(x-2)^2}{x^2-2x}$	(16)	$\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}$
(17)	$\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1}{2x}$	(18)	$\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1}{x^2}$	(19)	$\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1}{3x^2}$	(20)	$\lim\limits_{x\to0}\frac{3e^x-3}{4x}$
(21)	$\lim\limits_{x\to0}\frac{2-2e^x}{x}$	(22)	$\lim\limits_{x\to1}\frac{\ln(x)}{x-1}$	(23)	$\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-1}{\ln(x)}$	(24)	$\lim\limits_{x\to1}\frac{e^x-e}{\ln(x)}$
(25)	$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin^2(x)}{x}$	(26)	$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin(x)}{x^2}$	(27)	$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin(x)}{x^3}$	(28)	$\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos(x)}{x}$
(29)	$\lim\limits_{x\to\pi}\frac{1+\cos(x)}{x-\pi}$	(30)	$\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos(x)}{x+\sin(x)}$	(31)	$\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos(x)}{x^2}$	(32)	$\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos-(x)}{x^3}$
(33)	$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin^2(x)}{x^3}$	(34)	$\lim\limits_{x\to0}\frac{x\cos(x)-\sin(x)}{x^3}$	(35)	$\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\sin(x)}{x^2}$	(36)	$\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\sin(x)}{x^3}$
(37)	$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin(kx)}{x}$	(38)	$\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan(kx)}{x}$	(39)	$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin(ax)}{\sin(bx)}$	(40)	$\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan(ax)}{\tan(bx)}$
(41)	$\lim\limits_{h\to0}\frac{\sin(a+h)-\sin(a)}{h}$	(42)	$\lim\limits_{h\to0}\frac{\cos(a+h)-\cos(a)}{h}$	(43)	$\lim\limits_{x\to a}\frac{\sin(x)-\sin(a)}{x-a}$	(44)	$\lim\limits_{x\to a}\frac{\cos(x)-\cos(a)}{x-a}$

Correction

(1)	0	(2)	2	(3)	-1	(4)	∞	(5)	$-\frac{2}{3}$	(6)	5	(7)	0
(8)	0	(9)	0	(10)	∞	(11)	∞	(12)	∞	(13)	∞	(14)	2
(15)	0	(16)	1	(17)	$\frac{1}{2}$	(18)	∞	(19)	∞	(20)	$\frac{3}{4}$	(21)	-2
(22)	1	(23)	2	(24)	e	(25)	0	(26)	∞	(27)	∞	(28)	0
(29)	0	(30)	0	(31)	$\frac{1}{2}$	(32)	∞	(33)	∞	(34)	$-\frac{1}{3}$	(35)	0
(36)	$\frac{1}{6}$	(37)	k	(38)	k	(39)	$\frac{a}{b}$	(40)	$\frac{a}{b}$	(41)	$\cos(a)$	(42)	$-\sin(a)$
(43)	$\cos(a)$	(44)	$-\sin(a)$										

Exercice 8.15 (Théorème de l'Hôpital - F.I. $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$)

Calculer les limites suivantes :

(1) $\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{x^2+3}$ (2) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3}{x+1}$ (3) $\lim_{x\to\infty}\frac{4x+3}{2x+1}$ (4) $\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3-x^2}{5x-3}$

(5) $\lim_{x\to\infty}\frac{4x}{3x^3+x^2}$ (6) $\lim_{x\to\infty}\frac{6x}{2x+3}$ (7) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^4+2x^2+1}$ (8) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^4+2x^2+1}{x^2}$

(9) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^4+2x^2+1}{x^4}$ (10) $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}$ (11) $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2}$ (12) $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^3}$

(13) $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+2x}{e^x}$ (14) $\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{-x}}{x^4}$ (15) $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x+x}{x^2}$ (16) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}$

(17) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x^2}$ (18) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$ (19) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{e^x}$ (20) $\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}}$

(21) $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{\ln(x^2)}$

Correction

(1)	0	(2)	∞	(3)	2	(4)	∞	(5)	0	(6)	3	(7)	0
(8)	∞	(9)	1	(10)	$+\infty$	(11)	$+\infty$	(12)	$+\infty$	(13)	0	(14)	$+\infty$
(15)	$+\infty$	(16)	0	(17)	0	(18)	0	(19)	0	(20)	0	(21)	$+\infty$

Exercice 8.16 (Théorème de l'Hôpital)

Calculer les limites suivantes. Pourquoi ne peut-on pas utiliser le théorème de l'Hôpital pour les calculer ?

(1) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin(x)}{x}$, (2) $\lim_{x\to0}\frac{\cos(x)}{x}$, (3) $\lim_{x\to0}\frac{e^x}{x}$, (4) $\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{x}$,

(5) $\lim_{x\to0}\frac{x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\sin(x)}$, (6) $\lim_{x\to0}\frac{x}{\ln(x)}$, (7) $\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sin(x)}{x}$, (8) $\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\cos(x)}{2x-\cos(x)}$.

Correction

1. $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin(x)}{x}=0$ mais on ne peut pas utiliser le théorème de l'Hôpital car $\lim_{x\to+\infty}\sin(x)$ n'existe pas.
2. $\lim_{x\to0}\frac{\cos(x)}{x}=\infty$ mais on ne peut pas utiliser le théorème de l'Hôpital car ce n'est pas une forme indéterminée : $\lim_{x\to0}\cos(x)=1$.
3. $\lim_{x\to0}\frac{e^x}{x}=\infty$ mais on ne peut pas utiliser le théorème de l'Hôpital car ce n'est pas une forme indéterminée : $\lim_{x\to0}e^x=1$.
4. $\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{x}=0$ mais on ne peut pas utiliser le théorème de l'Hôpital car ce n'est pas une forme indéterminée : $\lim_{x\to-\infty}e^x=0$.

5. $\lim_{x\to0}\dfrac{x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\sin(x)}=\lim_{x\to0}\dfrac{x\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{\sin(x)}{x}}=0$ mais on ne peut pas utiliser le théorème de l'HÔPITAL car $\lim_{x\to0}\left(x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)'=\lim_{x\to0}\sin\left(\frac{1}{x}\right)-\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ qui n'existe pas.
6. $\lim_{x\to0}\dfrac{x}{\ln(x)}=0$ mais on ne peut pas utiliser le théorème de l'HÔPITAL car $\lim_{x\to0}x\neq\lim_{x\to0}\ln(x)$
7. $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{x+\sin(x)}{x}=1+\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\sin(x)}{x}=1$ mais on ne peut pas utiliser le théorème de l'HÔPITAL car $\lim_{x\to0}\dfrac{(x+\sin(x))'}{(x)'}=\lim_{x\to0}1+\cos(x)$ qui n'existe pas.
8. $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{x+\cos(x)}{2x-\cos(x)}=\lim_{x\to+\infty}\dfrac{1+\frac{\cos(x)}{x}}{2-\frac{\cos(x)}{x}}=\frac{1}{2}$ mais on ne peut pas utiliser le théorème de l'HÔPITAL car $\lim_{x\to0}\sin(x)$ n'existe pas.

Exercice 8.17 (Théorème de l'HÔPITAL - F.I. $[0\cdot\infty]$)

Calculer les limites suivantes :

(1) $\lim_{x\to0^+}x\ln(x)$ (2) $\lim_{x\to0^+}x^2\ln(x)$ (3) $\lim_{x\to-\infty}xe^x$ (4) $\lim_{x\to+\infty}xe^{-x}$

(5) $\lim_{x\to0^+}xe^{1/x}$ (6) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\tan(x)$ (7) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2\tan(x)$

Correction

(1) 0 (2) 0 (3) 0 (4) 0 (5) $+\infty$ (6) -1 (7) 0

Exercice 8.18 (Théorème de l'HÔPITAL - F.I. $[\infty-\infty]$)

Calculer les limites suivantes :

(1) $\lim_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sin(x)}\right)$ (2) $\lim_{x\to1}\left(\dfrac{1}{\ln(x)}-\dfrac{1}{x-1}\right)$ (3) $\lim_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$

(4) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{1}{\cos(x)}-\tan(x)\right)$ (5) $\lim_{x\to1^+}\left(\dfrac{1}{\ln(x)}-\dfrac{x}{2\ln(x)}\right)$ (6) $\lim_{x\to1}\left(\dfrac{1}{\ln(x)}-\dfrac{1}{(x-1)^2}\right)$

Correction

(1) 0 (2) $\frac{1}{2}$ (3) $\frac{1}{2}$ (4) 0 (5) ∞ (6) ∞

Exercice 8.19

Calculer les limites suivantes.

(1) $\lim_{x\to1}\frac{\sin(\pi x)}{\ln(x)}$, (2) $\lim_{x\to1}\frac{2\ln(x)}{x-1}$, (3) $\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}$, (4) $\lim_{x\to2}\frac{\sin(\pi x)}{x-2}$,

(5) $\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{\sin(x)}-\frac{1}{\tan(x)}\right)$, (6) $\lim_{x\to0}\frac{x}{1-\sqrt{1-x}}$, (7) $\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{\sin(x)}-\frac{1}{x}\right)$, (8) $\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{\cos(ax)}{x^2}\right)$,

(9) $\lim_{x\to0}\frac{\sin(x)-x+\frac{x^3}{6}}{x^5}$.

Correction

1. Soient $f(x)=\sin(\pi x)$ et $g(x)=\ln(x)$; alors $f'(x)=\pi\cos(\pi x)$, $g'(x)=\frac{1}{x}$ et

$$\lim_{x\to1}\frac{\sin(\pi x)}{\ln(x)}=\left[\frac{0}{0}\right],\qquad \lim_{x\to1}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to1}(\pi x)\cos(\pi x)=-\pi$$

donc

$$\lim_{x\to1}\frac{\sin(\pi x)}{\ln(x)}=-\pi.$$

2. Soient $f(x)=2\ln(x)$ et $g(x)=x-1$; alors $f'(x)=\frac{2}{x}$, $g'(x)=1$ et
$$\lim_{x\to1}\frac{2\ln(x)}{x-1}=\left[\frac{0}{0}\right],\qquad \lim_{x\to1}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to1}\frac{2}{x}=2$$
donc
$$\lim_{x\to1}\frac{2\ln(x)}{x-1}=2.$$

3. Soient $f(x)=e^x-1$ et $g(x)=x$; alors $f'(x)=e^x$, $g'(x)=1$ et
$$\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=\left[\frac{0}{0}\right],\qquad \lim_{x\to0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to0}e^x=1$$
donc
$$\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1.$$

4. Soient $f(x)=\sin(\pi x)$ et $g(x)=x-2$; alors $f'(x)=\pi\cos(\pi x)$, $g'(x)=1$ et
$$\lim_{x\to2}\frac{\sin(\pi x)}{x-2}=\left[\frac{0}{0}\right],\qquad \lim_{x\to2}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to2}\pi\cos(\pi x)=\pi$$
donc
$$\lim_{x\to2}\frac{\sin(\pi x)}{x-2}=\pi.$$

5. $\frac{1}{\sin(x)}-\frac{1}{\tan(x)}=\frac{1-\cos(x)}{\sin(x)}$. Soient $f(x)=1-\cos(x)$ et $g(x)=\sin(x)$; alors $f'(x)=\sin(x)$, $g'(x)=\cos(x)$ et
$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos(x)}{\sin(x)}=\left[\frac{0}{0}\right],\qquad \lim_{x\to0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to0}\frac{\sin(x)}{\cos(x)}=0$$
donc
$$\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{\sin(x)}-\frac{1}{\tan(x)}\right)=0.$$

6. Soient $f(x)=x$ et $g(x)=1-\sqrt{1-x}$; alors $f'(x)=1$, $g'(x)=-\frac{1}{2\sqrt{1-x}}$ et
$$\lim_{x\to0}\frac{x}{1-\sqrt{1-x}}=\left[\frac{0}{0}\right],\qquad \lim_{x\to0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to0}-2\sqrt{1-x}=-2$$
donc
$$\lim_{x\to0}\frac{x}{1-\sqrt{1-x}}=-2.$$

7. $\left(\frac{1}{\sin(x)}-\frac{1}{x}\right)=\frac{x-\sin(x)}{x\sin(x)}$. Soient $f(x)=x-\sin(x)$ et $g(x)=x\sin(x)$; alors $f'(x)=1-\cos(x)$, $g'(x)=\sin(x)+x\cos(x)$, $f''(x)=\sin(x)$, $g''(x)=2\cos(x)-x\sin(x)$ et
$$\lim_{x\to0}\frac{x-\sin(x)}{x\sin(x)}=\left[\frac{0}{0}\right],\qquad \lim_{x\to0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos(x)}{\sin(x)+x\cos(x)}=\left[\frac{0}{0}\right],\qquad \lim_{x\to0}\frac{f''(x)}{g''(x)}=\lim_{x\to0}\frac{\sin(x)}{2\cos(x)-x\sin(x)}=0$$
donc
$$\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{\sin(x)}-\frac{1}{x}\right)=0.$$

8. Soient $f(x)=1-\cos(ax)$ et $g(x)=x^2$; alors $f'(x)=a\sin(ax)$, $g'(x)=2x$, $f''(x)=a^2\cos(ax)$, $g''(x)=x$ et
$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos(ax)}{x^2}=\left[\frac{0}{0}\right],\qquad \lim_{x\to0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to0}\frac{a\sin(ax)}{2x}=\left[\frac{0}{0}\right],\qquad \lim_{x\to0}\frac{f''(x)}{g''(x)}=\lim_{x\to0}\frac{a^2\cos(ax)}{2}=\frac{a^2}{2}$$
donc
$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos(ax)}{x^2}=\frac{a^2}{2}.$$

9. Soient $f(x)=\sin(x)-x+\frac{x^3}{6}$ et $g(x)=x^5$; alors $f'(x)=\cos(x)-1+\frac{x^2}{2}$, $g'(x)=5x^4$, $f''(x)=-\sin(x)+x$, $g''(x)=20x^3$,

$f'''(x) = -\cos(x) + 1$, $g'''(x) = 60x^2$, $f^{(iv)}(x) = \sin(x)$, $g^{(iv)}(x) = 120x$ et

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{f'''(x)}{g'''(x)} = \left[\frac{0}{0}\right], \qquad \lim_{x\to 0} \frac{f^{(iv)}(x)}{g^{(iv)}(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{120x} = \frac{1}{120}$$

donc

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{120}.$$

Exercice 8.20

Montrer que la fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = (x^2 - 3x + 2)e^x$ admet deux racines réelles $\ell_1 < \ell_2$ de f et les calculer.

Correction

$f(x) = (x-1)(x-2)e^x$ donc f admet deux et seulement deux zéros réels $\ell_1 = 1$ et $\ell_2 = 2$.

Exercice 8.21

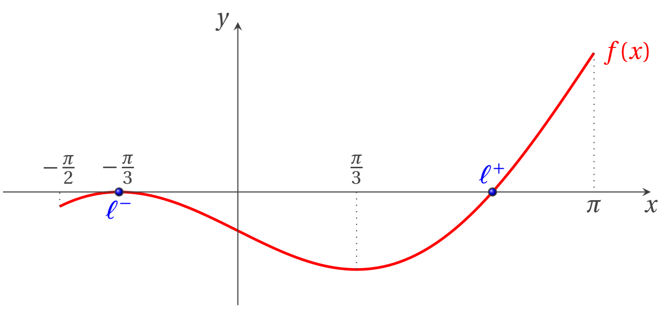
Considérons la fonction $f\colon [-\frac{\pi}{2}; \pi] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{x}{2} - \sin(x) + \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Montrer qu'il existe deux solutions $\ell^- < 0$ et $\ell^+ > 0$ de l'équation $f(x) = 0$ pour $x \in [-\frac{\pi}{2}; \pi]$.

Correction

- ⋆ f est classe $\mathscr{C}^\infty([-\frac{\pi}{2}; \pi])$;
- ⋆ $f(-\frac{\pi}{2}) = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{12} \approx -0.12785 < 0$, $f(0) = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2} \approx -0.34244 < 0$, $f(\pi) = \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 1.2284 > 0$;
- ⋆ $f'(x) = \frac{1}{2} - \cos(x)$;
- ⋆ f est croissante sur $[-\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{3}] \cup [\frac{\pi}{3}; \pi]$, décroissante sur $[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}]$;
- ⋆ $x = -\frac{\pi}{3}$ est un maximum local et $f(-\frac{\pi}{3}) = 0$; $x = \frac{\pi}{3}$ est un minimum local et $f(\frac{\pi}{3}) < 0$;
- ⋆ $f''(x) = \sin(x)$;
- ⋆ f est concave sur $[-\frac{\pi}{2}; 0]$, convexe sur $[0; \pi]$.



Par conséquence $\ell^- = -\frac{\pi}{3}$ est l'unique solution de l'équation $f(x) = 0$ pour $x \in [-\frac{\pi}{2}; 0]$ et il existe un et un seul ℓ^+ solution de l'équation $f(x) = 0$ pour $x \in [0; \pi]$. On peut même améliorer l'encadrement et conclure que $\ell^+ \in [\frac{\pi}{3}; \pi]$.

Exercice 8.22

Soit la fonction $f_\gamma(x) = \cosh(x) + \cos(x) - \gamma$. Pour $\gamma = 1, 2, 3$ trouver (graphiquement) un intervalle qui contient le zéro de f_γ.

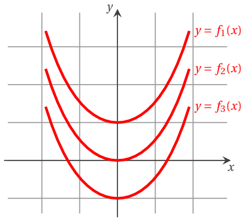
Correction

On se rappelle que $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ et $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ donc

- ⋆ $\lim_{x\to\pm\infty} f_\gamma(x) = +\infty$
- ⋆ $f'_\gamma(x) = \sinh(x) - \sin(x)$ et $f'_\gamma(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$ (comparer les graphes de sinh et sin et se rappeler que pour $x > 0$ on a $\sinh(x) > x > \sin(x)$ et pour $x < 0$ on a $\sinh(x) < x < \sin(x)$)
- ⋆ $f''_\gamma(x) = \cosh(x) - \cos(x) > 0$ pour tout $x \neq 0$.

Par conséquence,

- ⋆ pour $\gamma = 1$, la fonction n'a pas de zéro réel,
- ⋆ pour $\gamma = 2$ il n'y a que le zéro $\hat{x} = 0$ et il est de multiplicité quatre (c'est-à-dire $f_2(\hat{x}) = f_2'a(\hat{x}) = f_2''(\hat{x}) = f_2'''(\hat{x}) = 0$ et $f_2^{(IV)}(\hat{x}) \neq 0$),
- ⋆ pour $\gamma = 3$, f_3 admet deux zéros distincts, un dans l'intervalle $]-3,-1[$ et l'autre dans $]1,3[$.



Exercice 8.23 (Application du théorème des accroissements finis)

Un automobiliste entre sur une autoroute où la vitesse est limitée à 130 km·h^{-1}. Quand il ressort, deux heures plus tard et à 305 km de son point d'entrée, des gendarmes lui dressent un PV pour excès de vitesse, bien que sa vitesse n'ait été jamais matériellement contrôlée. Ont-ils raison ?

Correction

Soit $s(t)$ sa position (mesurée en kilomètres) au temps t (mesuré en heures). On a $s(0) = 0$ et $s(2) = 305$. Si la position est une fonction dérivable du temps, alors le théorème des accroissement finis permet de conclure qu'il existe un instant τ avec $0 < \tau < 2$ pour lequel $s'(\tau) = \frac{s(2)-s(0)}{2-0} = 152.5$. En d'autre termes, la voiture doit, à un instant donné, avoir une vitesse de 152.5 km·h^{-1}.

Exercice 8.24

Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}$ dont le tableau de variations est

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

Alors l'expression de f peut être...

- ☐ 1. $f(x) = |x| + 1$
- ☐ 2. $f(x) = e^x - x$
- ☐ 3. $f(x) = \frac{x^2+1}{|x|+1}$
- ☐ 4. $f(x) = \sqrt{x^2+1}$
- ☐ 5. $f(x) = \ln(x^2+1)$

Correction

■ 1. Vrai : $f(0) = 1$, $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$, f est paire et $f'(x) > 0$ pour $x > 0$

■ 2. Vrai : $f(0) = 1$, $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$, $f'(x) = e^x - 1$ et $e^x = 1$ ssi $x = 0$, $e^x > 1$ si $x > 0$, $e^x < 1$ si $x < 0$

☐ 3. Faux : $f(x) = \frac{x^2+1}{|x|+1} = \begin{cases} \frac{x^2+1}{x+1} & \text{si } x \geq 0 \\ \frac{x^2+1}{-x+1} & \text{si } x < 0 \end{cases}$ donc $f'(x) = \begin{cases} \frac{x^2+2x-1}{(x+1)^2} = \frac{(x-(-1-\sqrt{2}))(x-(-1+\sqrt{2}))}{(x+1)^2} & \text{si } x \geq 0 \\ -\frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2} = -\frac{(x-(1-\sqrt{2}))(x-(1+\sqrt{2}))}{(x-1)^2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$ ainsi

x	$-\infty$		$1-\sqrt{2}$		0		$-1+\sqrt{2}$		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	↘	$(2-\sqrt{2})\sqrt{2}$	↗	1	↘	$(2-\sqrt{2})\sqrt{2}$	↗	$+\infty$

■ 4. Vrai : $f(0) = 1$, $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$, f est paire et $f'(x) > 0$ pour $x > 0$

☐ 5. Faux : $f(0) = \ln(1) = 0 \neq 1$

Exercice 8.25

Soit a et b deux réels et f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-b\}$ telle que $f(x) = \dfrac{ax^2-4}{x+b}$. On note $\mathscr{G}$ la courbe représentative de f.

- ☐ 1. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, f est prolongeable par continuité en $x = -b$.
- ☐ 2. Si $b = -2/\sqrt{a}$ et $a > 0$ alors f est prolongeable par continuité en $x = -b$.

☐ 3. Si $b = 2/\sqrt{a}$ et $a > 0$ alors f est prolongeable par continuité en $x = -b$.

☐ 4. $\mathscr{G}$ admet une asymptote verticale pour tout a et b.

☐ 5. Il existe au moins une valeur de a telle que $\mathscr{G}$ admet une asymptote horizontale.

☐ 6. Il existe au moins une valeur de $a \neq 0$ telle que $\mathscr{G}$ admet une asymptote oblique.

☐ 7. Soit $a = b = 1$, alors $\mathscr{G}$ est au-dessus de son asymptote au voisinage de $+\infty$.

☐ 8. Soit $a = -1$ et $b = 1$, alors $\mathscr{G}$ est au-dessus de son asymptote au voisinage de $+\infty$.

Correction

☐ 1. Faux : si $a = 0$, $f(x) = \frac{-4}{x+b}$ et $\lim_{x\to -b^{\pm}} f(x) = \mp\infty$

■ 2. Vrai : si $a > 0$, on peut écrire $f(x) = a\frac{\left(x-\frac{2}{\sqrt{a}}\right)\left(x+\frac{2}{\sqrt{a}}\right)}{x+b}$, donc si $b = -2/\sqrt{a}$ alors $f(x) = a\left(x + \frac{2}{\sqrt{a}}\right)$ et $\lim_{x\to -b} f(x) = 4\sqrt{a}$

■ 3. Vrai : si $a > 0$, on peut écrire $f(x) = a\frac{\left(x-\frac{2}{\sqrt{a}}\right)\left(x+\frac{2}{\sqrt{a}}\right)}{x+b}$, donc si $b = 2/\sqrt{a}$ alors $f(x) = a\left(x - \frac{2}{\sqrt{a}}\right)$ et $\lim_{x\to -b} f(x) = -4\sqrt{a}$

☐ 4. Faux : si $b = \pm 2/\sqrt{a}$ et $a > 0$, $f(x) = a\left(x \mp \frac{2}{\sqrt{a}}\right)$ donc $\mathscr{G}$ n'admet d'asymptote verticale

■ 5. Vrai : si $a = 0$ alors $f(x) = \frac{-4}{x+b}$ et $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$ donc $y = 0$ est asymptote horizontale de $\mathscr{G}$.

■ 6. Vrai : pour tout $a \neq 0$, la droite d'équation $y = ax - ab$ est asymptote oblique de $\mathscr{G}$ car $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)/x = a$ et $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) - ax = -ab$.

☐ 7. Faux : si $a = b = 1$, alors $f(x) = \frac{x^2-4}{x+1} = x - 1 - \frac{3}{x+1}$ et son asymptote oblique est $y = x - 1$ donc $f(x) < x - 1$ pour $x \to +\infty$: $\mathscr{G}$ est en-dessous de son asymptote au voisinage de $+\infty$.

☐ 8. Faux : si $a = -1$ et $b = 1$, alors $f(x) = \frac{-x^2-4}{x+1} = -x + 1 - \frac{5}{x+1}$ et son asymptote oblique est $y = -x + 1$ donc $f(x) < -x + 1$ pour $x \to +\infty$: $\mathscr{G}$ est en-dessous de son asymptote au voisinage de $+\infty$.

Exercice 8.26

Soit $f_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application définie par

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} x^\alpha \cos\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Pour $\alpha = 0, 1, 2, 3$, répondre aux questions suivantes :

- ⋆ f_α est-elle continue en $x = 0$?
- ⋆ f_α est-elle dérivable en $x = 0$?
- ⋆ f_α est-elle de classe $\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$?

Correction

Cas $\alpha = 0$ **:** $f_0(x) = \begin{cases} \cos\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$

- ⋆ f_0 n'est pas continue en 0 car $\lim_{x\to 0} f_0(x) = \lim_{x\to 0} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ n'existe pas.
- ⋆ f_0 n'est pas dérivable en 0 car elle n'est pas continue en 0.
- ⋆ f_0 n'est pas de classe $\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$ car elle n'est pas continue en 0.

Cas $\alpha = 1$ **:** $f_1(x) = \begin{cases} x\cos\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$

- ⋆ f_1 est continue en 0 car $\lim_{x\to 0} f_1(x) = 0 = f_1(0)$ (il suffit d'observer que $-x \le x\cos\left(\frac{1}{x}\right) \le x$).
- ⋆ f_1 n'est pas dérivable en 0 car $\lim_{x\to 0} \frac{f_1(x)-f_1(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ n'existe pas.
- ⋆ f_1 n'est pas de classe $\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$ car elle n'est pas dérivable en 0.

Cas $\alpha = 2$ **:** $f_2(x) = \begin{cases} x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$

- ⋆ f_2 est continue en 0 car $\lim_{x\to 0} f_2(x) = 0 = f_2(0)$ (il suffit d'observer que $-x^2 \le x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right) \le x^2$).
- ⋆ f_2 est dérivable en 0 car $\lim_{x\to 0} \frac{f_2(x)-f_2(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} x\cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ (il suffit d'observer que $-x \le x\cos\left(\frac{1}{x}\right) \le x$).

★ f_2 n'est pas de classe $\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$ car

$$f_2'(x) = \begin{cases} 2x\cos\left(\frac{1}{x}\right) + \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

et $\lim_{x\to 0} f_2'(x)$ n'existe pas (car $\lim_{x\to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ n'existe pas).

Cas $\alpha = 3$ **:** $f_3(x) = \begin{cases} x^3\cos\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$

★ f_3 est continue en 0 car $\lim_{x\to 0} f_3(x) = 0 = f_3(0)$ (il suffit d'observer que $-x^3 \le x^3\cos\left(\frac{1}{x}\right) \le x^3$). De plus, elle est continue dans tout $\mathbb{R}$.

★ f_3 est dérivable en 0 car $\lim_{x\to 0} \frac{f_3(x)-f_3(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ (il suffit d'observer que $-x^2 \le x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right) \le x^2$).

★ f_3 est de classe $\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$ car

$$f_3'(x) = \begin{cases} 3x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right) + x\sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

et $\lim_{x\to 0} f_3'(x) = 0 = f_3'(0)$.

Donc on a

α	f est-elle continue en $x=0$?	f est-elle dérivable en $x=0$?	f est-elle de classe $\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$?
0	Non	Non	Non
1	Oui	Non	Non
2	Oui	Oui	Non
3	Oui	Oui	Oui

Exercice 8.27

Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^3\cos\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } x > 0, \\ 0, & \text{si } x = 0, \\ x^3\sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

1. Établir si f est continue en $x = 0$.
2. Calculer $f'(x)$ pour $x \neq 0$. En déduire l'équation de la droite tangente à f en $x = \frac{1}{\pi}$.
3. Établir si f est dérivable en $x = 0$.
4. Établir si f est f est de classe $\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$.

Correction

1. La fonction est clairement continue pour $x \neq 0$. Pour $x = 0$ on a

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x^3\cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0,$$
$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} x^3\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0,$$

donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$: f est continue en 0.

2. Pour $x \neq 0$ la fonction est clairement dérivable et on a

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right) + x\sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } x > 0, \\ 3x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) - x\cos\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

La droite tangente à f en $x = x_0$ a équation $y = f'(x_0)x + (f(x_0) - f'(x_0)x_0)$ donc pour $x_0 = \frac{1}{\pi}$ on a $y = -\frac{3}{\pi^2}x + \frac{2}{\pi^3}$.

3. La fonction est dérivable en $x = 0$ ssi la limite $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ existe et est finie.
On a

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^3\cos\left(\frac{1}{x}\right) - 0}{x-0} = 0,$$
$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^3\sin\left(\frac{1}{x}\right) - 0}{x-0} = 0,$$

donc $\lim\limits_{x\to0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0$: f est dérivable en 0 et on a

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right) + x\sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } x>0,\\ 0, & \text{si } x=0,\\ 3x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) - x\cos\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } x<0.\end{cases}$$

4. f' est clairement continue pour $x \neq 0$. Pour $x=0$ on a

$$\lim_{x\to0^+} f'(x) = \lim_{x\to0^+}\left(3x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right) + x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) = 0,$$
$$\lim_{x\to0^-} f'(x) = \lim_{x\to0^-}\left(3x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) - x\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right) = 0,$$

donc f' est continue en 0. Par conséquent f est de classe $\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$.

Exercice 8.28

Soit $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une application définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^2\ln(x), & \text{si } x>0,\\ 0, & \text{si } x=0,\\ x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } x<0.\end{cases}$$

1. f est-elle continue en $x=0$?
2. Calculer $f'(x)$ pour $x\neq0$. En déduire l'équation de la droite tangente à f en $x=1$.
3. f est-elle dérivable en $x=0$?
4. f est-elle de classe $\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$?

Correction

1. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} x^2\ln(x) = 0$, $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$, donc $\lim\limits_{x\to0} f(x) = f(0)$: f est continue en 0.
2. $f'(x) = \begin{cases} x(2\ln(x)+1), & \text{si } x>0,\\ 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } x<0.\end{cases}$
   La droite tangente à f en $x=x_0$ a équation $y = f'(x_0)x + (f(x_0) - f'(x_0)x_0)$ donc pour $x_0=1$ on a $y=x-1$.
3. La fonction est dérivable en $x=0$ ssi la limite $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ existe et est finie .
   On a $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \frac{x^2\ln(x)-0}{x-0} = 0$, $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} \frac{x^2\sin(1/x)-0}{x-0} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0 = f'(0)$: f est dérivable en 0.
4. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f'(x) = \lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} x(2\ln(x)+1) = 0$, $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} f'(x) = \lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ n'existe pas, donc f' n'est pas continue en 0. Par conséquent f n'est pas de classe $\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$.

Exercice 8.29

Soit $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une application définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } x>0,\\ 0, & \text{si } x=0,\\ x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } x<0.\end{cases}$$

1. f est-elle continue en $x=0$?
2. Calculer $f'(x)$ pour $x\neq0$. En déduire l'équation de la droite tangente à f en $x=\frac{1}{\pi}$.
3. f est-elle dérivable en $x=0$?
4. f est-elle de classe $\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$?

Correction

1. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0$, $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$, donc $\lim\limits_{x\to0} f(x) = f(0)$: f est continue en 0.

2. $f'(x) = \begin{cases} 2x\cos\left(\frac{1}{x}\right)+\sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } x>0,\\ 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right)-\cos\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } x<0.\end{cases}$

   La droite tangente à f en $x=x_0$ a équation $y=f'(x_0)x+(f(x_0)-f'(x_0)x_0)$ donc pour $x_0=\frac{1}{\pi}$ on a $y=-\frac{2}{\pi}x+\frac{1}{\pi^2}$.
3. La fonction est dérivable en $x=0$ ssi il existe fini la limite $\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$.

   On a $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right)-0}{x-0}=0$, $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}}\frac{x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)-0}{x-0}=0$, donc $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=0=f'(0)$: f est dérivable en 0.
4. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}f'(x)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\left(2x\cos\left(\frac{1}{x}\right)+\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)$ n'existe pas, donc f' n'est pas continue en 0. Par conséquent f n'est pas de classe $\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$.

Exercice 8.30

Soit $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une application définie par

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } x>0,\\ 0, & \text{si } x=0,\\ x^3\sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } x<0.\end{cases}$$

1. f est-elle continue en $x=0$?
2. Calculer $f'(x)$ pour $x\neq0$. En déduire l'équation de la droite tangente à f en $x=\frac{1}{\pi}$.
3. f est-elle dérivable en $x=0$?
4. f est-elle de classe $\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$?

Correction

1. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)=0$, $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}}x^3\sin\left(\frac{1}{x}\right)=0$, donc $\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)$: f est continue en 0.
2. $f'(x) = \begin{cases} 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right)-\cos\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } x>0,\\ 3x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)-x\cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x<0.\end{cases}$

   La droite tangente à f en $x=x_0$ a équation $y=f'(x_0)x+(f(x_0)-f'(x_0)x_0)$ donc pour $x_0=\frac{1}{\pi}$ on a $y=x-\frac{1}{\pi^2}$.
3. La fonction est dérivable en $x=0$ ssi il existe fini la limite $\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$.

   On a $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)-0}{x-0}=0$, $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}}\frac{x^3\sin\left(\frac{1}{x}\right)-0}{x-0}=0$, donc $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=0=f'(0)$: f est dérivable en 0.
4. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}f'(x)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\left(2x\sin\left(\frac{1}{x}\right)-\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)$ n'existe pas, donc f' n'est pas continue en 0. Par conséquent f n'est pas de classe $\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$.

Exercice 8.31

Soit $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une application définie par $f(x)=x^2\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)$ pour $x\neq0$ et $f(0)=0$.

1. f est-elle continue en $x=0$?
2. Calculer $f'(x)$ pour $x\neq0$. En déduire l'équation de la droite tangente à f en $x=1$.
3. f est-elle dérivable en $x=0$? Calculer l'équation de la droite tangente à f en $x=0$ le cas échéant.
4. f est-elle de classe $\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$?

Correction

1. Comme $\lim_{x\to0}f(x)=0=f(0)$ (théorème d'encadrement), la fonction est continue en 0.
2. Pour $x\neq0$, $f'(x)=2x\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)+\frac{2}{x}\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$. L'équation de la droite tangente à f en $x=1$ est donc $y=f'(1)(x-1)+f(1)=2(\cos(1)+\sin(1))(x-1)+\cos(1)$.
3. f est dérivable en $x=0$ et on a $f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{x^2\cos(\frac{1}{x^2})-0}{x}=0$ (théorème d'encadrement). L'équation de la droite tangente à f en $x=0$ est donc $y=f'(0)x+f(0)=0$.
4. f n'est pas de classe $\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$ car $\lim_{x\to0}f'(x)$ n'existe pas.

Exercice 8.32

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application définie par $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

1. f est-elle continue en $x = 0$?
2. Calculer $f'(x)$ pour $x \neq 0$. En déduire l'équation de la droite tangente à f en $x = 1$.
3. f est-elle dérivable en $x = 0$? Calculer l'équation de la droite tangente à f en $x = 0$ le cas échéant.
4. f est-elle de classe $\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$?

Correction

1. Comme $\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$ (théorème d'encadrement), la fonction est continue en 0.
2. Pour $x \neq 0$, $f'(x) = 2x\sin\left(\frac{1}{x^2}\right) - \frac{2}{x}\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)$. L'équation de la droite tangente à f en $x = 1$ est donc $y = f'(1)(x-1)+f(1) = 2(\sin(1)-\cos(1))(x-1)+\sin(1)$.
3. f est dérivable en $x = 0$ car on a $f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2\sin(\frac{1}{x^2})-0}{x} = 0$ (théorème d'encadrement). L'équation de la droite tangente à f en $x = 0$ est donc $y = f'(0)x + f(O) = 0$.
4. f n'est pas de classe $\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$ car $\lim_{x\to 0} f'(x)$ n'existe pas.

Exercice 8.33

Dans chaque question, on définira une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dont le domaine de définition est $\mathbb{R}$ et qui satisfait aux propriétés spécifiées :

a) f est injective et non surjective,

b) f est surjective et non injective,

c) f est bijective et non continue au point 1,

d) f est injective, continue dans $\mathbb{R}$ et bornée,

e) f est continue dans $\mathbb{R}$ et non dérivable au point 1,

f) f est dérivable dans $\mathbb{R}$ et f' est non continue au point 0,

g) f est bornée et $\lim_{x\to 0} f(x)$ n'existe pas.

Correction

a) $f(x) = e^x$,

b) $f(x) = x(x-1)(x+1)$,

c) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & \text{si } x \neq 1, \\ 0 & \text{si } x = 1, \end{cases}$

d) $f(x) = \arctan(x)$,

e) $f(x) = |x-1|$,

f) $f(x) = \begin{cases} x\cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \end{cases}$

g) $f(x) = \begin{cases} \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

Exercice 8.34

Soit $h : [-1;1] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $h(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$. Peut-on appliquer à h le théorème de Rolle ?

Correction

Théorème de Rolle *Soit f une fonction continue sur l'intervalle fermé $[a;b]$, dérivable sur l'intervalle ouvert $]a;b[$, telle que $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in]a;b[$ tel que $f'(c) = 0$.*

h est continue sur l'intervalle fermé $[-1;1]$. On a bien $h(1) = h(-1)$ avec $h'(x) = -\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ si $x \neq 0$ mais $h'(0)$ n'existe pas car $\lim_{x\to 0^\pm} \frac{h(x)-h(0)}{x-0} = \mp\infty$.

Exercice 8.35

Soit $h : [-1;1] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $h(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$. Peut-on appliquer à h le théorème des accroissements finis ?

Correction

Théorème des accroissements finis *Soit f une fonction continue sur l'intervalle fermé $[a;b]$ et dérivable sur l'intervalle ouvert $]a;b[$. Alors il existe $c \in]a;b[$ tel que $f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$.*

h est continue sur $[-1,1]$ et $h'(x) = -\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ si $x \neq 0$ mais $h'(0)$ n'existe pas car $\lim_{x\to} \frac{h(x)-h(0)}{x-0} = \mp\infty$.

Exercice 8.36

Soit $g\colon]0;\frac{\pi}{2}[\to]0,1[$ une application telle que $g(x)=\sin(x)$.

1. Montrer que g est strictement croissante sur $]0;\frac{\pi}{2}[$.
2. En utilisant le théorème de la bijection démontrer que l'équation $g(x)=\frac{1}{2}$ admet une unique solution.
3. Déterminer la fonction inverse g^{-1}. Que sait-on de la continuité de g^{-1} ?
4. Calculer la dérivée de g^{-1} sur $]0;1[$.

Correction

1. $g(x)=\sin(x)$, $g'(x)=\cos(x)$, $g'(x)>0$ pour tout $x\in]0;\frac{\pi}{2}[$ donc g est strictement croissante sur $]0;\frac{\pi}{2}[$.
2. **Théorème de la bijection** *Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I. Alors f induit une bijection de I dans $f(I)$. De plus, sa bijection réciproque est continue sur $f(I)$, est monotone sur $f(I)$ et a le même sens de variation que f.*

   g est définie, continue, dérivable, strictement croissante sur $]0;\frac{\pi}{2}[$, ce qui prouve que g réalise une bijection de $]0;\frac{\pi}{2}[$ dans
   $$g\left(]0;\tfrac{\pi}{2}[\right)=]\lim_{x\to0}g(x);\lim_{x\to\frac{1}{\pi}}g(x)[=]0;1[.$$
   Comme $\frac{1}{2}\in g(]0;\frac{\pi}{2}[)$, on en déduit qu'il existe un unique réel $\alpha\in]0;\frac{\pi}{2}[$ tel que $g(\alpha)=\frac{1}{2}$.
3. $g^{-1}\colon]0;1[\to]0;\frac{\pi}{2}[$ avec $g^{-1}(y)=\arcsin(x)$. Comme g réalise une bijection de $]0;\frac{\pi}{2}[$ dans $]0;1[$, la bijection réciproque g^{-1} est une bijection de $]0;1[$ dans $]0;\frac{\pi}{2}[$. Sachant que g est continue sur $]0;\frac{\pi}{2}[$, on peut en déduire que g^{-1} est continue sur $]0;1[$.
4. La dérivée de g^{-1} sur $]0;1[$ est $\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$.

Exercice 8.37

Soit $g\colon]-\infty,0[\to\mathbb{R}$ une application telle que $g(x)=e^x-1$.

1. Montrer que g est strictement croissante sur $\mathbb{R}_-^*$.
2. En utilisant le théorème de la bijection démontrer que l'équation $g(x)=-\frac{1}{2}$ admet une unique solution.
3. Déterminer la fonction inverse g^{-1}. Que sait-on de la continuité de g^{-1} ?
4. Calculer la dérivée de g^{-1} sur $]-1;0[$.

Correction

1. $g(x)=e^x-1$, $g'(x)=e^x$, $g'(x)>0$ pour tout $x\in\mathbb{R}_-^*$ donc g est strictement croissante sur $\mathbb{R}_-^*$.
2. **Théorème de la bijection** *Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I. Alors f induit une bijection de I dans $f(I)$. De plus, sa bijection réciproque est continue sur $f(I)$, est monotone sur $f(I)$ et a le même sens de variation que f.*

   g est définie, continue, dérivable, strictement croissante sur $\mathbb{R}_-^*$, ce qui prouve que g réalise une bijection de $\mathbb{R}_-^*$ dans
   $$g(\mathbb{R}_-^*)=]\lim_{x\to-\infty}g(x);\lim_{x\to0}g(x)[=]-1;0[.$$
   Comme $-\frac{1}{2}\in g(\mathbb{R}_-^*)$, on en déduit qu'il existe un unique réel $\alpha\in\mathbb{R}_-^*$ tel que $g(\alpha)=-\frac{1}{2}$.
3. $g^{-1}\colon]-1;0[\to\mathbb{R}_-^*$ avec $g^{-1}(y)=\ln(y+1)$. Comme g réalise une bijection de $\mathbb{R}_-^*$ dans $]-1;0[$, la bijection réciproque g^{-1} est une bijection de $]-1;0[$ dans $\mathbb{R}_-^*$. Sachant que g est continue sur $\mathbb{R}_-^*$, on peut en déduire que g^{-1} est continue sur $]-1;0[$.
4. La dérivée de g^{-1} sur $]-1,0[$ est $\frac{1}{1+y}$.

Exercice 8.38

Soit $g\colon]-1,0[\to\mathbb{R}$ une application telle que $g(x)=\ln(1+x)$.

1. Montrer que g est strictement croissante sur $]-1,0[$.
2. En utilisant le théorème de la bijection démontrer que l'équation $g(x)=-2$ admet une unique solution.
3. Déterminer la fonction inverse g^{-1}. Que sait-on de la continuité de g^{-1} ?
4. Calculer la dérivée de g^{-1} sur $]-\infty;0[$.

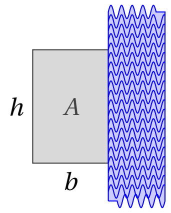
Correction

1. $g(x) = \ln(1+x)$, $g'(x) = \frac{1}{1+x}$, $g'(x) > 0$ pour tout $x \in]-1;0[$ donc g est strictement croissante sur $]-1;0[$.
2. **Théorème de la bijection** *Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I. Alors f induit une bijection de I dans $f(I)$. De plus, sa bijection réciproque est continue sur $f(I)$, est monotone sur $f(I)$ et a le même sens de variation que f.*

   g est définie, continue, dérivable, strictement croissante sur $]-1;0[$, ce qui prouve que g réalise une bijection de $]-1;0[$ dans
   $$g(]-1;0[) =]\lim_{x\to-1} g(x); \lim_{x\to 0} g(x)[=]-\infty;0[.$$
   Comme $-2 \in g(]-1;0[)$, on en déduit qu'il existe un unique réel $\alpha \in]-1;0[$ tel que $g(\alpha) = -2$.
3. $g^{-1} \colon \mathbb{R}_-^* \to]-1;0[$ avec $g^{-1}(y) = e^y - 1$. Comme g réalise une bijection de $]-1;0[$ dans $\mathbb{R}_-^*$, la bijection réciproque g^{-1} est une bijection de $\mathbb{R}_-^*$ dans $]-1;0[$. Sachant que g est continue sur $]-1;0[$, on peut en déduire que g^{-1} est continue sur $\mathbb{R}_-^*$.
4. La dérivée de g^{-1} sur $]-\infty,0[$ est e^y.

Exercice 8.39

Un terrain rectangulaire d'aire A se trouve le long de la rive (rectiligne) d'une rivière. Quelle est la longueur minimale de la clôture nécessaire pour clôturer les trois autres côtés du terrain ?



Correction

Aire : $A = bh$. Longueur clôture : $\ell(b) = 2b + h(b) = 2b + \frac{A}{b}$. Recherche du minimum : $\ell'(b) = 2 - \frac{A}{b^2}$ et $\ell'(b) = 0$ ssi $b = \sqrt{\frac{A}{2}}$.
Comme $\ell''(b) = \frac{2A}{b^3} > 0$ pour tout $b > 0$, il s'agit bien d'un minimum.
Remarque : si on clôture tous les quatre côtés on a $\ell(b) = 2b + 2h(b)$ et donc $h = b = \sqrt{A}$.

Exercice 8.40

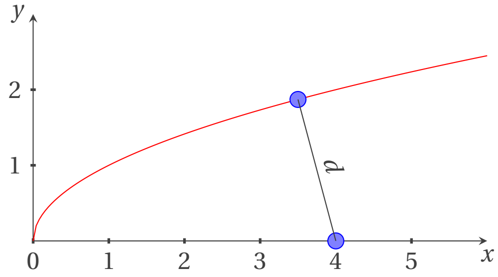
Trouver le point de la courbe d'équation $y = \sqrt{x}$ plus proche au point $(4,0)$.

Correction

Soit $(x, \sqrt{x})$ un point quelconque de la courbe d'équation $y = \sqrt{x}$. Il s'agit de trouver le minimum de la distance entre ce point et le point $(4,0)$:
$$\min_{x\in\mathbb{R}^+} \sqrt{(x-4)^2 + (\sqrt{x}-0)^2} = \min_{x\in\mathbb{R}^+} \underbrace{\sqrt{x^2-7x+16}}_{d(x)}.$$
Sa dérivée vaut
$$d'(x) = \frac{2x-7}{2\sqrt{x^2-7x+16}}$$
et on a

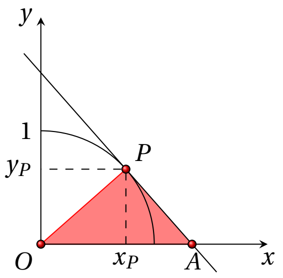
- ⋆ $d'(x) = 0 \iff x = \frac{7}{2}$,
- ⋆ $d'(x) > 0 \iff x > \frac{7}{2}$,
- ⋆ $d'(x) < 0 \iff x < \frac{7}{2}$,

par conséquent le point cherché est $\left(\frac{7}{2}, \sqrt{\frac{7}{2}}\right)$.



Exercice 8.41

On considère le quart de circonférence d'équation $y = \sqrt{1-x^2}$ pour $0 < x < 1$. Soit $P = (x_P, y_P)$ un point du quart de circonférence. On note par A le point d'intersection de la tangente en P avec l'axe x. Exprimer la surface du triangle OAP en fonction de x_P.



Correction

Soit $f(x) = \sqrt{1-x^2}$. L'équation de la droite tangente en $x = x_P$ s'écrit

$$y = f'(x_P)(x - x_P) + f(x_P) = \frac{-x_P}{\sqrt{1-x_P^2}}(x - x_P) + \sqrt{1-x_P^2}$$

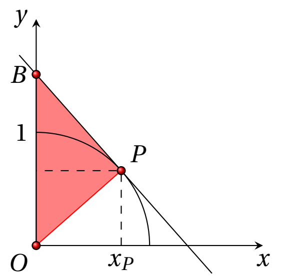
$A = (x_A, 0)$ est le point d'intersection de cette droite avec la droite d'équation $y = 0$, donc on a

$$\frac{-x_P}{\sqrt{1-x_P^2}}(x_A - x_P) + \sqrt{1-x_P^2} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad x_A = \frac{1}{x_P}$$

et la surface du triangle OAP en fonction de x_P est $\frac{x_A y_P}{2} = \frac{\sqrt{1-x_P^2}}{2x_P}$.

Exercice 8.42

On considère le quart de circonférence d'équation $y = \sqrt{1-x^2}$ pour $0 < x < 1$. Soit $P = (x_P, y_P)$ un point du quart de circonférence. On note par B le point d'intersection de la tangente en P avec l'axe y. Exprimer la surface du triangle OBP en fonction de x_P.



Correction

Soit $f(x) = \sqrt{1-x^2}$. L'équation de la droite tangente en $x = x_P$ s'écrit

$$y = f'(x_P)(x - x_P) + f(x_P) = \frac{-x_P}{\sqrt{1-x_P^2}}(x - x_P) + \sqrt{1-x_P^2}$$

$B = (0, y_B)$ est le point d'intersection de cette droite avec la droite d'équation $x = 0$, donc on a

$$y_B = \frac{x_P^2}{\sqrt{1-x_P^2}} + \sqrt{1-x_P^2} = \frac{1}{\sqrt{1-x_P^2}}$$

et la surface du triangle OBP en fonction de x_P est $\frac{y_B x_P}{2} = \frac{x_P}{2\sqrt{1-x_P^2}}$.

Exercice 8.43 (Dérivée d'une fonction composée)

Un glaçon sphérique fond en conservant sa forme. Le taux de variation de son volume avec le temps est proportionnel à sa surface. Il faut une heure pour qu'un glaçon de un centimètre de rayon fonde totalement. Après combien de temps le glaçon a-t-il diminué de moitié en volume ? Rappel : la surface et le volume d'une sphère de rayon r sont respectivement $S = 4\pi r^2$ et $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Correction

Le rayon est fonction du temps donc $V'(t) = 4\pi[r(t)]^2 r'(t)$. Comme le taux de variation de son volume avec le temps est proportionnel à sa surface, il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $V'(t) = k4\pi[r(t)]^2$. Donc $4\pi[r(t)]^2 r'(t) = k4\pi[r(t)]^2$, autrement dit $k = r'(t)$ ce qui implique que $r(t) = at + b$. Comme il faut une heure pour qu'un glaçon de un centimètre de rayon fonde totalement, on a $r(0) = 1$ et $r(1) = 0$ et on obtient la relation $r(t) = 1 - t$. On cherche alors $\hat{t}$ tel que $V(\hat{t}) = V(0)/2$, c'est-à-dire $\frac{4}{3}\pi(1-\hat{t})^3 = \frac{4}{3}\pi\frac{1}{2}$: le glaçon a diminué de moitié en volume après $\hat{t} = 1 - 2^{-1/3} \approx 0.20$ h $= 12$ minutes.

Exercice 8.44 (Dérivée d'une fonction composée)

Un glaçon cubique fond en conservant sa forme. Le taux de variation de son volume avec le temps est proportionnel à sa surface. Il faut une heure pour qu'un glaçon de un centimètre de coté fonde totalement. Après combien de temps le glaçon a-t-il diminué de moitié en volume ?

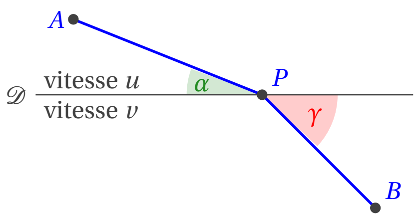
Correction

La surface et le volume d'un cube de coté ℓ sont respectivement $S = 6\ell^2$ et $V = \ell^3$. Le coté est fonction du temps donc $V'(t) = [\ell(t)]^2\ell'(t)$. Comme le taux de variation de son volume avec le temps est proportionnel à sa surface, il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $V'(t) = k6[\ell(t)]^2$. Donc $[\ell(t)]^2\ell'(t) = k6[\ell(t)]^2$, autrement dit $6k = \ell'(t)$ ce qui implique que $\ell(t) = at + b$. Comme il faut une heure pour qu'un glaçon de un centimètre de coté fonde totalement, on a $\ell(0) = 1$ et $\ell(1) = 0$ et on obtient la relation $\ell(t) = 1 - t$. On cherche alors $\hat{t}$ tel que $V(\hat{t}) = V(0)/2$, c'est-à-dire $(1 - \hat{t})^3 = 1/2$: le glaçon a diminué de moitié en volume après $\hat{t} = 1 - 2^{-1/3} \approx 0.20$ h = 12 minutes.

Exercice 8.45

D'après le principe de Fermat un rayon lumineux n'emprunte pas le chemin le plus court mais le chemin le plus rapide. Autrement dit, ce n'est pas la longueur du parcours mais sa durée qui est minimale.

1. Démontrer la loi de la réfraction : "dans le plan soient A et B deux points de chaque côté d'une droite $\mathscr{D}$. On suppose que la lumière voyage à vitesse u dans le demi plan contenant A et à vitesse v dans l'autre demi-plan. Alors le rayon lumineux prend le chemin caractérisé par l'équation $u\cos(\gamma) = v\cos(\alpha)$ où α et γ sont les angles indiqués ci-dessous."

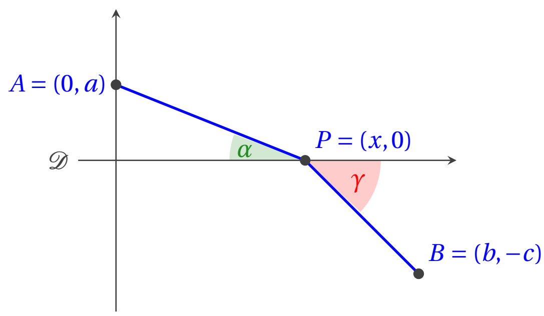


(Indication : choisir un repère adapté et exprimer le temps nécessaire pour le chemin en fonction de la position du point P ; puis minimiser par un calcul de dérivée.)

2. Pour un rayon lumineux qui arrive sur la surface d'un lac un nageur mesure $\alpha = 45°$ et $\gamma = 58°$. En déduire la vitesse de la lumière dans l'eau.

Correction

1. On remarque que sur le dessin $u > v$. En effet, dans le demi-plan supérieur la partie du chemin est un peu plus longue que si on suivait le chemin direct $[AC]$; on gagne du temps en faisant un chemin plus long dans le demi-plan où la vitesse est plus rapide. Choisissons un système de coordonnées orthonormées et des notations comme indiquées ci-dessous.



Alors

$$AP = \sqrt{x^2 + a^2}, \qquad CP = \sqrt{(b - x)^2 + c^2}.$$

Ainsi la durée du trajet APC est

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{u} + \frac{\sqrt{(b - x)^2 + c^2}}{v}.$$

Cette expression définit une fonction dérivable f sur $\mathbb{R}$ et

$$f'(x) = \frac{x}{u\sqrt{x^2 + a^2}} - \frac{b - x}{v\sqrt{(b - x)^2 + c^2}} = \frac{\cos(\alpha)}{u} - \frac{\sin(\gamma)}{u}.$$

Ainsi $f'(x) = 0$ si et seulement si $u\cos(\gamma) = v\cos(\alpha)$. Géométriquement il est plus ou moins évident que cette condition correspond effectivement à un minimum de la fonction f, mais on peut aussi procéder rigoureusement en dérivant encore une fois :

$$f''(x) = \frac{a^2}{u\sqrt{(x^2+a^2)^3}} + \frac{c^2}{v\sqrt{((b-x)^2+c^2)^3}} > 0.$$

Le signe de la dérivée seconde étant strictement positif la dérivée f' change de signe au point où elle s'annule, de sorte que ce point est un minimum. Remarque : si la vitesse de la lumière varie en fonction du lieu (lieu anisotrope) le chemin le plus court n'est pas forcément le plus rapide ! C'est comme en voiture, un détour peut être plus rapide s'il évite des bouchons.

2. On obtient comme vitesse de la lumière dans l'eau :

$$v = \frac{\cos(58°)}{\cos(45°)} u \simeq \sqrt{2} \times 0.53 \times 3 \times 10^8 \,\mathrm{m\cdot s^{-1}} \simeq 2.25 \times 10^8 \,\mathrm{m\cdot s^{-1}}.$$

Exercice 8.46

Un alpiniste commence à escalader une montagne un samedi à 7 heures du matin. À 5 heures de l'après-midi, il atteint le sommet, où il décide de passer la nuit. Le dimanche matin à 7 heures, il entame sa descente. Il arrive à son point de départ à 17 heures. On suppose que son altitude varie continument au cours du temps. Prouver qu'à un même moment de la journée du samedi et celle du dimanche, il était à la même altitude.

Correction

Pour $t \in [7,17]$, on note $S(t)$ (resp. $D(t)$) l'altitude de l'alpiniste au moment t de la journée de samedi (resp. dimanche). La fonction $f = S - D$ est continue et vérifie $f(7) \le 0 \le f(17)$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe $c \in [7,17]$ tel que $f(c) = 0$, c'est-à-dire $S(c) = D(c)$.

Exercice 8.47

On considère un produit dont le prix unitaire est p ($p > 0$). On note q la quantité vendue de ce produit pendant un mois et on suppose que $q(p) = \alpha + \beta p$ où α et β sont des réels.

1. Peut-on déjà prédire le signe de la constante β ?
2. De combien varie la quantité vendue lorsque le prix augmente de 1 ?
3. Quelle est la plus grande valeur de p possible sachant que la quantité vendue q est un nombre positif ?
4. On suppose désormais que $q = 5000$ si $p = 100$, et que $q = 4000$ si $p = 200$. Déterminer α et β.
5. Déterminer en fonction de p les recettes mensuelles $r(p)$.
6. Quelle est la valeur maximale des recettes ?
7. Le coût unitaire de fabrication du produit est égal à 100. Déterminer en fonction de p le profit $g(p)$ total réalisé (c'est-à-dire la différence entre recettes et coût).
8. Pour quelle quantité le profit est-il maximal ?

Correction

1. La fonction q est affine. La quantité vendue est forcement une fonction décroissante du prix, donc β doit être négatif.
2. Le taux d'accroissement est $\beta = \frac{5000-4000}{100-200} = -10$. On en déduit (par décalage) que

$$q(p) = -10(p-100) + 5000 = 6000 - 10p.$$

   Donc $\alpha = 6000$.
3. Comme $\beta = -10$, lorsque le prix augmente de 1 on perd 10 acheteurs.
4. On résout l'inégalité

$$q(p) \ge 0 \iff 6000 - 10p \ge 0 \iff p \le 600.$$

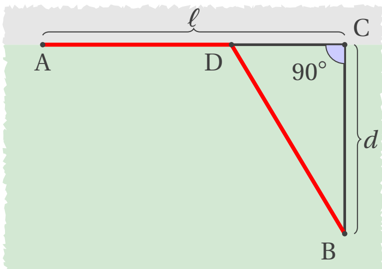
   Donc on trouve des acheteurs si et seulement si le prix est inférieur à 600.
5. Les recettes mensuelles sont

$$r(p) = \text{prix unitaire} \times \text{quantité vendue} = p \times q(p) = 10p(600-p).$$

6. La dérivée est
$$r'(p) = 20(300-p),$$
donc r est croissante sur $[0,300]$ et décroissante sur $[300,600]$. Il y a donc un maximum en $p=300$. Les recettes maximales sont donc
$$r(300) = 900000.$$
Solution alternative : la courbe de la fonction $p \mapsto r$ est une parabole concave ayant deux intersections avec l'axe des abscisses, en $p=0$ et $p=600$. Par symétrie le maximum se trouve au milieu entre ces deux intersections, c'est-à-dire au prix de 300.
7. On a
$$g(p) = r(p) - 100q(p) = (10p-1000)(600-p).$$
8. Après un petit calcul on trouve $g'(p) = 7000-20p$, donc g est croissante sur $[0,350]$ et décroissante sur $[350;600]$. Il y a donc un maximum pour le prix 350. Cela correspond à une quantité de $q(350) = 2500$.
Solution alternative : la courbe de la fonction $p \mapsto g$ est une parabole concave ayant deux intersections avec l'axe des abscisses, en $p=100$ et $p=600$. Par symétrie le maximum se trouve au milieu entre ces deux intersections, c'est-à-dire au prix de 350.

Exercice 8.48

Un tracteur partant d'un point A situé sur une route rectiligne doit atteindre un point B situé dans un champ (voir la figure ci-contre). On connait les distances $AC = \ell$ et $CB = d$ et on sait que le tracteur va deux fois moins vite dans le champ que sur la route. Il quitte la route en un point D de $[AC]$ à préciser. Les trajets de A à D et de D à B sont supposés rectilignes. Déterminez le point D pour que le temps total soit minimal. Discutez suivant ℓ et d.



Correction
Soit $AD = x$ avec $0 \le x \le \ell$. On a alors $DB = \sqrt{(\ell-x)^2+d^2}$. Si v désigne la vitesse du tracteur dans le champ, sa vitesse sur la route est de $2v$ et le temps total mis pas le tracteur pour atteindre B depuis A est
$$t(x) = \frac{x}{2v} + \frac{\sqrt{(\ell-x)^2+d^2}}{v}.$$
On cherche $x \in [0;\ell]$ qui minimise la fonction t. On a
$$t'(x) = \frac{1}{2v} + \frac{-2(\ell-x)}{2v\sqrt{(\ell-x)^2+d^2}} = \frac{\sqrt{(\ell-x)^2+d^2}-2(\ell-x)}{2v\sqrt{(\ell-x)^2+d^2}}$$
donc $t'(x) = 0$ si et seulement si $x = \ell - \frac{d}{\sqrt{3}}$ et
$$t''(x) = \frac{d^2}{v((\ell-x)^2+d^2)^{\frac{3}{2}}} > 0.$$
ce qui implique que $t'(x) > 0$ si et seulement si $x < \ell - \frac{d}{\sqrt{3}}$. Par conséquent,

- si $\ell < \frac{d}{\sqrt{3}}$ alors $t'(x) < 0$ pour tout $x \in [0;\ell]$: la fonction t atteint son minimum en $x = 0$, c'est-à-dire que le tracteur quitte la route en A ;
- si $\ell > \frac{d}{\sqrt{3}}$ alors $t'(x) < 0$ pour tout $x \in [0;\ell-\frac{d}{\sqrt{3}}]$ et $t'(x) > 0$ pour tout $x \in [\ell-\frac{d}{\sqrt{3}};\ell]$: la fonction t atteint son minimum en $x = \ell - \frac{d}{\sqrt{3}}$.

Exercice 8.49

On note x la quantité produite, p le prix et $f(x)$ le coût. On suppose que l'on se trouve dans un cas de concurrence parfaite, dans lequel le prix de la marchandise est indépendant de la quantité produite. Le profit est la fonction $\Pi(x) = \text{recette} - \text{coût}$. Prouver que le profit est optimal lorsque la recette marginale est égal au coût marginal.

Correction
La recette est $g(x) = px$. La recette marginale est $g'(x) = p$ et le coût marginal est $f'(x)$. Le profit est $\Pi(x) = g(x) - f(x)$. On a $\Pi'(x) = g'(x) - f'(x) = p - f'(x)$. Donc si $p = f'(x)$ la dérivée du profit s'annule et le profit et extrémal.

Exercice 8.50

On dispose d'un compte épargne à un taux d'intérêt annuel de 5%.

1. On place 10 000 €. Calculez les intérêts gagnés au bout d'un an si les intérêts sont versés
   1.1. une fois par an,
   1.2. une fois par mois,
   1.3. en continu.
2. On suppose que les intérêts sont versés une fois par l'an. Après combien d'années le capital aura-t-il triplé ?
3. On suppose que les intérêts sont versés continûment. Quel montant initial doit-on placer pour avoir 25 000 € après dix ans ?

Tous les résultats de cet exercice sont à arrondir au centime le plus proche.

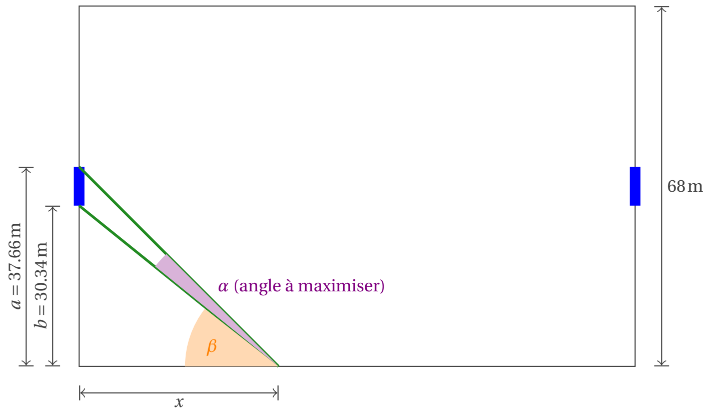
Correction

1. Les calculs suivants sont en €.
   1.1. Dans ce cas, le capital après un an est
   $$(1+0.05)\times 10000 = 10500.$$
   Donc les intérêts s'élèvent à 500 €.
   1.2. Dans ce cas, le capital après un an est
   $$\left(1+\frac{0.05}{12}\right)^{12}\times 10000 = 10511.62.$$
   Donc les intérêts s'élèvent à 511.62 €.
   1.3. Dans ce cas, le capital après un an est
   $$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{0.05}{n}\right)^{n}\times 10000 = e^{0.05}\times 10000 = 10512.71.$$
   Donc les intérêts s'élèvent à 512.71 €.
2. On note C_0 le capital initial et C_n le capital après n ans. Alors on a (suite géométrique) : $C_n = 1.05^n C_0$. On cherche le plus petit entier n tel que $1.05^n C_0 \ge 3$, ou encore $n\ln(1.05) \ge \ln(3)$. On trouve $n \ge 22.51$. Il faut donc attendre 23 ans.
3. On note C_0 le capital initial et C_n le capital après n ans. Alors on a (suite géométrique) : $C_n = (e^{0.05})^n C_0$, ou encore $C_0 = e^{-0.05n} C_n$. Pour $C_{10} = 25\,000$ € on trouve la capital initial :
   $$C_0 = e^{-0.5}\times 25000 \simeq 15\,163.27\,€.$$

Exercice 8.51

Un joueur de football, en possession du ballon, court sur la ligne de touche. Ayant une frappe extrêmement forte il ne se soucie pas de la distance et tire à l'endroit où l'angle d'ouverture par rapport au but est maximal. Quel est alors cet angle (en degrés) ?
Utiliser les dimensions recommandées par la FIFA : terrain 105 m × 68 m et largeur du but 7.32 m.

Correction
D'après ce dessin



on trouve

$$\begin{cases}\tan(\beta)=\frac{b}{x},\\ \tan(\alpha+\beta)=\frac{a}{x},\end{cases} \implies \begin{cases}\beta=\arctan\left(\frac{b}{x}\right),\\ \alpha+\beta=\arctan\left(\frac{a}{x}\right),\end{cases} \implies \alpha(x)=\arctan\left(\frac{a}{x}\right)-\arctan\left(\frac{b}{x}\right),$$

puis, par dérivation,

$$\alpha'(x)=\frac{b}{x^2+b^2}-\frac{a}{x^2+a^2}=\frac{(a-b)(ab-x^2)}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}.$$

Cette dérivée s'annule au seul point

$$x_0=\sqrt{ab}=\sqrt{30.34\,\text{m}\times 37.66\,\text{m}}\simeq 33.8\,\text{m}.$$

Géométriquement il est évident que la fonction $x\mapsto a(x)$ possède un unique maximum qui est donc x_0. (On peut aussi remarquer que $a(x)\ge 0$ pour tout $x\ge 0$ et que $\lim_{x\to 0} a(x)=\lim_{x\to\infty} a(x)=0$; ainsi la fonction dérivable α possède un maximum sur $\mathbb{R}_+$ qui se trouve donc en x_0). L'angle maximal est alors

$$\alpha(x_0)=\arctan\left(\frac{a}{x_0}\right)-\arctan\left(\frac{b}{x_0}\right)\simeq 6.18°.$$

Exercice 8.52

Deux rues se coupent en formant un angle droit. Une voiture circule sur une rue à une vitesse de $2\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ et une seconde voiture circule sur l'autre rue à une vitesse de $4\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$. Les voitures partent toutes les deux d'une distance de 200 m du point d'intersection et se dirigent vers l'intersection des rues. Quelle sera leur distance minimale ?

Correction

Plaçons les deux rues dans un plan cartésien, la première rue sera l'axe des abscisses, la deuxième ceux des ordonnées et l'intersection des deux rue se trouve au point de coordonnées $(0,0)$. Indiquons par (x_i,y_i) la position de la voiture i ($i=1$ ou 2). Alors

$$(x_1,y_1)=(-200+2t,0) \qquad\qquad (x_2,y_2)=(0,-200+4t)$$

Soit $f\colon\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ le carré de la fonction distance des deux voitures en fonction du temps :

$$f(t)=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2=(-200+2t-0)^2+(0+200-4t)^2=20t^2-2400t+80000.$$

Cette fonction est minimale pour $t=60\,\text{s}$ et l'on a $\sqrt{f(t)}=\sqrt{20\times 60^2-2400\times 60+80000}=\sqrt{8000}\approx 90\,\text{m}$.

Exercice 8.53

La distance r qui sépare deux molécules résulte d'un équilibre entre une force attractive proportionnelle à $1/r^6$ et une force répulsive proportionnelle à $1/r^{12}$. La distance d'équilibre est celle pour laquelle le potentiel de LENNARD-JONES est minimal. Calculer cette distance sachant que ce potentiel est donné par

$$V(r)=4\varepsilon\left(\left(\frac{\sigma}{r}\right)^{12}-\left(\frac{\sigma}{r}\right)^{6}\right)$$

où σ est une distance, appelée distance de collision, et ε est le potentiel minimal.

Correction

$$V'(r)=4\varepsilon\left(-\frac{12}{r}\left(\frac{\sigma}{r}\right)^{12}+\frac{6}{r}\left(\frac{\sigma}{r}\right)^{6}\right)=0 \qquad\iff\qquad r=\sqrt[6]{2}\sigma \qquad\text{et}\qquad V(\sqrt[6]{2}\sigma)=-\varepsilon.$$

Exercice 8.54

Dans une molécule diatomique, l'énergie potentielle varie avec la distance r entre les deux atomes. L'expression empirique de ce potentiel (appelé potentiel de MORSE) est donnée par

$$V(r) = D(1-e^{\alpha-\beta r})^2$$

où $\alpha, \beta > 0$ sont des constantes propres à chaque molécule. À l'équilibre une molécule de trouve au niveau de son énergie potentielle la plus basse. Trouver cette position d'équilibre. La différence entre l'énergie potentielle à l'équilibre et celle lorsque r tend vers l'infini est l'énergie de dissociation. Calculer cette énergie.

Correction

- ⋆ Position d'équilibre :

$$V'(r) = 2D(1-e^{\alpha-\beta r})\times(-e^{\alpha-\beta r})\times(-\beta) = -2\beta V(r) = 0 \qquad\iff\qquad V(r)=0 \qquad\iff\qquad r=\frac{\alpha}{\beta} \qquad \text{et} \qquad V\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)=D.$$

- ⋆ Énergie de dissociation :

$$\lim_{r\to+\infty} V\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) - V(r) = \lim_{r\to+\infty} D\left(1-(1-e^{\alpha-\beta r})^2\right) = \lim_{r\to+\infty} D\left(-e^{2(\alpha-\beta r)}+2e^{\alpha-\beta r}\right) = D.$$

Exercice 8.55

La mesure de la distance entre deux points donne une série de valeurs expérimentales $d_1, d_2, \dots, d_n$. Sur la base de ces valeurs, on désire obtenir une estimation de d qui soit la plus proche possible de la réalité. Trouver une formule pour d telle que la mesure d'erreur

$$(d-d_1)^2+(d-d_2)^2+\cdots+(d-d_1)^n$$

soit minimale.

Correction

On veut minimiser la fonction

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R}_+ \\ d &\mapsto \sum_{i=1}^n (d-d_i)^2 \end{aligned}$$

On a

$$f'(d) = 2\sum_{i=1}^n (d-d_i) = 2\left(nd-\sum_{i=1}^n d_i\right)$$

donc $f'(d)=0$ ssi $d=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n d_i$.

Exercice 8.56

Une société produit des boîtes en carton de 5 L en forme de parallélépipède à base carrée. Les boîtes doivent utiliser la moindre quantité de carton possible. Quelles dimensions doit-elle fixer ?

Correction

Notons ℓ la longueur (en décimètre) des cotés de la base (carrée) et h la hauteur (en décimètre) de la boîte. On a $\ell^2 h = 5$ ainsi la surface de la boîte mesure $S(\ell) = 2\ell^2+4h\ell = 2\ell^2+\frac{20}{\ell}$ décimètres carrées. Il s'agit d'une parabole dont le minimum s'obtient pour $\ell = \sqrt[3]{5} \simeq 171$ mm et dans ce cas l'on a $h=\ell$: la boîte qui utilise la moindre quantité de carton possible est un cube.

Exercice 8.57

Étudier brièvement la fonction $f\colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x)=\frac{x}{\ln(x)}$ et en déduire que $e^\pi > \pi^e$.

Correction

- ⋆ Étude de la fonction :
  - ⋆ $f'(x) = \frac{\ln(x)-1}{\ln^2(x)}$,

- ⋆ $f'(x) = 0$ ssi $x = e$ et l'on a $f(e) = e$,
- ⋆ $f''(x) = \frac{2-\ln(x)}{x\ln^3(x)}$,
- ⋆ $f''(e) = \frac{1}{e} > 0$,

⋆ Lien entre la fonction f et l'inégalité :

$$e^\pi > \pi^e \iff \ln(e^\pi) > \ln(\pi^e) \iff \pi > e\ln(\pi) \overset{e<\pi}{\iff} e < \frac{\pi}{\ln(\pi)}.$$

Comme $x = e$ est un minimum pour f, *i.e.* $f(x) \ge f(e)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, cela est vraie en particulier pour $x = \pi$ et notre inégalité est bien vérifiée.

Exercice 8.58

Étudier brièvement la fonction $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{e^x}{x^e}$ et en déduire que $e^\pi > \pi^e$.

Correction

⋆ Étude de la fonction :

- ⋆ Notons que $f(x) = \frac{e^x}{e^{\ln(x)}}$
- ⋆ $f'(x) = \frac{e^x x^e - e^x x^e/x}{x^{2e}} = e^x \frac{x-1}{x^{e+1}}$,
- ⋆ $f'(x) = 0$ ssi $x = 1$,
- ⋆ f croissante pour $x > 1$, décroissante pour $x < 1$.

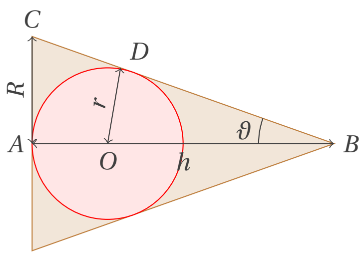
⋆ Lien entre la fonction f et l'inégalité :

$$e^\pi > \pi^e \iff \frac{e^\pi}{\pi^e} > 1.$$

Comme f est croissante pour $x > 1$ et $1 < \pi$ alors $1 < e < f(1) < f(\pi) = \frac{e^\pi}{\pi^e}$ et notre inégalité est bien vérifiée.

Exercice 8.59 (Cônes de glace)

On veut insérer entièrement une sphère de glace dans un cône de biscuit de sorte à ce que le cône soit le plus remplis possible. Ceci revient à minimiser le rapport entre le volume du cône et le volume de la sphère.



- ⋆ Exprimer la hauteur h et le rayon R du cône en fonction de $r > 0$ le rayon de la sphère et de $\vartheta \in]0; \frac{\pi}{2}[$ l'angle du cône.
- ⋆ Trouver la valeur de ϑ qui minimise le rapport $\frac{\text{Volume du cône}}{\text{Volume de la sphère}}$.
- ⋆ Calculer la hauteur h et le rayon R optimales du cône en fonction du rayon de la sphère r.

Correction

⋆ On a deux triangles rectangles : le triangle ABC rectangle en A et le triangle OBD rectangle en D, par conséquent

$$\tan(\vartheta) = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{R}{h}, \qquad \sin(\vartheta) = \frac{\overline{OD}}{\overline{OB}} = \frac{r}{h-r},$$

donc

$$R = h\tan(\vartheta), \qquad h = \left(\frac{1}{\sin(\vartheta)} + 1\right) r.$$

⋆ Soit $f :]0; \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$ la fonction ainsi définie :

$$f(\vartheta) = \frac{\text{Volume du cône}}{\text{Volume de la sphère}} = \frac{\frac{1}{3}\pi R^2 h}{\frac{4}{3}\pi r^3} = \frac{R^2 h}{4r^3} = \frac{(1+\sin(\vartheta))^3}{4\sin(\vartheta)\cos^2(\vartheta)}.$$

Pour minimiser f on cherche a annuler sa dérivée première :

$$\begin{aligned} f'(\vartheta) &= \frac{\left[3\left(1+\sin(\vartheta)\right)^2\cos(\vartheta)\right]\times\left[4\sin(\vartheta)\cos^2(\vartheta)\right]-\left[\left(1+\sin(\vartheta)\right)^3\right]\times\left[4\left(\cos(\vartheta)\cos^2(\vartheta)-2\sin^2(\vartheta)\cos(\vartheta)\right)\right]}{\left[4\sin(\vartheta)\cos^2(\vartheta)\right]^2} \\ &= 4\frac{3\sin(\vartheta)\cos^3(\vartheta)-\left(1+\sin(\vartheta)\right)\left(\cos^3(\vartheta)-2\sin^2(\vartheta)\cos(\vartheta)\right)}{\left(4\sin(\vartheta)\cos^2(\vartheta)\right)^2}\left(1+\sin(\vartheta)\right)^2 \end{aligned}$$

et $f'(\vartheta)=0$ si et seulement si

$$3\sin(\vartheta)\cos^3(\vartheta)-\left(1+\sin(\vartheta)\right)\left(\cos^2(\vartheta)-2\sin^2(\vartheta)\right)\cos(\vartheta)=0.$$

On peut diviser par $\cos(\vartheta)$ car $\vartheta\in]0;\frac{\pi}{2}[$, ce qui donne

$$3\sin(\vartheta)\cos^2(\vartheta)-\left(1+\sin(\vartheta)\right)\left(\cos^2(\vartheta)-2\sin^2(\vartheta)\right)=0.$$

On utilise la relation $\cos^2(\vartheta)=1-\sin^2(\vartheta)$

$$3\sin(\vartheta)\left(1-\sin^2(\vartheta)\right)-\left(1+\sin(\vartheta)\right)\left(1-3\sin^2(\vartheta)\right)=0.$$

On remarque que $\left(1-\sin^2(\vartheta)\right)=\left(1-\sin(\vartheta)\right)\left(1+\sin(\vartheta)\right)$ et qu'on peut diviser par $\left(1+\sin(\vartheta)\right)$ car $\vartheta\in]0;\frac{\pi}{2}[$, ce qui donne

$$3\sin(\vartheta)\left(1-\sin(\vartheta)\right)-\left(1-3\sin^2(\vartheta)\right)=0.$$

On trouve ainsi que l'angle $\hat{\vartheta}$ qui annule la dérivée première est tel que

$$\sin(\hat{\vartheta})=\frac{1}{3}$$

et l'on a $f(\hat{\vartheta})=2$, *i.e.* la sphère occupe la moitié du volume du cône.

- ⋆ On trouve directement $h=\left(\frac{1}{\sin(\vartheta)}+1\right)r=4r$. De plus, sachant que pour $\vartheta\in]0;\frac{\pi}{2}[$ on a

$$\tan(\vartheta)=\frac{\sin(\vartheta)}{\sqrt{1-\sin^2(\vartheta)}},$$

on conclut que $R=h\tan(\vartheta)=h\frac{1}{2\sqrt{2}}=\sqrt{2}r$.

Exercice 8.60

On considère l'équation

$$\cos(x)=\frac{2}{3}x.$$

1. Montrer que si x est solution de l'équation alors $x\in]0;\frac{\pi}{2}[$.
2. Montrer que l'équation admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.
3. Donner une approximation de cette solution à 10^{-1} près.

Correction

1. Si x est solution de l'équation alors $x=\frac{3}{2}\cos(x)$. On sait que $\cos(x)\in[-1;1]$ donc $x\in\left[-\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right]$. De plus, $\left[-\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right]\subset\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, donc si $x\in\left[-\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right]$ alors $\cos(x)>0$. Par conséquent, si x est solution de l'équation alors $x=\frac{3}{2}\cos(x)\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$.
2. Soit $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x)=x-\frac{3}{2}\cos(x)$. f est de classe $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ et $f'(x)=1+\frac{3}{2}\sin(x)$. Puisque $f(x)=0$ si et seulement si l'équation admet une solution, si x est racine de f alors $x\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$. Sur cet intervalle $f'(x)>0$, donc f admet une unique racine sur $\mathbb{R}$.
3. On utilise la méthode de la bissection :

k	a_k	b_k	x_k	erreur$_k\le$
1	0	$\pi/2$	$\pi/4$	$\pi/2\simeq 1.571$
2	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/8$	$\pi/4\simeq 0.785$
3	$\pi/4$	$3\pi/8$	$5\pi/16$	$\pi/8\simeq 0.393$
4	$\pi/4$	$5\pi/16$	$9\pi/32$	$\pi/16\simeq 0.196$
5	$9\pi/32$	$5\pi/16$	$19\pi/64$	$\pi/32\simeq 0.098$

Donner une approximation de cette solution à 10^{-2} près.

9
Plan d'étude d'une fonction numérique

❶ Domaine de définition.

- ⋆ Détermination du domaine de définition $\mathscr{D}_f$ de f.
- ⋆ Réduction éventuelle du domaine d'étude grâce à la parité, l'imparité, la périodicité.

❷ Valeurs aux bornes du domaine d'étude.

- ⋆ Calcul des limites éventuelles aux bornes du domaine d'étude.
- ⋆ Étude des branches infinies (recherche d'asymptotes).

❸ Continuité, dérivabilité (régularité).

❹ Sens de variation

- ⋆ Calcul de la dérivée première (et seconde).
- ⋆ Signe de la dérivée première (et seconde).
- ⋆ Sens de variation et convexité.

❺ Points remarquables.

- ⋆ Maxima, minima.
- ⋆ Points anguleux.
- ⋆ Points d'inflexion.
- ⋆ Points d'intersection avec les axes.

❻ Tableau de variation.

❼ Représentation graphique.

✎✎✎✎✎✎✎✎✎✎✎✎✎✎ Exercices ✎✎✎✎✎✎✎✎✎✎✎✎✎✎

Exercice 9.1

Étudier les variations et donner une représentation graphique de la fonction

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = x + \ln(x^2-1) \end{aligned}$$

en répondant aux questions suivantes :

1. ensemble de définition
2. comportement aux extrémités de l'ensemble de définition et recherche d'asymptotes
3. extrema locaux, sens de variation et tableaux des variations
4. convexité, concavité
5. graphe

Correction

1. *Ensemble de définition :* il faut $x^2-1>0$ donc
$$\mathscr{D}_f =]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[.$$
2. *Comportement aux extrémités de l'ensemble de définition :*
$$\lim_{x\to-1^-} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to1^+} f(x) = -\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x\left(1+\frac{\ln(x^2-1)}{x}\right) = -\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$
$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} 1+\frac{\ln(x^2-1)}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to\pm\infty} f(x)-x = \lim_{x\to\pm\infty} \ln(x^2-1) = +\infty.$$
Il n'y a pas d'asymptotes en $\pm\infty$.
3. *Extrema locaux, sens de variation et tableaux des variations :* la dérivée de f est l'application
$$\begin{aligned} f'\colon \mathscr{D}_f &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f'(x) = 1+\frac{2x}{x^2-1} = \frac{x^2+2x-1}{x^2-1} = \frac{(x+1+\sqrt{2})(x+1-\sqrt{2})}{x^2-1} \end{aligned}$$
Dans $\mathscr{D}_f$ on a
$$\begin{aligned} &f'(x)>0 \text{ ssi } x\in]-\infty;-1-\sqrt{2}[\cup]1;+\infty[,\\ &f'(x)=0 \text{ ssi } x=-1-\sqrt{2},\\ &f'(x)<0 \text{ ssi } x\in]-1-\sqrt{2};-1[. \end{aligned}$$
On conclut que
   - ⋆ f est strictement croissante sur $]-\infty;-1-\sqrt{2}[$ et sur $]1;+\infty[$,
   - ⋆ f est strictement décroissante sur $]-1-\sqrt{2};-1[$,
   - ⋆ $x=-1-\sqrt{2}$ est un point de maximum local et on a $f(-1-\sqrt{2}) = -1-\sqrt{2}+\ln(2+2\sqrt{2})$.

   Le tableau des variations est alors le suivant :

x	$-\infty$		$-1-\sqrt{2}$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$		(interdit)		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$-1-\sqrt{2}+\ln(2+2\sqrt{2})$	↘	$-\infty$	(interdit)	$-\infty$	↗	$+\infty$

4. *Convexité, concavité :* la dérivée seconde de f est l'application
$$\begin{aligned} f''\colon \mathscr{D}_f &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f''(x) = \left(1+\frac{2x}{x^2-1}\right)' = \frac{2(x^2-1)-4x^2}{(x^2-1)^2} \end{aligned}$$

Dans $\mathscr{D}_f$ on a $f''(x) < 0$. On conclut que la fonction est concave séparément sur $]-\infty;-1[$ et sur $]1;+\infty[$.

5. *Graphe :* voir la figure 9.1

Exercice 9.2

Étudier les variations et donner une représentation graphique de la fonction

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = 2x + \sqrt{x^2-1} \end{aligned}$$

en répondant aux questions suivantes :

1. ensemble de définition
2. comportement aux extrémités de l'ensemble de définition et recherche d'asymptotes
3. extrema locaux, sens de variation et tableaux des variations
4. convexité, concavité
5. graphe

Correction

1. *Ensemble de définition :* il faut $x^2 - 1 \geq 0$ donc

$$\mathscr{D}_f =]-\infty;-1] \cup [1;+\infty[\qquad .$$

2. *Comportement aux extrémités de l'ensemble de définition :*

$$\begin{aligned} \lim_{x\to-\infty} f(x) &= \lim_{x\to-\infty} x\left(2+\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\right) = -\infty, \\ \lim_{x\to-1^-} f(x) &= f(-1) = -2, \\ \lim_{x\to1^+} f(x) &= f(1) = 2, \\ \lim_{x\to+\infty} f(x) &= +\infty. \end{aligned}$$

⋆ Si $x > 0$, en calculant le développement asymptotique à l'ordre 2 en $+\infty$ on a

$$\frac{f(x)}{x} = 2 + \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} = 2 + \sqrt{1-\frac{1}{x^2}} = 3.$$

On en déduit que la droite d'équation $y = 3x$ est l'asymptote de f en $+\infty$ (le graphe de f se trouve au dessous de cet asymptôte).

⋆ Si $x < 0$, en calculant le développement asymptotique à l'ordre 2 en $-\infty$ on a

$$\frac{f(x)}{x} = 2 + \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} = 2 - \sqrt{1-\frac{1}{x^2}} = 1.$$

On en déduit que la droite d'équation $y = x$ est l'asymptote de f en $-\infty$ (le graphe de f se trouve au dessous de cet asymptote).

3. *Extrema locaux, sens de variation et tableaux des variations :* la dérivée de f est la fonction

$$\begin{aligned} f'\colon \mathscr{D}_f &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f'(x) = 2 + \frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{2\sqrt{x^2-1}+x}{\sqrt{x^2-1}} \end{aligned}$$

Dans $\mathscr{D}_f \setminus \{\pm1\}$ on a

$$\begin{aligned} f'(x) > 0 &\text{ ssi } x \in]-\infty;-\frac{2}{\sqrt{3}}[\cup]1;+\infty[, \\ f'(x) = 0 &\text{ ssi } x = -\frac{2}{\sqrt{3}}, \\ f'(x) < 0 &\text{ ssi } x \in]-\frac{2}{\sqrt{3}};-1[\end{aligned}$$

et $\lim_{x\to\pm1^\pm} f'(x) = +\infty$. On conclut que

- ⋆ f est strictement croissante sur $]-\infty;-\frac{2}{\sqrt{3}}[$ et sur $]1;+\infty[$,
- ⋆ f est strictement décroissante sur $]-\frac{2}{\sqrt{3}};-1[$,
- ⋆ $x=-\frac{2}{\sqrt{3}}$ est un point de minimum local et on a $f(-\frac{2}{\sqrt{3}})=-\sqrt{3}$.

Le tableau des variations est alors le suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{2}{\sqrt{3}}$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$				$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-\sqrt{3}$	$\searrow$	-2		2	$\nearrow$	$+\infty$

4. *Convexité, concavité :* la dérivée seconde de f est la fonction

$$\begin{aligned} f''\colon \mathscr{D}_f &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f''(x)=\frac{\sqrt{x^2-1}-x\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{x^2-1}=\frac{-1}{x^2-1} \end{aligned}$$

Dans $\mathscr{D}_f\setminus\{\pm1\}$ on a $f''(x)<0$. On conclut que f est concave sur $\mathscr{D}_f$.

5. *Graphe :* voir la figure 9.2

Exercice 9.3

Étudier les variations et donner une représentation graphique de la fonction

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x)=\frac{\ln^2(x)}{x^2} \end{aligned}$$

en répondant aux questions suivantes :

1. ensemble de définition
2. comportement aux extrémités de l'ensemble de définition et recherche d'asymptotes
3. extrema locaux, sens de variation et tableaux des variations
4. convexité, concavité
5. graphe

Correction

1. *Ensemble de définition :* il faut $\begin{cases} x\neq 0\\ x>0\end{cases}$ donc
$$\mathscr{D}_f=]0;+\infty[.$$
2. *Comportement aux extrémités de l'ensemble de définition :*
$$\lim_{x\to0^+} f(x)=+\infty,$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0^+.$$
$y=0$ est asymptote pour $x\to+\infty$.
3. *Extrema locaux, sens de variation et tableaux des variations :* la dérivée de f est la fonction
$$\begin{aligned} f'\colon \mathscr{D}_f &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f'(x)=2\frac{\ln(x)(1-\ln(x))}{x^3} \end{aligned}$$
Dans $\mathscr{D}_f$ on a
$$\begin{aligned} &f'(x)>0 \text{ ssi } x\in]1;e[,\\ &f'(x)=0 \text{ ssi } x=e,\\ &f'(x)<0 \text{ ssi } x\in]0;1[\cup]e;+\infty[. \end{aligned}$$
On conclut que

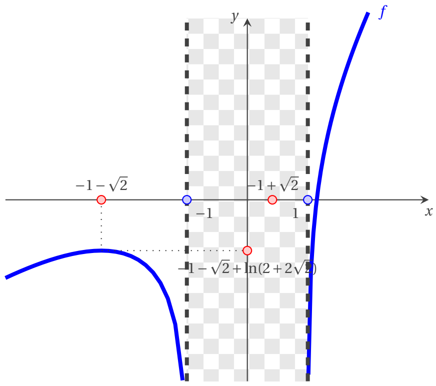


FIGURE 9.1 – Exercice 9.1

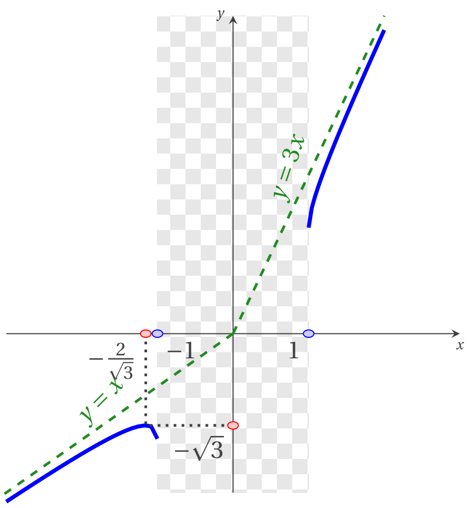


FIGURE 9.2 – Exercice 9.2

- ⋆ f est strictement croissante sur $]1;e[$[,
- ⋆ f est strictement décroissante sur $]0;1[$ et sur $]e;+\infty[$,
- ⋆ $x=1$ est un point de minimum absolu, $x=e$ est un point de maximum local et on a $f(1)=0$, $f(e)=\frac{1}{e^2}$.

Le tableau des variations est alors le suivant :

x	0		1		e		$+\infty$
$f'(x)$	||	$-$		$+$		$-$	
$f(x)$	|| $+\infty$	↘	0	↗	e^{-2}	↘	0

4. *Convexité, concavité :* la dérivée seconde de f est la fonction

$$\begin{aligned} f'' \colon \mathscr{D}_f &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f''(x) = 2\frac{3\ln^2(x)-5\ln(x)+1}{x^4} \end{aligned}$$

Dans $\mathscr{D}_f$ on a

$$\begin{aligned} &f''(x)>0 \text{ ssi } x\in]0;e^{\frac{5-\sqrt{13}}{6}}[\cup]e^{\frac{5+\sqrt{13}}{6}};+\infty[, \\ &f''(x)=0 \text{ ssi } x=e^{\frac{5\pm\sqrt{13}}{6}}, \\ &f''(x)<0 \text{ ssi } x\in]e^{\frac{5-\sqrt{13}}{6}};e^{\frac{5+\sqrt{13}}{6}}[. \end{aligned}$$

On conclut que

- ⋆ f est convexe sur $]0;e^{\frac{5-\sqrt{13}}{6}}[$ et sur $]e^{\frac{5+\sqrt{13}}{6}};+\infty[$,
- ⋆ f est concave sur $]e^{\frac{5-\sqrt{13}}{6}};e^{\frac{5+\sqrt{13}}{6}}[$,
- ⋆ $x=e^{\frac{5\pm\sqrt{13}}{6}}$ sont des points d'inflexion.

5. *Graphe :* voir la figure 9.3

Exercice 9.4

Étudier les variations et donner une représentation graphique de la fonction

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x)=\ln(x-x^5) \end{aligned}$$

en répondant aux questions suivantes :

1. ensemble de définition
2. comportement aux extrémités de l'ensemble de définition et recherche d'asymptotes
3. extrema locaux, sens de variation et tableaux des variations
4. graphe

Correction

1. *Ensemble de définition de f :* il faut $x-x^5>0$ donc

$$\mathscr{D}_f=]-\infty,-1[\cup]0,+1[.$$

2. *Comportement de f aux extrémités de l'ensemble de définition :*

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty, \qquad \lim_{x\to-1^-} f(x)=-\infty,$$
$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=-\infty, \qquad \lim_{x\to+1^+} f(x)=-\infty.$$

Puisque $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=-\infty$ il n'y a pas d'asymptotes en $-\infty$.

3. *Extrema locaux, sens de variation et tableaux des variations de f :* la dérivée de f est l'application

$$\begin{aligned} f'\colon \mathscr{D}_f &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f'(x) = \frac{1-5x^4}{x(1-x^4)} \end{aligned}$$

Dans $\mathscr{D}_f$ on a

$$\begin{aligned} &f'(x) > 0 \text{ ssi } x \in]0;5^{-1/4}[, \\ &f'(x) = 0 \text{ ssi } x = 5^{-1/4}, \\ &f'(x) < 0 \text{ ssi } x \in]-\infty;-1[\cup]5^{-1/4};1[. \end{aligned}$$

On conclut que

- ⋆ f est strictement croissante sur $]0;5^{-1/4}[$,
- ⋆ f est strictement décroissante sur $]-\infty;-1[$ et sur $]5^{-1/4};1[$,
- ⋆ $x_M = 5^{-1/4}$ est un point de minimum local et on a $f(x_M) < 0$.

Le tableau des variations est alors le suivant :

x	$-\infty$		-1		0		$5^{-1/4}$		$+1$
$f'(x)$		$-$		//////		$+$		$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$-\infty$	//////	$-\infty$	↗	$f(x_M)$	↘	$-\infty$

4. *Graphe :* voir la figure 9.4

Exercice 9.5

Étudier les variations et donner une représentation graphique de la fonction

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = \frac{x^2}{\ln(x^2)-1} \end{aligned}$$

en répondant aux questions suivantes :

1. ensemble de définition
2. comportement aux extrémités de l'ensemble de définition et recherche d'asymptotes
3. extrema locaux, sens de variation et tableaux des variations
4. graphe

Correction

La fonction est paire, *i.e.* $f(-x) = f(x)$: on étudie donc seulement la fonction f^+ restriction de f à $\mathbb{R}^+$.

1. *Ensemble de définition de f^+ :* il faut $\begin{cases} \ln(x^2)-1 \neq 0 \\ x^2 > 0 \end{cases}$ donc

$$\mathscr{D}_{f^+} =]0,\sqrt{e}[\cup]\sqrt{e},+\infty[.$$

2. *Comportement de f^+ aux extrémités de l'ensemble de définition :*

$$\lim_{x\to 0^+} f^+(x) = 0^-, \qquad \lim_{x\to(\sqrt{e})^-} f^+(x) = -\infty,$$
$$\lim_{x\to(\sqrt{e})^+} f^+(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} f^+(x) = +\infty.$$

Puisque $\lim_{x\to+\infty} \frac{f^+(x)}{x} = +\infty$, il n'y a pas d'asymptotes en $+\infty$.

3. *Extrema locaux, sens de variation et tableaux des variations de f^+ :* la dérivée de f^+ est l'application

$$
\begin{aligned}
(f^+)'\colon \mathscr{D}_{f^+} &\to \mathbb{R}\\
x &\mapsto (f^+)'(x) = \frac{2x(2\ln(x)-1)-x^2\frac{2}{x}}{(2\ln(x)-1)^2} = 4\frac{x(\ln(x)-1)}{(2\ln(x)-1)^2}
\end{aligned}
$$

Dans $\mathscr{D}_{f^+}$ on a

$$
\begin{aligned}
&(f^+)'(x) > 0 \text{ ssi } x \in]e;+\infty[,\\
&(f^+)'(x) = 0 \text{ ssi } x = e,\\
&(f^+)'(x) < 0 \text{ ssi } x \in]0;\sqrt{e}[\cup]\sqrt{e};e[
\end{aligned}
$$

et $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = 0$. On conclut que

- ⋆ f^+ est strictement croissante sur $]e;+\infty[$,
- ⋆ f^+ est strictement décroissante sur $]0;\sqrt{e}[$ et sur $]\sqrt{e};e[$,
- ⋆ $x = e$ est un point de minimum local et on a $f^+(e) = e^2$.

Le tableau des variations est alors le suivant :

x	0		$\sqrt{e}$		e		$+\infty$
$(f^+)'(x)$		$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f^+(x)$	0	$\searrow$	$-\infty \;\|\|\; +\infty$	$\searrow$	e^2	$\nearrow$	$+\infty$

4. *Graphe :* voir la figure 9.5

Exercice 9.6

Soit $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une application définie par

$$
f(x) = \begin{cases} x^2\ln|x|, & \text{si } x \neq 0,\\ 0, & \text{si } x = 0.\end{cases}
$$

1. Montrer que f est continue en 0.
2. Calculer $f'(x)$ pour $x \neq 0$, puis $f'(0)$.
3. Étudier la continuité de f' en 0.
4. Établir si $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$.
5. Calculer les limites de f aux extrémités de l'ensemble de définition et recherche d'asymptotes
6. Trouver les extrema locaux, sens de variation et tableau des variations.
7. Dresser le graphe de f.

Correction

L'application $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ se réécrit

$$
f(x) = \begin{cases} x^2\ln(x), & \text{si } x > 0,\\ 0, & \text{si } x = 0,\\ x^2\ln(-x), & \text{si } x < 0.\end{cases}
$$

1. f est continue en 0 car
$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x^2\ln|x| = 0 = f(0).$$
2. La dérivée de f est l'application $f'\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par
$$
f'(x) = \begin{cases} 2x\ln(x)+x, & \text{si } x > 0,\\ \lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} x\ln|x| = 0, & \text{si } x = 0,\\ 2x\ln(-x)+x, & \text{si } x < 0,\end{cases}
$$
c'est-à-dire
$$
f'(x) = \begin{cases} 2x\ln|x|+x, & \text{si } x \neq 0,\\ 0, & \text{si } x = 0.\end{cases}
$$

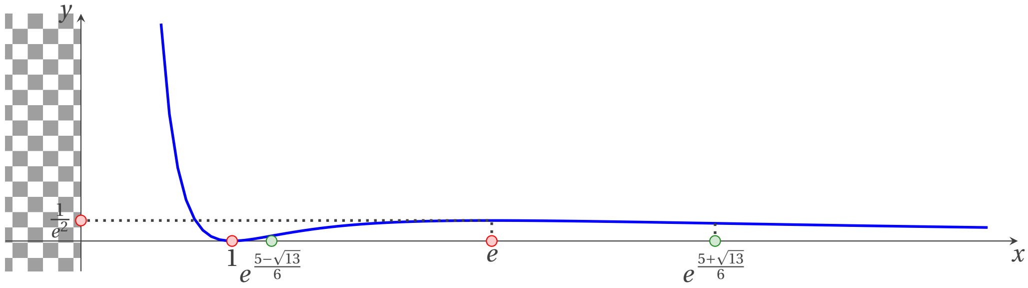


FIGURE 9.3 – Exercice 9.3

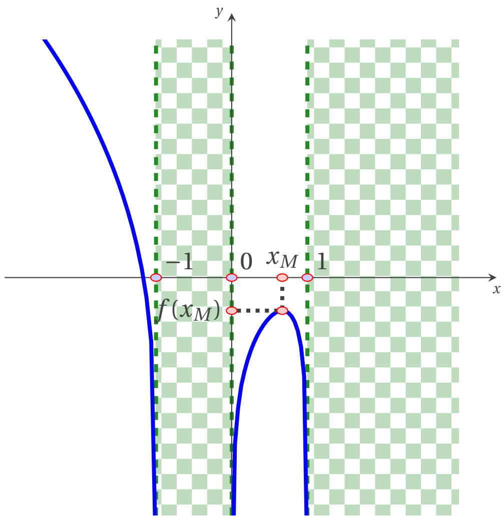


FIGURE 9.4 – Exercice 9.4.

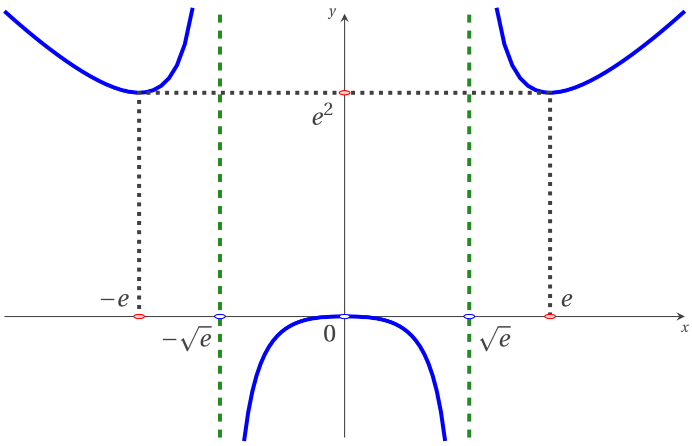


FIGURE 9.5 – Exercice 9.5

3. f' est continue en 0 car
$$\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0} 2x\ln|x| + x = 0 = f'(0).$$
4. $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$ car elle est clairement continue dans $\mathbb{R}$ (l'unique point délicat était 0 mais on a vu qu'elle y est continue) et de même pour sa dérivée première.
5. Limites de f aux extrémités de l'ensemble de définition :
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty,$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty,$$
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty,$$
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty.$$
Il n'y a pas d'asymptotes en $\pm\infty$.
6. On a
   ⋆ $f'(x) = 0$ ssi $x \in \left\{0, \pm\frac{1}{\sqrt{e}}\right\}$,
   ⋆ $f'(x) > 0$ ssi $x \in \left]-\frac{1}{\sqrt{e}};0\right[\cup \left]\frac{1}{\sqrt{e}};+\infty\right[$,
   ⋆ $f'(x) < 0$ ssi $x \in \left]-\infty;-\frac{1}{\sqrt{e}}\right[\cup \left]0;\frac{1}{\sqrt{e}}\right[$;

   donc
   ⋆ f est croissante pour $x \in \left]-\frac{1}{\sqrt{e}};0\right[$ et pour $x \in \left]\frac{1}{\sqrt{e}};+\infty\right[$,
   ⋆ f est décroissante pour $x \in \left]-\infty;-\frac{1}{\sqrt{e}}\right[$ et pour $x \in \left]0;\frac{1}{\sqrt{e}}\right[$,
   ⋆ f a un maximun (locale) en $x = 0$ et $f(0) = 0$,
   ⋆ f a un minimum (absolue) en $x = \pm\frac{1}{\sqrt{e}}$ et $f(\pm\frac{1}{\sqrt{e}}) = -\frac{1}{2e}$.

   Le tableau des variations est alors le suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{\sqrt{x}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{x}}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$+$		$-$		$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{1}{2e}$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{2e}$	$\nearrow$	$+\infty$

7. *Graphe :* voir la figure 9.6

Exercice 9.7

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par
$$f(x) = 2x + \sqrt{x^2+2x-2}.$$
1. Trouver l'ensemble de définition $\mathscr{D}_f$ de f.
2. Calculer les limites de f aux extrémités de l'ensemble de définition.
3. Calculer la dérivée $f'(x)$ de f, son ensemble de définition et étudier son signe.
4. En déduire le sens de variation de f et dresser le tableau de variation de f.
5. Établir le développement limité à l'ordre 2 de la fonction $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ en $-\infty$ puis en $+\infty$ et préciser la position de la courbe représentative de f par rapport à ces asymptotes.
6. Tracer les asymptotes et l'allure de la courbe de f.

Correction

1. La fonction $\star \mapsto \sqrt{\star}$ n'est définie que si $\star \geq 0$ donc
$$\mathscr{D}_f = \left\{x \in \mathbb{R} \,:\, x^2+2x-2 \geq 0\right\} = \left]-\infty;-1-\sqrt{3}\right] \cup \left[-1+\sqrt{3};+\infty\right[.$$

2. Observons d'abord que $f(x) = 2x + \sqrt{x^2+2x-2} = 2x + |x|\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}}$ donc

$$\lim_{x\to-\infty} 2x+\sqrt{x^2+2x-2} = \lim_{x\to-\infty} x\left(2-\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}}\right) = -\infty,$$
$$\lim_{x\to-1-\sqrt{3}} 2x+\sqrt{x^2+2x-2} = f(-1-\sqrt{3}) = -2-2\sqrt{3},$$
$$\lim_{x\to-1+\sqrt{3}} 2x+\sqrt{x^2+2x-2} = f(-1+\sqrt{3}) = -2+2\sqrt{3},$$
$$\lim_{x\to+\infty} 2x+\sqrt{x^2+2x-2} = \lim_{x\to+\infty} x\left(2+\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}}\right) = +\infty.$$

3. $f'(x) = 2 + \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x-2}}$ donc $\mathscr{D}_{f'} = \mathscr{D}_f \setminus \{-1\pm\sqrt{3}\}$ (car il faut exclure les $x \in \mathscr{D}_f$ qui annulent le dénominateur). Pour en étudier le signe on se rappelle que

	Solutions de l'équation $A(x) = \sqrt[n]{B(x)}$	Solutions de l'inégalité $A(x) > \sqrt[n]{B(x)}$	Solutions de l'inégalité $A(x) < \sqrt[n]{B(x)}$
Si n est impair	$(A(x))^n = B(x)$	$(A(x))^n > B(x)$	$(A(x))^n < B(x)$
Si n est pair	$\begin{cases} A(x) \ge 0 \\ (A(x))^n = B(x) \end{cases}$	$\begin{cases} B(x) \ge 0 \\ A(x) > 0 \\ (A(x))^n > B(x) \end{cases}$	$\begin{cases} A(x) < 0 \\ B(x) \ge 0 \end{cases} \lor \begin{cases} A(x) \ge 0 \\ (A(x))^n < B(x) \end{cases}$

donc

$$f'(x) = 0 \iff 2\sqrt{x^2+2x-2}+x+1 = 0 \iff \underbrace{-\frac{x+1}{2}}_{A(x)} = \underbrace{\sqrt{x^2+2x-2}}_{\sqrt{B(x)}}$$
$$\iff \begin{cases} -\frac{x+1}{2} \ge 0, \\ x^2+2x+1 = 4x^2+8x-8, \end{cases} \iff \begin{cases} x \le -1, \\ x^2+2x-3 = 0, \end{cases} \iff x = -3$$

et

$$f'(x) > 0 \iff \frac{x+1+2\sqrt{x^2+2x-2}}{\sqrt{x^2+2x-2}} > 0 \iff x+1+2\sqrt{x^2+2x-2} > 0$$
$$\iff \underbrace{-\frac{x+1}{2}}_{A(x)} < \underbrace{\sqrt{x^2+2x-2}}_{\sqrt{B(x)}} \iff \begin{cases} -\frac{x+1}{2} < 0, \\ x^2+2x-2 \ge 0 \end{cases} \cup \begin{cases} -\frac{x+1}{2} \ge 0, \\ x^2+2x+1 < 4x^2+8x-8, \end{cases} \iff x > -1+\sqrt{3}.$$

4. Tableau de variation de f :

x	$-\infty$		-3		$-1-\sqrt{3}$		$-1+\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$				$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-5	$\searrow$	$-2-2\sqrt{3}$		$-2+2\sqrt{3}$	$\nearrow$	$+\infty$

5. On a

$$\frac{f(x)}{x} = \begin{cases} 2+\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}} & \text{si } x > 0, \\ 2-\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}} & \text{si } x < -1-\sqrt{3} \cup -1+\sqrt{3} \le x < 0, \end{cases}$$

donc

- ⋆ le développement limité de $\frac{f(x)}{x}$ en $-\infty$ à l'ordre 2 est

$$g(t)=tf(1/t)=2-\sqrt{1+2t-2t^2}=2-1-\frac{\left(2t-2t^2\right)}{2}+\frac{\left(2t-2t^2\right)^2}{8}+o(t^2)=1-t+\frac{t^2}{2}+o(t^2)$$

donc $1-\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+o(x^{-2})$ est le développement limité de $f(x)/x$ en $-\infty$ à l'ordre 2. On conclut que $y=x-1$ est l'équation de l'asymptote oblique au graphe de f en $-\infty$; l'asymptote est en dessous de la courbe ;

- ⋆ le développement limité de $\frac{f(x)}{x}$ en $+\infty$ à l'ordre 2 est

$$g(t)=tf(1/t)=2+\sqrt{1+2t-2t^2}=2+1+\frac{\left(2t-2t^2\right)}{2}-\frac{\left(2t-2t^2\right)^2}{8}+o(t^2)=3+t-\frac{t^2}{2}+o(t^2)$$

donc $3+\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+o(x^{-2})$ est le développement limité de $f(x)/x$ en $+\infty$ à l'ordre 2. On conclut que $y=3x+1$ est l'équation de l'asymptote oblique au graphe de f en $+\infty$; l'asymptote est au dessus de la courbe.

6. *Graphe :* voir la figure 9.7

Exercice 9.8

On considère la fonction $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par

$$f(x)=\frac{x^2}{x+1}e^{\frac{1}{x}}.$$

1. Trouver l'ensemble de définition $\mathscr{D}_f$ de f.
2. Calculer les limites de f aux extrémités de l'ensemble de définition.
3. Préciser les asymptotes éventuelles et la position de la courbe par rapport aux asymptotes.
4. Calculer la dérivée $f'(x)$ de f et étudier son signe.
5. En déduire le sens de variation de f et dresser le tableau de variation de f.
6. Tracer les asymptotes et l'allure de la courbe de f.

Correction

1. Le ensemble de définition $\mathscr{D}_f$ de f est l'ensemble $\mathscr{D}_f=\{\,x\in\mathbb{R}\mid x\neq-1 \text{ et } x\neq 0\,\}$.
2. On a

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty,\qquad \lim_{x\to-1^{\mp}} f(x)=\mp\infty,\qquad \lim_{x\to0^-} f(x)=0,\qquad \lim_{x\to0^+} f(x)=+\infty,\qquad \lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty.$$

3. Rechercher l'existence d'une asymptote revient à rechercher un développement limité au voisinage de 0 de la fonction $g(t)=f(1/t)$:

$$g(t)=\frac{1}{t}\frac{1}{1+t}e^t=\frac{1}{t}\left(1-t+t^2+o(t^3)\right)\left(1+t+\frac{t^2}{2}+o(t^2)\right)=\frac{1}{t}+\frac{t}{2}+o(t)$$

d'où $f(x)=x+\frac{1}{2x}+o(1/x)$. La courbe $y=f(x)$ admet donc la droite d'équation $y=x$ pour asymptote à la fois lorsque x tend vers $-\infty$ et lorsque x tend vers $+\infty$.
Lorsque x tend vers $\pm\infty$, $f(x)-x$ est du signe de $\frac{1}{2x}$: la courbe est donc en-dessous de l'asymptote lorsque x tend vers $-\infty$ et au-dessus lorsque x tend vers $+\infty$.

4. La dérivée $f'(x)$ de f est

$$f'(x)=\frac{2x(x+1)-x^2}{(x+1)^2}e^{\frac{1}{x}}+\frac{x^2}{x+1}\left(-\frac{1}{x^2}\right)e^{\frac{1}{x}}=\frac{x^2+x-1}{(x+1)^2}e^{\frac{1}{x}}$$

donc l'ensemble de définition $\mathscr{D}_{f'}$ de f' est encore l'ensemble $\mathscr{D}_f$ et

- ⋆ $f'(x)=0$ si $x=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ ou $x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$,
- ⋆ $f'(x)>0$ si $x<\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ ou $x>\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$,
- ⋆ $f'(x)<0$ si $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}<x<\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$,
- ⋆ $\lim_{x\to0^-} f'(x)=0$.

5. Tableau de variation de f :

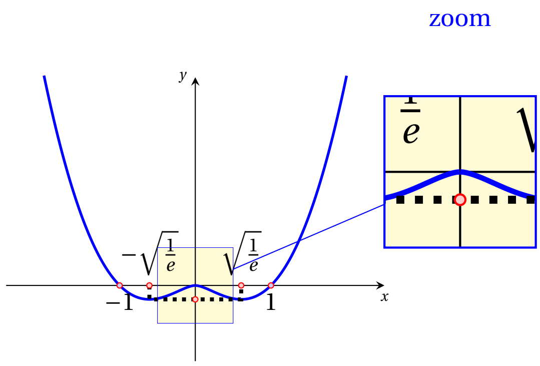


FIGURE 9.6 – Exercice 9.6

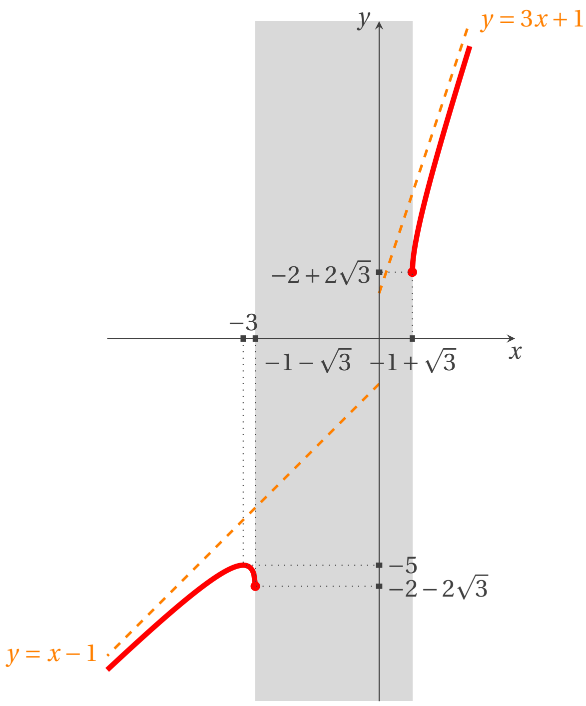


FIGURE 9.7 – Exercice 9.7

x	$-\infty$		$\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$		-1		0		$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	≈ -2.283253698	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	$0 \Vert +\infty$	$\searrow$	≈ 1.190529914	$\nearrow$	$+\infty$

On en déduit que

- ⋆ f est croissante sur $\left[-\infty; \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right]$ et sur $\left[\frac{-1+\sqrt{5}}{2}; +\infty\right]$,
- ⋆ f est décroissante sur $\left[\frac{-1-\sqrt{5}}{2}; -1\right]$, sur $[-1;0]$ et sur $\left[0; \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right]$,
- ⋆ $x = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ est un maximum local, $x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ un minimum local.

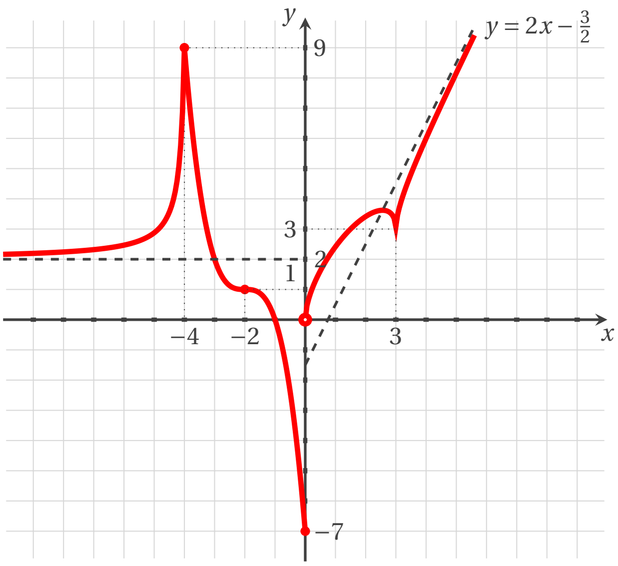
6. *Graphe :* voir la figure 9.8

Exercice 9.9

Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} 2 - \frac{7}{7x-27} & \text{si } x \le -4, \\ 1-(x+2)^3 & \text{si } -4 < x \le 0, \\ x + \sqrt{|x^2-3x|} & \text{si } x > 0, \end{cases}$$

dont le graphe est représenté dans la figure ci-dessous.



Répondre aux questions suivantes (pour la plupart des questions il n'est pas nécessaire de faire des calculs mais il faut justifier la réponse) :

1. Quel est l'ensemble de définition de f ?
2. Étudier la continuité et la dérivabilité de f en $x = -4$, en $x = -2$, en $x = 0$ et en $x = 3$. Donner, lorsqu'il est possible, la valeur de f' en chacun de ces points.
3. Quelle est l'équation de la droite tangente au graphe de f en $x = -2$? Et en $x = 4$?
4. Quel est le signe de $f'(x)$ pour $x \in \mathscr{D}_{f'}$?
5. Quel est le signe de $f''(x)$ pour $x \in \mathscr{D}_{f''}$?
6. Calculer $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.
7. Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

Correction

1. $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$.

2. Considérons chaque point séparément :
   - ⋆ f est continue en -4 et $f(-4)=9$; elle n'est pas dérivable en $x=-4$ car $\lim\limits_{h\to0^-}\frac{f(-4+h)-f(-4)}{h}=\lim\limits_{h\to0^-}\frac{2-\frac{7}{7(h-4)-27}-9}{h}=\frac{49}{(55)^2}$ tandis que $\lim\limits_{h\to0^+}\frac{f(-4+h)-f(-4)}{h}=\lim\limits_{h\to0^+}\frac{1-(-4+h+2)^3-9}{h}=-12$;
   - ⋆ f est continue en -2 et $f(-2)=1$; f est dérivable en -2 et $f'(-2)=0$;
   - ⋆ f n'est pas continue en $x=0$ car $f(0)=1-(-4+2)^3=-7$ mais $\lim\limits_{h\to0^+}f(x)=\lim\limits_{h\to0^+}x+\sqrt{|x^2-3x|}=0$;
   - ⋆ f est continue en $x=3$ et $f(3)=3$; elle n'est pas dérivable en $x=3$ car $\lim\limits_{h\to0^-}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=\lim\limits_{h\to0^-}\frac{h+3+\sqrt{3(h+3)-(h+3)^2}}{h}=\lim\limits_{h\to0^-}\frac{h+3+\sqrt{-h(h+3)}}{h}=\infty$ et de même $\lim\limits_{h\to0^+}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=\lim\limits_{h\to0^+}\frac{h+3+\sqrt{(h+3)^2-3(h+3)}}{h}=\lim\limits_{h\to0^+}\frac{h+3+\sqrt{h(h+3)}}{h}=\infty$.
3. L'équation de la droite tangente en x_0 au graphe d'une fonction f dérivable en x_0 est $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$. Par conséquente l'équation de la droite tangente au graphe de f en $x=-2$ est $y=1$ et en $x=4$ est $y=f'(4)(x-4)+f(4)=\frac{9}{4}x-3$.
4. $f'(x)=0$ pour $x=-2$ et $x=\frac{3}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt2}\right)$, $f'(x)$ n'existe pas pour $x\in\{-4,0,3\}$, $f'(x)>0$ pour $x\in\left]-\infty;-4\right[\cup\left]0;\frac{3}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt2}\right)\right[\cup\left]3;+\infty\right[$ et $f'(x)<0$ pour $x\in\left]-4;-2\right[\cup\left]-2;0\right[\cup\left]\frac{3}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt2}\right);3\right[$.
5. $f''(x)=0$ pour $x=-2$, $f''(x)$ n'existe pas pour $x\in\{-4,0,3\}$, $f''(x)>0$ pour $x\in]-\infty;-4[\cup]-4;-2[$ et $f''(x)<0$ pour $x\in]-2;0[\cup]0;3[\cup]3;+\infty[$.
6. $\lim_{x\to-\infty}f(x)=1$ donc $y=1$ est asymptote en $-\infty$.
7. $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

Exercice 9.10
Considérons la fonction $f\colon A\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par

$$f(x)=\frac{e^{3x+1}}{x^2-2x}.$$

1. Trouver l'ensemble de définition A.
2. Trouver le signe de f.
3. Trouver les limites où f n'est pas définie et pour $x\to\pm\infty$.
4. Trouver la dérivée de f et où f est croissante ou décroissante.
5. Dessiner le graphe de f.

Correction

1. Pour que $\frac{1}{\star}$ soit définie il faut que $\star\neq0$ donc
$$A=\{x\in\mathbb{R}\mid x^2-2x\neq0\}=]-\infty;0[\cup]0;2[\cup]2;+\infty[=\mathbb{R}\setminus\{0;2\}.$$
2. Comme $e^\star>0$ pour tout $\star\in\mathbb{R}$, le signe de f coïncide avec le signe du dénominateur et on a
$$\begin{aligned}
f(x)=0 &\iff x^2-2x=0 &&\iff x(x-2)=0 &&\iff \nexists\, x\in A,\\
f(x)>0 &\iff x^2-2x>0 &&\iff x(x-2)>0 &&\iff x\in]-\infty;0[\cup]2;+\infty[,\\
f(x)<0 &\iff x^2-2x<0 &&\iff x(x-2)>0 &&\iff x\in]0;2[.
\end{aligned}$$
3. Trouver les limites où f n'est pas définie et pour $x\to\pm\infty$.
$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=0^+\qquad\lim_{x\to0^\mp}f(x)=\pm\infty$$
$$\lim_{x\to2^\mp}f(x)=\mp\infty\qquad\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$$
donc $y=0$ est asymptote horizontale à $-\infty$, $y=0$ et $y=2$ sont asymptotes verticales et comme $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$ il n'y a pas d'asymptotes à $+\infty$.
4. $f'(x)=\dfrac{(e^{3x+1})'(x^2-2x)-(e^{3x+1})(x^2-2x)'}{(x^2-2x)^2}=\dfrac{3(e^{3x+1})(x^2-2x)-(e^{3x+1})(2x-2)}{(x^2-2x)^2}=\dfrac{e^{3x+1}}{(x^2-2x)^2}(3x^2-8x+2)$.
   Comme $\frac{e^{3x+1}}{(x^2-2x)^2}>0$ pour tout $x\in A$, le signe de f' coïncide avec le signe de $3x^2-8x+2$ et on a

$$
\begin{aligned}
3x^2-8x+2=0 &\iff x_{1,2}=\frac{8\pm\sqrt{40}}{6}=\frac{4\pm\sqrt{10}}{3},\\
3x^2-8x+2>0 &\iff x\in\left]-\infty;\frac{4-\sqrt{10}}{3}\right[\cup\left]\frac{4+\sqrt{10}}{3};+\infty\right[,\\
3x^2-8x+2<0 &\iff x\in\left]\frac{4-\sqrt{10}}{3};\frac{4+\sqrt{10}}{3}\right[.
\end{aligned}
$$

5. *Graphe de f (non à l'échelle) :* voir la figure 9.9

Exercice 9.11

Tracer le graphe de la fonction

$$f(x)=\frac{x}{x^2-5x+4}$$

en détaillant

1. son domaine et son signe,
2. les limites pour $x\to\pm\infty$ et aux bornes du domaine de définition,
3. étudier la dérivée de f.

Correction

1. Pour que $\frac{1}{\star}$ soit défini il faut que $\star\neq 0$ donc l'ensemble de définition A de f est l'ensemble

$$A=\{x\in\mathbb{R}\mid x^2-5x+4\neq 0\}=\,]-\infty;1[\,\cup\,]1;4[\,\cup\,]4;+\infty[\,=\mathbb{R}\setminus\{1;4\}.$$

Étude du signe de f :

	$-\infty$		0		1		4		$+\infty$
signe du numérateur		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
signe du dénominateur		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
signe de $f(x)$		$-$	0	$+$	‖	$-$	‖	$+$	

2. Limites de f pour $x\to\pm\infty$ (et où f n'est pas définie) :

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=0^- \qquad \lim_{x\to 1^{\mp}}f(x)=\pm\infty$$

$$\lim_{x\to 4^{\mp}}f(x)=\mp\infty \qquad \lim_{x\to+\infty}f(x)=0^+$$

donc
- ⋆ $y=0$ est asymptote horizontale à $-\infty$ et à $+\infty$,
- ⋆ $y=1$ et $y=4$ sont asymptotes verticales.

3. Dérivée première :

$$f'(x)=\frac{(x)'(x^2-5x+4)-x(x^2-5x+4)'}{(x^2-5x+4)^2}=\frac{(x^2-5x+4)-x(2x-5)}{(x^2-5x+4)^2}=\frac{-x^2+4}{(x^2-5x+4)^2}.$$

Comme $(x^2-5x+4)^2>0$ pour tout $x\in A$, le signe de f' coïncide avec le signe de $-x^2+4$ et on a

$$
\begin{aligned}
f'(x)=0 &\iff x=\pm 2,\\
f'(x)<0 &\iff x\in\,]-\infty;-2[\,\cup\,]2;4[\,\cup\,]4;+\infty[,\\
f'(x)>0 &\iff x\in\,]-2;1[\,\cup\,]1;2[.
\end{aligned}
$$

Pour le graphe de f voir la figure 9.10.

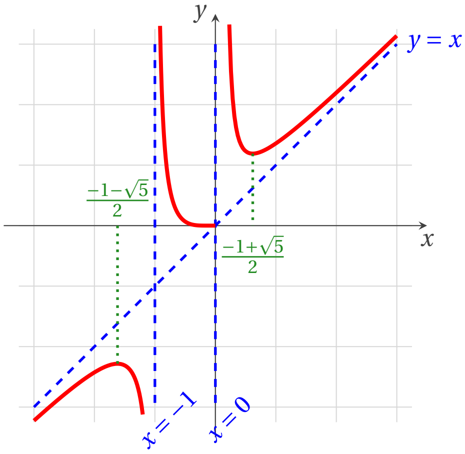


FIGURE 9.8 – Exercice 9.8

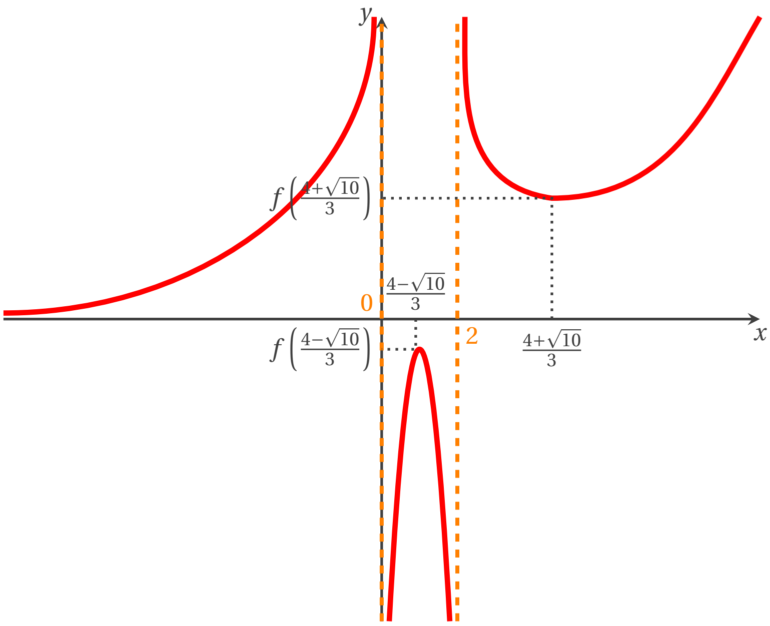


FIGURE 9.9 – Exercice 9.10

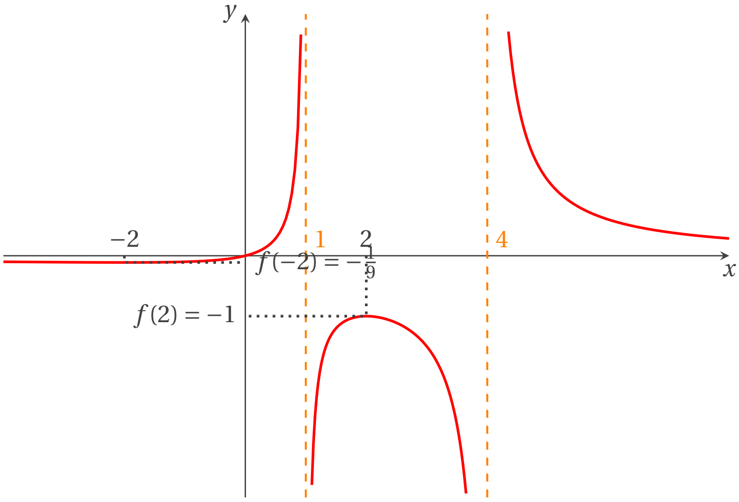
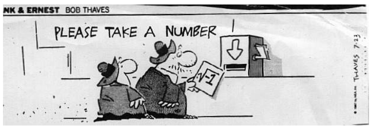


FIGURE 9.10 – Exercice 9.11



10 Nombres complexes

10.1 Définition (Forme algébrique)
Tout nombre $z \in \mathbb{C}$ s'écrit, de manière unique, sous la forme algébrique $z = x + iy$ où $x, y \in \mathbb{R}$ et i est tel que $i^2 = -1$. Le réel x s'appelle “partie réelle de z” et se note $\Re(z)$. Le réel y s'appelle “partie imaginaire de z” et se note $\Im(Z)$. Si $y = 0$ alors $z \in \mathbb{R}$, si $x = 0$ alors z est un imaginaire pur.

10.2 Propriété

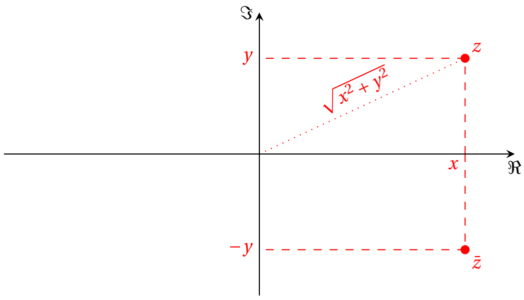
Égalité Deux nombres complexes $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ sont égaux ssi $(x, y) = (x', y')$.
Attention : il n'y a pas d'inégalités en $\mathbb{C}$.

Opérations Soient deux nombres complexes $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$.

$$z + z' = (x + x') + i(y + y'), \qquad zz' = (xx' - yy') + i(xy' + x'y).$$

Conjugué Le conjugué d'un nombre complexe $z = x + iy$ est le numéro complexe $\bar{z} = x + i(-y)$ et on a

$$\bar{\bar{z}} = z, \qquad \overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}', \qquad \overline{zz'} = \bar{z}\bar{z}', \qquad \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'}, \qquad z + \bar{z} = 2\Re(z), \qquad z - \bar{z} = 2\Im(z).$$



10.3 Définition (Forme trigonométrique et exponentielle)

Forme trigonométrique Tout nombre complexe non nul z s'écrit sous forme trigonométrique $z = \varrho(\cos\vartheta + \sin\vartheta)$ avec $\varrho > 0$ le module de z et ϑ un argument de z.

Module Le module d'un nombre complexe $z = x + iy$ est le nombre réel positif $\sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$. On le note $|z|$ ou ϱ ou r.
On a

$$|z| = 0 \iff z = 0; \qquad |\Re(z)| \le |z|; \qquad |\Im(z)| \le |z|;$$

$$|zz'| = |z|\,|z'|; \qquad |z^n| = |z|^n, \text{ pour } n \in \mathbb{N}; \qquad \left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|};$$

$$\Big||z| - |z'|\Big| \le |z - z'| \le |z| + |z'|.$$

Argument On le note $\arg(z)$ et il est défini, modulo 2π, par $\cos\vartheta = \frac{x}{\varrho}$ et $\sin\vartheta = \frac{y}{\varrho}$. On a (à $2k\pi$ près, $k \in \mathbb{Z}$)

$$\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z'); \qquad \arg(1/z) = -\arg(z);$$
$$\arg(z/z') = \arg(z) - \arg(z'); \qquad \arg(z^n) = n\arg(z), \text{ pour } n \in \mathbb{Z}.$$

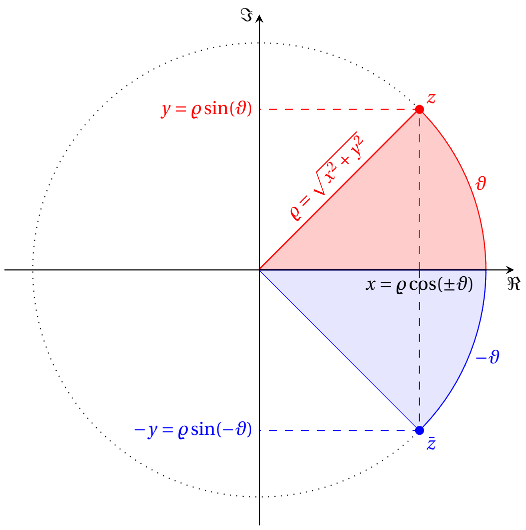
Forme exponentielle Tout nombre complexe non nul z s'écrit sous forme exponentielle $z = \varrho e^{i\vartheta}$.

- ⋆ Formule de Moivre : pour tout $\vartheta \in \mathbb{R}$ et pour tout $k \in \mathbb{Z}$

$$z^n = (\varrho(\cos\vartheta + \sin\vartheta))^n = \varrho^n(\cos(n\vartheta) + \sin(n\vartheta)) = \varrho^n e^{in\vartheta}.$$

- ⋆ Formules d'Euler : pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $k \in \mathbb{Z}$ on a

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \qquad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i},$$
$$\cos(nx) = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2}, \qquad \sin(nx) = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}.$$

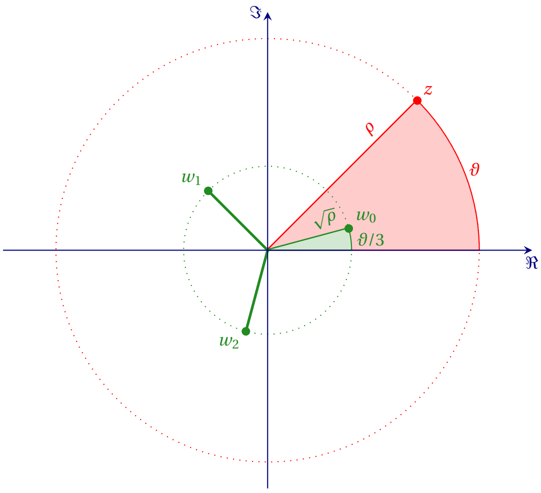


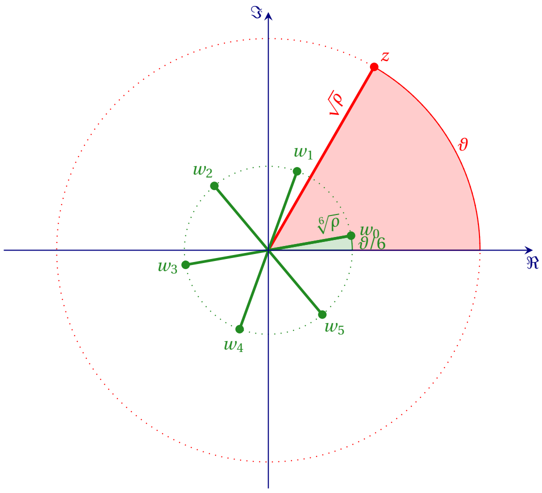
Nombres complexes	Forme algébrique	Module	Argument (modulo 2π) (complexe non nul)	Forme trigonométrique (complexe non nul)	Forme exponentielle (complexe non nul)
z	$x+iy$	$\varrho=\sqrt{x^2+y^2}$	$\cos(\vartheta)=\dfrac{x}{\varrho},\ \sin(\vartheta)=\dfrac{y}{\varrho}$	$\varrho\left(\cos(\vartheta)+i\sin(\vartheta)\right)$	$\varrho e^{i\vartheta}$
z'	$x'+iy'$	$\varrho'=\sqrt{(x')^2+(y')^2}$	$\cos(\vartheta')=\dfrac{x'}{\varrho'},\ \sin(\vartheta')=\dfrac{y'}{\varrho'}$	$\varrho'\left(\cos(\vartheta')+i\sin(\vartheta')\right)$	$\varrho' e^{i\vartheta'}$
$\bar{z}$	$x-iy$	ϱ	$-\vartheta$	$\varrho\left(\cos(\vartheta)-i\sin(\vartheta)\right)$	$\varrho e^{-i\vartheta}$
$z+z'$	$(x+x')+i(y+y')$				
zz'	$(xx'-yy')+i(xy'+x'y)$	$\varrho\varrho'$	$\vartheta+\vartheta'$	$\varrho\varrho'\left(\cos(\vartheta+\vartheta')+i\sin(\vartheta+\vartheta')\right)$	$\varrho\varrho' e^{i\vartheta\vartheta'}$
$z^n\ (n\in\mathbb{N})$		ϱ^n	$n\vartheta$	$\varrho^n\left(\cos(n\vartheta)+i\sin(n\vartheta)\right)$	$\varrho^n e^{in\vartheta}$
$\dfrac{1}{z}=\dfrac{\bar{z}}{\lvert z\rvert^2}\ (z\neq 0)$	$\dfrac{x-iy}{x^2+y^2}$	$\dfrac{1}{\varrho}$	$-\vartheta$	$\frac{1}{\varrho}\left(\cos(\vartheta)-i\sin(\vartheta)\right)$	$\frac{1}{\varrho}e^{-i\vartheta}$
$\dfrac{z}{z'}=\dfrac{z\bar{z'}}{\lvert z'\rvert^2}\ (z'\neq 0)$	$\dfrac{(xx'+yy')+i(yx'-xy')}{(x')^2+(y')^2}$	$\dfrac{\varrho}{\varrho'}$	$\vartheta-\vartheta'$	$\dfrac{\varrho}{\varrho'}\left(\cos(\vartheta-\vartheta')-i\sin(\vartheta-\vartheta')\right)$	$\dfrac{\varrho}{\varrho'}e^{i(\vartheta-\vartheta')}$

10.4 Proposition (Racines n-ièmes)

Tout nombre complexe non nul $z = \varrho e^{i\vartheta}$ possède n racines n-ièmes

$$w_k = \sqrt[n]{\varrho} e^{i\frac{\vartheta+2k\pi}{n}} \text{ avec } k \in \{0, 1, \dots, n-1\}.$$





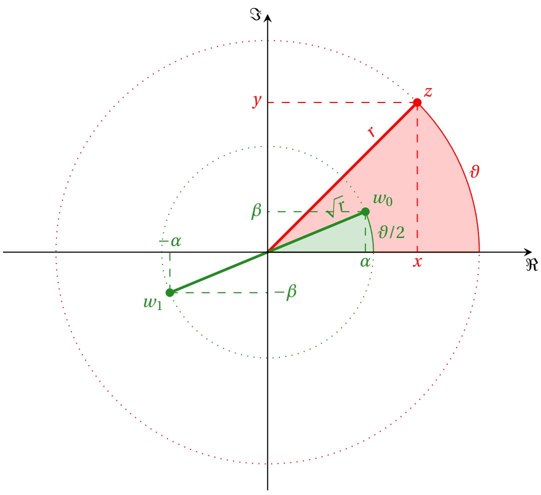
Astuce

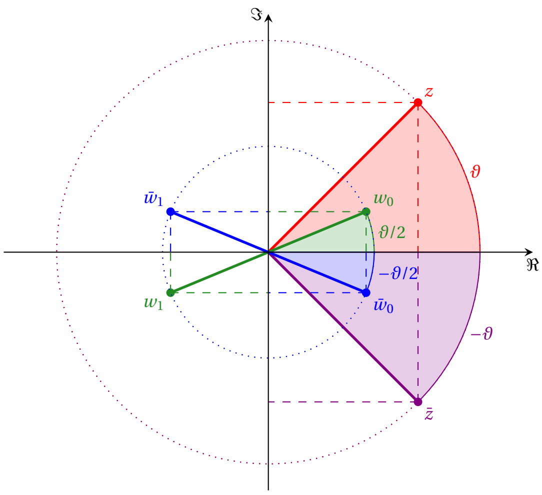
Soit $z = x + iy$ un nombre complexe. Pour déterminer les deux racines carrées $w_1 = \alpha + i\beta$ et $w_2 = -w_1$ de z il est parfois plus simple de procéder par identification, c'est-à-dire de chercher les réels α et β tels que $(x + iy) = (\alpha + i\beta)^2$; on obtient les relations

$$\alpha^2 - \beta^2 = x, \qquad 2\alpha\beta = y, \qquad \alpha^2 + \beta^2 = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Autrement dit, en choisissant $\alpha \geq 0$,

$$\alpha = \sqrt{\frac{x + \sqrt{x^2 + y^2}}{2}}, \qquad \beta = \text{signe}(y)\sqrt{\frac{-x + \sqrt{x^2 + y^2}}{2}}.$$





10.5 Proposition

L'équation $az^2 + bz + c = 0$, où $a \neq 0$, b et c appartiennent à $\mathbb{C}$, admet deux solutions dans $\mathbb{C}$ (pas nécessairement distinctes) :

$$z_1 = \frac{-b + \delta}{2a}, \qquad z_2 = \frac{-b - \delta}{2a},$$

où δ et $-\delta$ sont les deux racines carrées de $\Delta = b^2 - 4ac$.

Exercices

Exercice 10.1
Calculer les racines carrées de

a) 1 b) i c) $3+4i$ d) $8-6i$

e) $7+24i$ f) $3-4i$ g) $24-10i$ h) $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$

Correction

(a) $z=1+0i \implies x=1,\ y=0 \implies \begin{cases}\alpha=1\\ \beta=0\end{cases} \implies w_0=1$ et $w_1=-1$

(b) $z=i \implies x=0,\ y=1 \implies \begin{cases}\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \beta=\frac{1}{\sqrt{2}}\end{cases} \implies w_0=\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}=e^{i\pi/4}$ et $w_1=-\frac{1}{\sqrt{2}}-i\frac{1}{\sqrt{2}}=e^{i5\pi/4}$

(c) $z=3+4i \implies x=3,\ y=4 \implies \begin{cases}\alpha=2\\ \beta=1\end{cases} \implies w_0=2+i$ et $w_1=-2-i$

(d) $z=8-6i \implies x=8,\ y=-6 \implies \begin{cases}\alpha=3\\ \beta=-1\end{cases} \implies w_0=3-i$ et $w_1=-3+i$: on aurait pu tout simplement remarquer que z est le conjugué du complexe au point (c)

(e) $z=7+24i \implies x=7,\ y=24 \implies \begin{cases}\alpha=4\\ \beta=3\end{cases} \implies w_0=4+3i$ et $w_1=-4-3i$

(f) $z=3-4i \implies x=3,\ y=-4 \implies \begin{cases}\alpha=2\\ \beta=-1\end{cases} \implies w_0=2-i$ et $w_1=-2+i$

(g) $z=24-10i \implies x=24,\ y=-10 \implies \begin{cases}\alpha=5\\ \beta=-1\end{cases} \implies w_0=5-i$ et $w_1=-5+i$

(h) $z=\frac{1+i}{\sqrt{2}}=\frac{1}{2}e^{i\pi/4} \implies w_0=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\pi/8}$ et $w_1=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{i(\pi/8+\pi)}$

Exercice 10.2
Trouver (sous forme algébrique et trigonométrique) toutes les racines complexes de l'équation

$$z^2-(1+2i)z+i-1=0.$$

Correction
$A=1$, $b=-1-2i$, $c=i-1$, $\Delta=b^2-4ac=(-(1+2i))^2-4(i-1)=1$ donc $\delta_0=1$ et $\delta_1=-\delta_0$ et finalement $z_0=\frac{-b+\delta_0}{2}=1+i=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$ et $z_1=\frac{-b-\delta_0}{2}=i=\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

Exercice 10.3
Trouver toutes les solutions complexes des équations

a) $z^2=2$, b) $z^2=3i$, c) $z^2=2+3i$,

d) $z^2=1+bi$ (b est un paramètre réel), e) $z^2-2iz+2-4i=0$, f) $z^2+2z+(1-2i)=0$,

g) $z^2+2(1+i)z-5(1+2i)=0$, h) $z^2-(5+3i)z+7i+4=0$, i) $z^2-\sqrt{3}z-i=0$,

j) $z^2+z+1=0$, k) $z^2-(1+2i)z+i-1=0$, l) $z^2-(5-14i)z-2(5i+12)=0$,

m) $z^2-(3+4i)z-1+5i=0$, n) $4z^2-2z+1=0$, o) $z^2-(11-5i)z+24-27i=0$,

p) $z^4+2z^2+4=0$.

Correction

1. $z^2=2=2e^{i0} \implies z_0=\sqrt{2}e^{i0}=\sqrt{2}$ et $z_1=\sqrt{2}e^{i\pi}=-\sqrt{2}$
2. $z^2=3i=3e^{i\pi} \implies z_0=\sqrt{3}e^{i\pi/4}$ et $z_1=\sqrt{3}e^{i5\pi/4}$

3. $z^2=2+3i \implies x=2,\ y=3 \implies \begin{cases}\alpha=\sqrt{\frac{2+\sqrt{13}}{2}}\\ \beta=\sqrt{\frac{-2+\sqrt{13}}{2}}\end{cases} \implies z_0=\sqrt{\frac{2+\sqrt{13}}{2}}+i\sqrt{\frac{-2+\sqrt{13}}{2}}$ et $z_1=-z_0$
4. $z^2=1+bi$ (b est un paramètre réel) $\implies x=1,\ y=b \implies \begin{cases}\alpha=\sqrt{\frac{1+\sqrt{1+b^2}}{2}}\\ \beta=\operatorname{signe}(b)\sqrt{\frac{-1+\sqrt{1+b^2}}{2}}\end{cases} \implies$
$$\begin{cases} z_0=\sqrt{\frac{1+\sqrt{1+b^2}}{2}}+i\sqrt{\frac{-1+\sqrt{1+b^2}}{2}} & \text{si } b>0,\\ z_0=\sqrt{\frac{1+\sqrt{1+b^2}}{2}}-i\sqrt{\frac{-1+\sqrt{1+b^2}}{2}} & \text{si } b<0,\\ z_0=1 & \text{si } b=0,\end{cases}$$
et $z_1=-z_0$
5. $z^2-2iz+2-4i=0 \implies \delta^2=(-2i)^2-4(2-4i)=-12+16i \implies \delta_0=2+4i \implies z_0=\frac{2i+2+4i}{2}=1+3i$ et $z_1=\frac{2i-2-4i}{2}=-1-i$
6. $z^2+2z+(1-2i)=0 \implies \delta^2=2^2-4(1-2i)=8i \implies \delta_0=2+2i \implies z_0=\frac{-2+2+2i}{2}=i$ et $z_1=\frac{-2-2-2i}{2}=-2-i$
7. $z^2+2(1+i)z-5(1+2i)=0 \implies \delta^2=(2(1+i))^2-4(-5(1+2i))=20+48i \implies \delta_0=6+4i \implies z_0=\frac{-2-2i+6+4i}{2}=2+i$ et $z_1=\frac{-2-2i-6-4i}{2}=-4-3i$
8. $z^2-(5+3i)z+7i+4=0 \implies \delta^2=(-(5+3i))^2-4(4+7i)=2i \implies \delta_0=1+i \implies z_0=\frac{5+3i+1+i}{2}=3+2i$ et $z_1=\frac{5+3i-1-i}{2}=2+i$
9. $z^2-\sqrt{3}z-i=0 \implies \delta^2=(-\sqrt{3})^2-4(-i)=3+4i \implies \delta_0=2+i \implies z_0=\frac{\sqrt{3}+2+i}{2}$ et $z_1=\frac{\sqrt{3}-2-i}{2}$
10. $z^2+z+1=0 \implies \delta^2=-3 \implies \delta_0=i\sqrt{3} \implies z_0=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ et $z_1=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$
11. $z^2-(1+2i)z+i-1=0 \implies \delta^2=(-(1+2i))^2-4(i-1)=1 \implies \delta_0=1 \implies z_0=\frac{1+2i-1}{2}=i$ et $z_1=\frac{1+2i+1}{2}=1+i$
12. $z^2-(5-14i)z-2(5i+12)=0 \implies \delta^2=-75-100i \implies \delta_0=5-10i \implies z_0=5-12i$ et $z_1=-2i$
13. $z^2-(3+4i)z-1+5i=0 \implies \delta^2=-3+4i \implies \delta_0=1+2i \implies z_0=2+3i$ et $z_1=1+i$
14. $4z^2-2z+1=0 \implies \delta^2=-12 \implies \delta_0=2\sqrt{3}i \implies z_0=\frac{1-\sqrt{3}i}{4}$ et $z_1=\frac{1+\sqrt{3}i}{4}$
15. $z^2-(11-5i)z+24-27i=0 \implies \delta^2=-2i \implies \delta_0=1-i \implies z_0=6-3i$ et $z_1=5-2i$
16. On pose $w=z^2$ et on résout d'abord $w^2+2w+4=0 \implies \delta^2=-12 \implies \delta_0=2\sqrt{3}i \implies w_0=-1+\sqrt{3}i$ et $w_1=-1-\sqrt{3}i$.
On résout maintenant les deux équations
   - ⋆ $z^2=w_0 \implies \begin{cases}\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \beta=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\end{cases} \implies z_0=\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ et $z_1=-\frac{1}{\sqrt{2}}-i\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$
   - ⋆ $z^2=w_1 \implies \begin{cases}\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \beta=-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\end{cases} \implies z_3=\frac{1}{\sqrt{2}}-i\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ et $z_4=-\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

11 Primitives et Intégrales

11.1 Primitives

11.1 Définition (Primitive)
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Une fonction $f: I \to \mathbb{R}$ est *intégrable* s'il existe une fonction dérivable $F: I \to \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in I$, $F'(x) = f(x)$. Une telle fonction F est une *primitive* (ou *intégrale indéfinie*) de f.

11.2 Proposition (Existence des primitives)
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f: I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors f est intégrable.

11.3 Propriété

- ⋆ Si F est une primitive de f alors, pour tout réel c, la fonction $F + c$ est aussi une primitive de f.
- ⋆ Toute primitive de f est nécessairement de la forme $F + c$ pour une certaine constante c.

Notation L'ensemble des primitives d'une fonction f est noté $\int f$ ou encore $\int f(x)\,\mathrm{d}x$.

Remarque
Si $a \in I$ alors $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est l'unique primitive qui s'annule en a.

11.4 Proposition (Linéarité)
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, f et g : $I \to \mathbb{R}$ deux fonctions intégrables et $k \in \mathbb{R}$. Alors

$$\int (f(x) + g(x))\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad \int k f(x)\,\mathrm{d}x = k \int f(x)\,\mathrm{d}x.$$

11.1.1 Calcul des primitives

11.5 Définition (Intégration directe et composition)
Dans le tableau qui suit on sous-entend que l'intégration est réalisée sur un intervalle contenu dans l'ensemble de définition de la fonction à intégrer.

$$\begin{aligned}
&\int x^n\,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \text{ pour } n \neq -1 &&\Longrightarrow \int [f(x)]^n f'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + c \text{ pour } n \neq -1\\
&\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln(x) + c &&\Longrightarrow \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln(|f(x)|) + c\\
&\int e^x\,\mathrm{d}x = e^x + c &&\Longrightarrow \int e^{f(x)} f'(x)\,\mathrm{d}x = e^{f(x)} + c\\
&\int a^x\,\mathrm{d}x = (\log_a e) a^x + c &&\Longrightarrow \int a^{f(x)} f'(x)\,\mathrm{d}x = (\log_a e) a^{f(x)} + c
\end{aligned}$$

$$\int \sin(x)\,\mathrm{d}x = -\cos(x)+c \qquad \Longrightarrow \int \sin(f(x))f'(x)\,\mathrm{d}x = -\cos(f(x))+c$$
$$\int \cos(x)\,\mathrm{d}x = \sin(x)+c \qquad \Longrightarrow \int \cos(f(x))f'(x)\,\mathrm{d}x = \sin(f(x))+c$$
$$\int \frac{1}{\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x = \tan(x)+c \qquad \Longrightarrow \int \frac{f'(x)}{\cos^2(f(x))}\,\mathrm{d}x = \tan(f(x))+c$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin(x)+c = -\arccos(x)+c \qquad \Longrightarrow \int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-(f(x))^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin(f(x))+c = -\arccos(f(x)+c$$
$$\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \arctan(x)+c \qquad \Longrightarrow \int \frac{f'(x)}{1+(f(x))^2}\,\mathrm{d}x = \arctan(f(x))+c$$
$$\int \cosh(x)\,\mathrm{d}x = \sinh(x)+c \qquad \Longrightarrow \int \cosh(f(x))f'(x)\,\mathrm{d}x = \sinh(f(x))+c$$
$$\int \sinh(x)\,\mathrm{d}x = \cosh(x)+c \qquad \Longrightarrow \int \sinh(f(x))f'(x)\,\mathrm{d}x = \cosh(f(x))+c$$
$$\int \frac{1}{\cosh^2(x)}\,\mathrm{d}x = \tanh(x)+c \qquad \Longrightarrow \int \frac{f'(x)}{\cosh^2(f(x))}\,\mathrm{d}x = \tanh(f(x))+c$$

Remarque mnémotechnique : pour passer de la colonne de gauche à celle de droite il suffit de remplacer x par $f(x)$ et $\mathrm{d}x$ par $f'(x)\,\mathrm{d}x$.

11.6 Proposition (Intégration par changement de variable)
Soit F une primitive de f et g une fonction dérivable. Alors la fonction $f(g(x))g'(x)$ est intégrable et l'on a

$$\int f(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x = F(g(x))+c.$$

Autrement dit, en posant $u=g(x)$ on obtient $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=g'(x)$, soit encore $\mathrm{d}u = g'(x)\,\mathrm{d}x$ et donc

$$\int f(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(u)\,\mathrm{d}u = F(u)+c.$$

11.7 Proposition (Intégration par parties)
Soit f et g deux fonctions dérivables. Alors

$$\int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

EXEMPLE
Calculer une primitive de $\frac{\ln(x)}{x}$ avec les trois méthodes décrites ci-dessus.

Intégration directe :

comme $\int \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \int f(x)f'(x)\,\mathrm{d}x$ avec $f(x)=\ln(x)$ et comme $\int f(x)f'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{[f(x)]^2}{2}$ on conclut que $\int \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\ln^2(x)}{2}+c$.

Intégration par changement de variable :

on pose $u=\ln(x)$ donc $\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}x}{x}$ et $\int \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \int u\,\mathrm{d}u = \frac{u^2}{2}+c = \frac{\ln^2(x)}{2}+c$.

Intégration par parties :

si on pose $g(x)=\ln(x)$ et $f'(x)=\frac{1}{x}$ alors $g'(x)=\frac{1}{x}$ et $f(x)=\ln(x)$ donc $\int \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \ln^2(x) - \int \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x$, *i.e.* $2\int \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \ln^2(x)+c$ et finalement $\int \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\ln^2(x)}{2}+k$.

11.1.2 Fonctions rationnelles

11.8 Définition (Fonction rationnelle)
Soit $N(x)$ et $D(x)$ deux polynômes de degré respectivement ν et δ. Toute fonction du type $P(x)=\frac{N(x)}{D(x)}$ est dite *fraction rationnelle*.

- ⋆ Si $\nu \geq \delta$ on dit que P est une *fraction rationnelle impropre*.
- ⋆ Si $\nu < \delta$ on dit que P est une *fraction rationnelle propre*.

11.9 Propriété

Soit N et D deux polynômes de degré respectivement ν et δ et $P(x) = \frac{N(x)}{D(x)}$ une fraction rationnelle impropre (*i.e.* $\nu \geq \delta$). Alors, en effectuant la division euclidienne de N par D, on peut réécrire P comme

$$P(x) = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)}$$

où Q est un polynôme de degré $\nu - \delta$ et R un polynôme de degré au plus $\delta - 1$, ainsi $\frac{R(x)}{D(x)}$ est une fraction rationnelle propre.

On en déduit que

$$\int P(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{N(x)}{D(x)}\,\mathrm{d}x = \int Q(x)\,\mathrm{d}x + \int \frac{R(x)}{D(x)}\,\mathrm{d}x.$$

L'intégration de Q étant triviale, on conclut que la difficulté de l'intégration d'une fraction rationnelle se réduit à l'intégration d'une fraction rationnelle propre.

11.10 Propriété

Si $\frac{R(x)}{D(x)}$ est une fraction rationnelle propre et si D possède

- ⋆ k racines réelles a_k chacune de multiplicité m_k et
- ⋆ h couples de racines complexes conjuguées qui sont racines du polynôme $x^2 + b_h x + d_h$ chacune de multiplicité n_h (ainsi $\Delta = b_h^2 - 4d_h < 0$ pour tout h),

alors D s'écrit

$$D(x) = c(x-a_1)^{m_1}(x-a_2)^{m_2}\dots(x-a_k)^{m_k}(x^2+b_1x+d_1)^{n_1}(x^2+b_2x+d_2)^{n_2}\dots(x^2+b_hx+d_h)^{n_h}$$

et $\frac{R(x)}{D(x)}$ se décompose en *fractions simples* sous la forme

$$\begin{aligned}
\frac{R(x)}{D(x)} = {} & \frac{A_{1,1}}{x-a_1} + \frac{A_{1,2}}{(x-a_1)^2} + \dots + \frac{A_{1,m_1}}{(x-a_1)^{m_1}} \\
& + \frac{A_{2,1}}{x-a_2} + \frac{A_{2,2}}{(x-a_2)^2} + \dots + \frac{A_{2,m_1}}{(x-a_2)^{m_2}} \\
& + \dots + \\
& + \frac{A_{k,1}}{x-a_k} + \frac{A_{k,2}}{(x-a_k)^2} + \dots + \frac{A_{k,m_k}}{(x-a_k)^{m_k}} \\
& + \frac{B_{1,1}x + C_{1,1}}{x^2+b_1x+d_1} + \frac{B_{1,2}x + C_{1,2}}{(x^2+b_1x+d_1)^2} + \dots + \frac{B_{1,n_1}x + C_{1,n_1}}{(x^2+b_1x+d_1)^{n_1}} \\
& + \frac{B_{2,1}x + C_{2,1}}{x^2+b_2x+d_2} + \frac{B_{2,2}x + C_{2,2}}{(x^2+b_2x+d_2)^2} + \dots + \frac{B_{2,n_2}x + C_{2,n_2}}{(x^2+b_2x+d_2)^{n_2}} \\
& + \dots + \\
& + \frac{B_{h,1}x + C_{h,1}}{x^2+b_hx+d_h} + \frac{B_{h,2}x + C_{h,2}}{(x^2+b_hx+d_h)^2} + \dots + \frac{B_{h,n_h}x + C_{h,n_h}}{(x^2+b_hx+d_h)^{n_k}}
\end{aligned}$$

où les $A_{i,j}$, $B_{i,j}$ et $C_{i,j}$ sont des constantes.

Pour intégrer une fraction rationnelle il suffit alors de connaître les primitives des quatre fractions simples suivantes :

$$f_1(x) = \frac{A}{x-a}, \qquad f_2(x) = \frac{A}{(x-a)^n}, \qquad f_3(x) = \frac{Bx+C}{x^2+bx+d}, \qquad f_4(x) = \frac{Bx+C}{(x^2+bx+d)^n}.$$

11.11 Propriété (Intégration des fractions simples)

Supposons

- ⋆ $A, B, C, a, b, d \in \mathbb{R}$
- ⋆ $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$
- ⋆ $\Delta = b^2 - 4d < 0$

alors

1. la primitive de $f_1(x) = \frac{A}{x-a}$ est

$$\int \frac{A}{x-a}\,\mathrm{d}x = A\ln|x-a| + \text{cnst};$$

2. la primitive de $f_2(x) = \frac{A}{(x-a)^n}$ est

$$\int \frac{A}{(x-a)^n}\,\mathrm{d}x = \frac{A}{(1-n)(x-a)^{n-1}} + \text{cnst};$$

3. la primitive de $f_3(x) = \frac{Bx+C}{x^2+bx+d}$ est

$$\begin{aligned}
\int \frac{Bx+C}{x^2+bx+d}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{Bx+C}{\left(x+\frac{b}{2}\right)^2+\left(d-\frac{b^2}{4}\right)}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\sqrt{d-\frac{b^2}{2}}}\int \frac{B\left(\sqrt{d-\frac{b^2}{4}}\,t-\frac{b}{2}\right)+C}{t^2+1}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{B}{2}\int \frac{2t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t + \frac{C-B\frac{b}{2}}{\sqrt{d-\frac{b^2}{4}}}\int \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{B}{2}\ln|1+t^2| + \frac{C-B\frac{b}{2}}{\sqrt{d-\frac{b^2}{4}}}\arctan(t)+\text{cnst} \\
&= \frac{B}{2}\ln\left|1+\frac{\left(x+\frac{b}{2}\right)^2}{d-\frac{b^2}{4}}\right| + \frac{C-B\frac{b}{2}}{\sqrt{d-\frac{b^2}{4}}}\arctan\left(\frac{x+\frac{b}{2}}{\sqrt{d-\frac{b^2}{4}}}\right)+\text{cnst};
\end{aligned}$$

$$x+\frac{b}{2} = \sqrt{d-\frac{b^2}{4}}\,t \qquad \mathrm{d}x = \sqrt{d-\frac{b^2}{4}}\,\mathrm{d}t$$

4. la primitive de $f_4(x) = \frac{Bx+C}{(x^2+bx+d)^n}$ est

$$\int \frac{Bx+C}{(x^2+bx+d)^n}\,\mathrm{d}x = \frac{B}{2}\underbrace{\int \frac{2x+b}{(x^2+bx+d)^n}\,\mathrm{d}x}_{I_1} + \left(C-\frac{Bb}{2}\right)\underbrace{\int \frac{1}{(x^2+bx+d)^n}\,\mathrm{d}x}_{I_2}$$

avec

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{B}{2}\frac{1}{(1-n)(x^2+bx+d)^{n-1}} \\
I_2 &= \int \frac{1}{(x^2+bx+d)^n}\,\mathrm{d}x \\
&= \left(d-\frac{b^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}-n}\underbrace{\int \frac{1}{(1+t^2)^n}\,\mathrm{d}t}_{I_n}
\end{aligned}$$

$$x+\frac{b}{2} = \sqrt{d-\frac{b^2}{4}}\,t \qquad \mathrm{d}x = \sqrt{d-\frac{b^2}{4}}\,\mathrm{d}t$$

et l'intégrale I_n se calcule par récurrence

$$I_n = \frac{t}{2(n-1)(1+t^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)}I_{n-1}.$$

EXEMPLE

1. On veut intégrer la fraction rationnelle propre $f(x) = \frac{x-3}{x^2-4x+5}$. Comme $\Delta = 4^2-4\times5<0$ il s'agit d'une intégrale du type $\int \frac{Bx+C}{x^2+bx+d}\,\mathrm{d}x$. Le dénominateur se décompose comme $x^2-4x+5 = (x-2)^2+1$ et l'intégrale s'écrit

$$\begin{aligned}
\int f(x)\,\mathrm{d}x &= \int \frac{x-3}{(x-2)^2+1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{(t+2)-3}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int \frac{2t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t - \int \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\ln(1+t^2) - \arctan(t) + \text{cnst} = \frac{1}{2}\ln((x+2)^2+1) - \arctan(x-2) + \text{cnst}
\end{aligned}$$

2. On veut intégrer la fraction rationnelle propre $f(x) = \frac{3x+1}{x^3-4x}$. On doit d'abord la décomposer en fractions simples ; comme $x^3-4x = x(x^2-4) = x(x-2)(x+2)$ la fonction admet la décomposition

$$f(x) = \frac{3x+1}{x(x-2)(x+2)} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x-2} + \frac{A_3}{x+2}$$

Pour calculer les constantes A_i on peut utiliser le principe d'identité des polynômes :

$$\frac{3x+1}{x(x-2)(x+2)}=\frac{A_1(x-2)(x+2)+A_2x(x+2)+A_3x(x-2)}{x(x-2)(x+2)}\iff\begin{cases}-4A_1=1\\7=8A_2\\-5=8A_3\end{cases}$$

ainsi

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{4}\int\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x+\frac{7}{8}\int\frac{A_2}{x-2}\,\mathrm{d}x-\frac{5}{8}\int\frac{A_3}{x+2}\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{4}\ln|x|+\frac{7}{8}\ln|x-2|-\frac{5}{8}\ln|x+2|+c.$$

3. On veut intégrer la fraction rationnelle impropre $f(x)=\frac{3x^3+2x-5}{3x^2-5x-2}$. On effectue d'abord la division euclidienne

$$\begin{array}{rrrr|l}
3x^3 & & +2x & -5 & 3x^2-5x-2\\ \cline{5-5}
-3x^3 & +5x^2 & +2x & & x+\frac{5}{3}\\ \cline{1-3}
 & 5x^2 & +4x & -5 & \\
 & -5x^2 & +\frac{25}{3}x & +\frac{10}{3} & \\ \cline{2-4}
 & & \frac{37}{3}x & -\frac{5}{3} &
\end{array}$$

ainsi $f(x)=x+\frac{5}{3}+\frac{\frac{37}{3}x-\frac{5}{3}}{3x^2-5x-2}$. Maintenant on décompose le terme $\frac{\frac{37}{3}x-\frac{5}{3}}{3x^2-5x-2}$ en fractions simples : on a $3x^2-5x-2=(x+\frac{1}{3})(x-2)$ et on doit chercher les deux constantes A_1 et A_2 telles que

$$\frac{\frac{37}{3}x-\frac{5}{3}}{3x^2-5x-2}=\frac{A_1}{x+\frac{1}{3}}+\frac{A_2}{x-2}$$

En utilisant le principe d'identité des polynômes on a

$$\frac{\frac{37}{3}x-\frac{5}{3}}{3x^2-5x-2}=\frac{A_1(x-2)+A_2(x+\frac{1}{3})}{3x^2-5x-2}\iff\begin{cases}\frac{69}{3}=\frac{7}{3}A_2\\-\frac{52}{9}=-\frac{7}{3}A_1\end{cases}$$

On conclut que

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int x+\frac{5}{3}+\frac{52/21}{x+\frac{1}{3}}+\frac{69/7}{x-2}\,\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}+\frac{5}{3}x+\frac{52}{21}\ln\left|x+\frac{1}{3}\right|+\frac{69}{7}\ln|x-2|+c.$$

4. On veut intégrer la fraction rationnelle propre $f(x)=\frac{x-4}{x^3-x^2-5x-3}$. On doit d'abord la décomposer en fraction simples ; comme $x^3-x^2-5x-3=(x-3)(x+1)^2$ la fonction f admet la décomposition

$$f(x)=\frac{A_{1,1}}{x-3}+\frac{A_{2,1}}{x+1}+\frac{A_{2,2}}{(x+1)^2}.$$

On détermine les constantes en utilisant le principe d'identité des polynômes

$$\frac{x-4}{x^3-x^2-5x-3}=\frac{A_{1,1}(x+1)^2+A_{2,1}(x-3)(x+1)+A_{2,2}(x-3)}{x^3-x^2-5x-3}\iff\begin{cases}A_{1,1}=-1/16\\A_{2,1}=1/16\\A_{2,2}=5/4\end{cases}$$

On conclut que

$$f(x)=\frac{-1/16}{x-3}+\frac{1/16}{x+1}+\frac{5/4}{(x+1)^2}$$

et

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{16}\ln|x-3|+\frac{1}{16}\ln|x+1|+\frac{5}{4(x+1)}+c.$$

5. On veut intégrer la fraction rationnelle propre $f(x)=\frac{x^2+2}{(x^2-2x+5)^2}$. Comme $\Delta=4-20<0$, la fonction f se décompose comme

$$f(x)=\frac{B_1x+C_1}{x^2-2x+5}+\frac{B_2x+C_2}{(x^2-2x+5)^2}.$$

On détermine les constantes en utilisant le principe d'identité des polynômes

$$\begin{aligned}\frac{x^2+2}{(x^2-2x+5)^2} &= \frac{B_1x+C_1}{x^2-2x+5}+\frac{B_2x+C_2}{(x^2-2x+5)^2}\\ &= \frac{B_1x^3+(C_1-2B_1)x^2+(5B_1-2C_1+B_2)x+5C_1+C_2}{(x^2-2x+5)^2} \iff \begin{cases}B_1=0\\ C_1-2B_1=1\\ 5B_1-2C_1+B_2=0\\ 5C_1+C_2=2\end{cases}\end{aligned}$$

On obtient alors que

$$\int f(x)\,dx = \underbrace{\int \frac{1}{x^2-2x+5}\,dx}_{I_1} + \underbrace{\int \frac{2x-3}{(x^2-2x+5)^2}\,dx}_{I_2}.$$

- ⋆ On calcule I_1 :

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2-2x+5}\,dx &= \int \frac{1}{(x-1)^2+4}\,dx \qquad \begin{aligned}x-1&=2t\\ dx&=2\,dt\end{aligned}\\ &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{t^2+1}\,dt\\ &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+t^2}\,dt = \frac{1}{2}\arctan(t)+c = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x-1}{2}\right)+c;\end{aligned}$$

- ⋆ On calcule I_2 :

$$\begin{aligned}\int \frac{2x-3}{(x^2-2x+5)^2}\,dx &= \int \frac{2x-2}{(x^2-2x+5)^2}\,dx - \int \frac{1}{(x^2-2x+5)^2}\,dx = -\frac{1}{x^2-2x+5} - \int \frac{1}{(x^2-2x+5)^2}\,dx\\ &= -\frac{1}{x^2-2x+5} - \int \frac{1}{((x-1)^2+4)^2}\,dx = -\frac{1}{x^2-2x+5} - \frac{1}{8}\int \frac{1}{(t^2+1)^2}\,dt\\ &= -\frac{1}{x^2-2x+5} - \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}\frac{t}{1+t^2}+\frac{1}{2}\int \frac{1}{1+t^2}\,dt\right) = -\frac{1}{x^2-2x+5} - \frac{1}{16}\left(\frac{t}{1+t^2}+\arctan(t)\right)\\ &= -\frac{1}{x^2-2x+5} - \frac{1}{16}\left(\frac{2(x-1)}{x^2-2x+5}+\arctan\left(\frac{x-1}{2}\right)\right)+c = -\frac{x+7}{8(x^2-2x+5)} - \frac{1}{16}\arctan\left(\frac{x-1}{2}\right)+c.\end{aligned}$$

On conclut que

$$\int f(x)\,dx = \frac{7}{16}\arctan\left(\frac{x-1}{2}\right) - \frac{x+7}{8(x^2-2x+5)} + c.$$

6. On veut intégrer la fraction rationnelle propre $f(x) = \frac{1}{x^3(x^2+1)^2}$ qui se décompose comme

$$f(x) = \frac{A_1}{x}+\frac{A_1}{x^2}+\frac{A_1}{x^3}+\frac{B_1x+C_1}{x^2+1}+\frac{B_2x+C_2}{(x^2+1)^2}.$$

On détermine les constantes en utilisant le principe d'identité des polynômes

$$\frac{1}{x^3(x^2+1)^2} = \frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x^2}+\frac{A_3}{x^3}+\frac{B_1x+C_1}{x^2+1}+\frac{B_2x+C_2}{(x^2+1)^2} \iff \begin{cases}A_3=1\\ A_2=0\\ A_1=-2\\ C_1+C_2=0\\ B_1+B_2=3\\ B_1=2\\ C_1=0\end{cases}$$

On obtient alors que

$$\begin{aligned}\int f(x)\,dx &= -2\int \frac{1}{x}\,dx + \int \frac{1}{x^3}\,dx + \int \frac{2x}{x^2+1}\,dx + \int \frac{-2x}{(x^2+1)^2}\,dx = -2\ln|x| - \frac{1}{2x^2} + \ln|x^2+1| - \int \frac{2x}{(x^2+1)^2}\,dx\\ &= -2\ln|x| - \frac{1}{2x^2} + \ln|x^2+1| - \frac{2x}{(x^2+1)} + c.\end{aligned}$$

11.2 Intégrales définies

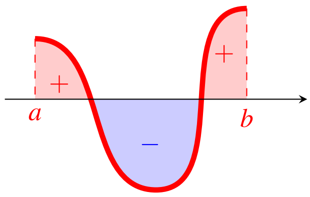
11.12 Théorème (fondamentale du calcul différentiel et intégral)
Soit f une fonction continue sur $[a;b]$ et F une primitive de f sur $[a;b]$. Alors

1. la dérivée de $g(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ existe et est égale à $f(x)$;
2. $\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$.

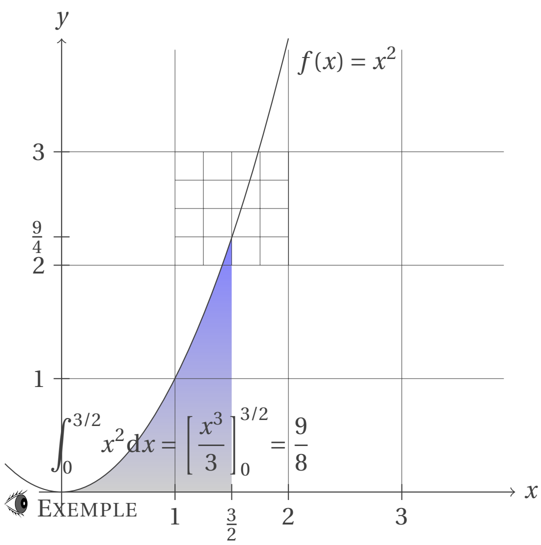
L'expression $F(b) - F(a)$ se note aussi $[F(x)]_a^b$ ou encore $F(x)|_a^b$.

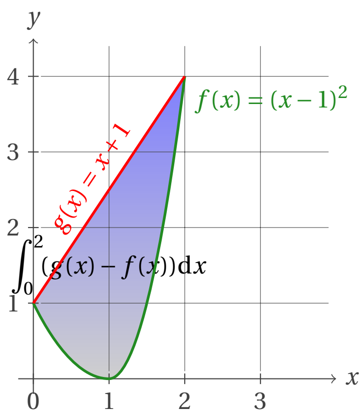
Remarque
Si f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a;b]$ alors $g(x) = f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)\,dt$.

11.13 Définition (Interprétation géométrique)
L'intégrale définie $\int_a^b f(x)\,dx$ correspond à l'aire du domaine du plan situé entre le graphe de f et l'axe des abscisses, compté positivement pour la partie située au-dessus de l'axe des abscisses et négativement pour la partie située en dessous.



11.14 Définition (Calcul d'aires)
Soit f et g deux fonctions intégrables sur $[a;b]$ telles que $f(x) \geq g(x)$ sur $[a;b]$. L'aire de la surface comprise entre les graphes de f et g entre a et b est définie par l'intégrale $\int_a^b (f(x) - g(x))\,dx$.





11.15 Propriété
Soit $[a;b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ avec $a < b$, f et $g : [a;b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions intégrables.

Relation de Chasles : $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$ pour tout $c \in [a;b]$.

Relation d'ordre : si $f(x) \leq g(x)$ pour toute $x \in [a;b]$ alors $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$.

Nullité : si f est continue sur $[a;b]$ et $f(x) \geq 0$ pour toute $x \in [a;b]$ alors $\int_a^b f(x)\,dx = 0$ si et seulement si $f(x) \equiv 0$.

Parité : si f est paire sur $[-a;a]$ avec $a \geq 0$ alors $\int_{-a}^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$; si f est impaire sur $[-a;a]$ avec $a \geq 0$ alors $\int_{-a}^a f(x)\,dx = 0$.

Valeur absolue : $|\int_a^b f(x)\,dx| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$.

Moyenne : si $m \leq f(x) \leq M$ pour toute $x \in [a;b]$ alors $m \leq \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} \leq M$. Le nombre $\frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}$ est la valeur moyenne de f sur $[a;b]$.

Exercices

Primitives

Exercice 11.1 (Par intégration directe ou par transformations élémentaires)

Calculer les primitives suivantes :

(1) $\int 2x^3-3x+1\,dx$ (2) $\int \sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\,dx$ (3) $\int \frac{1}{\sqrt{x+1}}\,dx$ (4) $\int \sqrt{2x+1}\,dx$

(5) $\int e^{2x+1}\,dx$ (6) $\int \sqrt[4]{(x-1)^3}\,dx$ (7) $\int \frac{x}{x+1}\,dx$ (8) $\int x\sqrt{5+x^2}\,dx$

(9) $\int \frac{e^x}{1+e^x}\,dx$ (10) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$ (11) $\int \frac{e^{-1/x}}{x^2}\,dx$ (12) $\int xe^{x^2}\,dx$

(13) $\int \frac{\ln^3(x)}{x}\,dx$ (14) $\int \frac{1}{x\ln^3(x)}\,dx$ (15) $\int x^2e^{x^3}\,dx$ (16) $\int \frac{1+\cos(x)}{x+\sin(x)}\,dx$

(17) $\int \frac{x^3}{1+x^4}\,dx$ (18) $\int \frac{\sin(2x)}{1+\sin^2(x)}\,dx$ (19) $\int \frac{1}{x\sqrt[3]{x}}\,dx$ (20) $\int \sin^3(x)\cos(x)\,dx$

(21) $\int \sin(3x)\,dx$ (22) $\int \frac{1}{\sin(x)\cos(x)}\,dx$ (23) $\int \frac{\sin\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}\,dx$ (24) $\int x(x^2+1)^2\,dx$

(25) $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x^2+3}}\,dx$ (26) $\int \frac{e^{\tan(x)}}{\cos^2(x)}\,dx$ (27) $\int (ax+b)^n\,dx$ avec $a\neq 0$ et $n\neq 1$ (28) $\int \frac{1}{(ax+b)^n}\,dx$ avec $ax+b\neq 0$, $a\neq 0$ et $n>1$

(29) $\int \frac{x^3+x+1}{x^2+1}\,dx$ (30) $\int (1+2x^3)^2\,dx$ (31) $\int (1+\cos(x))^2\,dx$ (32) $\int \frac{1-2x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

(33) $\int \frac{1}{\sin^2(x)\cos^2(x)}\,dx$ (34) $\int \frac{1}{1+e^x}\,dx$ (35) $\int \frac{\cos^2(x)}{1-\sin(x)}\,dx$ (36) $\int \frac{1}{\sin(4x)}\,dx$

Correction

(1) $\frac{1}{2}x(x^3-3x+2)+c$ (2) $\frac{1}{12}(8\sqrt[3]{x}+3)x^{4/3}+c$ (3) $2\sqrt{x+1}+c$

(4) $\frac{\sqrt{(2x+1)^3}}{3}+c$ (5) $\frac{e^{2x+1}}{2}+c$ (6) $\frac{4}{7}(x-1)^{7/4}+c$

(7) $x-\ln(x+1)+c$ (8) $\frac{1}{3}(5+x^2)^{3/2}+c$ (9) $\ln(1+e^x)+c$

(10) $2e^{\sqrt{x}}+c$ (11) $e^{-1/x}+c$ (12) $\frac{e^{x^2}}{2}+c$

(13) $\frac{\ln^4(x)}{4}+c$ (14) $-\frac{1}{2\ln^2(x)}+c$ (15) $\frac{e^{x^3}}{3}+c$

(16) $\ln|x+\sin(x)|+c$ (17) $\frac{\arctan(x^4)}{4}+c$ (18) $\ln(1+\sin^2(x))+c$

(19) $-\frac{3}{\sqrt[3]{x}}+c$ (20) $\frac{\sin^4(x)}{4}+c$ (21) $-\frac{1}{3}\cos(3x)+c$

(22) $\ln|\tan(x)|+c$ (23) $-2\cos\sqrt{x}+c$ (24) $\frac{(x^2+1)^3}{6}+c$

(25) $\frac{3}{4}\sqrt[3]{(x^2+3)^2}+c$ (26) $e^{\tan(x)}+c$ (27) $\frac{1}{a}\frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1}+c$

(28) $\frac{1}{a}\frac{(ax+b)^{-n+1}}{-n+1}+c$ (29) $\int \frac{x(x^2+1)+1}{x^2+1}\,dx=\int x\,dx+\int \frac{1}{x^2+1}\,dx=\frac{x^2}{2}+\arctan(x)+c$

(30) $\frac{4}{7}x^7+x^4+x+c$ (31) $\frac{3}{2}x+2\sin(x)+\frac{\sin(x)\cos(x)}{2}+c$ (32) $\arcsin(x)+2\sqrt{1-x^2}+c$

(33) $\int \frac{\sin^2(x)+\cos^2(x)}{\sin^2(x)\cos^2(x)}\,dx=\int \frac{1}{\cos^2(x)}\,dx+\int \frac{1}{\sin^2(x)}\,dx=\tan(x)-\frac{1}{\tan(x)}+c$ (34) $x-\ln(1+e^x)+c$

(35) $x-\cos(x)+c$ (36) $\frac{1}{4}\ln|\tan(2x)|+c$

Exercice 11.2 (Intégration par changement de variable)

Calculer les primitives suivantes :

(1)	$\int \frac{\sin(\ln(x))}{x}\,dx$	(2)	$\int \frac{1+e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$	(3)	$\int \frac{1}{x-\sqrt{x}}\,dx$	(4)	$\int \frac{1}{\sqrt{x(1+\sqrt{x})}}\,dx$
(5)	$\int \frac{e^x}{1+e^x}\,dx$	(6)	$\int \frac{1}{x\ln(x)}\,dx$	(7)	$\int \frac{1}{x\sqrt{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}}\,dx$	(8)	$\int e^x\ln(1+e^x)\,dx$
(9)	$\int \frac{1}{x(2+\ln^2(x))}\,dx$	(10)	$\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$	(11)	$\int \frac{x^5}{\sqrt{x^3-1}}\,dx$	(12)	$\int \sqrt{e^x-1}\,dx$
(13)	$\int \frac{\ln(x)}{x}\,dx$	(14)	$\int \frac{1}{e^x+e^{-x}}\,dx$	(15)	$\int \frac{e^{\tan(x)}}{\cos^2(x)}\,dx$	(16)	$\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$
(17)	$\int x\sqrt{a+x^2}\,dx$	(18)	$\int \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2(x)}}\,dx$	(19)	$\int \frac{e^{1/x}}{x^2}\,dx$	(20)	$\int \frac{\cos(x)}{1+\sin(x)}\,dx$
(21)	$\int \frac{1}{x^2}\cos\left(\frac{1}{x}\right)dx$	(22)	$\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$	(23)	$\int \frac{\sin(x)+\cos(x)}{\sin(x)-\cos(x)}\,dx$	(24)	$\int \frac{1}{\cos(x)\sin(x)}\,dx$
(25)	$\int \frac{1}{\sin(x)}\,dx$	(26)	$\int \frac{1}{\cos(x)}\,dx$				

Correction

1. Pour $x>0$, si on pose $t=\ln(x)$ alors $\frac{1}{x}\,dx = dt$ et on obtient $-\cos(\ln(x))+c$
2. Pour $x>0$, si on pose $t=\sqrt{x}$ alors $dx=2t\,dt$ et on obtient $2(\sqrt{x}+e^{\sqrt{x}})+c$
3. Pour $x>0$, si on pose $t=\sqrt{x}$ alors $dx=2t\,dt$ et on obtient $2\ln(\sqrt{x}-1)+c$
4. Pour $x>0$, si $x>0$. Si on pose $t=\sqrt{x}$ alors $dx=2t\,dt$ et on obtient $4\sqrt{1+\sqrt{x}}+c$
5. Si on pose $t=e^x$ alors $e^x\,dx = dt$ et on obtient $\ln(1+e^x)+c$
6. Pour $x>0$, si on pose $t=\ln(x)$ alors $\frac{1}{x}\,dx = dt$ et on obtient $\ln|\ln(x)|+c$
7. Pour $x>0$, si on pose $t=\ln\left(\frac{1}{x}\right)$ alors $-\frac{1}{x}\,dx = 2t\,dt$ et on obtient $-2\sqrt{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}+c$
8. Si on pose $t=1+e^x$ alors $e^x\,dx = dt$ ainsi $\int e^x\ln(1+e^x)\,dx = \int \ln(t)\,dt$. Sans utiliser l'intégration par partie, si on pose $t=e^w$ alors $dt=e^w\,dw$ ainsi $\int\ln(t)\,dt=\int we^w\,dw=(w-1)e^w$ et on obtient $(1+e^x)\ln(1+e^x)-e^x+c$.
9. Pour $x>0$, si on pose $t=\ln(x)$ alors $\frac{1}{x}\,dx = dt$ et on obtient $\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{\ln(x)}{\sqrt{2}}\right)+c$
10. Si on pose $t^2=1-x^2$ alors $-x\,dx=t\,dt$ et on obtient $-\frac{1}{3}(x^2+2)\sqrt{1-x^2}+c$
11. Si on pose $t^2=x^3-1$ alors $3x^2\,dx=2t\,dt$ et on obtient $\frac{2}{9}(x^3+2)\sqrt{x^3-1}+c$
12. Si on pose $t^2=e^x-1$ alors $dx=\frac{2t}{t^2+1}\,dt$ et on obtient $2\left(\sqrt{e^x-1}-\arctan(\sqrt{e^x-1})\right)+c$
13. Pour $x>0$, si on pose $t=\ln(x)$ alors $dx=e^t\,dt$ et on obtient $\frac{1}{2}\ln^2(x)+c$
14. Si on pose $t=e^x$ alors $dx=\frac{1}{t}\,dt$ et on obtient $\arctan e^x+c$
15. Si on pose $t=\tan(x)$ alors $dx=\frac{1}{1+t^2}\,dt$ et on obtient $e^{\tan(x)}+c$
16. Si on pose $t=\sqrt{1+x^2}$ alors $2x\,dx=2t\,dt$ et on obtient $\sqrt{1+x^2}+c$
17. Pour $a+x^2\ge 0$, si on pose $t=\sqrt{a+x^2}$ alors $2x\,dx=2t\,dt$ et on obtient $\frac{1}{3}\sqrt{(a+x^2)^3}+c$
18. Pour $x>0$, si on pose $t=\ln(x)$ alors $\frac{1}{x}\,dx = dt$ et on obtient $\arcsin(\ln(x))+c$
19. Si on pose $t=\frac{1}{x}$ alors $-\frac{1}{x^2}\,dx = dt$ et on obtient $-e^{1/x}+c$
20. Si on pose $t=1+\sin(x)$ alors $\cos(x)\,dx = dt$ et on obtient $\ln|1+\sin(x)|+c$
21. Si on pose $t=\frac{1}{x}$ alors $-\frac{1}{x^2}\,dx = dt$ et on obtient $-\sin\left(\frac{1}{x}\right)+c$
22. Si on pose $t^2=1+x^2$ alors $x\,dx=t\,dt$ et on obtient $\frac{1}{3}(x^2-2)\sqrt{x^2+1}+c$
23. Si on pose $t=\sin(x)-\cos(x)$ alors $dt=(\sin(x)+\cos(x))\,dx$ et on obtient $\ln(\sin(x)-\cos(x))+c$
24. $\int\frac{1}{\cos(x)\sin(x)}\,dx=\int\frac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos(x)\sin(x)}\,dx=\int\frac{\sin(x)}{\cos(x)}+\frac{\cos(x)}{\sin(x)}\,dx=-\ln|\cos(x)|+\ln|\sin(x)|+c$
25. $\int\frac{1}{\sin(x)}\,dx=\int\frac{1}{2\sin(x/2)\cos(x/2)}\,dx$. En utilisant l'exercice précédent on trouve alors $-\ln|\cos(x/2)|+\ln|\sin(x/2)|+c$

26. On sait que $\cos(x)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$. Si on pose $t=\frac{\pi}{2}-x$ alors $\mathrm{d}t=-\mathrm{d}x$ ainsi $\int\frac{1}{\cos(x)}\,\mathrm{d}x=\int\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}\,\mathrm{d}x=-\int\frac{1}{\sin(t)}\,\mathrm{d}t$. En utilisant l'exercice précédent on trouve alors $\ln|\cos(t/2)|-\ln|\sin(t/2)|+c=\ln|\cos(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2})|-\ln|\sin(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2})|+c$ et on obtient $\ln(\sin(x)-\cos(x))+c$

Exercice 11.3 (Intégration par parties)

Calculer les primitives suivantes :

(1)	$\displaystyle\int\frac{\ln(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x$	(2)	$\displaystyle\int\frac{\ln(\ln(x))}{x}\,\mathrm{d}x$	(3)	$\displaystyle\int\ln(1+x)\,\mathrm{d}x$	(4)	$\displaystyle\int x^2e^x\,\mathrm{d}x$
(5)	$\displaystyle\int\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$	(6)	$\displaystyle\int x\sin(x)\,\mathrm{d}x$	(7)	$\displaystyle\int x\ln(x)\,\mathrm{d}x$	(8)	$\displaystyle\int x^2\cos(x)\,\mathrm{d}x$
(9)	$\displaystyle\int\frac{x\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$	(10)	$\displaystyle\int\frac{\sin(x)}{\cos^3(x)}e^{\tan(x)}\,\mathrm{d}x$	(11)	$\displaystyle\int x^3\sin(x^2)\,\mathrm{d}x$	(12)	$\displaystyle\int e^{2x}\sin(3x)\,\mathrm{d}x$
(13)	$\displaystyle\int e^{-3x}\cos(2x)\,\mathrm{d}x$	(14)	$\displaystyle\int x^3\ln(x)\,\mathrm{d}x$	(15)	$\displaystyle\int\frac{\ln(x)}{\sqrt[4]{x}}\,\mathrm{d}x$	(16)	$\displaystyle\int\ln^2(x)\,\mathrm{d}x$
(17)	$\displaystyle\int x\sin^2(x)\,\mathrm{d}x$						

Correction

1. Comme $f(x)=\ln(x)\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{x}$ et $g(x)=-\frac{1}{x}\Leftarrow g'(x)=\frac{1}{x^2}$ on obtient $-\frac{1+\ln(x)}{x}+c$
2. Comme $f(x)=\ln(\ln(x))\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{x\ln(x)}$ et $g(x)=\ln(x)\Leftarrow g'(x)=\frac{1}{x}$ on obtient $(\ln(\ln(x))-1)\ln(x)+c$
3. Comme $f(x)=\ln(1+x)\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{1+x}$ et $g(x)=x\Leftarrow g'(x)=1$ on obtient $(1+x)\ln(1+x)-x+c$
4. Comme $f(x)=x^2\Rightarrow f'(x)=2x$ et $g(x)=e^x\Leftarrow g'(x)=e^x$ on obtient $e^x((x-2)x+2)+c$
5. Comme $f(x)=\ln(x)\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{x}$ et $g(x)=2\sqrt{x}\Leftarrow g'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ on obtient $2\sqrt{x}(\ln(x)-2)+c$
6. Comme $f(x)=x\Rightarrow f'(x)=1$ et $g(x)=-\cos(x)\Leftarrow g'(x)=\sin(x)$ on obtient $-x\cos(x)+\sin(x)+c$
7. Comme $f(x)=\ln(x)\Rightarrow f'(x)=1/x$ et $g(x)=x^2/2\Leftarrow g'(x)=x$ on obtient $\frac{1}{2}x^2\ln(x)-\frac{1}{4}x^2+c$
8. Comme $f(x)=x^2\Rightarrow f'(x)=2x$ et $g(x)=\sin(x)\Leftarrow g'(x)=\cos(x)$ on obtient $x^2\sin(x)-2[-x\cos(x)+\sin(x)]+c$
9. Comme $f(x)=\arcsin(x)\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et $g(x)=-\sqrt{1-x^2}\Leftarrow g'(x)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ on obtient $-\sqrt{1-x^2}\cdot\arcsin(x)+x+c$
10. Comme $f(x)={}^{\sin(x)}/_{\cos(x)}\Rightarrow f'(x)={}^{1}/_{\cos^2x}$ et $g(x)=e^{\tan(x)}\Leftarrow g'(x)={}^{e^{\tan(x)}}/_{x^2}$ on obtient $e^{\tan(x)}(\tan(x)-1)+c$
11. Comme $f(x)=\sin(x^2)\Rightarrow f'(x)=2x\cos(x^2)$ et $g(x)={}^{x^4}/_{4}\Leftarrow g'(x)=x^3$ on obtient $\dfrac{-x^2\cos(x^2)+\sin(x^2)}{2}+c$
12. Comme $f(x)=\sin(3x)\Rightarrow f'(x)=3\cos(3x)$ et $g(x)=e^{2x}/2\Leftarrow g'(x)=e^{2x}$ on obtient $\frac{2e^{2x}(\sin(3x)-\frac{3}{2}\cos(3x))}{13}+c$
13. Comme $f(x)=\cos(2x)\Rightarrow f'(x)=-2\sin(2x)$ et $g(x)=\frac{-e^{-3x}}{3}\Leftarrow g'(x)=e^{-3x}$ on obtient $-\frac{3e^{-3x}(\cos(2x)-\frac{2}{3}\sin(2x))}{13}+c$
14. Comme $f(x)=\ln(x)\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{x}$ et $g(x)=\frac{x^4}{4}\Leftarrow g'(x)=x^3$ on obtient $\frac{1}{16}x^4(4\ln(x)-1)+c$
15. Comme $f(x)=\ln(x)\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{x}$ et $g(x)=\frac{4x^{3/4}}{3}\Leftarrow g'(x)=\frac{1}{\sqrt[4]{x}}$ on obtient $\dfrac{4}{3}x^{3/4}\left(\ln(x)-\frac{4}{3}\right)+c$
16. Comme $f(x)=\ln(x)\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{x}$ et $g(x)=x\ln(x)-x\Leftarrow g'(x)=\ln(x)$ on obtient $x(\ln^2(x)-2\ln(x)+2)+c$
17. Comme $f(x)=\sin^2(x)\Rightarrow f'(x)=2\sin(x)\cos(x)=\sin(2x)$ et $g(x)=\frac{x^2}{2}\Leftarrow g'(x)=x$ on obtient $\frac{1}{4}(x^2-x\sin(2x)-\frac{1}{2}\cos(2x))+c$

Exercice 11.4 ((P. Halmos))

Si $f,g\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sont deux fonctions dérivables quelconques, on sait que **la dérivée du produit n'est pas le produit des dérivées**, autrement dit $(fg)'\neq f'g'$. Cependant, il existe des fonctions f et g pour lesquelles on a bien $(fg)'=f'g'$, par exemple si f et g sont toutes deux égales à une constante (pas nécessairement la même). Pouvez-vous en trouver d'autres ?

Correction

- ★ Si $f(x)=k_1$ pour tout $x\in\mathbb{R}$ et $g(x)=k_2$ pour tout $x\in\mathbb{R}$, alors $(fg)'(x)=(k_1k_2)'=0$ pour tout $x\in\mathbb{R}$ et $f'(x)g'(x)=0\times0=0$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.
- ★ Si $g=f$, on cherche f telle que $(f^2)'=(f')^2$, c'est-à-dire $2f(x)f'(x)=(f'(x))^2$ pour tout $x\in\mathbb{R}$. Donc, soit $f'(x)=0$ pour tout $x\in\mathbb{R}$ et on trouve à nouveau $f(x)=g(x)=k$ pour tout $x\in\mathbb{R}$, soit $2f(x)=f'(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$ et on trouve $f(x)=g(x)=ke^{2x}$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

- Dire que $(fg)' = f'g'$ revient à dire que $f'g + fg' = f'g'$. En divisant par le produit fg (il est inutile à ce stade de se préoccuper de la possibilité de diviser par 0, nous cherchons seulement formellement des conditions nécessaires) on a
$$\frac{f'(x)}{f(x)} + \frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)}{f(x)} \cdot \frac{g'(x)}{g(x)}$$
c'est-à-dire
$$[\ln(f(x))]' = \frac{g'(x)}{g'(x) - g(x)}.$$
Si on choisit g, il suffit de poser $f = e^G$ où G est une primitive de $\frac{g'(x)}{g'(x)-g(x)}$.
Voyons quelques exemples :
  - si on pose $g(x) = x$ alors $G(x) = \int \frac{1}{1-x}\,\mathrm{d}x = -\ln(1-x)$ et $f(x) = \frac{1}{1-x}$. Vérifions si on a bien $(fg)' = f'g'$:
  $$\begin{aligned}(fg)'(x) &= \left(\frac{x}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}\\ f'(x)g'(x) &= \frac{1}{(1-x)^2}\end{aligned}$$
  - si on pose $g(x) = x^a$ alors $G(x) = \int \frac{ax^{a-1}}{ax^{a-1}-x^a}\,\mathrm{d}x = \int \frac{ax^{a-1}}{ax^{a-1}-x^a}\,\mathrm{d}x = -a\ln(a-x)$ et $f(x) = \frac{1}{(a-x)^a}$. Vérifions si on a bien $(fg)' = f'g'$:
  $$\begin{aligned}(fg)'(x) &= \left(\frac{x^a}{(a-x)^a}\right)' = a^2x^{a-1}(a-x)^{-a-1}\\ f'(x)g'(x) &= a(a-x)^{-a-1}\cdot ax^{a-1} = a^2x^{a-1}(a-x)^{-a-1}\end{aligned}$$
  - si on pose $g(x) = e^{ax}$ alors $G(x) = \int \frac{ae^{ax}}{ae^{ax}-e^{ax}}\,\mathrm{d}x = \frac{a}{a-1}x$ et $f(x) = e^{bx}$ où $b = a/(a-1)$. Vérifions si on a bien $(fg)' = f'g'$:
  $$\begin{aligned}(fg)'(x) &= (e^{bx}e^{ax})' = (e^{(a+b)x})' = (a+b)e^{(a+b)x}\\ f'(x)g'(x) &= be^{bx}ae^{ax} = (ab)e^{(a+b)x} = (a+b)e^{(a+b)x}\end{aligned}$$

Exercice 11.5 (Formules de réduction)

Les formules de réduction dérivent de l'application répétée de la règle d'intégration par parties.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \mathbb{R}^*$, montrer que
$$\int x^n e^{\alpha x}\,\mathrm{d}x = \left(x^n - \frac{n}{\alpha}x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{\alpha^2}x^{n-2}\cdots + (-1)^n\frac{n!}{\alpha^n}\right)\frac{e^{\alpha x}}{\alpha} + c$$
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que
$$\begin{aligned}\int \sin^n(x)\,\mathrm{d}x &= \frac{-\sin^{n-1}(x)\cos(x)}{n} + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2}(x)\,\mathrm{d}x,\\ \int \cos^n(x)\,\mathrm{d}x &= \frac{\cos^{n-1}(x)\sin(x)}{n} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2}(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que
$$\begin{aligned}\int x^n\sin(x)\,\mathrm{d}x &= -x^n\cos(x) + nx^{n-1}\sin(x) - n(n-1)\int x^{n-2}\sin(x)\,\mathrm{d}x,\\ \int x^n\cos(x)\,\mathrm{d}x &= x^n\sin(x) + nx^{n-1}\cos(x) - n(n-1)\int x^{n-2}\cos(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha \neq -1$ et $x > 0$. Montrer que
$$\int x^\alpha\ln^n(x)\,\mathrm{d}x = \left(\ln^n(x) - \frac{n}{\alpha+1}\ln^{n-1}(x) + \frac{n(n-1)}{(\alpha+1)^2}\ln^{n-2}(x)\cdots + (-1)^n\frac{n!}{(\alpha+1)^n}\right)\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c.$$

Correction

1. On pose $I_n = \int x^n e^{\alpha x}\,dx$. En intégrant par parties ($f(x) = x^n$ et $g'(x) = e^{\alpha x}$) on trouve

$$I_n = x^n \frac{e^{\alpha x}}{\alpha} - \frac{n}{\alpha} I_{n-1} = x^n \frac{e^{\alpha x}}{\alpha} - \frac{n}{\alpha}\left(x^{n-1}\frac{e^{\alpha x}}{\alpha} - \frac{n-1}{\alpha} I_{n-2}\right) = \cdots = \left(x^n - \frac{n}{\alpha}x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{\alpha^2}x^{n-2}\cdots + (-1)^n \frac{n!}{\alpha^n}\right)\frac{e^{\alpha x}}{\alpha} + c$$

2. On pose $I_n = \int \sin^n(x)\,dx$. En intégrant par parties ($f(x) = \sin^{n-1}(x)$ et $g'(x) = \sin(x)$) on trouve

$$I_n = -\sin^{n-1}(x)\cos(x) + (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n = \frac{-\sin^{n-1}(x)\cos(x)}{n} + \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

De la même manière, on pose $I_n = \int \cos^n(x)\,dx$. En intégrant par parties ($f(x) = \cos^{n-1}(x)$ et $g'(x) = \cos(x)$) on trouve

$$I_n = \frac{\cos^{n-1}(x)\sin(x)}{n} + \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

3. On pose $I_n = \int x^n \sin(x)\,dx$ et $J_n = \int x^n \cos(x)\,dx$. En intégrant par parties ($f(x) = x^n$ et $g'(x) = \sin(x)$ dans la première intégrale et $f(x) = x^n$ et $g'(x) = \cos(x)$ dans la deuxième intégrale) on trouve

$$I_n = -x^n \cos(x) + nJ_{n-1} \qquad\qquad J_n = x^n \sin(x) - nI_{n-1}$$

Par conséquence

$$\begin{aligned} I_n &= -x^n\cos(x) + n\left(x^{n-1}\sin(x) - (n-1)I_{n-2}\right) = -x^n\cos(x) + nx^{n-1}\sin(x) - n(n-1)I_{n-2} \\ J_n &= x^n\sin(x) - n\left(-x^{n-1}\cos(x) + (n-1)J_{n-2}\right) = x^n\sin(x) + nx^{n-1}\cos(x) - n(n-1)J_{n-2} \end{aligned}$$

4. On pose $I_n = \int x^\alpha \ln^n(x)\,dx$. En intégrant par parties ($f(x) = \ln^n(x)$ et $g'(x) = x^\alpha$) on trouve

$$I_n = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\ln^n(x) - \frac{n}{\alpha+1} I_{n-1} = \cdots = \left(\ln^n(x) - \frac{n}{\alpha+1}\ln^{n-1}(x) + \frac{n(n-1)}{(\alpha+1)^2}\ln^{n-2}(x)\cdots + (-1)^n\frac{n!}{(\alpha+1)^n}\right)\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c.$$

Exercice 11.6 (Intégration de fonctions rationnelles)

Calculer les primitives suivantes :

a) $\displaystyle\int \frac{a}{x-b}\,dx$

b) $\displaystyle\int \frac{a}{(x-b)^n}\,dx,\ n\neq 1$

c) $\displaystyle\int \frac{2x-1}{(x-1)(x-2)}\,dx$

d) $\displaystyle\int \frac{3x+1}{x^3-4x}\,dx$

e) $\displaystyle\int \frac{3x^2+2x-5}{3x^2-5x-2}\,dx$

Correction

Soit c une constante réelle.

a) $\int \frac{a}{x-b}\,dx = a\ln|x-b| + c$

b) $\int \frac{a}{(x-b)^n}\,dx = \frac{a}{(1-n)(x-b)^{n-1}} + c$

c) Comme $\frac{2x-1}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-2)}$ ssi $A+B=2$ et $-2A-B=-1$, alors $\int \frac{2x-1}{(x-1)(x-2)}\,dx = -\int \frac{1}{(x-1)}\,dx + 3\int\frac{1}{(x-2)}\,dx = -\ln|x-1| + 3\ln|x-2| + c = \ln\left|\frac{(x-2)^3}{x-1}\right| + c$

d) Comme $\frac{3x+1}{x^3-4x} = \frac{-1/4}{x} + \frac{-5/8}{x+2} + \frac{7/8}{x-2}$ alors $\int \frac{3x+1}{x^3-4x}\,dx = -\frac{\ln|x|}{4} - \frac{5\ln|x+2|}{8} + \frac{7\ln|x-2|}{8} + c$

e) Comme $\frac{3x^2+2x-5}{3x^2-5x-2} = \frac{(3x^2-5x-2)+(7x-3)}{3x^2-5x-2} = 1 + \frac{7x-3}{3x^2-5x-2}$ alors $\int \frac{3x^2+2x-5}{3x^2-5x-2}\,dx = x + \frac{16}{21}\ln\left|3x+1\right| + \frac{11}{7}\ln|x-2| + c$

Intégrales

Exercice 11.7

La valeur moyenne de la fonction $f(x) = x^3$ sur l'intervalle $[0;k]$ est 9. Calculer k.

Correction

$$\frac{1}{k}\int_0^k x^3\,dx = 9 \qquad\Longrightarrow\qquad \frac{1}{k}\frac{k^4}{4} = 9 \qquad\Longrightarrow\qquad k = \sqrt[3]{36}.$$

Exercice 11.8 (Vitesse et accélération)

Soit $V>0$ une constante. Une voiture roule à une vitesse de $v(t)=Vt(1-t)$ km·h^{-1} durant l'intervalle de temps $0\le t\le 1$ h. Quelle a été sa vitesse maximale ? Quelle distance a-t-elle parcouru ?

Correction

- Vitesse maximale : $v(t)=Vt(1-t)$, $v'(t)=1-2t$, $v'(t)=0$ ssi $t=\frac{1}{2}$ et $v\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{V}{4}$.
- Distance parcourue : $v(t)=x'(t)$ donc $x_{\text{parcourue}}=\displaystyle\int_0^1 v(t)\,\mathrm{d}t=\frac{V}{6}$.

Exercice 11.9

Calculer

$$\mathscr{A}=\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x,\qquad \mathscr{B}=\int_{-1/\sqrt{3}}^{1/\sqrt{3}}\frac{1}{1+3x^2}\,\mathrm{d}x,\qquad \mathscr{C}=\int_{-1}^{1}\frac{2x-5}{x^2-5x+6}\,\mathrm{d}x.$$

Correction

$$\mathscr{A}=[\arctan(x)]_{-1}^{1}=\arctan(1)-\arctan(-1)=\frac{\pi}{4}-\frac{-\pi}{4}=\frac{\pi}{2},$$

$$\mathscr{B}=\frac{1}{\sqrt{3}}\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t=\frac{\mathscr{A}}{\sqrt{3}}=\frac{\pi}{2\sqrt{3}},$$

$$\mathscr{C}=\int_{-1}^{1}\frac{2x-5}{x^2-5x+6}\,\mathrm{d}x=\left[\ln|x^2-5x+6|\right]_{-1}^{1}=\ln(2)-\ln(12)=\ln(2)-\ln(3)-2\ln(2)=-\ln(2)-\ln(3).$$

Exercice 11.10 (Calcul de l'aire)

Calculer l'aire comprise entre le graphe de la fonction $f(x)$ et le graphe de la fonction $g(x)$:

a) $f(x)=-x^2+x+2$ et $g(x)=x^2-3x+2$

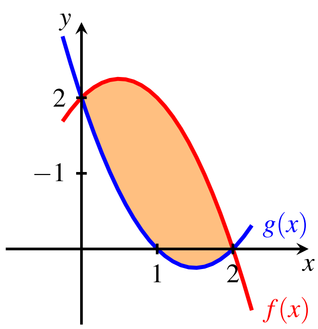
b) $f(x)=\frac{x^3}{4}$ et $g(x)=x^2-x$

Correction

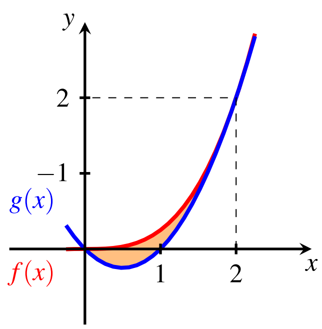
a) Comme $f(x)=g(x)$ ssi $x\in\{0,2\}$ et $f(x)\ge g(x)$ pour $x\in[0,2]$, l'aire comprise entre le graphe de la fonction $f(x)$ et le graphe de la fonction $g(x)$ est $\displaystyle\int_0^2(f(x)-g(x))\,\mathrm{d}x=\int_0^2-2x^2+4x\,\mathrm{d}x=\left[-2\frac{x^3}{3}+4\frac{x^2}{2}\right]_0^2=\frac{8}{3}$.

b) Comme $f(x)=g(x)$ ssi $x\in\{0,2\}$ et $f(x)\ge g(x)$ pour $x\in[0,2]$, l'aire comprise entre le graphe de la fonction $f(x)$ et le graphe de la fonction $g(x)$ est $\displaystyle\int_0^2(f(x)-g(x))\,\mathrm{d}x=\int_0^2\frac{x^3}{4}-x^2+x\,\mathrm{d}x=\left[\frac{x^4}{16}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right]_0^2=\frac{1}{3}$.

$f(x)=-x^2+x+2$ et $g(x)=x^2-3x+2$



$f(x)=\frac{x^3}{4}$ et $g(x)=x^2-x$



Exercice 11.11 (Calcul de l'aire)

Calculer l'aire de A et de B ainsi définis :

$$A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0\le x\le 2\pi, \frac{1}{8}\le y\le \cos^3 x\right\},\qquad B=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; -\pi\le x\le \pi, \frac{1}{8}\le y\le \cos^3 x\right\}.$$

Correction

Remarquons d'abord que

$$\int \cos^3(x)\,\mathrm{d}x \overset{\cos^2(x)=1-\sin^2(x)}{=} \int (1-\sin^2(x))\cos(x)\,\mathrm{d}x =$$
$$= \int \cos(x)-\cos(x)\sin^2(x)\,\mathrm{d}x = \sin(x)-\int \cos x\,\sin^2(x)\,\mathrm{d}x \overset{\substack{t=\sin x\\ \mathrm{d}t=\cos(x)\,\mathrm{d}x}}{=}$$
$$= \sin(x)-\int t^2\,dt = \sin(x)-\frac{t^3}{3}+k = \sin(x)-\frac{\sin^3(x)}{3}+k,\quad k\in\mathbb{R}.$$

Comme $\cos^3(x)=\frac{1}{8}$ ssi $x=\frac{\pi}{3}$ ou $x=\frac{5\pi}{3}$ alors

$$\text{Aire }(A)=2\left(\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos^3(x)\,\mathrm{d}x-\frac{\frac{\pi}{3}-0}{8}\right)=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{8}-\frac{\pi}{24}\right)=\frac{9\sqrt{3}-\pi}{12}$$

et

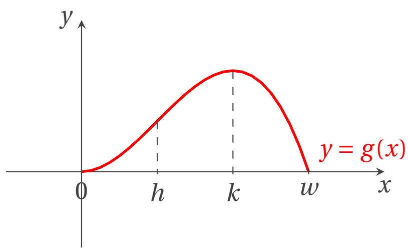
$$\text{Aire }(B)=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\cos^3(x)\,\mathrm{d}x-2\cdot\frac{\frac{\pi}{3}-0}{8}=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{8}-\frac{\pi}{24}\right)=\frac{9\sqrt{3}-\pi}{12}.$$

Exercice 11.12

Dans la figure ci-contre on a tracé le graphe de la fonction $g\colon [0;w]\to\mathbb{R}$ définie par

$$g(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

avec $f\colon [0;w]\to\mathbb{R}$ une fonction continue et dérivable. Le graphe de g a tangente horizontale en $x=0$ et présente un changement de concavité en $x=h$ et un maximum en $x=k$.



1. Calculer $f(0)$ et $f(k)$.
2. Tracer un graphe plausible de f et montrer qu'elle admet un maximum.
3. Dorénavant on suppose que g est une fonction polynomiale de degré 3.
   3.1. Montrer que $h=w/3$ et $k=2h$.
   3.2. Pour $w=3$ et $g(1)=2/3$ trouver l'expression de g.

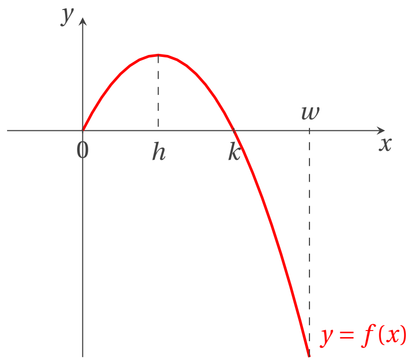
Correction

1. $g'(x)=f(x)$ pour tout $x\in[0;w]$. Puisque $x=0$ et $x=k$ sont des points à tangente horizontale pour le graphe de g, alors $g'(0)=g'(k)=0$.
2. f est continue par hypothèse. D'après le théorème de WEIERSTRASS elle admet un maximum et un minimum sur $[0;w]$.

   On a vu au point précédent que $f(0)=f(k)=0$ et que $g'(x)=f(x)$ pour tout $x\in[0;w]$. g est croissante ($g'(x)>0$) sur $[0;k]$ et décroissante ($g'(x)<0$) sur $[k;w]$, donc f est positive sur $[0;h]$ et négative sur $[h;w]$.

   De plus, $g''(x)=f'(x)$ pour tout $x\in[0;w]$. g est convexe ($g''(x)>0$) sur $[0;h]$ et concave ($g''(x)<0$) sur $[h;w]$, donc f est croissante sur $[0;h]$ et décroissante sur $[h;w]$. $x=h$ est un maximum absolu pour f et $x=w$ un minimum absolu.

   Un graphe plausible de f est donc le suivant :



3. g est une fonction polynomiale de degré 3, $x = w$ est un zéro simple et $x = 0$ est un zéro double (car $g'(0) = 0$), donc $g(x) = a(x-w)(x-0)^2 = ax^2(x-w)$ avec $a \in \mathbb{R}^*$ un paramètre.
   3.1. On a $f(x) = g'(x) = ax(3x-2w)$: il s'agit d'une parabole. Comme $f(0) = f(k) = 0$ alors $k = 2w/3$. De plus, le sommet de la parabole se trouve en $x = k/2$ et $f'(k/2) = 0$. Comme $x = h$ est le maximum de f, alors $h = k/2 = w/3$.
   3.2. Si $w = 3$ alors $g(x) = ax^2(x-3)$ et la condition $g(1) = 2/3$ implique $a = -1/3$. On obtient ainsi $g(x) = -\frac{1}{3}x^3 + x^2$.

Exercice 11.13 (Calcul d'impôt)

Le principe de l'impôt sur les revenus est le suivant : le revenu imposable [1] pour l'année 2013 est partagé en tranches et l'impôt à payer en 2014 est calculé en prenant un certain pourcentage de chaque tranche. Voici alors les tranches d'imposition selon les données officielles prises sur le site du ministère des finances :

• jusqu'à 6011 € :	0%
• de 6011 € à 11 991 € :	5.5%
• de 11 991 € à 26 631 € :	14%
• de 26 631 € à 71 397 € :	30%
• de 71 397 € à 151 200 € :	41%
• plus de 151 200 € :	45%

Mathématiquement parlant, l'impôt est une *fonction continue* du revenu pour qu'il n'y ait pas d'injustices : une petite modification du revenu n'entraîne qu'une petite modification de l'impôt (sauter d'une tranche n'est pas un drame). Avec des taux marginaux par tranches, on obtient une fonction *croissante* (plus le revenu est élevé et plus l'impôt est élevé) et affine par morceaux ; et puisque le taux marginal augmente en fonction du revenu il s'agit d'une fonction *convexe*. Cela signifie que la courbe «monte toujours plus vite» : plus le revenu est élevé et plus le taux marginal augmente. Non seulement l'impôt augmente en fonction du revenu mais il augmente de plus en plus vite.

Écrire et tracer le graphe des fonctions suivantes en fonction du revenu imposable :

1. Taux marginal,
2. Impôt,
3. Taux global,
4. Ce qui reste après avoir payé l'impôt.

Correction

Souvent on entend dire qu'on ne paye pas d'impôt si on gagne 6011 € mais que si on gagne un euro de plus alors on doit payer 5.5% de 6011 €, c'est-à-dire 330.60 €. C'est bien évidemment faux ! Ces tranches d'imposition signifient la chose suivante :

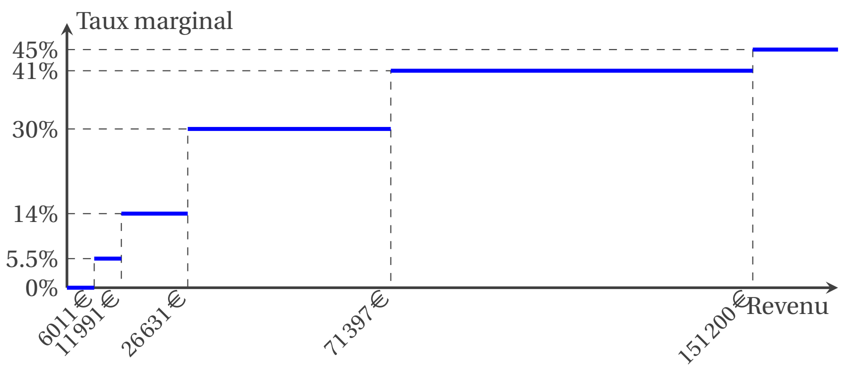
- ⋆ Si le revenu est inférieur à 6011 €, on ne paye pas d'impôt.
- ⋆ Si le revenu est compris entre 6011 € et 11 991 €, on ne paye pas d'impôt sur les premiers 6011 € de son revenu, et on paye 5.5% de la partie qui excède 6011 €. Par exemple, si le revenu est 6012 €, on payera 5.5% de 1 €, c'est-à-dire 5 centimes.
- ⋆ Si le revenu est compris entre 11 991 € et 26 631 €, on ne paye rien sur la première tranche de 6011 €, puis 5.5% sur la deuxième tranche, allant de 6011 € à 11 991 € (soit 5.5% de (11991 − 6011) €= 328.90 €), et enfin 14% sur la partie du revenu qui excède 11 991 €. Par exemple : si le revenu est de 15 000 €, l'impôt sera de 0 + 328.90 + 14% × (15000 − 11991) = 750.16 €.

1. Il s'agit du revenu du contribuable auquel on retire certaines sommes (par exemple au titre des frais professionnels).

⋆ De même on trouve pour les impôts dans chacune des autres tranches : $0.30\times(71397-26631) = 13\,429.8$ € et $0.41\times(151200-71397) = 32\,719.23$ €.

Prenons l'exemple concret d'un contribuable, célibataire, qui en 2014 déclare 100 000 € de revenu pour l'année 2013. On veut calculer explicitement les impôts à payer. Ce contribuable est dans une tranche d'imposition marginale de 41% donc au total a un montant d'impôts de $0\times 6011+5.5\%\times(11991-6011)+14\%\times(26631-11991)+30\%\times(71397-26631)+41\%\times(100000-71397) = 27\,535.53$ € et est ainsi redevable de 27.53% de ses revenus (et non 41%).

1. Commençons par tracer le graphique responsable de la crainte du saut d'une tranche : en horizontale, le revenu imposable, en verticale, le taux de la tranche correspondante, qu'on appelle le taux marginal.



Ce graphique présente effectivement des sauts importants. Mais *ces sauts ne concernent pas l'impôt mais la dérivée de la fonction Impôt I par rapport au revenu R*. La fonction Impôt $I\colon \mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ est une fonction continue mais pas sa dérivée $I'\colon \mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ qui est définie par

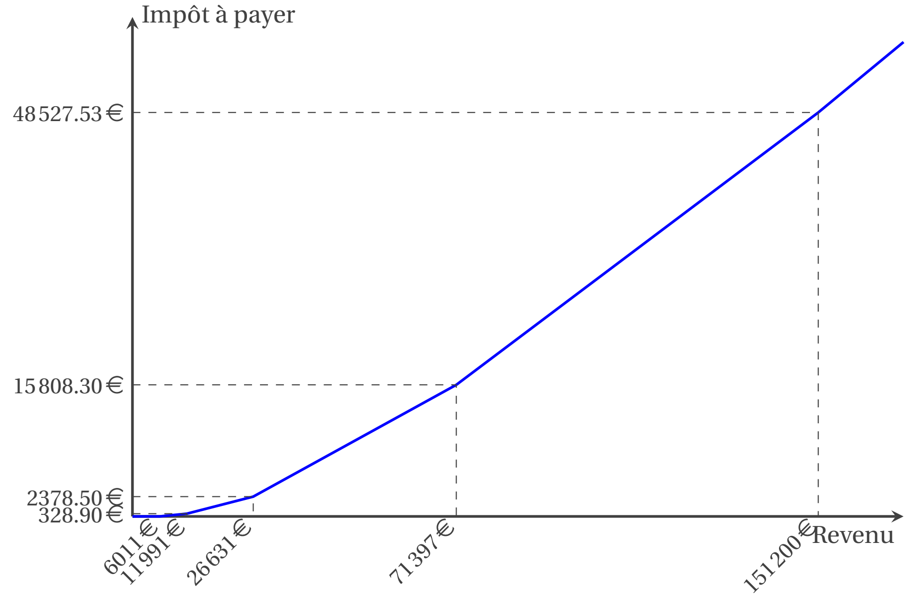
$$I'(R)=\begin{cases}0 & \text{si } R<6011\text{ €}\\ 0.055 & \text{si } 6011\text{ €}<R<11991\text{ €}\\ 0.14 & \text{si } 11991\text{ €}<R<26631\text{ €}\\ 0.30 & \text{si } 26631\text{ €}<R<71397\text{ €}\\ 0.41 & \text{si } 71397\text{ €}<R<151200\text{ €}\\ 0.45 & \text{si } R>151200\text{ €}\end{cases}$$

Ce graphique indique le pourcentage d'imposition qui serait appliqué *sur chaque euro supplémentaire* qui viendrait s'ajouter au revenu : si votre revenu est par exemple de 80 000 €, alors pour chaque euro supplémentaire que vous gagnez, 41 centimes seront pour les impôts.

2. Il s'agit de la fonction $I\colon \mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ définie par

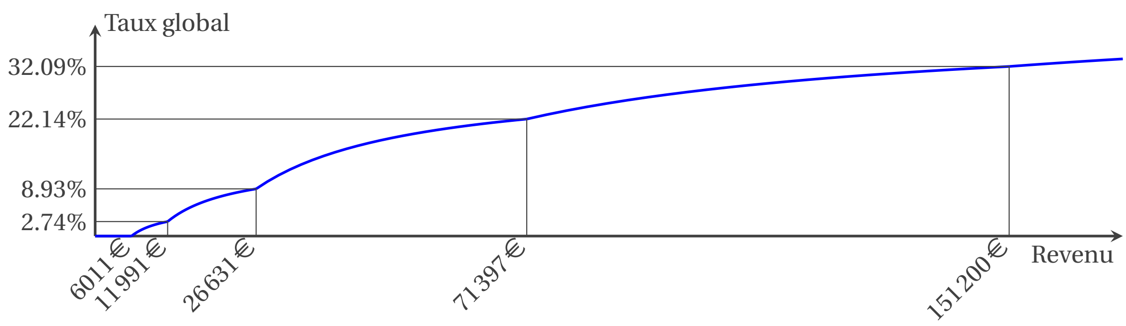
$$I(R)=\int_0^R I'(r)\,\mathrm{d}r=\begin{cases}0 & \text{si } R\le 6011\text{ €}\\ 0.055R-330.605 & \text{si } 6011\text{ €}<R\le 11991\text{ €}\\ 0.14R-1349.84 & \text{si } 11991\text{ €}<R\le 26631\text{ €}\\ 0.3R-5610.8 & \text{si } 26631\text{ €}<R\le 71397\text{ €}\\ 0.41R-13464.47 & \text{si } 71397\text{ €}<R\le 151200\text{ €}\\ 0.45R-19512.47 & \text{si } R>151200\text{ €}\end{cases}$$

Voici la représentation graphique de la fonction Impôt en fonction du revenu avec le revenu imposable en horizontale et l'impôt à payer en verticale.



Elle est bien une fonction continue du revenu, croissante, affine par morceaux et convexe.

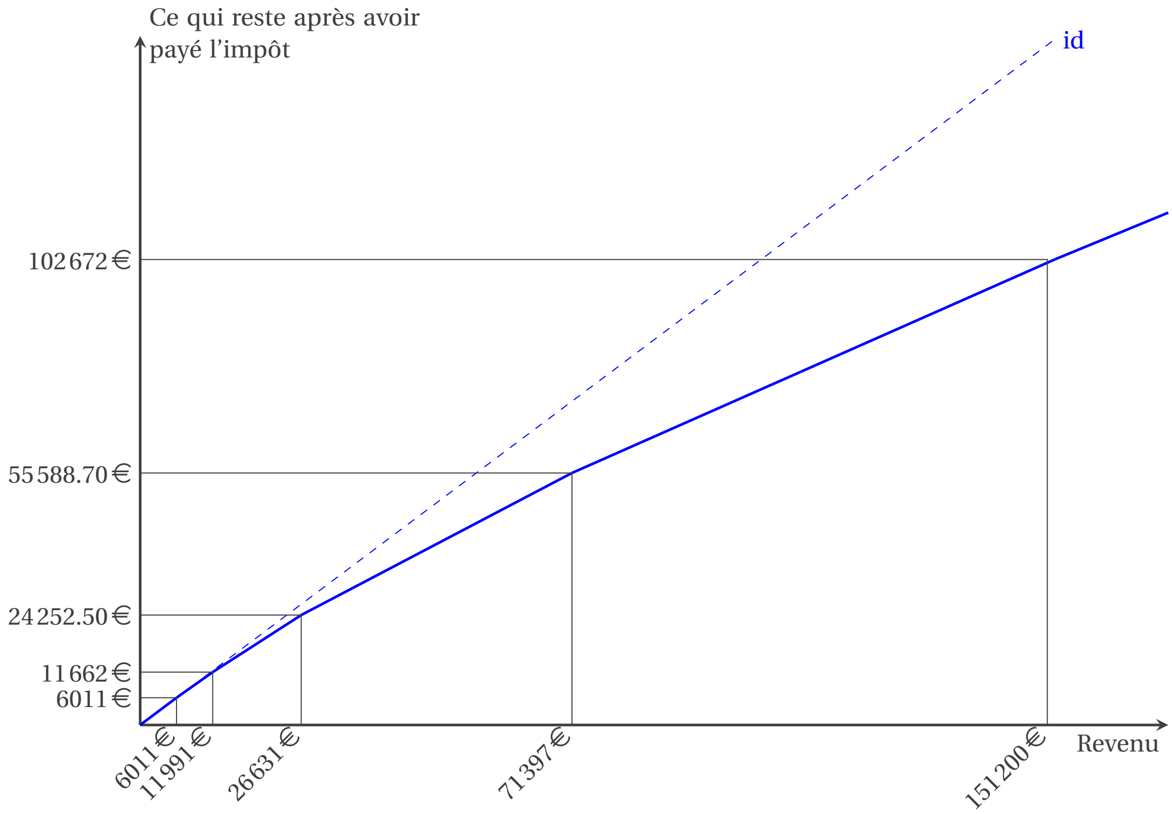
3. Pour calculer le taux d'imposition global, c'est-à-dire le pourcentage qu'il faut appliquer au revenu pour avoir l'impôt, il s'agit simplement de diviser I par R. Par exemple, si le revenu est de 50 000 €, l'impôt est de 9389.20 €, si bien que le taux global est de $9389.20/50000 = 0.187784$, c'est-à-dire $\simeq 18.78\%$.



Il s'agit de la fonction $G\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ définie par

$$G(R) = \frac{I(R)}{R} = \begin{cases} 0 & \text{si } R \le 6011 € \\ 0.055 - \frac{330.60}{R} & \text{si } 6011 € < R \le 11\,991 € \\ 0.14 - \frac{1349.84}{R} & \text{si } 11\,991 € < R \le 26\,631 € \\ 0.3 - \frac{5610.80}{R} & \text{si } 26\,631 € < R \le 71\,397 € \\ 0.41 - \frac{13464.47}{R} & \text{si } 71\,397 € < R \le 151\,200 € \\ 0.45 - \frac{19512.47}{R} & \text{si } R > 151\,200 € \end{cases}$$

4. Ce dernier graphique montre une autre propriété qui mérite d'être signalée car elle n'est pas évidente pour tout le monde. Horizontalement, toujours le revenu. Verticalement, on indique «ce qui vous reste quand vous avez payé vos impôts», autrement dit la différence entre le revenu et l'impôt. Eh bien, cette fonction est encore croissante. Qu'est-ce que cela signifie ? Tout simplement que plus on gagne et plus on est riche, même après avoir déduit les impôts. On entend trop souvent des affirmations selon lesquelles «ce n'est pas la peine que je travaille plus, car tout ce que je gagne en plus part aux impôts, et je suis perdant».



Il s'agit de la fonction $A\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ définie par

$$A(R) = R - I(R) = \begin{cases} 0 & \text{si } R \le 6011\,€ \\ (1-0.055)R - 330.605 & \text{si } 6011\,€ < R \le 11\,991\,€ \\ (1-0.14)R - 1349.84 & \text{si } 11\,991\,€ < R \le 26\,631\,€ \\ (1-0.30)R - 5610.8 & \text{si } 26\,631\,€ < R \le 71\,397\,€ \\ (1-0.41)R - 13464.47 & \text{si } 71\,397\,€ < R \le 151\,200\,€ \\ (1-0.45)R - 19512.47 & \text{si } R > 151\,200\,€ \end{cases}$$

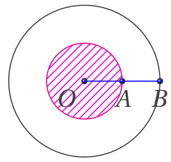
Exercice 11.14 (Probabilité géométrique)

1. On sélectionne un point au hasard sur une cible *circulaire*. Quelle est la probabilité que le point choisi soit plus prêt du centre que de la circonférence de la cible ?
2. On sélectionne un point au hasard sur une cible *carrée*. Quelle est la probabilité que le point sélectionné soit plus prêt du centre du carré que d'un de ses côtés ?

Source : `http://www.thedudeminds.net`

Correction

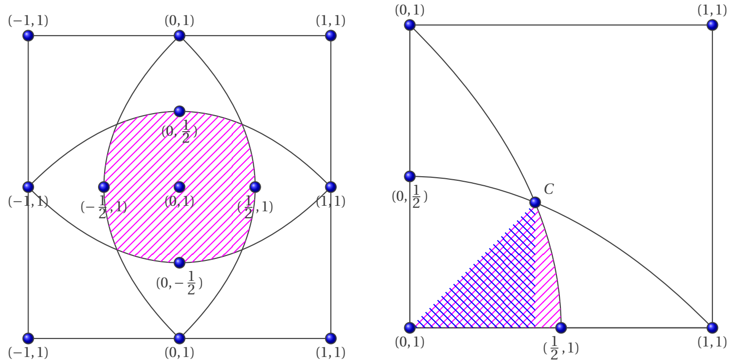
1. Il semble assez évident de délimiter correctement de manière intuitive les zones par deux disques concentriques.



Attention néanmoins à ne pas répondre que la probabilité de choisir un point dans la zone hachurée est 1/2 (parce que le rayon du disque hachuré correspond à la moitié du rayon du grand disque). Or, si le petit disque possède un rayon de r et le grand $2r$, on a

$$P = \frac{\text{Aire du petit disque hachuré}}{\text{Aire du grand disque}} = \frac{\pi r^2}{\pi(2r)^2} = \frac{1}{4}.$$

2. L'ensemble de points équidistants d'un point et d'une droite est une parabole. La région à considérer est donc délimitée par quatre paraboles qui ont pour foyer le centre du carré et comme droites directrices les droites qui supportent les côtés du carré. On s'affaire donc à trouver l'aire de cette région hachurée. On place d'abord le tout dans un repère cartésien. Les sommets du carré sont $(1,1)$, $(-1,1)$, $(-1,-1)$ et $(1,-1)$ (cf. figure à gauche). En vertu des symétries de la figure, il nous est possible de nous concentrer seulement sur la partie située dans le premier quadrant. Qui plus est, il est possible de ne s'attarder qu'à la moitié de cette dernière région (cf. figure à droite).



Ce «croissant de parabole» correspond à la moitié de la région à considérer dans le premier quadrant. On note au passage que l'aire du carré dans ce premier quadrant est 1. Le «croissant» est à son tour divisé en deux parties : la zone de forme triangulaire $\mathscr{T}$ et la zone $\mathscr{A}$. On cherche l'aire de ces zones. Pour y arriver, on aura besoin des coordonnées de C. L'équation de la parabole qui nous intéresse est $y^2 = 1-2x$. On ne s'intéressera qu'à la branche située au dessus de l'axe des abscisses. Ainsi $y = \sqrt{1-2x}$. On cherche ensuite les coordonnées de C, le point d'intersection entre la courbe d'équation $y = \sqrt{1-2x}$ et la droite d'équation $y = x$ et on obtient $x = -1+\sqrt{2}$. Il nous est donc déjà possible de trouver l'aire du triangle, que l'on a identifié comme $\mathscr{T} = \frac{3-2\sqrt{2}}{2}$. Il reste à trouver l'aire de la région sous la courbe :

$$\mathscr{A} = \int_{-1+\sqrt{2}}^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-2x}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int_{3-2\sqrt{2}}^{0} \sqrt{t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\sqrt{\left(3-2\sqrt{2}\right)^3} = \frac{(-1+\sqrt{2})^3}{3}.$$

L'aire totale est donc

$$\mathscr{T}+\mathscr{A} = \frac{-5+4\sqrt{2}}{6}.$$

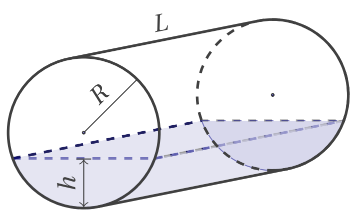
Comme le carré du premier quadrant à une aire de 1, il ne reste qu'à doubler ce résultat afin d'obtenir la probabilité recherchée

$$P = \frac{-5+4\sqrt{2}}{3}$$

ce qui correspond à un peu moins de 22%.

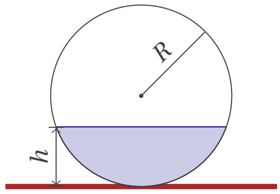
Exercice 11.15 (Problème pratique)

J'ai acheté une ancienne maison qui utilise du mazout pour le chauffage. Le constructeur avait enterré une cuve cylindrique dont je ne connais pas la capacité, je peux juste mesurer la hauteur du mazout dans la cuve et le rayon qui est de 0.80 m. Sachant qu'au départ la hauteur du mazout dans la cuve est de 0.36 m et qu'après avoir ajouté 3000 L la hauteur est de 1.35 m, je veux calculer le volume totale de la cuve et tracer la fonction qui renvoie les litres que je peux ajouter en fonction de la hauteur de mazout présent dans la cuve.

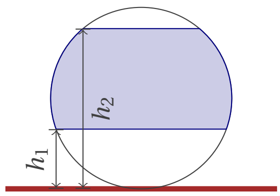


Correction

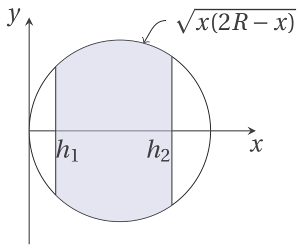
1. **Calcul de la capacité de la cuve.**
   Notons L la longueur de la cuve, R son rayon et h la hauteur du mazout. On a $0 \le h \le 2R$. Considérons une coupe verticale de la cuve :



L'introduction de 3000 L, c'est-à-dire $3\,\mathrm{m}^3$, de mazout fait passer h de h_1 à h_2. Ce volume correspond à $L \times \mathscr{A}$ où $\mathscr{A}$ est la surface coloriée ci-dessous :



Pour calculer l'aire coloriée, on "tourne" le cercle et on le plonge dans un repère orthonormé :



On peut alors calculer l'aire grâce au calcul d'une intégrale :

$$\mathscr{A} = 2\int_{h_1}^{h_2} \sqrt{x(2R-x)}\,\mathrm{d}x.$$

Calculons tous d'abord les primitives de $\sqrt{x(2R-x)}$:

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{x(2R-x)}\,\mathrm{d}x &\overset{\substack{x=R-y\\ \mathrm{d}x=-\,\mathrm{d}y}}{=} -\int \sqrt{R^2-y^2}\,\mathrm{d}y\\
&\overset{\substack{y=R\sin(t)\\ \mathrm{d}y=R\cos(t)\,\mathrm{d}t}}{=} -R^2\int \cos^2(t)\,\mathrm{d}t\\
&= -\frac{R^2}{2}\left(\sin(t)\cos(t)+t\right)+c\\
&= -\frac{R^2}{2}\left(\sin(t)\sqrt{1-\sin^2(t)}+t\right)+c\\
&\overset{t=\arcsin\left(\frac{y}{R}\right)}{=} -\frac{R^2}{2}\left(\frac{y}{R}\sqrt{1-\frac{y^2}{R^2}}+\arcsin\left(\frac{y}{R}\right)\right)+c\\
&\overset{y=R-x}{=} -\frac{R-x}{2}\sqrt{x(2R-x)}-\frac{R^2}{2}\arcsin\left(1-\frac{x}{R}\right)+c.
\end{aligned}$$

Par conséquent

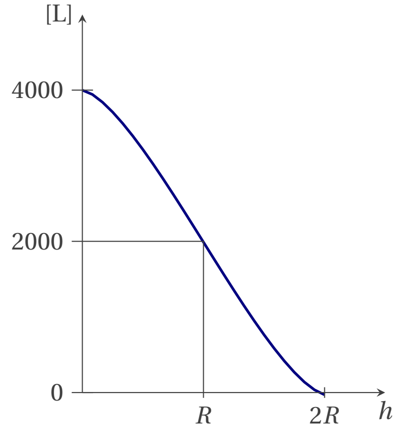
$$\mathscr{A} = 2\int_{h_1}^{h_2} \sqrt{x(2R-x)}\,\mathrm{d}x \approx 1.48\,\mathrm{m}^2.$$

Comme $L \times \mathscr{A} = 3\,\mathrm{m}^3$, on trouve $L \approx 2\,\mathrm{m}$ et le volume totale de la cuve est $\pi R^2 L \approx 4\,\mathrm{m}^3$, *i.e.* environs 4000 L.

2. **Calcul de la fonction qui renvoie les litres que je peux ajouter en fonction de la hauteur de mazout déjà présent dans la cuve.**

$$\begin{aligned}
f \colon [0;2R] &\to [0;4000]\\
h &\mapsto 2000\left(2-\int_0^h \sqrt{x(2R-x)}\,\mathrm{d}x\right)
\end{aligned}$$

- ⋆ $f(h) = 2000\left(2 + \frac{R-h}{2}\sqrt{h(2R-h)} + \frac{R^2}{2}\arcsin\left(1-\frac{h}{R}\right)\right)$;
- ⋆ $f(0) = 4000$, $f(2R) = 0$;
- ⋆ $f'(h) = -2000\sqrt{h(2R-h)}$;
- ⋆ $f'(h) = 0$ ssi $h = 0$ ou $h = 2R$;
- ⋆ f est décroissante pour tout $h \in [0;2R]$;
- ⋆ $f''(h) = 2000\frac{h-R}{\sqrt{h(2R-h)}}$;
- ⋆ $h = R$ est un point d'inflexion ;
- ⋆ f convexe pour $h \in [R;2R]$, concave pour $h \in [0;R]$.



Exercice 11.16 (Un escargot sur un élastique)

Un escargot avance d'un mètre par jour sur un élastique d'un kilomètre de long. Mais l'élastique s'étire d'un kilomètre par jour. L'escargot arrivera-t-elle au bout de l'élastique ?
Source : `http://allken-bernard.org/pierre/weblog/?p=209`

Correction
On note $L(t)$ la longueur de l'élastique à l'instant t et $\ell(t)$ la distance parcourue par l'escargot à l'instant t. Pour les unités de mesure, on convient qu'une unité de temps correspond à un jour et les longueurs sont mesurées en mètres. On a $L(0) = 1000$, $\ell(0) = 0$ et il s'agit de voir si $\ell(t) = L(t)$ pour un certain t.
Pour tout $t \ge 0$,

$$L(t) = 1000t + 1000$$

et on peut définir $y(t)$ la fraction de l'élastique parcourue par l'escargot à l'instant t :

$$y(t) = \frac{\ell(t)}{L(t)} \quad \forall t \ge 0.$$

La vitesse ℓ' de l'escargot par rapport à l'extrémité fixe de l'élastique est la somme de deux vitesses : la vitesse de l'escargot sur l'élastique, soit 1 mètre par jour, et la vitesse du point de l'élastique où se trouve l'escargot (on peut faire l'hypothèse que cette vitesse est proportionnelle à l'abscisse de l'escargot) :

$$\ell'(t) = 1 + y(t)L'(t) \quad \forall t \ge 0,$$

donc

$$y'(t) = \frac{\ell'(t)}{L(t)} - y(t)\frac{L'(t)}{L(t)} = \frac{1 + y(t)L'(t)}{L(t)} - y(t)\frac{L'(t)}{L(t)} = \frac{1}{L(t)} \quad \forall t \ge 0.$$

Puisque $y(0) = 0$, on en conclut que

$$y(t) = \int_0^t \frac{1}{L(\tau)}\,\mathrm{d}\tau = \frac{1}{1000}\int_0^t \frac{1}{1+\tau}\,\mathrm{d}\tau = \frac{1}{1000}\left[\ln(1+\tau)\right]_0^t = \frac{1}{1000}\ln(1+t)$$

et donc

$$\ell(t) = y(t)L(t) = \frac{1000t + 1000}{1000}\ln(1+t) = (1+t)\ln(1+t) \quad \forall t \ge 0.$$

L'escargot touchera l'extrémité mobile de l'élastique lorsque $\ell(t) = L(t)$, c'est-à-dire à l'instant $t_f = e^{1000} - 1 \simeq 1.97 \times 10^{434}$ jours $\simeq 5.397 \times 10^{431}$ années (ce qui correspond à $\simeq 3.9 \times 10^{421}$ fois l'age de l'univers).
En étudiant la fonction $t \mapsto d(t) = L(t) - \ell(t)$, on trouve que cette distance est maximale [2] à l'instant $t_0 = e^{999} - 1$; après cet instant l'escargot commence à se rapprocher de l'extrémité de l'élastique pour en arriver au but à l'instant $t_f = e^{1000} - 1$. À l'instant t_0 l'escargot se déplace à une vitesse de 1000 kilomètre par jour et a parcouru $y(t_0) = 99.9\%$ de l'élastique, elle a parcouru 99.9% de l'élastique mais elle n'a jamais été aussi loin de son but !

2. $d'(t) = 999 - \ln(1+t)$

12
Équations différentielles ordinaires (EDO)

Les équations différentielles décrivent l'évolution de nombreux phénomènes dans des domaines variés. Une équation différentielle est une équation impliquant une ou plusieurs dérivées d'une fonction inconnue. Si toutes les dérivées sont prises par rapport à une seule variable, on parle d'équation différentielle ordinaire (EDO). Une équation mettant en jeu des dérivées partielles est appelée équation aux dérivées partielles (EDP).
Une EDO est une équation exprimée sous la forme d'une relation

$$F(y(t), y'(t), y''(t), \dots, y^{(p)}(t)) = g(t)$$

- ⋆ dont les inconnues sont une **fonction** $y\colon I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et son **intervalle de définition** I
- ⋆ dans laquelle cohabitent à la fois y et ses dérivées y', y'', …, $y^{(p)}$ (p est appelé l'**ordre** de l'équation).

Si la fonction g, appelée «second membre» de l'équation, est nulle, on dit que l'équation en question est **homogène**.
Résoudre une équation différentielle, c'est chercher toutes les fonctions, définies sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, qui satisfont l'équation (on dit aussi intégrer l'équation différentielle).

Exemple
Résoudre l'équation différentielle $y'(t) = -y(t)$ signifie chercher toutes les fonctions

$$\begin{aligned} y\colon I \subset \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto y = f(t) \end{aligned}$$

telles que $f'(t) = -f(t)$ pour tout $t \in I$. On peut vérifier que $y(t) = ce^{-t}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ (où c est constante réelle quelconque) est une solution de l'EDO (en particulier, pour $c = 0$ on trouve la solution nulle).

12.1 Définition (Solution générale, solution particulière)
Par le terme *solution générale* d'une EDO on désigne un représentant de l'ensemble des solutions. L'une des solutions de l'EDO sera appelée *solution particulière*. On appelle *courbes intégrales* d'une EDO les courbes représentatives des solutions de l'équation.

Une EDO admet généralement une infinité de solutions. Pour choisir, entre les différentes solutions, celle qui décrit le problème physique, il faut considérer d'autres données qui dépendent de la nature du problème, par exemple la valeur prise par la solution et/ou éventuellement ses dérivées en un ou plusieurs points de l'intervalle d'intégration.

Exemple (Dynamique des populations)
Considérons une population de bactéries dans un environnement confiné dans lequel pas plus de B individus ne peuvent coexister. On suppose qu'au temps initial le nombre d'individus est égal à $y_0 \ll B$ et que le taux de croissance des bactéries est une constante positive C. Alors, la vitesse de croissance de la population est proportionnelle au nombre de bactéries, sous la contrainte que ce nombre ne peut dépasser B. Ceci se traduit par l'équation différentielle suivante

$$y'(t) = Cy(t)\left(1 - \frac{y(t)}{B}\right) \tag{12.1}$$

dont la solution $y = y(t)$ représente le nombre de bactéries au temps t.

L'équation (12.1) admet la famille de solutions
$$y(t) = B\frac{e^{Ct+K}}{1+e^{Ct+K}}$$
K étant une constante arbitraire. Si on impose la condition $y(0) = 1$, on sélectionne l'unique solution correspondant à la valeur $K = -\ln(B-1)$.

EXEMPLE (MODÈLES DE CROISSANCE)

Hypothèse Malthusienne : à chaque instant, la croissance de la population est proportionnelle à son effectif :
$$q'(t) = \alpha q(t).$$
La désintégration atomique est un cas de décroissance régi par la même équation mais avec $\alpha < 0$.

Hypothèse de Verhulst : à chaque instant, la croissance de la population est «proportionnelle» à son effectif, mais inhibée par des ressources limitées :
$$q'(t) = \alpha q(t)(m - q(t)).$$
Il est clair que m sera un point d'équilibre, car la dérivée de q est nulle quand $q = m$.

Hypothèse de Gompertz : à chaque instant, la croissance de la population est «proportionnelle» à son effectif, mais inhibée par des ressources limitées :
$$q'(t) = \alpha q(t)(\ln(k) - \ln(q(t)).$$
Il est clair que k sera un point d'équilibre, car la dérivée de q est nulle quand $q = k$.

12.2 Définition (Condition initiale)

Soit une EDO d'ordre p. Une condition initiale (CI) est un ensemble de relations du type $y(t_0) = y_0$, $y'(t_0) = y'_0$, ..., $y^{(p-1)}(t_0) = y_0^{(p-1)}$ qui imposent en t_0 les valeurs y_0, y'_0, ..., $y_0^{(p-1)}$ respectivement de la fonction inconnue et de ses dérivées jusqu'à l'ordre $p-1$.

En pratique, se donner une CI revient à se donner le point (t_0, y_0) par lequel doit passer le graphe de la fonction solution et la valeur de ses dérivées en ce même point.
Le couple EDO-CI porte le nom de *problème de* CAUCHY ou de *problème aux valeurs initiales* :

12.3 Définition (Problème de CAUCHY)

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, t_0 un point de I, $\varphi\colon I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction donnée continue par rapport aux deux variables et y' la dérivée de y par rapport à t. On appelle *problème de* CAUCHY le problème

trouver une fonction réelle $y \in \mathscr{C}^1(I)$ telle que
$$\begin{cases} y'(t) = \varphi(t, y(t)), & \forall t \in I,\\ y(t_0) = y_0, \end{cases} \tag{12.2}$$
avec y_0 une valeur donnée appelée *donnée initiale*.

Si φ ne dépend pas explicitement de t (*i.e.* si $\varphi(t, y(t)) = \varphi(y(t))$), l'EDO est dite *autonome*.
L'essentiel de notre analyse concernera le cas où l'on a qu'une seule EDO, c'est-à-dire le cas scalaire. L'extension aux systèmes sera faite au prochaine semestre.
Résoudre un problème de CAUCHY, c'est chercher toutes les fonctions, définies sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, qui satisfont l'équation et qui vérifient la condition initiale. On aura donc des questions naturelles telles

- ⋆ trouver toutes les fonctions solutions de l'EDO,
- ⋆ parmi toutes ces fonctions, choisir celles qui vérifient la CI (existence ? unicité ?),
- ⋆ parmi toutes ces fonctions, étudier le domaine de définition (pour chaque fonction trouvée, quel est le plus grande domaine de définition qui contient le point t_0 ?)

EXEMPLE (EXISTENCE ET UNICITÉ SUR $\mathbb{R}$ DE LA SOLUTION D'UN PROBLÈME DE CAUCHY)

On se donne $\varphi(t, y(t)) = 3t - 3y(t)$ et $y_0 = \alpha$ (un nombre quelconque). On cherche une fonction $y\colon t \in \mathbb{R} \mapsto y(t) \in \mathbb{R}$ qui satisfait
$$\begin{cases} y'(t) = 3t - 3y(t), & \forall t \in \mathbb{R},\\ y(0) = \alpha. \end{cases}$$
Sa solution, définie sur $\mathbb{R}$, est donnée par $y(t) = (\alpha + 1/3)e^{-3t} + t - 1/3$. En effet on a bien
$$y(0) = (\alpha+1/3)e^0 + 0 - 1/3 = \alpha, \qquad y'(t) = -3(\alpha+1/3)e^{-3t} + 1 = -3(\alpha+1/3)e^{-3t} + 1 - 3t + 3t = -3y(t) + 3t.$$

Cet exemple montre le cas où il existe une et une seule solution du problème de CAUCHY définie sur $\mathbb{R}$. Les choses ne se passent pas toujours si bien. Les exemples ci-dessous montrent que l'étude mathématique de l'existence et de l'unicité des solutions d'un problème de CAUCHY peut être une affaire délicate.

EXEMPLE (NON UNICITÉ DE LA SOLUTION D'UN PROBLÈME DE CAUCHY)
On se donne $\varphi(t,y(t)) = \sqrt[3]{y(t)}$ et $y_0 = 0$. On cherche une fonction $y\colon t \in \mathbb{R}^+ \mapsto y(t) \in \mathbb{R}$ qui satisfait

$$\begin{cases} y'(t) = \sqrt[3]{y(t)}, & \forall t > 0,\\ y(0) = 0. \end{cases}$$

On vérifie que les fonctions $y_1(t) = 0$ et $y_{2,3}(t) = \pm\sqrt{8t^3/27}$, pour tout $t \ge 0$, sont toutes les trois solution du problème de CAUCHY donné. Cet exemple montre qu'*un problème de* CAUCHY *n'a pas nécessairement de solution unique*.

EXEMPLE (EXISTENCE ET UNICITÉ SUR $I \subset \mathbb{R}$ (MAIS NON EXISTENCE SUR $\mathbb{R}$) DE LA SOLUTION D'UN PROBLÈME DE CAUCHY)
On se donne $\varphi(t,y(t)) = (y(t))^3$ et $y_0 = 1$. On cherche une fonction $y\colon t \in \mathbb{R}^+ \mapsto y(t) \in \mathbb{R}$ qui satisfait

$$\begin{cases} y'(t) = (y(t))^3, & \forall t > 0,\\ y(0) = 1. \end{cases}$$

On vérifie que la solution y est donnée par $y(t) = \frac{1}{\sqrt{1-2t}}$ qui n'est définie que pour $t \in [0;1/2[$. Cet exemple montre qu'*un problème de* CAUCHY *n'a pas toujours une solution pour tout* $t \in [0;+\infty[$ puisqu'ici la solution explose lorsque t tend vars la valeur $1/2$ (en effet, nous avons $\lim\limits_{t\to(1/2)^-} y(t) = +\infty$) : le graphe de la solution a une asymptote verticale en $t = 1/2$. On parle d'*explosion de la solution en temps fini* ou encore de *barrière*.

On verra que ceci est un phénomène général : pour une solution d'une EDO, la seule façon de ne pas être définie sur $\mathbb{R}$ est d'avoir un asymptote verticale.
De façon générale, lorsqu'on se donne une équation différentielle et une condition initiale $y(t_0) = y_0$, on cherche un intervalle I, contenant t_0, sur lequel une solution existe, et qui soit «le plus grand possible» : il n'existe pas d'intervalle plus grand sur lequel l'équation différentielle ait une solution. Cet intervalle s'appelle *intervalle de vie* de la solution. Une solution définie sur cet intervalle le plus grand possible s'appelle *solution maximale*.

12.4 Définition (Solution maximale)
On se donne une équation différentielle $y'(t) = \varphi(t,y(t))$ avec une condition initiale $y(t_0) = y_0$. Une *solution maximale* pour ce problème est une fonction $y = f(t)$, définie sur un intervalle I appelé intervalle de vie, telle que

- ⋆ f est solution de l'équation différentielle et vérifie la condition initiale ;
- ⋆ il n'existe pas de solution $\tilde{f}$ de la même équation, vérifiant la même condition initiale et définie sur un intervalle J contenant I et plus grand que I.

Il y a un résultat qui garantit que, sous certaines hypothèses très générales, deux graphes de fonctions qui sont des solutions de la même EDO ne se rencontrent jamais. Le théorème garantit aussi l'existence des solutions. Dans ce cours, nous nous contentons de rappeler un résultat d'existence et d'unicité global, au sens où on peut intégrer le problème de CAUCHY jusqu'à $t = \infty$, pour des EDO linéaires.

12.5 Théorème (Théorème de Cauchy-Lipschitz — cas linéaire)
Soient a et g deux fonctions continues d'un intervalle I dans $\mathbb{R}$, et considérons l'équation différentielle

$$y'(x) + a(x)y(x) = g(x).$$

Si $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}$, il existe une unique solution y de l'équation différentielle telle que $y(x_0) = y_0$.

12.6 Théorème
Soit $y = f(t)$ une solution maximale définie sur un intervalle de vie $I =]a;b[$. Si $b \neq +\infty$ alors $\lim\limits_{t\to b-} y(t) = \infty$, *i.e.* le graphe de la solution a une asymptote verticale en $t = b$. Même chose si $a \neq -\infty$.

On utilise souvent le théorème sous forme contraposée : si les solutions ne peuvent pas «exploser», alors elles sont définies sur $\mathbb{R}$.

Remarque
D'un point de vue pratique, cet énoncé nous aidera à faire des dessins, en garantissant que les graphes des solutions ne se rencontrent jamais. On peut en déduire quelques remarques plus subtiles :

- si l'EDO admet comme solution la solution nulle mais $y_0 \neq 0$, alors la solution du problème de CAUCHY est du signe de y_0 pour tout $t \in I$;
- si l'EDO admet deux solutions constantes $y(t) = \kappa_1$ et $y(t) = \kappa_2$ pour tout $t \in I$ et $y_0 \in]\kappa_1; \kappa_2[$, alors la solution du problème de CAUCHY vérifie $y(t) \in]\kappa_1; \kappa_2[$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

12.1 Équations différentielles du premier ordre

Nous allons voir trois formules qui permettent d'écrire la solution générale de trois types d'équations différentielles du premier ordre.

12.1.1 Type "variables séparables"

Lorsque l'équation est de la forme
$$f(y(x))y'(x) = g(x)$$
où f et g sont des fonctions données dont on connaît des primitives F et G, on a
$$F(y(x)) = G(x) + C \qquad \text{où } C \in \mathbb{R},$$
et si F possède une fonction réciproque F^{-1}, on en déduit
$$y(x) = F^{-1}(G(x) + C),$$
relation qui donne toutes les solutions de l'équation. Cette solution générale dépend de la constante d'intégration C.

Astuce (Astuce mnémotechnique)
En pratique, étant donné que $y'(x) = \mathrm{d}y/\,\mathrm{d}x$, on peut écrire l'équation $f(y(x))y'(x) = g(x)$ sous la forme
$$f(y)\,\mathrm{d}y = g(x)\,\mathrm{d}x,$$
puis intégrer formellement les deux membres
$$\int f(y)\,\mathrm{d}y = \int g(x)\,\mathrm{d}x,$$
pour obtenir $F(y) = G(x) + C$ et exprimer y en fonction de x.

EXEMPLE
On veut résoudre l'équation différentielle $y'(x) = xy(x)$. Il s'agit d'une EDO du premier ordre à variables séparables :

- *Recherche des solutions constantes.* Si $y(x) = A$ pour tout x alors $y'(x) = 0$ pour tout x et l'EDO devient $0 = xA$ pour tout x. Par conséquent $A = 0$: la fonction $y(x) = 0$ pour tout x est l'unique solution constante de l'EDO.
- *Recherche des solutions non constantes.* La fonction $y(x) = 0$ pour tout x étant solution, toute autre solution $x \mapsto y(x)$ sera donc non nulle. On peut alors diviser l'EDO par y et procéder formellement comme suit :
$$\frac{y'(x)}{y(x)} = x \quad \Longrightarrow \quad \int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = \int x\,\mathrm{d}x \quad \Longrightarrow \quad \ln|y| = \frac{x^2}{2} + C \text{ avec } C \in \mathbb{R}.$$
Ainsi, toute solution non nulle est de la forme
$$y(x) = De^{x^2/2} \qquad \text{avec } D \in \mathbb{R}^*.$$

EXEMPLE (LOI DE NEWTON ☕)
Considérons une tasse de café à la température de 75°C dans une salle à 25°C. Après 5 minutes le café est à 50°C. Si on suppose que la vitesse de refroidissement du café est proportionnelle à la différence des températures (*i.e.* que la

température du café suit la loi de Newton), cela signifie qu'il existe une constante $K<0$ telle que la température vérifie l'EDO du premier ordre

$$T'(t)=K(T(t)-25)$$

avec la CI

$$T(5)=50,$$

ayant convenu qu'une unité de temps correspond à une minute et la température est mesuré en degré Celsius.

1. On commence par calculer toutes les solutions de l'EDO. Étant une équation différentielle du premier ordre, la famille de solutions dépendra d'une constante qu'on fixera en utilisant la CI. Il s'agit d'une EDO à variables séparables.
   - ⋆ *Recherche des solutions constantes.* Si $T(t)=A$ pour tout $t>0$ alors $T'(t)=0$ pour tout $t>0$ et l'EDO devient $0=K(A-25)$ pour tout $t>0$. Par conséquent $A=25$: la fonction $T(t)=25$ pour tout $t>0$ est l'unique solution constante de l'EDO.
   - ⋆ *Recherche des solutions non constantes.* La fonction $T(x)=25$ pour tout $t>0$ étant solution, toute autre solution $t\mapsto T(t)$ sera donc soit strictement supérieure à 25 soit strictement inférieure à 25. On peut alors diviser l'EDO par $T(t)-25$ et procéder formellement comme suit :

   $$T'(t)=K(T(t)-25)\implies\frac{T'(t)}{T(t)-25}=K\implies\frac{\mathrm{d}T}{T-25}=K\,\mathrm{d}t\implies\int\frac{1}{T-25}\,\mathrm{d}T=\int K\,\mathrm{d}t$$
   $$\implies\ln|T-25|=Kt+c\implies T-25=De^{Kt}\implies T(t)=25+De^{Kt}$$

   avec $D\in\mathbb{R}^*$.
2. La valeur numérique de la constante d'intégration D est obtenue grâce à la CI :

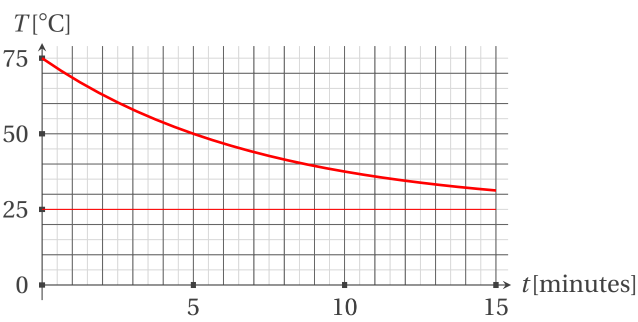
   $$75=T(0)=25+De^{K\cdot0}\qquad\implies\qquad D=50\qquad\implies\qquad T(t)=25+50e^{Kt}.$$

3. Il ne reste qu'à établir la valeur numérique de la constante de refroidissement K grâce à l'«indice» :

   $$50=T(5)=25+50e^{Kt}\qquad\implies\qquad K=-\frac{\ln(2)}{5}\qquad\implies\qquad T(t)=25+50e^{-\frac{\ln(2)}{5}t}$$

On peut donc conclure que la température du café évolue selon la fonction

$$T(t)=25+50e^{-\frac{\ln(2)}{5}t}.$$



12.1.2 Type "linéaire"

Elles sont de la forme

$$a(x)y'(x)+b(x)y(x)=g(x)$$

où a, b et g sont des fonctions données, continues sur un intervalle $I\subset\mathbb{R}$. Pour la résolution, on se place sur un intervalle $J\subset I$ tel que la fonction a ne s'annule pas sur J.
Pour $x\in\mathcal{D}_b\cap\mathcal{D}_g\cap\{\,x\in\mathcal{D}_a\mid a(x)\neq0\,\}$, toute solution $y(x)$ de cette EDO peut être écrite soit comme somme de deux fonctions soit comme produit de deux fonctions :

$$y(x)=\underbrace{Ce^{-A(x)}}_{y_H(x)}+\underbrace{K(x)e^{-A(x)}}_{y_P(x)}=\underbrace{(C+K(x))}_{u(x,C)}\underbrace{e^{-A(x)}}_{v(x)}$$

avec

- ⋆ $A(x)$ une primitive de $\dfrac{b(x)}{a(x)}$,
- ⋆ $K(x)$ une primitive de $\dfrac{g(x)}{a(x)}e^{A(x)}$.

On peut montrer que
- ⋆ y_H est la solution générale de l'EDO homogène associée, c'est-à-dire de l'EDO $a(x)y'(x)+b(x)y(x)=0$ (qui est à variables séparables) ;
- ⋆ y_P est une solution particulière [1] de l'EDO $a(x)y'(x)+b(x)y(x)=g(x)$;
- ⋆ u est la solution générale de l'EDO $a(x)u'(x)v(x)=g(x)$;
- ⋆ v est une solution particulière non nulle de l'EDO homogène associée, c'est-à-dire de l'EDO $a(x)v'(x)+b(x)v(x)=0$.

EXEMPLE
Considérons l'EDO
$$y'(x)-y(x)=x.$$
On a $a(x)=1$, $b(x)=-1$ et $g(x)=e^x$, donc pour $x\in\mathbb{R}$ on a
- ⋆ $A(x)=\int -1\,\mathrm{d}x=-x$,
- ⋆ $K(x)=\int xe^{-x}\,\mathrm{d}x=-(1+x)e^{-x}$,

ce qui donne
$$y(x)=\underbrace{Ce^x}_{y_H}\underbrace{-(1+x)}_{y_P}=\underbrace{\left(C-(1+x)e^{-x}\right)}_{u}\underbrace{e^x}_{v}.$$

12.1.3 Type "Bernoulli"

Elles sont du premier ordre et de la forme
$$u(x)y'(x)+v(x)y(x)=w(x)(y(x))^{\alpha},\qquad \alpha\in\mathbb{R}\setminus\{0;1\}$$
où u, v et w sont des fonctions données, continues sur un intervalle $I\subset\mathbb{R}$. Pour la résolution, on se place sur un intervalle $J\subset I$ tel que la fonction u ne s'annule pas sur J et on définit une nouvelle fonction $x\mapsto z(x)=(y(x))^{1-\alpha}$. L'EDO initiale est alors équivalente à l'EDO linéaire du premier ordre suivante : [2]
$$\underbrace{u(x)}_{a(x)}z'(x)+\underbrace{(1-\alpha)v(x)}_{b(x)}z(x)=\underbrace{(1-\alpha)w(x)}_{g(x)}.$$
Par conséquent, pour $x\in\mathscr{D}_v\cap\mathscr{D}_w\cap\{x\in\mathscr{D}_u\mid u(x)\neq0\}$, toute solution y s'écrit comme $y(x)=[z(x)]^{1/(1-\alpha)}$ avec
- ⋆ $z(x)=\underbrace{Ce^{-A(x)}}_{y_H(x)}+\underbrace{K(x)e^{-A(x)}}_{y_P(x)}=\underbrace{(C+K(x))}_{u(x,C)}\underbrace{e^{-A(x)}}_{v(x)}$,
- ⋆ $A(x)$ une primitive de $\dfrac{b(x)}{a(x)}$ *i.e.* une primitive de $(1-\alpha)\dfrac{v}{u}$,
- ⋆ $K(x)$ une primitive de $\dfrac{g(x)}{a(x)}e^{A(x)}$ *i.e.* une primitive de $(1-\alpha)\dfrac{w}{u}e^{A(x)}$.

EXEMPLE
On se propose de résoudre l'équation différentielle
$$y'(x)+\frac12 y(x)=\frac12(x-1)y^3(x).$$
Il s'agit d'une équation différentielle de BERNOULLI. Comme $u(x)=1$ pour tout $x\in\mathbb{R}$, on cherche sa solution générale sur $\mathbb{R}$.
- ⋆ $A(x)=(1-\alpha)\displaystyle\int\frac{v(x)}{u(x)}\,\mathrm{d}x=-2\int\frac{1/2}{1}\,\mathrm{d}x=-x$,

1. Cette solution particulière peut être une solution «évidente». Le résultat suivant peut alors être utile dans la quête d'une solution évidente : Principe de superposition : soient a et b deux réels et $g_1,g_2,\dots,g_n$ n des applications continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Si y_k est une solution particulière de l'EDO $ay'(x)+by(x)=g_k(x)$ alors $\sum_{k=1}^n y_k$ est une solution particulière de l'EDO $ay'(x)+by(x)=\sum_{k=1}^n g_k(x)$.
Si on ne trouve pas de solution particulière on peut en chercher une par la méthode de LAGRANGE ou de variation de la constante. Si $y_1(x)$ est une solution non nulle de l'EDO homogène, on introduit une fonction auxiliaire inconnue $K(x)$ telle que $y(x)=K(x)y_1(x)$ soit solution de notre EDO. On calcule alors $y'(x)$ et on reporte $y'(x)$ et $y(x)$ dans notre EDO. On observe que $K(x)$ disparaît, ce qui fournit une auto-vérification. Il ne reste que $K'(x)$, ce qui permet de calculer $K(x)$ et donc $y_P(x)$.
2. Formellement $z=y^{1-\alpha}$ implique d'une part $y=zy^{\alpha}$ et d'autre part $z'=(1-\alpha)y^{-\alpha}y'$ et donc $y'=(1-\alpha)z'y^{\alpha}$.

- $K(x) = (1-\alpha)\int \frac{w(x)}{u(x)} e^{A(x)}\,\mathrm{d}x = -2\int \frac{(x-1)/2}{1} e^{-x}\,\mathrm{d}x = \int (1-x)e^{-x}\,\mathrm{d}x = -(1-x)e^{-x} - \int e^{-x}\,\mathrm{d}x = xe^{-x}$,
- $z(x) = (C+K(x))\,e^{-A(x)} = (C+xe^{-x})e^{x} = Ce^{x} + x$,

et on conclut que la solution générale de l'EDO de BERNOULLI assignée est

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{x+Ce^x}}.$$

Notons que y n'est définie que si $x + Ce^x > 0$.

12.2 Équations différentielles linéaire du second ordre à coefficients constants

Une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants est de la forme

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = g(x)$$

où a, b et c sont des constantes données ($a \neq 0$) et g est une application continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
Toute solution y d'un EDO linéaire du second ordre à coefficients constants dépend de deux constantes arbitraires C_1 et C_2 et est de la forme $y_H(x) + y_P(x)$ où y_P est une solution particulière de l'EDO et y_H est la solution générale de l'équation homogène associée (c'est-à-dire de l'EDO $ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$). On doit donc résoudre deux problèmes : chercher d'abord la solution générale de l'équation homogène et ensuite une solution particulière de l'équation complète.

- *Résolution de l'équation homogène associée.*
  On introduit le polynôme caractéristique $p(\lambda) = a\lambda^2 + b\lambda + c$. Soit $\Delta = b^2 - 4ac$, alors
  - si $\Delta > 0$ on a
  $$y_H(x) = C_1e^{\lambda_1 x} + C_2e^{\lambda_2 x}, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}, \qquad \lambda_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}, \qquad \lambda_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a};$$
  - si $\Delta = 0$ on a
  $$y_H(x) = (C_1 + C_2x)e^{\lambda x}, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}, \qquad \lambda = -\frac{b}{2a};$$
  - si $\Delta < 0$ on a
  $$y_H(x) = e^{\sigma x}(C_1\cos(\omega x) + C_2\sin(\omega x)), \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}, \qquad \sigma = -\frac{b}{2a}, \qquad \omega = \frac{\sqrt{|\Delta|}}{2a},$$
  qu'en physique souvent on réécrit comme
  $$y_H(x, A, \varphi) = Ae^{\sigma x}\cos(\omega x - \varphi), \qquad A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}, \qquad \cos(\varphi) = \frac{C_1}{A}, \qquad \sin(\varphi) = \frac{C_2}{A}.$$
- *Recherche d'une solution particulière.*
  Cette solution particulière peut être une solution «évidente». Le Principe de superposition peut alors être utile dans la quête d'une solution évidente : soient a, b, et c trois réels et $g_1, g_2, \dots, g_n$ n applications continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Si y_k est une solution particulière de l'EDO $ay''(x) + by'(x) + cy(x) = g_k(x)$ alors $\sum_{k=1}^n y_k$ est une solution particulière de l'EDO $ay''(x) + by'(x) + cy(x) = \sum_{k=1}^n g_k(x)$.
  Si on n'a pas trouvé de solution particulière évidente on peut en chercher une comme suit : si $g(x) = p_n(x)e^{\mu x}\cos(\theta x)$ ou $g(x) = p_n(x)e^{\mu x}\sin(\theta x)$ alors
  $$y_P(x) = x^m e^{\mu x}(q_{1,n}(x)\cos(\theta x) + q_{2,n}(x)\sin(\theta x))$$
  où p_n, $q_{1,n}$ et $q_{2,n}$ sont des polynômes de degré n et on a
  - si $\Delta > 0$ et $\theta = 0$ et $\mu = \lambda_1$ ou $\mu = \lambda_2$ alors $m = 1$;
  - si $\Delta = 0$ et $\theta = 0$ et $\mu = \lambda$ alors $m = 2$;
  - si $\Delta < 0$ et $\theta = \omega$ et $\mu = \sigma$ alors $m = 1$;
  - sinon $m = 0$.

L'intégrale générale est donc
$$y(x) = y_H(x) + y_P(x).$$

EXEMPLE
Soit m un paramètre qui dépend du polynôme caractéristique.

* Si $g(x) = \cos(5x)$ ou $g(x) = \sin(5x)$ alors $n = 0$, $\mu = 0$ et $\theta = 5$ donc on cherchera y_P sous la forme $y_P(x) = x^m(A\cos(5x)+B\sin(5x))$.
* Si $g(x) = e^{2x}\sin(5x)$ alors $n = 0$, $\mu = 2$ et $\theta = 5$ donc on cherchera y_P sous la forme $y_P(x) = x^m e^{2x}(A\cos(5x)+B\sin(5x))$.
* Si $g(x) = x\cos(5x)$ ou $g(x) = x\sin(5x)$ alors $n = 1$, $\mu = 0$ et $\theta = 5$ donc on cherchera y_P sous la forme $y_P(x) = x^m((Ax+B)\cos(5x)+(Cx+D)\sin(5x))$.
* Si $g(x) = x$ alors $n = 1$, $\mu = 0$ et $\theta = 0$ donc on cherchera y_P sous la forme $y_P(x) = x^m(Ax+B)$.
* Si $g(x) = xe^{3x}$ alors $n = 1$, $\mu = 3$ et $\theta = 0$ donc on cherchera y_P sous la forme $y_P(x) = x^m e^{3x}(Ax+B)$.
* Si $g(x) = e^{2x}$ alors $n = 0$, $\mu = 2$ et $\theta = 0$ donc on cherchera y_P sous la forme $Ax^m e^{2x}$.

EXEMPLE
On veut calculer toutes les solutions de l'EDO
$$y''(x) + y(x) = 3\cos(x).$$
Il s'agit d'une EDO linéaire du second ordre à coefficients constants.

* *Recherche de l'intégrale générale de l'équation homogène.*
  L'équation caractéristique $\lambda^2+1 = 0$ a discriminant $\Delta = -4$. On a $\sigma = 0$ et $\omega = 1$. Donc l'intégrale générale de l'équation homogène est
  $$y_H(x) = c_1\cos(x) + c_2\sin(x), \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$
* *Recherche d'un intégrale particulier de l'équation complète.*
  Puisque $\mu = \sigma = 0$, on cherche l'intégrale particulier sous la forme
  $$y_P(x) = x\big(\alpha\cos(x) + \beta\sin(x)\big).$$
  On a alors
  $$y'_P(x) = (\alpha+\beta x)\cos(x) + (\beta-\alpha x)\sin(x),$$
  $$y''_P(x) = (2\beta-\alpha x)\cos(x) - (2\alpha+\beta x)\sin(x).$$
  On les remplace dans l'équation :
  $$y''_P(x) + y_P(x) = 3\cos(x) \qquad \Longrightarrow \qquad (2\beta-\alpha x)\cos(x) - (2\alpha+\beta x)\sin(x) + x(\alpha\cos(x)+\beta\sin(x)) = 3\cos(x)$$
  d'où $\alpha = 0$ et $\beta = \frac{3}{2}$.

L'intégrale générale de l'EDO assignée est donc
$$y(x) = y_H(x) + y_P(x) = c_1\cos(x) + c_2\sin(x) + \frac{3}{2}x\cos(x), \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

EXEMPLE (OSCILLATEUR HARMONIQUE AMORTI)
Les oscillateurs harmoniques décrivent des comportements oscillants qu'ils soient dus à une nature intrinsèquement oscillatoire (comme le mouvement d'une masse reliée à un ressort) ou à un mouvement au voisinage d'une position d'équilibre (comme dans le modèle d'une liaison moléculaire). Dans les deux cas, on utilise le même modèle de l'oscillateur harmonique. De plus, on s'intéresse ici au cas où on a un frottement fluide proportionnel à la vitesse.
Éloigné d'une distance x de sa position de repos ($x = 0$), le mouvement en fonction du temps t est décrit par l'équation différentielle
$$mx''(t) = -kx(t) - \gamma x'(t)$$
où m est la masse de l'objet, $k > 0$ la constante élastique du ressort et $\gamma > 0$ le coefficient de frottement. On cherche la fonction $t \mapsto x$ solution de cette EDO.

On réécrit l'équation sous la forme

$$x''(t)+2\delta x'(t)+\eta^2 x(t)=0$$

où on a noté

$$\delta=\frac{\gamma}{2m}>0 \qquad \text{et} \qquad \eta^2=\frac{k}{m}>0.$$

Le polynôme caractéristique associé à cette équation est

$$p(\lambda)=\lambda^2+2\delta\lambda+\eta^2$$

qui a discriminant

$$\Delta=4\delta^2-4\eta^2$$

et racines

$$\lambda_1=\frac{-2\delta-\sqrt{\Delta}}{2}=-\delta-\sqrt{\delta^2-\eta^2} \qquad \text{et} \qquad \lambda_2=\frac{-2\delta+\sqrt{\Delta}}{2}=-\delta+\sqrt{\delta^2-\eta^2}.$$

Selon le signe de Δ on a trois comportements différentes :

- ⋆ Si $\Delta>0$, c'est-à-dire si $\delta>\eta$ alors λ_1 et λ_2 sont réels et différents et la solution de l'EDO est de la forme

  $$x(t)=C_1e^{\lambda_1 t}+C_2e^{\lambda_2 t}, \qquad C_1,C_2\in\mathbb{R}.$$

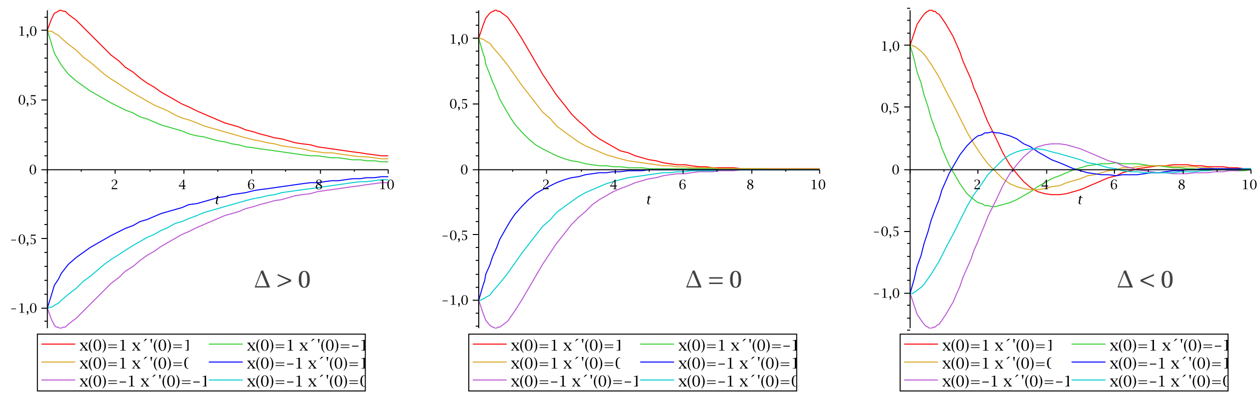
  Comme $\lambda_1<\lambda_2<0$ (car $\sqrt{\delta^2-\eta^2}<\delta$), x tend vers 0 de façon exponentielle quand $t\to+\infty$. Physiquement cela signifie que si la constante de frottement est grande comparée à la constate d'élasticité du ressort alors la masse n'oscille pas mais va être tirée vers la position d'équilibre.
- ⋆ Si $\Delta=0$, c'est-à-dire si $\delta=\eta$ alors $\lambda_1=\lambda_2=-\delta$ et la solution de l'EDO est de la forme

  $$x(t)=(C_1+C_2t)e^{\lambda t}, \qquad C_1,C_2\in\mathbb{R}.$$

  Dans ce cas aussi la solution x tend vers 0 de façon exponentielle quand $t\to+\infty$.
- ⋆ Si $\Delta<0$, c'est-à-dire si $\delta<\eta$ alors λ_1 et λ_2 sont deux nombres complexes conjugués et la solution de l'EDO est de la forme

  $$x(t)=C_1e^{-\delta t}\cos(\sqrt{-\Delta}t)+C_2e^{-\delta t}\sin(\sqrt{-\Delta}t), \qquad C_1,C_2\in\mathbb{R}.$$

  qui se réécrit $x(t)=re^{-\delta t}\cos(\sqrt{-\Delta}t+\varphi)$ avec $r=\sqrt{C_1^2+C_2^2}$, $\varphi=\arctan(-C_1/C_2)$. Dans cette dernière expression on voit le caractère oscillatoire du mouvement. Dans ce cas le frottement ne suffit pas pour empêcher l'oscillation mais son effet se traduit par une diminution exponentielle de l'ampleur de l'oscillation : le graphe de $x(t)$ est compris entre les courbes d'équation $\pm re^{-\delta t}$.



👁 EXEMPLE (OSCILLATEUR HARMONIQUE FORCÉ : CAS D'UNE EXCITATION SINUSOÏDALE)
On s'intéresse à l'influence d'une excitation harmonique sur un oscillateur. Outre le fait que ce type d'excitation est important pour lui-même (vibrations d'une machine tournante, mouvement d'un électron dans un champ magnétique...), cette étude revêt un intérêt théorique capital. En effet, la fonction qui décrit cette force excitatrice peut s'écrire comme une superposition de fonctions sinusoïdales (discrète ou continue selon que la force est périodique ou non). Le fait que l'équation différentielle soit linéaire, autrement dit que le principe de superposition puisse s'appliquer, permet d'écrire la solution pour une force quelconque comme la somme des solutions obtenues pour chaque terme de la décomposition. Il est alors nécessaire de déterminer la réponse à chaque terme de la décomposition, à savoir à une excitation sinusoïdale. Ceci donne une importance considérable à l'étude de l'excitation sinusoïdale.

Étudions l'équation différentielle qui décrit le mouvement d'un corps de masse $m > 0$ qui se déplace horizontalement assujetti à une force générée par un ressort de constante élastique $k > 0$ et une force externe d'intensité $f(t) = A\cos(\varphi t)$ avec A et φ deux paramètres réels (on a négligé le frottement).
La position x du corps en fonction du temps suit la loi

$$mx''(t) + kx(t) = A\cos(\varphi t).$$

On la réécrit sous la forme

$$x''(t) + \eta^2 x(t) = a\cos(\varphi t)$$

ayant posé $\eta^2 = k/m > 0$ et $a = A/m$.

- ⋆ Équation homogène : $x''(t) + \eta^2 = 0$. Le polynôme caractéristique est $p(\lambda) = \lambda^2 + \eta^2$ et a les deux racines complexes conjugués $\lambda_1 = -i\eta$ et $\lambda_2 = i\eta$. La solution est de la forme

$$x(t) = C_1\cos(\eta t) + C_2\sin(\eta t), \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

- ⋆ Solution particulière : il faut considérer les deux cas suivantes.
  - ⋆ Si $\varphi \neq \eta$ alors on cherche une solution particulière du type

$$x_P(t) = b\cos(\varphi t) + c\sin(\varphi t).$$

On a $x_P'(t) = -b\varphi\sin(\varphi t) + c\varphi\cos(\varphi t)$ et $x_P''(t) = -b\varphi^2\cos(\varphi t) - c\varphi^2\sin(\varphi t)$. En remplaçant dans l'EDO on obtient

$$-b\varphi^2\cos(\varphi t) - c\varphi^2\sin(\varphi t) + \eta^2 b\cos(\varphi t) + \eta^2 c\sin(\varphi t) = a\cos(\varphi t),$$

ce qui implique

$$b = \frac{a}{\eta^2 - \varphi^2}, \qquad \text{et} \qquad c = 0.$$

  - ⋆ Si $\varphi = \eta$ alors on cherche une solution particulière du type

$$x_P(t) = bt\cos(\varphi t) + ct\sin(\varphi t).$$

On a $x_P'(t) = (b + c\varphi t)\cos(\varphi t) + (c - b\varphi t)\sin(\varphi t)$ et $x_P''(t) = (2c - b\varphi t)\varphi\cos(\varphi t) - (2b + c\varphi t)\varphi\sin(\varphi t)$. En remplaçant dans l'EDO on obtient

$$(2c - b\varphi t)\varphi\cos(\varphi t) - (2b + c\varphi t)\varphi\sin(\varphi t) + \varphi^2 bt\cos(\varphi t) + \varphi^2 ct\sin(\varphi t) = a\cos(\varphi t),$$

qui se réécrit

$$((-2 - t)b + (1 - t)c)\varphi\sin(\varphi t) + ((b - a) + 2c(1 + t)\varphi - bt\varphi^2)\cos(\varphi t) = 0$$

ce qui implique

$$b = 0, \qquad \text{et} \qquad c = \frac{a}{2\varphi}.$$

La solution complète est donc

- ⋆ si $\varphi \neq \eta$, $x(t) = C_1\cos(\eta t) + C_2\sin(\eta t) + \frac{a}{\eta^2 - \varphi^2}\cos(\varphi t)$ avec $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$; si on pose $r = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$ et $\varphi = \arctan(-C_1/C_2)$ on obtient

$$x(t) = r\cos(\eta t + \varphi) + \frac{a}{\eta^2 - \varphi^2}\cos(\varphi t)$$

qui est la superposition de deux mouvements oscillatoires avec deux amplitudes et deux périodes différents.

- ⋆ si $\varphi = \eta$, $x(t) = C_1\cos(\varphi t) + C_2\sin(\varphi t) + \frac{a}{2\varphi}t\sin(\varphi t)$ avec $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$; si on pose $r = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$ et $\psi = \arctan(-C_1/C_2)$ on obtient

$$x(t) = r\cos(\varphi t + \psi) + \frac{a}{2\varphi}t\sin(\varphi t).$$

On remarque que toute sous-suite (t_n) divergent à $+\infty$ de la forme $t_n = t_0 + \frac{2\pi}{\varphi n}$ pour $t_0 \neq 0$ on a $|x(t_n)| \to +\infty$: les oscillations ont ampleur de plus en plus grande (c'est ce que l'on appelle la résonance).

✎✎✎✎✎✎✎✎✎✎✎✎✎✎ Exercices ✎✎✎✎✎✎✎✎✎✎✎✎✎✎

EDO d'ordre 1 à variables séparables

Exercice 12.1

Résoudre le problème de CAUCHY

$$\begin{cases} y'(x)+2xy^2(x)=0,\\ y(0)=2.\end{cases}$$

Correction

Il s'agit d'une EDO à variables séparables. La fonction $y(x)=0$ pour tout x est solution de l'EDO mais elle ne vérifie pas la CI. Toute autre solution de l'EDO sera non nulle et se trouve formellement comme suit :

$$y'(x)+2xy^2(x)=0 \implies \frac{y'(x)}{y^2(x)}=-2x \implies \int y^{-2}\,\mathrm{d}y=-2\int x\,\mathrm{d}x \implies y(x)=\frac{1}{x^2+c},\ c\in\mathbb{R}.$$

En imposant la CI on obtient $2=1/C$ d'où l'unique solution du problème de Cauchy : $y(x)=\frac{2}{2x^2+1}$.

Exercice 12.2

Résoudre le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'(x)-4xy^2(x)=0,\\ y(0)=2.\end{cases}$$

Correction

Il s'agit d'une EDO à variables séparables. La fonction $y(x)=0$ pour tout x est solution de l'EDO mais elle ne vérifie pas la CI. Toute autre solution de l'EDO est non nulle et se trouve formellement comme suit :

$$y'(x)-4xy^2(x)=0 \implies \frac{y'(x)}{y^2(x)}=4x \implies \int y^{-2}\,\mathrm{d}y=4\int x\,\mathrm{d}x \implies y(x)=\frac{1}{-2x^2+c},\ c\in\mathbb{R}.$$

En imposant la CI on obtient $2=1/C$ d'où l'unique solution du problème de Cauchy $y(x)=\frac{2}{1-4x^2}$.

Exercice 12.3

Résoudre le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'(t)=ty^2(t),\\ y(0)=y_0,\end{cases}$$

en fonction de la donnée initiale y_0.

Correction

Il s'agit d'un problème de Cauchy avec une CI $y(0)=y_0$ et une EDO du premier ordre à variables séparable.
On cherche d'abord les solutions constantes, *i.e.* les fonctions $y(x)\equiv A\in\mathbb{R}$ qui vérifient l'EDO, c'est-à-dire qui vérifient $0=tA^2$ pour tout $y\in\mathbb{R}$; l'unique solution constante est donc la fonction $y(x)\equiv 0$.
Comme deux trajectoires ne s'intersectent pas, toutes les autres solution ne s'annulent jamais. Soit donc $y(x)\neq 0$; on peut alors écrire

$$\frac{y'(t)}{y^2(t)}=t \implies \frac{1}{y^2}\,\mathrm{d}y=t\,\mathrm{d}t \implies \int\frac{1}{y^2}\,\mathrm{d}y=\int t\,\mathrm{d}t \implies -\frac{1}{y}=\frac{t^2}{2}+C \implies y(x)=-\frac{1}{\frac{t^2}{2}+C},\ \text{pour } C\in\mathbb{R}.$$

Cette fonction n'est définie que si $t^2\neq -2C$, donc

- ⋆ si $C>0$ alors $y(t)$ est définie pour tout $t\in\mathbb{R}$,
- ⋆ si $C<0$ alors $y(t)$ est définie pour tout $t\in]-\infty;-\sqrt{-2C}[$ ou $t\in]-\sqrt{-2C};\sqrt{-2C}[$ ou $t\in]\sqrt{-2C};\infty[$,
- ⋆ si $C=0$ alors $y(t)$ est définie pour tout $t\in]-\infty;0[$ ou $t\in]0;+\infty[$.

Comme $y_0=y(0)=-\frac{1}{C}$, la solution du problème de Cauchy est :

- ⋆ la fonction $y(t)\equiv 0$ pour tout $t\in\mathbb{R}$ si $y_0=0$;
- ⋆ la fonction $y(t)=-\frac{1}{\frac{t^2}{2}-\frac{1}{y_0}}$ pour $t\in\mathbb{R}$ si $y_0<0$;

- ⋆ la fonction $y(t) = -\frac{1}{\frac{t^2}{2}-\frac{1}{y_0}}$ pour $t \in \left]-\sqrt{\frac{2}{y_0}};\sqrt{\frac{2}{y_0}}\right[$ si $y_0>0$ (c'est-à-dire l'intervalle plus large possible qui contient $t=0$).

Exercice 12.4 (Datation au carbone 14)

Le carbone 14 est un isotope présent dans tout organisme vivant. Le nombre d'atomes de carbone 14 est constant tant que l'organisme est en vie. À la mort de l'organisme, le nombre d'atomes décroît avec une vitesse proportionnelle au nombre d'atomes. On note $n(t)>0$ le nombre d'atomes au temps t, exprimé en années, après la mort de l'organisme. Ce mécanisme se traduit par l'équation

$$n'(t) = -kn(t)$$

où k est une constante positive.

1. Trouver toutes les solutions de l'EDO.
2. Sachant qu'il faut 5700 ans pour que la quantité de carbone 14 diminue de moitié dans un organisme mort, calculer k.
3. Des ossements anciens récemment exhumés contiennent 9 fois moins de carbone 14 que des ossements similaires d'aujourd'hui. Déterminer l'âge des ossements exhumés.

Correction

1. Il s'agit d'une «EDO du premier ordre à variables séparables». Si $n(t)\equiv c$ est solution alors $0=-kc$ d'où $c=0$: l'unique solution constante est la solution $n(t)=0$ quelque soit $t\in\mathbb{R}^+$.
   Si $n(t)\neq 0$, on peut écrire
   $$\frac{n'(t)}{n(t)} = -k$$
   d'où la famille de solutions
   $$n(t) = De^{-kt}, \qquad D\in\mathbb{R}^+.$$
   On conclut que, quelque soit la condition initiale $n(0)=n_0\geq 0$, l'unique solution est $n(t)=n_0e^{-kt}$ pour tout $t\in\mathbb{R}^+$.
2. Puisque $n_0/2 = n(5700) = n_0e^{-5700t}$, on obtient $k=\ln 2^{-5700}\approx 1.216\ 10^{-4}$.
3. Puisque $n_0/9 = n(\hat{t}) = n_0e^{-k\hat{t}}$, on obtient $\hat{t} = 5700\frac{\ln 9}{\ln 2}\approx 18000$ ans.

Exercice 12.5 («Les experts - Toulon»)

Le corps de la victime a été trouvé sur le lieu du crime à 2H20 de nuit. Après une demi-heure la température du corps est de 15°C. Quand a eu lieu l'homicide si à l'heure de la découverte la température du corps est de 20°C et si la température externe est de −5°C ?
Suggestion : se rappeler la loi de Newton qui dit que la vitesse de refroidissement est proportionnelle à la différence des températures.

Correction

La loi de Newton affirme qu'il existe une constante $K<0$ telle que la température du corps suit l'EDO

$$T'(t) = K(T(t)-T_{\text{ext}}).$$

On commence par calculer toutes les solutions de l'EDO. Étant une équation différentielle du premier ordre, la famille de solutions dépendra d'une constante D qu'on fixera en utilisant la CI.

- ⋆ On cherche d'abord les solutions constantes, *i.e.* les solutions du type $T(t)\equiv c\in\mathbb{R}$ quelque soit t. On a
  $$0 = K(c-T_{\text{ext}})$$
  d'où l'unique solution constante $T(t)\equiv T_{\text{ext}}$. Toute autre solution $T(t)$ vérifiera $T(t)\neq T_{\text{ext}}$ pour tout t.
- ⋆ Soit $T(t)\neq T_{\text{ext}}$ pour tout t. Puisqu'il s'agit d'une EDO à variables séparables on peut calculer la solution formellement comme suit :
  $$T'(t) = K(T(t)-T_{\text{ext}}) \implies \frac{T'(t)}{T(t)-T_{\text{ext}}} = K \implies \frac{\mathrm{d}T}{T-T_{\text{ext}}} = K\,\mathrm{d}t \implies$$
  $$\int \frac{1}{T-T_{\text{ext}}}\,\mathrm{d}T = K\int \mathrm{d}t \implies \ln(T-T_{\text{ext}}) = Kt+c \implies T-T_{\text{ext}} = De^{Kt} \implies T(t) = T_{\text{ext}}+De^{Kt}.$$
  La valeur numérique de la constante d'intégration D est obtenue grâce à la CI :
  $$T_0 = T(0) = T_{\text{ext}}+De^{K\cdot 0} \implies D = T_0-T_{\text{ext}} \implies T(t) = T_{\text{ext}}+(T_0-T_{\text{ext}})e^{Kt}$$

Ici $T_{\text{ext}} = -5°C$ et $T_0 = 20°C$ donc la température du cadavre suit la loi

$$T(t) = -5 + 25e^{Kt}.$$

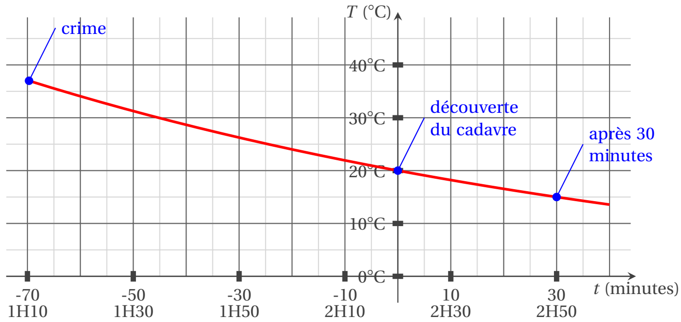
De plus, on sait que $15 = T(30) = -5+25e^{30K}$ d'où $K = \frac{\ln(4/5)}{30}$.
La température du corps suit donc la loi

$$T(t) = -5 + 25e^{\frac{\ln(4/5)}{30}t}.$$

Pour déterminer l'heure du meurtre il faut donc résoudre l'équation

$$37 = -5 + 25e^{\frac{\ln(4/5)}{30}t}$$

d'où $t = 30\frac{\ln(42/25)}{\ln(4/5)} \sim -69{,}7$ minutes, c'est-à-dire à 1H10 de la nuit.



Exercice 12.6 («Un gâteau presque parfait»)

Un gâteau est sorti du four à 17H00 quand il est brûlant (100°C). Après 10 minutes sa température est de 80°C et de 65°C à 17H20. Déterminer la température de la cuisine.
Suggestion : se rappeler la loi de Newton qui dit que la vitesse de refroidissement est proportionnelle à la différence des températures.

Correction
La loi de Newton affirme qu'il existe une constante $K < 0$ telle que la température du corps suit l'EDO

$$T'(t) = K(T(t) - T_{\text{ext}}).$$

On commence par calculer toutes les solutions de l'EDO. Étant une équation différentielle du premier ordre, la famille de solutions dépendra d'une constante D qu'on fixera en utilisant la CI.

- ⋆ On cherche d'abord les solutions constantes, *i.e.* les solutions du type $T(t) \equiv c \in \mathbb{R}$ quelque soit t. On a

$$0 = K(c - T_{\text{ext}})$$

d'où l'unique solution constante $T(t) \equiv T_{\text{ext}}$.

- ⋆ Soit $T(t) \neq T_{\text{ext}}$ quelque soit t. Puisqu'il s'agit d'une EDO à variables séparables on peut calculer la solution comme suit :

$$T'(t) = K(T(t) - T_{\text{ext}}) \implies \frac{T'(t)}{T(t) - T_{\text{ext}}} = K \implies \frac{\mathrm{d}T}{T - T_{\text{ext}}} = K\,\mathrm{d}t \implies$$
$$\int \frac{1}{T - T_{\text{ext}}}\,\mathrm{d}T = K\int \mathrm{d}t \implies \ln(T - T_{\text{ext}}) = Kt + c \implies T - T_{\text{ext}} = De^{Kt} \implies T(t) = T_{\text{ext}} + De^{Kt}$$

La valeur numérique de la constante d'intégration D est obtenue grâce à la CI :

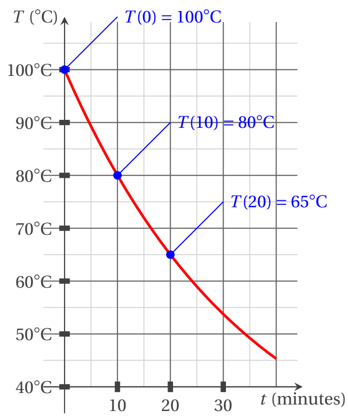
$$T_0 = T(0) = T_{\text{ext}} + De^{K\cdot 0} \implies D = T_0 - T_{\text{ext}} \implies T(t) = T_{\text{ext}} + (T_0 - T_{\text{ext}})e^{Kt}.$$

Ici l'inconnue est T_{ext}. On sait que $T(t = 0) = 100°C$ et $T(t = 10) = 80°C$ et $T(t = 20) = 65°C$. Il s'agit donc de résoudre le système de trois équations en les trois inconnues K, D, T_{ext} :

$$\begin{cases} 100 &= T_{\text{ext}} + D, \\ 80 &= T_{\text{ext}} + De^{10K}, \\ 65 &= T_{\text{ext}} + De^{20K}. \end{cases}$$

La cuisine est donc à 20°C et, plus généralement, la température du gâteau évolue selon la loi

$$T(t) = 20 + 80e^{\frac{\ln(3/4)}{10}t}.$$



Exercice 12.7

Deux produits chimiques présents dans une cuve avec une concentration de 1g/l à l'instant $t = 0$ interagissent et produisent une substance dont la concentration est notée $y(t)$ à l'instant $t \ge 0$. On suppose que $y(t)$ est régie par l'équation différentielle

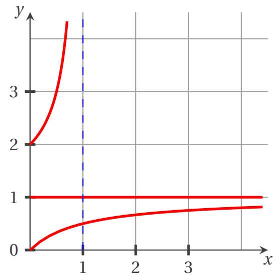
$$y'(t) = (1 - y(t))^2 \qquad \text{pour tout } t \ge 0.$$

1. Montrer que toute solution de l'EDO est une fonction croissante.
2. Chercher les solutions constantes de l'EDO.
3. Considérons la solution y telle que $y(0) = 0$. Montrer que l'on a $0 < y(t) < 1$ pour tout $t > 0$. (On admettra que les graphes de deux solutions distinctes ne se coupent pas et on pourra s'aider d'un dessin.)
4. Considérons la solution y telle que $y(0) = 0$. Montrer que $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t) = \ell$ existe. Puis, en admettant que $\lim\limits_{t\to+\infty} y'(t) = 0$, déterminer ℓ.
5. Calculer la solution lorsque $y(0) = 0$, lorsque $y(0) = 1$ et lorsque $y(0) = 2$. Dans chacun de ces cas établir l'intervalle maximale d'existence.

Correction

1. Pour montrer qu'une fonction est croissante il suffit de montrer que sa dérivée est de signe positif. Si y est solution de l'EDO on a
$$y'(t) = (1 - y(t))^2 \ge 0 \qquad \text{pour tout } t \ge 0$$
car un carré est toujours positif. y est donc une fonction croissante.
2. On cherche les fonctions constantes solution de l'EDO. Si $f(t) = c$ est solution de l'EDO alors puisque $f'(t) = 0$ on obtient
$$0 = (1 - c)^2$$
soit $c = 1$. La seule fonction constante solution de l'EDO est la fonction constante égale à 1.
3. Considérons la solution y telle que $y(0) = 0$. Tout d'abord on a montré que la fonction y était croissante donc $y(0) \le y(t)$ pour tout $t \ge 0$, par conséquent, puisque $0 \le y(0)$, $y(t) \ge 0$ pour tout $t \ge 0$. Supposons qu'il existe un t_0 tel que $y(t_0) \ge 1$, alors le graphe de y qui relie continument les points $(0, y(0))$ et $(t_0, y(t_0))$ coupe nécessairement le graphe de f, *i.e.* la droite d'équation $y = 1$. Ceci est impossible, car les graphes de deux solutions distinctes ne se coupent jamais. Il n'existe donc pas de t_0 tel que $y(t_0) \ge 1$, c'est-à-dire pour tout $t \ge 0$, $y(t) < 1$.
4. Considérons la solution y telle que $y(0) = 0$.

   La fonction y est croissante et majorée par 1, elle admet donc une limite pour $t \to +\infty$. On note $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t) = \ell$. On suppose que $\lim\limits_{t\to+\infty} y'(t) = \ell$. En passant à la limite dans l'EDO on obtient :
$$0 = (1 - \ell)^2$$
soit $\ell = 1$.
5.
   - ⋆ Si $y(0) = 1$ on sait que $y(t) = 1$ pour tout $t > 0$.
   - ⋆ Si $y(0) = 0$ on sait que la fonction y est croissante et $\lim\limits_{t\to+\infty} y'(t) = 1$. En effet, il s'agit d'une EDO à variables séparables et on peut écrire
$$\int (1 - y)^{-2}\,\mathrm{d}y = t, \quad \textit{i.e.} \quad y(t) = \frac{t + c - 1}{t + c}$$
qui existe sur $]-\infty; -c[\cup]-c; +\infty[$, d'où, en imposant $y(0) = 0$, la solution
$$y(t) = \frac{t}{1 + t}, \qquad \forall t \ge 0.$$
   - ⋆ Si $y(0) = 2$ on sait que la fonction y est croissante mais elle n'existe que pour $0 < t < 1$ et on a
$$y(t) = \frac{t - 2}{t - 1}.$$



Exercice 12.8 (Logistique)

Soit k et h deux constantes positives. Calculer $p(t)$ pour $t > 0$ solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} p'(t) = kp(t) - hp^2(t), \\ p(0) = p_0. \end{cases}$$

Ce modèle, qui décrit l'évolution d'une population de p individus à l'instant t, suppose que le taux de croissance du nombre d'individus n'est pas constant mais diminue si la population augment (les ressources se réduisent).

Correction

On doit résoudre l'EDO à variables séparables

$$p'(t) = p(t)(k - hp(t)).$$

On cherche d'abord les solutions constantes, *i.e.* des fonctions $p(t) = A$:

$$0 = A(k - hA) \qquad \iff \qquad A = 0 \text{ ou } A = \frac{k}{h}.$$

On trouve ainsi deux solutions constantes :

$$p(t) \equiv 0 \qquad \text{et} \qquad p(t) \equiv \frac{k}{h}.$$

Si on suppose que $p(t) \neq 0$ et $p(t) \neq \frac{k}{h}$, l'EDO se réécrit comme

$$\frac{p'(t)}{p(t)(k - hp(t))} = 1;$$

on doit alors calculer

$$\int \frac{\mathrm{d}p}{p(k-hp)} = \int 1 \,\mathrm{d}t$$

i.e.

$$\frac{1}{k}\int \frac{\mathrm{d}p}{p} + \int \frac{h}{k-hp}\,\mathrm{d}p = \int 1\,\mathrm{d}t.$$

On obtient

$$\frac{1}{k}\ln\frac{|p|}{|k-hp|} = (t + C)$$

et en on déduit

$$p(t) = \frac{kDe^{kt}}{1 + hDe^{kt}}.$$

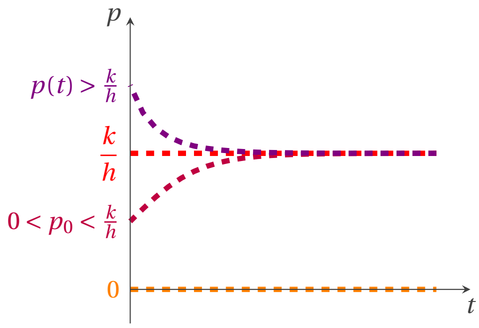
En imposant la condition initiale $p(0) = p_0$ on trouve la constante d'intégration D :

$$D = \frac{p_0}{k - hp_0} = \frac{1}{\frac{k}{p_0} - h}.$$

On conclut que toutes les solutions du problème de Cauchy pour $t \geq 0$ sont

$$p(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } p_0 = 0, \\ \frac{k}{h} & \text{si } p_0 = \frac{k}{h}, \\ \frac{1}{\left(\frac{1}{p_0} - \frac{h}{k}\right)e^{-kt} + \frac{h}{k}} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Remarquons que $\lim_{t\to+\infty} p(t) = \frac{k}{h}$: une population qui évolue à partir de p_0 individus à l'instant initiale selon la loi logistique tend à se stabiliser vers un nombre d'individus d'environ k/h, ce qui représente la capacité de l'environnement. D'autre part, déjà en analysant l'EDO on aurait pu déduire que les solutions sont des fonctions strictement croissantes si $p(t) \in]0, k/h[$, décroissantes si $p(t) > k/h$.



Exercice 12.9 («Urgence»)

On étudie la progression d'une maladie contagieuse dans une population donnée. On note $x(t)$ la proportion des personnes malades à l'instant t et $y(t)$ celle des personnes non atteintes. On a donc $x(t) + y(t) = 1$ pour tout $t \ge 0$. On suppose que la vitesse de propagation de la maladie $x(t)$ est proportionnelle au produit $x(t)y(t)$ (ce qui signifie que la maladie de propage par contact). Si on note $I(t)$ le nombre d'individus infectés à l'instant t et I_T le nombre d'individus total, il existe une constante $k \in \mathbb{R}$ telle que $I'(t) = kI(t)(I_T - I(t))$. Si la ville est isolée et compte 5 000 individus dont 160 sont malades et 1 200 le sont 7 jours après, à partir de quel jour l'infection touchera 80% de la population ? Et 100% ?

Correction

On a le problème de CAUCHY

$$\begin{cases} I'(t) = kI(t)(5000 - I(t)), & \text{(EDO)} \\ I(0) = 160. & \text{(CI)} \end{cases}$$

Vu la nature de la question on ne s'intéresse qu'aux solutions positive et que pour $t > 0$.

1. Tout d'abord on observe qu'il y a deux solutions constantes de l'EDO : la fonction $I(t) \equiv 0$ et la fonction $I(t) \equiv 5000$.
2. Pour chercher toutes les solutions non constantes on remarque qu'il s'agit d'une EDO à variables séparables donc formellement on a

$$\begin{aligned}
&I'(t) = kI(t)(5000 - I(t)) &&\Longrightarrow &&\frac{I'(t)}{I(t)(5000 - I(t))} = k &&\Longrightarrow\\
&\frac{\mathrm{d}I}{I(5000 - I)} = k\,\mathrm{d}t &&\Longrightarrow &&\int \frac{1}{I(5000 - I)}\mathrm{d}I = k\int \mathrm{d}t &&\Longrightarrow\\
&\int \frac{1}{I}\mathrm{d}I - \int \frac{1}{5000 - I}\mathrm{d}I = 5000k\int \mathrm{d}t &&\Longrightarrow &&\ln(I) + \ln(5000 - I) = 5000kt + c &&\Longrightarrow\\
&\ln\frac{I}{5000 - I} = 5000kt + c &&\Longrightarrow &&\frac{I}{5000 - I} = De^{5000kt} &&\Longrightarrow\\
&I(t) = \frac{5000De^{5000kt}}{1 + De^{5000kt}} &&\Longrightarrow &&I(t) = \frac{5000}{De^{-5000kt} + 1}
\end{aligned}$$

3. La valeur numérique de la constante d'intégration D est obtenue grâce à la CI :

$$160 = I(0) = \frac{5000}{De^0 + 1} \quad\Longrightarrow\quad 160 = \frac{5000}{1 + D} \quad\Longrightarrow\quad D = \frac{4}{121} \quad\Longrightarrow\quad I(t) = \frac{20000}{4 + 121e^{-5000kt}}.$$

4. Il ne reste qu'à établir la valeur numérique de la constante k grâce à l'information sur le nombre d'individus infectés après 7 jours :

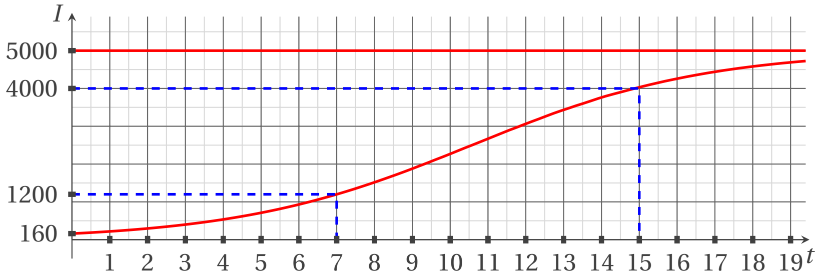
$$1200 = I(7) = \frac{20000}{4 + 121e^{-35000k}} \quad\Longrightarrow\quad k = \frac{1}{35000}\ln\frac{363}{38} \quad\Longrightarrow\quad I(t) = \frac{20000}{4 + 121e^{-\frac{t}{7}\ln\left(\frac{363}{38}\right)}}.$$

5. On cherche $\bar{t}$ tel que $I(\bar{t}) = 80\% I_T = \frac{80\times5000}{100} = 4000$:

$$4000 = \frac{20000}{4 + 121e^{-\frac{\bar{t}}{7}\ln\left(\frac{363}{38}\right)}}$$

d'où $\bar{t} = \frac{1}{5000}\ln(121) \approx 15$ jours.

6. Avec ce modèle $\lim_{t\to+\infty} I(t) = 5000$ mais I ne peut jamais atteindre exactement 100% de la population en un temps fini (deux solution ne s'intersectent jamais).



Exercice 12.10

On note $y(t)$ le nombre de ménages vivant en France équipés d'un ordinateur (t est exprimé en années et $y(t)$ en millions de ménages). Le modèle de VARHULST estime que sur la période 1980 – 2020, $y(t)$ est solution de l'équation différentielle

$$y'(t) = 0,022y(t)(20 - y(t)).$$

1. Calculer toutes les solutions de l'équation différentielle.
2. On pose $t = 0$ en 1980 et on sait que $y(0) = 0,01$. Combien de ménages vivant en France seront équipés d'un ordinateur en 2020 ?

Correction

1. On doit résoudre l'EDO à variables séparables

$$y'(t) = 0,022y(t)(20 - y(t)).$$

On cherche d'abord les solutions constantes, *i.e.* des fonctions $y(t) = A$ pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$0 = 0,022A(20 - A) \qquad \iff \qquad A = 0 \text{ ou } A = 20.$$

On trouve ainsi deux solutions constantes :

$$y(t) \equiv 0 \qquad \text{et} \qquad y(t) \equiv 20.$$

Si on suppose que $y(t) \neq 0$ et $y(t) \neq A$, l'EDO se réécrit comme

$$\frac{y'(t)}{y(t)(20 - y(t))} = 0,022;$$

on doit alors calculer

$$\int \frac{dy}{y(20-y)} = \int 0,022\, dt,$$

i.e.

$$\frac{1}{20}\left(\int \frac{dy}{y} - \int \frac{1}{y-20}\, dy\right) = \int 0,022\, dt.$$

On obtient

$$\ln\frac{|y|}{|y-20|} = 0,44t + C \qquad \text{pour tout } C \in \mathbb{R}$$

et on en déduit

$$y(t) = \frac{20}{1 + 20De^{-0,44t}} \qquad \text{pour tout } D \in \mathbb{R}_+.$$

2. Si $t = 0$ correspond à l'année 1980 et si $y(0) = 0,01$ alors

$$0,01 = \frac{20}{1 + 20De^{-0,44\times 0}} \qquad \Longrightarrow \qquad D = 1999$$

et la fonction qui estime le nombre de ménages en France équipés d'un ordinateur t années après 1980 est

$$y(t) = \frac{20}{1 + 1999e^{-0,44t}}.$$

Pour prévoir combien de ménages vivant en France seront équipés d'un ordinateur en 2020 il suffit de calculer $y(40)$

$$y(40) = \frac{20}{1+1999e^{-0,44\times 40}} \approx 19.99.$$

Exercice 12.11 (Modèle de GOMPERTZ)

Lorsqu'une nouvelle espèce s'introduit dans un écosystème, elle évolue d'abord lentement ; son rythme de croissance s'accélère ensuite à mesure qu'elle s'adapte, puis ralentit quand la population devient trop importante compte tenu des ressources disponibles. Pour ce type d'évolution, on utilise le modèle de GOMPERTZ suivant :

$$y'(t) = -y(t)\ln(y(t)).$$

Calculer toute les solutions de cette équation différentielle pour $t > 0$ (ne pas oublier les solutions constantes). La population va-t-elle survivre ?

Correction

1. Il s'agit d'une EDO à variables séparables. On cherche d'abord les solutions constantes, *i.e.* des fonctions $y(t) = A$ pour tout $t \in \mathbb{R}$:
$$0 = A\ln(A) \qquad \iff \qquad A = 1.$$
On trouve ainsi une solution constante :
$$y(t) \equiv 1.$$
Si on suppose que $y(t) \neq 1$, l'EDO se réécrit comme
$$\frac{y'(t)}{y(t)\ln(y(t))} = -1;$$
on doit alors calculer
$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y\ln(y)} = \int -1\,\mathrm{d}t.$$
On obtient[3]
$$\ln|\ln(y(t))| = -t + C \qquad \text{pour tout } C \in \mathbb{R}$$
et on en déduit
$$y(t) = e^{De^{-t}} \qquad \text{pour tout } D \in \mathbb{R}.$$
2. Si $y(0) > 1$ alors $y'(t) < 0$ (la population décroît) ; si $0 < y(0) < 1$ alors $y'(t) > 0$ (la population croît) ; comme $y(t) = 1$ est solution et comme deux solutions ne peuvent pas se croiser, sans faire de calcul on voit que lorsque t tend vers l'infini, la population tend vers la valeur d'équilibre $y(t) = 1$ quelque soit le nombre d'individus à l'instant initial.

EDO d'ordre 1 linéaire

Exercice 12.12

Résoudre le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) + (3x^2+1)y(x) = x^2e^{-x}, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Correction

On a $a(x) = 1$, $b(x) = 3x^2+1$ et $g(x) = x^2e^{-x}$, donc pour $x \in \mathbb{R}$ on a

- ⋆ $A(x) = \int \frac{3x^2+1}{1}\,\mathrm{d}x = x^3 + x$,
- ⋆ $K(x) = \int \frac{x^2e^{-x}}{1} e^{A(x)}\,\mathrm{d}x = \int x^2e^{x^3}\,\mathrm{d}x = \frac{e^{x^3}}{3}$.

Toutes les solutions de l'EDO sont donc les fonctions $y(x) = \left(C + \frac{e^{x^3}}{3}\right)e^{-x^3-x}$ pour $C \in \mathbb{R}$.

On cherche parmi ces solutions celle qui vérifie $y(0) = 1$; comme $y(0) = C + \frac{1}{3}$, l'unique solution du problème de Cauchy donné est la fonction $y(x) = \left(\frac{2}{3} + \frac{e^{x^3}}{3}\right)e^{-x^3-x}$.

3. $\int \frac{1}{x\ln(x)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z = \ln|z| + c = \ln|\ln(x)| + C$

Exercice 12.13

Résoudre le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'(x)+(3x^2-1)y(x)=x^2e^x, \\ y(0)=-1. \end{cases}$$

Correction

On a $a(x)=1$, $b(x)=3x^2-1$ et $g(x)=x^2e^x$, donc pour $x\in\mathbb{R}$ on a

- ⋆ $A(x)=\int\frac{3x^2-1}{1}\,\mathrm{d}x=x^3-x$,
- ⋆ $K(x)=\int\frac{x^2e^x}{1}e^{A(x)}\,\mathrm{d}x=\int x^2e^{x^3}\,\mathrm{d}x=\frac{e^{x^3}}{3}$.

Toutes les solutions de l'EDO sont donc les fonctions $y(x)=\left(C+\frac{e^{x^3}}{3}\right)e^{-x^3+x}$ pour $C\in\mathbb{R}$.

On cherche parmi ces solutions celle qui vérifie $y(0)=-1$; comme $y(0)=C+\frac{1}{3}$, l'unique solution du problème de Cauchy donné est la fonction $y(x)=\left(-\frac{4}{3}+\frac{e^{x^3}}{3}\right)e^{-x^3+x}$.

Exercice 12.14

Résoudre le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'(x)+\frac{1}{x-1}y(x)=\frac{(x-2)^2}{x-1}, \\ y(0)=1. \end{cases}$$

Correction

On a $a(x)=1$, $b(x)=\frac{1}{x-1}$ et $g(x)=\frac{(x-2)^2}{x-1}$. b est défini pour $x\neq1$ et comme on cherche un solution qui passe par le point $(0,1)$, nous allons chercher une solution que pour $x<1$. On a

- ⋆ $A(x)=\int\frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x=\ln(1-x)$,
- ⋆ $K(x)=\int\frac{(x-2)^2}{x-1}e^{A(x)}\,\mathrm{d}x=-\int(x-2)^2\,\mathrm{d}x=\frac{(x-2)^3}{3}$.

Toutes les solutions de l'EDO pour $x<1$ s'écrivent $y(x)=\left(C+\frac{(x-2)^3}{3}\right)\frac{1}{x-1}$ pour $C\in\mathbb{R}$. On cherche parmi ces solutions celle qui vérifie $y(0)=1$; comme $y(0)=-C+\frac{8}{3}$, l'unique solution du problème de Cauchy donné est la fonction $y(x)=\left(\frac{5}{3}+\frac{(x-2)^3}{3}\right)\frac{1}{x-1}$.

Exercice 12.15

Résoudre le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'(x)+(4x^3+5)y(x)=x^3e^{-5x}, \\ y(0)=1. \end{cases}$$

Correction

On a $a(x)=1$, $b(x)=4x^3+5$ et $g(x)=x^3e^{-5x}$. On a

- ⋆ $A(x)=\int 4x^3+5\,\mathrm{d}x=x^4+5x$,
- ⋆ $K(x)=\int x^3e^{-5x}e^{A(x)}\,\mathrm{d}x=-\int x^3e^{x^4}\,\mathrm{d}x=\frac{e^{x^4}}{4}$.

Toutes les solutions de l'EDO sont donc les fonctions $y(x)=\left(C-\frac{e^{-x^4}}{4}\right)e^{-x^4-5x}$ pour $C\in\mathbb{R}$.

On cherche parmi ces solutions celle qui vérifie $y(0)=1$; comme $y(0)=C+\frac{1}{4}$, l'unique solution du problème de Cauchy donné est la fonction $y(x)=\left(\frac{3}{4}+\frac{e^{x^4}}{4}\right)e^{-x^4-5x}$.

Exercice 12.16

Établir s'il existe des solutions de $y'(x)=-2y(x)+e^{-2x}$ qui ont dérivée nulle en $x=0$.

Correction

On a $a(x)=1$, $b(x)=2$ et $g(x)=e^{-2x}$. On a

- ⋆ $A(x)=\int 2\,\mathrm{d}x=2x$,

- $\star$ $K(x) = \int e^{-2x} e^{A(x)} \, \mathrm{d}x = \int 1 \, \mathrm{d}x = x.$

Toutes les solutions de l'EDO sont donc les fonctions $y(x) = (C + x)e^{-2x}$ pour $C \in \mathbb{R}$.
On cherche si parmi ces solutions il en existe qui vérifient $y'(0) = 0$; comme $y'(x) = (1 - 2C - 2x)e^{-2x}$ et $y'(0) = 1 - 2C$, l'unique solution de l'EDO qui a dérivée nulle en $x = 0$ est la fonction $y(x) = (\frac{1}{2} + x)e^{-2x}$.

Exercice 12.17

Établir s'il existe des solutions de $y'(x) = -2xy(x) + x$.

Correction
On a $a(x) = 1$, $b(x) = 2x$ et $g(x) = x$. On a

- $\star$ $A(x) = \int 2x \, \mathrm{d}x = x^2$,
- $\star$ $K(x) = \int x e^{A(x)} \, \mathrm{d}x = \int x e^{x^2} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} e^{x^2}$.

Toutes les solutions de l'EDO sont donc les fonctions $y(x) = Ce^{-x^2} + \frac{1}{2}$ pour $C \in \mathbb{R}$.

Exercice 12.18

Résoudre l'équation différentielle

$$(x+1)y'(x) + y(x) = (x+1)\sin(x)$$

sur des intervalles à préciser.

Correction
L'équation différentielle est linéaire du premier ordre. On la résout sur un intervalle où le coefficient de $y'(x)$ n'est pas nul, soit sur $I_1 =]-\infty; -1[$ ou sur $I_2 =]-1; +\infty[$. Sur chaque intervalle I_1 ou I_2, l'équation s'écrit

$$\left[(x+1)y(x)\right]' = (x+1)\sin(x).$$

En intégrant par parties, on obtient (attention, la constante dépend de l'intervalle)

$$(x+1)y(x) = \int (x+1)\sin(x) \, \mathrm{d}x = -(x+1)\cos(x) + \sin(x) + C.$$

La solution générale sur I_1, ou sur I_2, est donc

$$y(x) = -\cos(x) + \frac{\sin(x) + C}{(x+1)} \qquad \text{avec } C \in \mathbb{R}.$$

Exercice 12.19

Dans un circuit électrique de type résistance-inductance, le courant I évolue avec le temps selon

$$I'(t) + \frac{R}{L} I(t) = \frac{V}{L}$$

où R, L et V sont des constantes associées aux composantes électriques. Résolvez l'équation différentielle. La solution I tend-elle vers une limite finie ?

Correction

- $\star$ Résolution de l'équation homogène associée : c'est une équation à variables séparables. Ses solutions sont du type

  $$I_H(x) = Ce^{-\frac{R}{L}t}$$

  avec C constante arbitraire. Elles comportent la fonction nulle et des fonctions qui ne s'annulent jamais.
- $\star$ Recherche d'une solution particulière. Soit $I_1(t) = e^{-\frac{R}{L}t}$ une solution (non nulle) de l'EDO homogène et introduisons la fonction auxiliaire inconnue $K(t)$ telle que $I(t) = K(t)I_1(t) = K(t)e^{-\frac{R}{L}t}$ soit solution de notre EDO ; alors $I'(t) = K'(t)e^{-\frac{R}{L}t} - \frac{R}{L}K(t)e^{-\frac{R}{L}t} = (K'(t) - \frac{R}{L}K(t))e^{-\frac{R}{L}t}$ et si on reporte $I'(t)$ et $I(t)$ dans notre EDO on obtient

  $$K'(t)e^{-\frac{R}{L}t} = \frac{V}{L}.$$

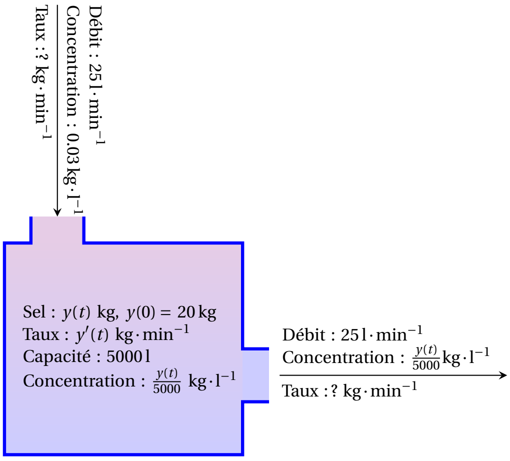
Ainsi $K(t)=\int \frac{V}{L}e^{\frac{R}{L}t}\,\mathrm{d}t=\frac{V}{R}e^{\frac{R}{L}t}$ et enfin $I_P(t)=\frac{V}{R}e^{\frac{R}{L}t}e^{-\frac{R}{L}t}=\frac{V}{R}$.
Par conséquent l'intégrale générale est

$$I(t)=Ce^{-\frac{R}{L}t}+\frac{V}{R}$$

et $I(t)\xrightarrow[t\to+\infty]{}\frac{V}{R}$

Exercice 12.20

On considère un réservoir de capacité 5000 l rempli d'une solution sel/eau parfaitement mélangée contenant 20 kg de sel. Un mélange qui contient 0.03 kg de sel par litre d'eau entre dans le réservoir à un débit de 25 l·min^{-1}. La solution est maintenue bien mélangés. Si $y(t)$ désigne la quantité (en kilos) de sel dissoute dans le réservoir à l'instant t, $y'(t)$ représente le taux de variation de la quantité de sel, *i.e.* la différence entre le taux auquel le sel entre et le taux auquel il en sort.



1. Après avoir calculé les taux auxquels le sel entre et sort du réservoir, montrer que cette situation est décrite par le problème de Cauchy
$$\begin{cases} y'(t)=0.75-\frac{y(t)}{200},\\ y(0)=20.\end{cases}$$
2. Calculer l'unique solutions de ce problème.
3. Combien de sel reste dans le réservoir après une demi-heure ?

Correction

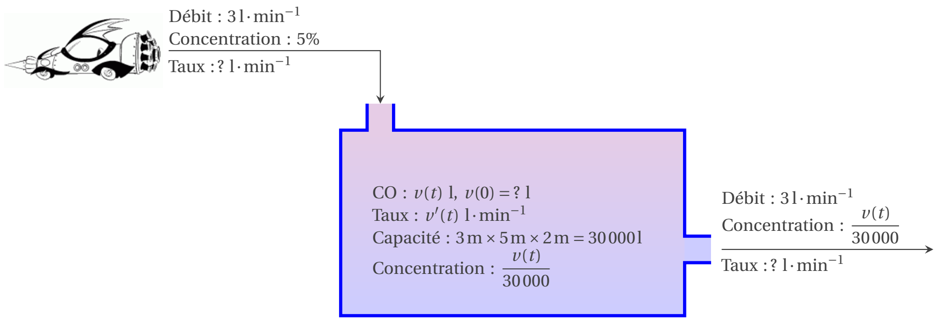
1. Le taux auquel le sel entre est (0.03 kg)(25 l · min^{-1})=0.75 kg · min^{-1}. Comme le réservoir contient constamment 5000 l de liquide, la concentration est égale à $y(t)/5000$ (exprimée en kg · l^{-1}). Le débit du mélange qui sort est alors de 25 l · min^{-1}, donc le taux auquel le sel sort est ($\frac{y(t)}{5000}$ kg · l^{-1})(25 l · min^{-1})=$\frac{y(t)}{200}$ kg · min^{-1}. L'équation différentielle qui décrit cette variation s'écrit alors
$$y'(t)=0.75-\frac{y(t)}{200}$$
2. On cherche d'abord les solutions constantes, *i.e.* des fonctions $y(t)=C$ pour tout $t\in\mathbb{R}$:
$$0=0.75-\frac{C}{200}\qquad\iff\qquad C=150.$$
On trouve ainsi l'unique solution constante $y(t)=150$ pour tout $t\in\mathbb{R}$. On sait que toute autre solution ne s'annulera pas. L'EDO se réécrit alors comme
$$\frac{y'(t)}{150-y(t)}=\frac{1}{200}.$$
On doit calculer y qui vérifie
$$\int\frac{\mathrm{d}y}{150-y}=\int\frac{1}{200}\,\mathrm{d}t.$$
On obtient
$$-\ln|150-y|=\frac{t}{200}+D\qquad\text{pour tout } D\in\mathbb{R},$$
soit
$$|150-y(t)|=-Ee^{-t/200}\qquad\text{pour tout } E\in\mathbb{R}.$$
Comme $y(0)=20$ alors $|150-20|=-E$. Vu que y est continue et que $y(0)=20<150$, alors $|150-y(t)|=150-y(t)$ et on obtient l'unique solution du problème de Cauchy
$$y(t)=150-130e^{-t/200}.$$
3. Reste à calculer la quantité de sel après 30 minutes : $y(30)=150-130e^{-3/20}\simeq 38.1$ kg.

Exercice 12.21

L'air d'un garage de 3 m × 5 m × 2 m est initialement chargée de 0.001% de monoxyde de carbone (CO). À l'instant $t=0$, on fait tourner un moteur et des fumées toxiques contenant 5% de CO se dégagent de la pièce à raison de 3 litres par minute.

Heureusement, l'air de la pièce est éliminée à la même vitesse de $3\,\mathrm{l}\cdot\mathrm{min}^{-1}$. On note $v(t)$ le volume de CO présent dans la pièce au temps t.

1. En supposant que le mélange se fait instantanément, montrer que cette situation est décrite par le problème de Cauchy
$$\begin{cases} v'(t) = 0.15 - \frac{v(t)}{10000}, \\ v(0) = 0.3. \end{cases}$$
2. Déterminer le volume $v(t)$ de CO présent dans la pièce au temps t. Calculer vers quelle valeur limite $v(t)$ tend lorsque t tend vers l'infini.
3. Le seuil critique pour la santé est de 0.015% de CO. Après combien de temps ce taux est-il atteint ?



Correction

1. Le taux de CO produit par minute est $0.05\times 3\,\mathrm{l}\cdot\mathrm{min}^{-1} = 0.15\,\mathrm{l}\cdot\mathrm{min}^{-1}$. Le débit de l'air qui sort est de $3\,\mathrm{l}\cdot\mathrm{min}^{-1}$, donc le taux auquel le CO sort est $\frac{v(t)}{30\,000}\times 3\,\mathrm{l}\cdot\mathrm{min}^{-1} = \frac{v(t)}{10\,000}\mathrm{l}\cdot\mathrm{min}^{-1}$. L'équation différentielle qui décrit cette variation s'écrit alors
$$v'(t) = 0.15 - \frac{v(t)}{10\,000}.$$
À l'instant $t = 0$ le volume de CO présent dans le garage est $0.001\%\times 30\,000\,\mathrm{l} = 0.3\,\mathrm{l}$.
2. On cherche d'abord les solutions constantes, *i.e.* des fonctions $v(t) = C$ pour tout $t\in\mathbb{R}$:
$$0 = 0.15 - \frac{C}{10\,000} \qquad\iff\qquad C = 1\,500.$$
On trouve ainsi l'unique solution constante $v(t) = 1\,500$ pour tout $t\in\mathbb{R}$. On sait que toute autre solution ne s'annulera pas. L'EDO se réécrit alors comme
$$\frac{v'(t)}{1\,500 - v(t)} = \frac{1}{10\,000};$$
on doit alors calculer
$$\int \frac{\mathrm{d}v}{1\,500 - v} = \int \frac{1}{10\,000}\,\mathrm{d}t.$$
On obtient
$$-\ln|1\,500 - v| = \frac{t}{10\,000} + D \qquad \text{pour tout } D\in\mathbb{R},$$
soit
$$|1\,500 - v(t)| = -Ee^{-t/10\,000} \qquad \text{pour tout } E\in\mathbb{R}.$$
Comme $v(0) = 0.3$ alors $|1\,500 - 0.3| = -E$. Vu que v est continue et que $v(0) = 0.3 < 1\,500$, alors $|1\,500 - v(t)| = 1\,500 - v(t)$ et on obtient l'unique solution du problème de Cauchy
$$v(t) = 1\,500 - (1\,500 - 0.3)e^{-t/10\,000}$$
et $\lim_{t\to+\infty} v(t) = 1\,500$.
3. Reste à calculer après combien de minutes le taux de CO atteint 0.015% : $0.00015 = 1500 - (1500 - 0.3)e^{-t/10000}$ ssi $t = 10000\ln\left(\frac{1500-0.3}{1500-4.5}\right) \simeq 28.04\,\mathrm{min}$.

Exercice 12.22

Trouver la solution des problèmes de CAUCHY suivants :

(1) $\begin{cases} y'(t)+\frac{y(t)}{\tan(t)}=0, & t\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[\\ y(1)=\frac{\pi}{4} \end{cases}$ (2) $\begin{cases} y'(t)+\frac{y(t)}{\tan(t)}=2\cos(t), & t\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[\\ y(1)=\frac{\pi}{4} \end{cases}$

Correction

(1) 1.1. *Calcul de la solution générale de l'EDO.*
Considérons sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ l'équation différentielle $y'(t)+\frac{y(t)}{\tan(t)}=0$. L'application

$$\begin{aligned} b\colon \left]0;\frac{\pi}{2}\right[&\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto \frac{1}{\tan(t)} \end{aligned}$$

est continue et strictement positive sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$. Formellement on peut alors écrire

$$\frac{y'(t)}{y(t)}=-\frac{1}{\tan(t)} \quad\Longrightarrow\quad \int\frac{1}{y}\,\mathrm{d}y=-\int\frac{\cos(t)}{\sin(t)}\,\mathrm{d}t \quad\Longrightarrow\quad \ln|y|=\ln(\sin(t))+C \text{ avec } C\in\mathbb{R}.$$

Ainsi, toute solution non nulle est de la forme

$$y(t)=\frac{\kappa}{\sin(t)} \qquad \text{avec } \kappa\in\mathbb{R}^*.$$

La solution générale de l'EDO est donc l'application

$$\begin{aligned} y\colon \left]0;\frac{\pi}{2}\right[&\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto \frac{\kappa}{\sin(t)} \qquad \text{avec } \kappa\in\mathbb{R}. \end{aligned}$$

1.2. *Calcul de la solution du problème de* CAUCHY.
Il y a une unique solution qui prend la valeur $\pi/4$ en 1. Il s'agit de l'application

$$\begin{aligned} y\colon \left]0;\frac{\pi}{2}\right[&\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto \frac{\pi\sin(1)}{4\sin(t)}. \end{aligned}$$

(2) 2.1. *Calcul de la solution générale de l'EDO.*
Nous avons vu que la solution générale de l'équation homogène associée est l'application

$$\begin{aligned} y_H\colon \left]0;\frac{\pi}{2}\right[&\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto \frac{\kappa}{\sin(t)} \qquad \text{avec } \kappa\in\mathbb{R}. \end{aligned}$$

Par ailleurs, on vérifie aisément que

$$\begin{aligned} y_P\colon \left]0;\frac{\pi}{2}\right[&\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto \sin(t) \end{aligned}$$

est une solution particulière de l'EDO complète puisque

$$y_P'(t)+\frac{y_P(t)}{\tan(t)}=\cos(t)+\frac{\sin(t)}{\tan(t)}=2\cos(t), \qquad \forall t\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[.$$

Si on n'a pas trouvé directement une solution particulière, on peut utiliser la méthode de variation de la constante : on cherche une solution particulière sous la forme $y_P(t)=K(t)\;y_H(t)\big|_{\kappa=1}$ où $K\colon \left]0;\frac{\pi}{2}\right[\to\mathbb{R}$ est une application inconnue dérivable sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$. On a, pour tout $t\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$,

$$\begin{aligned} y_P(t)&=\frac{K(t)}{\sin(t)} \\ y_P'(t)&=\frac{K'(t)\sin(t)-K(t)\cos(t)}{\sin^2(t)} \end{aligned}$$

Puisque y_P est supposée être une solution particulière de l'EDO, on doit avoir pour tout $t \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$,

$$y_P'(t) + \frac{y_P(t)}{\tan(t)} = 2\cos(t)$$

autrement dit la fonction K doit vérifier

$$\frac{K'(t)\sin(t) - K(t)\cos(t)}{\sin^2(t)} + \frac{K(t)}{\tan(t)\sin(t)} = 2\cos(t).$$

On doit donc avoir, pour tout $t \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$,

$$K'(t) = 2\cos(t)\sin(t)$$

ce qui impose $K(t) = \sin^2(t) + C$, $C \in \mathbb{R}$. Puisqu'on est intéressé par une seule solution particulière, on choisit généralement $C = O$. On a alors

$$\begin{aligned} y_P \colon \left]0; \frac{\pi}{2}\right[&\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto \sin(t) \end{aligned}$$

On en déduit que la solution générale de l'EDO complète est l'application

$$\begin{aligned} y \colon \left]0; \frac{\pi}{2}\right[&\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto y_H(t) + y_P(t) = \frac{\kappa}{\sin(t)} + \sin(t) \qquad \text{avec } \kappa \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

2.2. *Calcul de la solution du problème de* CAUCHY.
Il y a une unique solution qui prend la valeur $\pi/4$ en 1. Il s'agit de l'application

$$\begin{aligned} y \colon \left]0; \frac{\pi}{2}\right[&\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto \left(\frac{\pi}{4} - \sin(1)\right)\frac{\sin(1)}{\sin(t)} + \sin(t). \end{aligned}$$

Exercice 12.23

Déterminer la solution générale de l'EDO $3y'(t) + 12y(t) = 4$ après avoir indiqué sur quelle intervalle la solution est définie.

Correction

L'équation $3y'(t) + 12y(t) = 4$ admet pour solution générale l'application

$$\begin{aligned} y \colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto \frac{1}{3} + \kappa e^{-4t} \qquad \text{avec } \kappa \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

En effet :

1. *Calcul de la solution générale de l'équation homogène* $3y'(t) + 12y(t) = 0$.
   Formellement on peut écrire

   $$\frac{y'(t)}{y(t)} = -4 \quad \Longrightarrow \quad \int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = -\int 4\,\mathrm{d}t \quad \Longrightarrow \quad \ln|y| = -4t + C \text{ avec } C \in \mathbb{R}.$$

   Ainsi, toute solution non nulle est de la forme

   $$\begin{aligned} y_H \colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto \kappa e^{-4t} \qquad \text{avec } \kappa \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

2. Calcul d'une solution particulière de l'EDO $3y'(t) + 12y(t) = 4$.
   On vérifie aisément que la fonction constante

   $$\begin{aligned} y_P \colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto 1/3 \end{aligned}$$

   est une solution particulière de l'EDO.

Exercice 12.24

Déterminer la solution générale de l'EDO $y'(t)+y(t)=e^{3t}$ après avoir indiqué sur quelle intervalle la solution est définie.

Correction

L'équation $y'(t)+y(t)=e^{3t}$ admet pour solution générale l'application

$$\begin{aligned} y\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R}\\ t &\mapsto \frac{1}{4}e^{3t}+\kappa e^{-t} \qquad \text{avec } \kappa\in\mathbb{R}. \end{aligned}$$

En effet :

1. *Calcul de la solution générale de l'équation homogène* $y'(t)+y(t)=0$.
   Toute solution non nulle est de la forme

$$\begin{aligned} y_H\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R}\\ t &\mapsto \kappa e^{-t} \qquad \text{avec } \kappa\in\mathbb{R}. \end{aligned}$$

2. Calcul d'une solution particulière de l'EDO $y'(t)+y(t)=e^{3t}$.
   On vérifie aisément que la fonction

$$\begin{aligned} y_P\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R}\\ t &\mapsto e^{3t}/4 \end{aligned}$$

   est une solution particulière de l'EDO. Si cette solution ne vous parait pas évidente, il est bien entendu possible de déterminer une solution particulière en utilisant la méthode de la variation de la constante.

Exercice 12.25

Déterminer la solution générale de l'EDO $y'(t)+\tan(t)y(t)=\frac{1}{\cos(t)}$ après avoir indiqué sur quelle intervalle la solution est définie.

Correction

L'équation $y'(t)+\tan(t)y(t)=\frac{1}{\cos(t)}$ admet pour solution générale l'application

$$\begin{aligned} y\colon \left]-\frac{\pi}{2}+\kappa\pi;-\frac{\pi}{2}+\kappa\pi\right[&\to \mathbb{R}\\ t &\mapsto \sin(t)+C_\kappa\cos(t) \qquad \text{avec } C_\kappa\in\mathbb{R}. \end{aligned}$$

C_κ désignant une constante réelle différente sur chacun des intervalles. En effet :

1. L'EDO est déjà écrite sous forme normalisée. Considérons les applications suivantes :

$$\begin{aligned} b\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} & g\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R}\\ t &\mapsto \tan(t) & t &\mapsto \tfrac{1}{\cos(t)} \end{aligned}$$

   Elles ne sont définies que pour $t\neq\frac{\pi}{2}+\kappa\pi$, $\kappa\in\mathbb{Z}$ et sont continues sur chacun des intervalles $\left]-\frac{\pi}{2}+\kappa\pi;\frac{\pi}{2}+\kappa\pi\right[$.
2. *Calcul de la solution générale de l'équation homogène* $y'(t)+\tan(t)y(t)=0$.
   Formellement on peut écrire

$$\frac{y'(t)}{y(t)}=-\frac{\sin(t)}{\cos(t)} \quad\Longrightarrow\quad \int\frac{1}{y}\,\mathrm{d}y=\int\frac{-\sin(t)}{\cos(t)}\,\mathrm{d}t \quad\Longrightarrow\quad \ln|y|=\ln|\cos(t)|+C \text{ avec } C\in\mathbb{R}.$$

   Ainsi, la solution générale de l'équation homogène est l'application

$$\begin{aligned} y_H\colon \left]-\frac{\pi}{2}+\kappa\pi;\frac{\pi}{2}+\kappa\pi\right[&\to \mathbb{R}\\ t &\mapsto C_\kappa\cos(t) \qquad \text{avec } C_\kappa\in\mathbb{R}. \end{aligned}$$

3. Calcul d'une solution particulière de l'EDO $y'(t)+\tan(t)y(t)=\frac{1}{\cos(t)}$.
   On vérifie aisément que la fonction

$$\begin{aligned} y_P\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R}\\ t &\mapsto \sin(t) \end{aligned}$$

   est une solution particulière de l'EDO. Si cette solution ne vous parait pas évidente, il est bien entendu possible de déterminer une solution particulière en utilisant la méthode de la variation de la constante.

Exercice 12.26

Déterminer la solution générale de l'EDO $y'(t)+\dfrac{t+2}{t}y(t)=\dfrac{e^t}{t^2}$ après avoir indiqué sur quelle intervalle la solution est définie.

Correction

L'équation $y'(t)+\frac{t+2}{t}y(t)=\frac{e^t}{t^2}$ admet pour solution générale l'application

$$\begin{aligned} y\colon \mathbb{R}^* &\to \mathbb{R}\\ t &\mapsto \begin{cases} \dfrac{e^t}{2t^2}+\kappa_1\dfrac{e^{-t}}{t^2} & \text{si } t<0 \qquad \text{avec } \kappa_1\in\mathbb{R},\\ \dfrac{e^t}{2t^2}+\kappa_2\dfrac{e^{-t}}{t^2} & \text{si } t>0 \qquad \text{avec } \kappa_2\in\mathbb{R}.\end{cases}\end{aligned}$$

$\kappa_{1,2}$ désignant une constante réelle différente sur chacun des deux intervalles. En effet :

1. L'EDO est déjà écrite sous forme normalisée. Considérons les applications suivantes :

$$\begin{aligned} b\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} & \qquad g\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R}\\ t &\mapsto \frac{t+2}{t} & t &\mapsto \frac{e^t}{t^2}\end{aligned}$$

   Elles ne sont définies que pour $t\neq 0$ et sont continues sur chacun des intervalles $]-\infty;0[$ et $]0;+\infty[$.

2. *Calcul de la solution générale de l'équation homogène $y'(t)+\frac{t+2}{t}y(t)=0$.*
   Formellement on peut écrire

$$\frac{y'(t)}{y(t)}=-1-\frac{2}{t} \quad\Longrightarrow\quad \int\frac{1}{y}\,\mathrm{d}y=\int -1-\frac{2}{t}\,\mathrm{d}t \quad\Longrightarrow\quad \ln|y|=-t-2\ln|t|+C \text{ avec } C\in\mathbb{R}.$$

   Ainsi, la solution générale de l'équation homogène est l'application

$$\begin{aligned} y_H\colon \mathbb{R}^* &\to \mathbb{R}\\ t &\mapsto \begin{cases} \kappa_1\dfrac{e^{-t}}{t^2} & \text{si } t<0 \qquad \text{avec } \kappa_1\in\mathbb{R},\\ \kappa_2\dfrac{e^{-t}}{t^2} & \text{si } t>0 \qquad \text{avec } \kappa_2\in\mathbb{R}.\end{cases}\end{aligned}$$

3. Calcul d'une solution particulière de l'EDO $y'(t)+\frac{t+2}{t}y(t)=\frac{e^t}{t^2}$.
   On vérifie aisément que la fonction

$$\begin{aligned} y_P\colon \mathbb{R}^* &\to \mathbb{R}\\ t &\mapsto \frac{e^{-t}}{2t^2}\end{aligned}$$

   est une solution particulière de l'EDO. Si cette solution ne vous parait pas évidente, il est bien entendu possible de déterminer une solution particulière en utilisant la méthode de la variation de la constante.

Exercice 12.27

Déterminer la solution générale de l'EDO $y'(t)+y(t)=\dfrac{1-e^{-2t}}{e^t+e^{-t}}$ après avoir indiqué sur quelle intervalle la solution est définie.

Correction

L'équation $y'(t)+y(t)=\frac{1-e^{-2t}}{e^t+e^{-t}}$ admet pour solution générale l'application

$$\begin{aligned} y\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R}\\ t &\mapsto e^{-t}\ln(e^t+e^{-t})+\kappa e^{-t} \qquad \text{avec } \kappa\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

En effet :

1. *Calcul de la solution générale de l'équation homogène $y'(t)+y(t)=0$.*
   Toute solution non nulle est de la forme

$$\begin{aligned} y_H\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R}\\ t &\mapsto \kappa e^{-t} \qquad \text{avec } \kappa\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

2. Calcul d'une solution particulière de l'EDO $y'(t)+y(t)=\frac{1-e^{-2t}}{e^t+e^{-t}}$.
L'application
$$\begin{aligned} g\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R}\\ t &\mapsto \frac{1-e^{-2t}}{e^t+e^{-t}} = e^{-t}\tanh(t)\end{aligned}$$
est continue sur $\mathbb{R}$. En utilisant la méthode de variation de la constante, on cherche une solution particulière sous la forme $y_P(t)=K(t)\ y_H(t)\big|_{\kappa=1}$ où $K\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est une application inconnue dérivable sur $\mathbb{R}$. On a, pour tout $t\in\mathbb{R}$,
$$\begin{aligned} y_P(t)&=K(t)e^{-t}\\ y_P'(t)&=K'(t)e^{-t}-K(t)e^{-t}\end{aligned}$$
Puisque y_P est supposée être une solution particulière de l'EDO, on doit avoir pour tout $t\in\mathbb{R}$,
$$y_P'(t)+y_P(t)=\frac{1-e^{-2t}}{e^t+e^{-t}}$$
autrement dit la fonction K doit vérifier
$$K'(t)=\frac{e^t-e^{-t}}{e^t+e^{-t}}=\tanh(t)=\frac{\sinh(t)}{\cosh(t)}$$
ce qui impose $K(t)=\ln(\cosh(t))+C=\ln(e^t+e^{-t})-\ln(2)+C$, $C\in\mathbb{R}$. Puisqu'on est intéressé par une seule solution particulière, on peut choisir $C=\ln(2)$. On a alors
$$\begin{aligned} y_P\colon \mathbb{R}&\to\mathbb{R}\\ t&\mapsto e^{-t}\ln(e^t+e^{-t})\end{aligned}$$

Exercice 12.28

Déterminer la solution générale de l'EDO $ty'(t)+(3t+1)y(t)=e^{-3t}$ après avoir indiqué sur quelle intervalle la solution est définie.

Correction

Étudions d'abord l'EDO normalisée $y'(t)+\frac{3t+1}{t}y(t)=\frac{e^{-3t}}{t}$ qui doit être considérée sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$.

1. Étude sur $]-\infty;0[$.
   - ⋆ Calcul de la solution générale de l'équation homogène $y'(t)+\frac{3t+1}{t}y(t)=0$ pour $t\in]-\infty;0[$.
     L'application
     $$\begin{aligned} A_1\colon]-\infty;0[&\to\mathbb{R}\\ t&\mapsto\frac{3t+1}{t}=3+\frac{1}{t}\end{aligned}$$
     est continue et strictement positive sur $]-\infty;0[$. Formellement on peut alors écrire
     $$\frac{y'(t)}{y(t)}=-3+\frac{1}{t}\qquad\Longrightarrow\qquad\int\frac{1}{y}\,\mathrm{d}y=\int -3+\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t\qquad\Longrightarrow\qquad \ln|y|=-3t+\ln(-t)+C \text{ avec } C\in\mathbb{R}.$$
     La solution générale de l'équation homogène est donc l'application
     $$\begin{aligned} y_H\colon]-\infty;0[&\to\mathbb{R}\\ t&\mapsto\frac{\kappa_1}{t}e^{-3t}\qquad\text{avec }\kappa_1\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$
   - ⋆ Calcul d'une solution particulière de l'EDO $y'(t)+\frac{3t+1}{t}y(t)=\frac{e^{-3t}}{t}$ pour $t\in]-\infty;0[$.
     On vérifie aisément que
     $$\begin{aligned} y_P\colon]-\infty;0[&\to\mathbb{R}\\ t&\mapsto e^{-3t}\end{aligned}$$
     est une solution particulière de l'EDO puisque
     $$y_P'(t)+\frac{3t+1}{t}y_P(t)=-3e^{-3t}+\left(3+\frac{1}{t}\right)e^{-3t}=\frac{1}{t}e^{-3t},\forall t\in]-\infty;0[.$$

Si cette solution ne vous parait pas évidente, il est bien entendu possible de déterminer une solution particulière en utilisant la méthode de la variation de la constante.

- ⋆ Conclusion sur $]-\infty;0[$.
  On en déduit que la solution générale de l'EDO sur $]-\infty;0[$ est l'application

$$\begin{aligned} y\colon]-\infty;0[&\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto y_H(t)+y_P(t)=\left(\frac{\kappa_1}{t}+1\right)e^{-3t} \qquad \text{avec } \kappa_1\in\mathbb{R}. \end{aligned}$$

2. Étude sur $]0;+\infty[$.
   - ⋆ Calcul de la solution générale de l'équation homogène $y'(t)+\frac{3t+1}{t}y(t)=0$ pour $t\in]0;+\infty[$.
     L'application

$$\begin{aligned} A_2\colon]0;+\infty[&\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto \frac{3t+1}{t}=3+\frac{1}{t} \end{aligned}$$

est continue et strictement positive sur $]0;+\infty[$. Formellement on peut alors écrire

$$\frac{y'(t)}{y(t)}=-3+\frac{1}{t} \quad\Longrightarrow\quad \int\frac{1}{y}\,\mathrm{d}y=\int -3+\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \quad\Longrightarrow\quad \ln|y|=-3t+\ln(t)+C \text{ avec } C\in\mathbb{R}.$$

La solution générale de l'équation homogène est donc l'application

$$\begin{aligned} y_H\colon]0;+\infty[&\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto \frac{\kappa_2}{t}e^{-3t} \qquad \text{avec } \kappa_2\in\mathbb{R}. \end{aligned}$$

   - ⋆ Calcul d'une solution particulière de l'EDO $y'(t)+\frac{3t+1}{t}y(t)=\frac{e^{-3t}}{t}$ pour $t\in]0;+\infty[$.
     On vérifie aisément que

$$\begin{aligned} y_P\colon]0;+\infty[&\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto e^{-3t} \end{aligned}$$

est une solution particulière de l'EDO puisque

$$y_P'(t)+\frac{3t+1}{t}y_P(t)=-3e^{-3t}+\left(3+\frac{1}{t}\right)e^{-3t}=\frac{1}{t}e^{-3t},\ \forall t\in]0;+\infty[.$$

Si cette solution ne vous parait pas évidente, il est bien entendu possible de déterminer une solution particulière en utilisant la méthode de la variation de la constante.

   - ⋆ Conclusion sur $]0;+\infty[$.
     On en déduit que la solution générale de l'EDO sur $]0;+\infty[$ est l'application

$$\begin{aligned} y\colon]0;+\infty[&\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto y_H(t)+y_P(t)=\left(\frac{\kappa_2}{t}+1\right)e^{-3t} \qquad \text{avec } \kappa_2\in\mathbb{R}. \end{aligned}$$

3. Étude sur $\mathbb{R}$.
   La limite de la solution générale pour $t\to0^-$ n'est bornée que si $\kappa_1=0$. De même, la limite de la solution générale pour $t\to0^+$ n'est bornée que si $\kappa_2=0$. Par conséquente, si une solution générale de l'EDO existe pour tout $t\in\mathbb{R}$, ce ne peut être que l'application

$$\begin{aligned} \varphi\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto e^{-3t}. \end{aligned}$$

Cette application est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\lim_{t\to0^\pm}\left(t\varphi'(t)+(3t+1)\varphi(t)\right)=\lim_{t\to0}e^{-3t}=1$$

donc φ est bien solution de l'EDO sur $\mathbb{R}$. C'est donc l'unique solution de l'EDO sur $\mathbb{R}$.

Exercice 12.29

Déterminer la solution générale de l'EDO $2t(t+1)y'(t)+(t+1)y(t)=1$ après avoir indiqué sur quelle intervalle la solution est définie.

Correction

Étudions d'abord l'EDO normalisée $y'(t)+\frac{1}{2t}y(t)=\frac{1}{2t(t+1)}$ qui doit être considérée sur $]-\infty;-1[$, sur $]-1;0[$ et sur $]0;+\infty[$.

1. Étude sur $]-\infty;-1[$.

   ⋆ Calcul de la solution générale de l'équation homogène $y'(t)+\frac{1}{2t}y(t)=0$ pour $t\in]-\infty;-1[$.
   L'application

$$\begin{aligned} b_1\colon]-\infty;-1[&\to \mathbb{R}\\ t &\mapsto \frac{1}{2t}\end{aligned}$$

   est continue et strictement négative sur $]-\infty;-1[$. Formellement on peut alors écrire

$$\frac{y'(t)}{y(t)}=-\frac{1}{2t} \implies \int\frac{1}{y}\,\mathrm{d}y=\int-\frac{1}{2t}\,\mathrm{d}t \implies \ln|y|=-\ln(\sqrt{-t})+C \text{ avec } C\in\mathbb{R}.$$

   La solution générale de l'équation homogène est donc l'application

$$\begin{aligned} y_H\colon]-\infty;-1[&\to \mathbb{R}\\ t &\mapsto \frac{\kappa_1}{\sqrt{-t}} \qquad \text{avec } \kappa_1\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

   ⋆ Calcul d'une solution particulière de l'EDO $y'(t)+\frac{1}{2t}y(t)=\frac{1}{2t(t+1)}$ pour $t\in]-\infty;-1[$.
   L'EDO ne semble pas posséder de solution évidente. On a donc recours à la méthode de la variation de la constante pour en déterminer une. On cherche une solution particulière sous la forme $y_P(t)=K(t)\;y_H(t)\big|_{\kappa_1=1}$ où $K\colon]-\infty;-1[\to\mathbb{R}$ est une application inconnue dérivable sur $]-\infty;-1[$. On a, pour tout $t\in]-\infty;-1[$,

$$\begin{aligned} y_P(t)&=\frac{K(t)}{\sqrt{-t}}=(-t)^{-1/2}K(t)\\ y_P'(t)&=\frac{K'(t)}{\sqrt{-t}}-\frac{K(t)}{2\sqrt{(-t)^3}}\end{aligned}$$

   Puisque y_P est supposée être une solution particulière de l'EDO, on doit avoir pour tout $t\in]-\infty;-1[$,

$$y_P'(t)+\frac{y_P(t)}{2t}=\frac{1}{2t(t+1)}$$

   autrement dit la fonction K doit vérifier

$$\frac{K'(t)}{\sqrt{-t}}-\frac{K(t)}{2\sqrt{(-t)^3}}+\frac{K(t)}{2t\sqrt{-t}}=\frac{1}{2t(t+1)}.$$

   On doit donc avoir, pour tout $t\in]-\infty;-1[$,

$$K'(t)=-\frac{1}{2\sqrt{-t}(t+1)}$$

   ce qui impose $K(t)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{-t}+1}{\sqrt{-t}-1}\right)+C$, $C\in\mathbb{R}$. Puisqu'on est intéressé par une seule solution particulière, on choisit généralement $C=O$. On a alors

$$\begin{aligned} y_P\colon]-\infty;-1[&\to \mathbb{R}\\ t &\mapsto \frac{1}{2\sqrt{-t}}\ln\left(\frac{\sqrt{-t}+1}{\sqrt{-t}-1}\right)\end{aligned}$$

   ⋆ Conclusion sur $]-\infty;-1[$.

On en déduit que la solution générale de l'EDO sur $]-\infty;-1[$ est l'application

$$\begin{aligned} y\colon]-\infty;-1[&\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto y_H(t)+y_P(t)=\frac{\kappa_1}{\sqrt{-t}}+\frac{1}{2\sqrt{-t}}\ln\left(\frac{\sqrt{-t}+1}{\sqrt{-t}-1}\right) \qquad \text{avec } \kappa_1\in\mathbb{R}. \end{aligned}$$

2. Étude sur $]-1;0[$.

 ⋆ Calcul de la solution générale de l'équation homogène $y'(t)+\frac{1}{2t}y(t)=0$ pour $t\in]-1;0[$.
 L'application

$$\begin{aligned} b_2\colon]-1;0[&\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto \frac{1}{2t} \end{aligned}$$

 est continue et strictement négative sur $]-1;0[$. Formellement on peut alors écrire

$$\frac{y'(t)}{y(t)}=-\frac{1}{2t} \quad\Longrightarrow\quad \int\frac{1}{y}\,\mathrm{d}y=\int-\frac{1}{2t}\,\mathrm{d}t \quad\Longrightarrow\quad \ln|y|=-\ln(\sqrt{-t})+C \text{ avec } C\in\mathbb{R}.$$

 La solution générale de l'équation homogène est donc l'application

$$\begin{aligned} y_H\colon]-1;0[&\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto \frac{\kappa_2}{\sqrt{-t}} \qquad \text{avec } \kappa_2\in\mathbb{R}. \end{aligned}$$

 ⋆ Calcul d'une solution particulière de l'EDO $y'(t)+\frac{1}{2t}y(t)=\frac{1}{2t(t+1)}$ pour $t\in]-1;0[$.
 On cherche une solution particulière sous la forme $y_P(t)=K(t)\ y_H(t)\big|_{\kappa_2=1}$ où $K\colon]-1;0[\to\mathbb{R}$ est une application inconnue dérivable sur $]-1;0[$. On a, pour tout $t\in]-1;0[$,

$$\begin{aligned} y_P(t)&=\frac{K(t)}{\sqrt{-t}}=(-t)^{-1/2}K(t) \\ y_P'(t)&=\frac{K'(t)}{\sqrt{-t}}-\frac{K(t)}{2\sqrt{(-t)^3}} \end{aligned}$$

 Puisque y_P est supposée être une solution particulière de l'EDO, on doit avoir pour tout $t\in]-1;0[$,

$$y_P'(t)+\frac{y_P(t)}{2t}=\frac{1}{2t(t+1)}$$

 autrement dit la fonction K doit vérifier

$$\frac{K'(t)}{\sqrt{-t}}-\frac{K(t)}{2\sqrt{(-t)^3}}+\frac{K(t)}{2t\sqrt{-t}}=\frac{1}{2t(t+1)}.$$

 On doit donc avoir, pour tout $t\in]-1;0[$,

$$K'(t)=-\frac{1}{2\sqrt{-t}(t+1)}$$

 ce qui impose $K(t)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{-t}+1}{\sqrt{-t}-1}\right)+C$, $C\in\mathbb{R}$. Puisqu'on est intéressé par une seule solution particulière, on choisit généralement $C=O$. On a alors

$$\begin{aligned} y_P\colon]-1;0[&\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto \frac{1}{2\sqrt{-t}}\ln\left(\frac{1+\sqrt{-t}}{1-\sqrt{-t}}\right) \end{aligned}$$

 ⋆ Conclusion sur $]-1;0[$.

On en déduit que la solution générale de l'EDO sur $]-1;0[$ est l'application

$$\begin{aligned} y\colon]-1;0[&\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto y_H(t)+y_P(t)=\frac{\kappa_2}{\sqrt{-t}}+\frac{1}{2\sqrt{-t}}\ln\left(\frac{1+\sqrt{-t}}{1-\sqrt{-t}}\right) \qquad \text{avec } \kappa_2\in\mathbb{R}. \end{aligned}$$

3. Étude sur $]0;+\infty[$.
   - ⋆ Calcul de la solution générale de l'équation homogène $y'(t)+\frac{1}{2t}y(t)=0$ pour $t\in]0;+\infty[$.
     L'application

     $$\begin{aligned} b_3\colon]0;+\infty[&\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto \frac{1}{2t} \end{aligned}$$

     est continue et strictement positive sur $]0;+\infty[$. Formellement on peut alors écrire

     $$\frac{y'(t)}{y(t)}=-\frac{1}{2t} \quad\Longrightarrow\quad \int\frac{1}{y}\,\mathrm{d}y=\int -\frac{1}{2t}\,\mathrm{d}t \quad\Longrightarrow\quad \ln|y|=-\ln(\sqrt{t})+C \text{ avec } C\in\mathbb{R}.$$

     La solution générale de l'équation homogène est donc l'application

     $$\begin{aligned} y_H\colon]0;+\infty[&\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto \frac{\kappa_3}{\sqrt{t}} \qquad \text{avec } \kappa_3\in\mathbb{R}. \end{aligned}$$

   - ⋆ Calcul d'une solution particulière de l'EDO $y'(t)+\frac{1}{2t}y(t)=\frac{1}{2t(t+1)}$ pour $t\in]0;+\infty[$.
     On cherche une solution particulière sous la forme $y_P(t)=K(t)\ y_H(t)\big|_{\kappa_3=1}$ où $K\colon]0;+\infty[\to\mathbb{R}$ est une application inconnue dérivable sur $]0;+\infty[$. On a, pour tout $t\in]0;+\infty[$,

     $$\begin{aligned} y_P(t)&=\frac{K(t)}{\sqrt{t}}=(t)^{-1/2}K(t)\\ y_P'(t)&=\frac{K'(t)}{\sqrt{t}}-\frac{K(t)}{2\sqrt{(t)^3}} \end{aligned}$$

     Puisque y_P est supposée être une solution particulière de l'EDO, on doit avoir pour tout $t\in]0;+\infty[$,

     $$y_P'(t)+\frac{y_P(t)}{2t}=\frac{1}{2t(t+1)}$$

     autrement dit la fonction K doit vérifier

     $$\frac{K'(t)}{\sqrt{t}}-\frac{K(t)}{2\sqrt{t^3}}+\frac{K(t)}{2t\sqrt{t}}=\frac{1}{2t(t+1)}.$$

     On doit donc avoir, pour tout $t\in]0;+\infty[$,

     $$K'(t)=-\frac{1}{2\sqrt{t}(t+1)}$$

     ce qui impose $K(t)=\arctan(\sqrt{t})+C$, $C\in\mathbb{R}$. Puisqu'on est intéressé par une seule solution particulière, on choisit généralement $C=O$. On a alors

     $$\begin{aligned} y_P\colon]0;+\infty[&\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto \frac{\arctan(\sqrt{t})}{\sqrt{t}} \end{aligned}$$

   - ⋆ Conclusion sur $]0;+\infty[$.
     On en déduit que la solution générale de l'EDO sur $]0;+\infty[$ est l'application

     $$\begin{aligned} y\colon]0;+\infty[&\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto y_H(t)+y_P(t)=\frac{\kappa_3}{\sqrt{t}}+\frac{\arctan(\sqrt{t})}{\sqrt{t}} \qquad \text{avec } \kappa_3\in\mathbb{R}. \end{aligned}$$

4. Étude sur $\mathbb{R}$.

L'EDO donnée et l'EDO normalisée ne sont pas équivalentes puisqu'elles n'ont pas le même domaine de validité. Une solution de l'EDO donnée, si elle existe, sera solution de l'EDO normalisée sur les trois intervalles $]-\infty;-1[$, $]-1;0[$ et $]0;+\infty[$. On a déterminé les solutions de l'EDO normalisée sur ces trois intervalles. Se pose maintenant la question de savoir si à partir des solutions de l'EDO normalisée sur les trois intervalles $]-\infty;-1[$, $]-1;0[$ et $]0;+\infty[$ on peut trouver (construire) une solution de l'EDO donnée sur $\mathbb{R}$. Autrement dit : peut-on trouver une application φ définie sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que sa restriction sur chacun des trois intervalles est solution de l'EDO normalisée ? Si une telle solution existe, elle est nécessairement de la forme

$$\varphi(t)=\begin{cases}\frac{\kappa_1}{\sqrt{-t}}+\frac{1}{2\sqrt{-t}}\ln\left(\frac{\sqrt{-t}+1}{\sqrt{-t}-1}\right) & \text{si } t<-1,\\ \frac{\kappa_2}{\sqrt{-t}}+\frac{1}{2\sqrt{-t}}\ln\left(\frac{1+\sqrt{-t}}{1-\sqrt{-t}}\right) & \text{si } -1<t<0,\\ \frac{\kappa_3}{\sqrt{t}}+\frac{\arctan(\sqrt{t})}{\sqrt{t}} & \text{si } t>0,\end{cases}$$

où κ_1, κ_2, κ_3 désignent trois constantes réelles. Pour que cette fonction soit solution, il faut qu'elle soit dérivable sur $\mathbb{R}$: il nous faut donc regarder si elle est prolongeable par continuité en -1 et en 0 et si le prolongement ainsi défini est dérivable en -1 et en 0.

4.1. Étude du raccord en -1.
La fonction φ ne peut pas être prolongée par continuité en -1 car elle n'est pas bornée en -1 puisque

$$\lim_{t\to-1^-}\varphi(t)=\lim_{t\to-1^-}\frac{\kappa_1}{\sqrt{-t}}+\frac{1}{2\sqrt{-t}}\ln\left(\frac{\sqrt{-t}+1}{\sqrt{-t}-1}\right)=+\infty.$$

4.2. Étude du raccord en 0.
La fonction φ peut être prolongée par continuité en 0 si, et seulement si, $\kappa_2=\kappa_3=0$. En effet,

$$\lim_{t\to0^-}\varphi(t)=\lim_{t\to0^-}\frac{\kappa_2}{\sqrt{-t}}+\frac{1}{2\sqrt{-t}}\ln\left(\frac{1+\sqrt{-t}}{1-\sqrt{-t}}\right)=\lim_{t\to0^-}\frac{\kappa_2}{\sqrt{-t}}+1$$

et

$$\lim_{t\to0^+}\varphi(t)=\lim_{t\to0^+}\frac{\kappa_3}{\sqrt{t}}+\frac{\arctan(\sqrt{t})}{\sqrt{t}}=\lim_{t\to0^+}\frac{\kappa_3}{\sqrt{-t}}+1.$$

Pour $\kappa_2=\kappa_3=0$, on pose $\varphi(0)=1$. Regardons à présent la dérivabilité en 0 :

$$\lim_{t\to0^\pm}\frac{\varphi(h)-\varphi(0)}{h}=\lim_{t\to0^\pm}\frac{\varphi(h)-1}{h}=-\frac{1}{3}$$

4.3. Conclusion sur $\mathbb{R}$.
L'EDO donnée admet des solutions sur chacun des intervalles $]-\infty;-1[$, $]-1;0[$ et $]0;+\infty[$ qui sont respectivement les applications

$$\begin{aligned} y\colon]-\infty;-1[&\to \mathbb{R}\\ t &\mapsto \frac{\kappa_1}{\sqrt{-t}}+\frac{1}{2\sqrt{-t}}\ln\left(\frac{\sqrt{-t}+1}{\sqrt{-t}-1}\right)\\ y\colon]-1;0[&\to \mathbb{R}\\ t &\mapsto \frac{\kappa_2}{\sqrt{-t}}+\frac{1}{2\sqrt{-t}}\ln\left(\frac{1+\sqrt{-t}}{1-\sqrt{-t}}\right)\\ y\colon]0;+\infty[&\to \mathbb{R}\\ t &\mapsto \frac{\kappa_3}{\sqrt{t}}+\frac{\arctan(\sqrt{t})}{\sqrt{t}}\end{aligned}$$

avec $\kappa_1,\kappa_2,\kappa_2\in\mathbb{R}$.

Elle admet une unique solution sur l'intervalle $]-1;+\infty[$ qui est l'application

$$\begin{aligned} y\colon]-1;+\infty[&\to \mathbb{R}\\ t &\mapsto \begin{cases}\frac{1}{2\sqrt{-t}}\ln\left(\frac{1+\sqrt{-t}}{1-\sqrt{-t}}\right) & \text{si } -1<t<0,\\ 1 & \text{si } t=0,\\ \frac{\arctan(\sqrt{t})}{\sqrt{t}} & \text{si } t>0.\end{cases}\end{aligned}$$

Elle n'admet pas de solution définie sur tout $\mathbb{R}$.

EDO d'ordre 1 de Bernoulli

Exercice 12.30

Déterminer la solution générale des EDO suivantes après avoir indiqué sur quelle intervalle la solution est définie :

a) $y'(t) - \frac{1}{t}y(t) = (y(t))^3 \sin(t)$ b) $y'(t) + ty(t) = t^3(y(t))^2$

Correction

(a) L'EDO $y'(t) - \frac{1}{t}y(t) = (y(t))^3 \sin(t)$ est une équation différentielle de BERNOULLI. Comme $u(t) = 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}^*$, on cherche sa solution générale sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$.

- ⋆ $A(t) = (1-\alpha)\displaystyle\int \frac{v(t)}{u(t)}\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = 2\ln|t|$,
- ⋆ $K(t) = (1-\alpha)\displaystyle\int \frac{w(t)}{u(t)}e^{A(t)}\,\mathrm{d}t = -\int t^2\sin(t)\,\mathrm{d}t = 2\cos(t) - 4\frac{\sin(t)}{t} - 4\frac{\cos(t)}{t^2}$,
- ⋆ $z(t) = \left(C_{1,2} + K(t)\right)e^{-A(t)} = \left(C_{1,2} + 2\cos(t) - 4\frac{\sin(t)}{t} - 4\frac{\cos(t)}{t^2}\right)e^{-2\ln|t|} = \frac{C_{1,2} + 2\cos(t) - 4\frac{\sin(t)}{t} - 4\frac{\cos(t)}{t^2}}{t^2}$,
- ⋆ $y(t) = (z(t))^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{z(t)}}$

et on conclut que la solution générale de l'EDO de BERNOULLI assignée est

$$\begin{aligned} y\colon \mathbb{R}^* &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto \begin{cases} \dfrac{t}{\sqrt{C_{1,2}+2\cos(t)-4\frac{\sin(t)}{t}-4\frac{\cos(t)}{t^2}}} & \text{si } t<0 \qquad \text{avec } C_1 \in \mathbb{R}^+, \\ \dfrac{-t}{\sqrt{C_{1,2}+2\cos(t)-4\frac{\sin(t)}{t}-4\frac{\cos(t)}{t^2}}} & \text{si } t>0 \qquad \text{avec } C_2 \in \mathbb{R}^+, \end{cases} \end{aligned}$$

(b) L'EDO $y'(t) + ty(t) = t^3(y(t))^2$ est une équation différentielle de BERNOULLI. Comme $u(t) = 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, on cherche sa solution générale sur $\mathbb{R}$.

- ⋆ *Solution nulle :* la fonction $y(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ est solution de l'EDO donnée. Toute autre solution ne s'annule jamais. Supposons dans la suite que $y(t) \neq 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
- ⋆ *Réduction à une EDO linéaire du premier ordre :* si on pose $z = 1/y$, *i.e.* $y = 1/z$, elle se réécrit

$$z'(t) - tz(t) = -t^3.$$

Notons que $z = 1/y$ impose $z(t) \neq 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

- ⋆ *Résolution de l'équation homogène associée :* $z'(t) - tz(t) = 0$. L'application $t \mapsto -t$ est continue et différente de zéro sur $\mathbb{R}$. Formellement on peut donc écrire $\frac{z'_H(t)}{z_H(t)} = t$, ce qui conduit à la solution générale sur $\mathbb{R}$ de l'équation homogène

$$\begin{aligned} z_H\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto Ce^{t^2/2} \qquad \text{avec } C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

- ⋆ *Recherche d'une solution particulière.* On vérifie aisément que la fonction

$$\begin{aligned} z_P\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto t^2 + 2 \end{aligned}$$

est une solution particulière sur $\mathbb{R}$ de l'EDO complète puisque

$$z'_P(t) - tz_P(t) = 2t - t(t^2+2) = 2t - t^3 + 2t = -t^3 \qquad \text{pout tout } t \in \mathbb{R}.$$

La solution générale est donc

$$\begin{aligned} z\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto Ce^{t^2/2} + t^2 + 2 \qquad \text{avec } C \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

et on conclut

$$\begin{aligned} y\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto \frac{1}{Ce^{t^2/2} + t^2 + 2} \qquad \text{avec } C \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

EDO d'ordre 2 linéaire à coefficients constants

Exercice 12.31

Calculer les solutions des EDO linéaires du second ordre à coefficients constants suivantes :

1. $y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = 0$
2. $y''(x) - 4y'(x) + 4y(x) = 0$
3. $y''(x) - 2y'(x) + 2y(x) = 0$
4. $y''(x) - y(x) = e^{2x}$
5. $y''(x) - y'(x) = e^{x}$

Correction

1. Le polynôme caractéristique associé à l'EDO est $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ qui a discriminant $\Delta = 1$: on a deux solutions réelles distinctes
$$\lambda_1 = \frac{3-1}{2} = 1 \qquad \text{et} \qquad \lambda_2 = \frac{3+1}{2} = 2.$$
Toutes les solutions sont alors les fonctions $y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$ pour tout $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.
2. Le polynôme caractéristique associé à l'EDO est $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$ qui a discriminant $\Delta = 0$: on a deux solutions réelles coïncidentes
$$\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{4}{2} = 2.$$
Toutes les solutions sont les fonctions $y(x) = (C_1 + C_2 x)e^{2x}$ pour tout $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.
3. Le polynôme caractéristique associé à l'EDO est $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$ qui a discriminant $\Delta = -4$: on a deux solutions complexes conjuguées
$$\lambda_1 = \frac{2-2i}{2} \qquad \text{et} \qquad \lambda_2 = \frac{2+2i}{2}.$$
Comme $\Re(\lambda_2) = 1$ et $\Im(\lambda_2) = 1$, toutes les solutions sont les fonctions $y(x) = e^x(C_1\cos(x) + C_2\sin(x))$ pour tout $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.
4. Comme l'EDO n'est pas homogène on cherche ses solutions sous la forme $y(x) = y_H(x) + y_P(x)$ où les y_H sont toutes les solutions de l'EDO homogène associée et y_P est une solution particulière de l'EDO complète.
Le polynôme caractéristique associé à l'EDO est $\lambda^2 - 1 = 0$ qui a discriminant $\Delta = 1$: on a deux solutions réelles distinctes
$$\lambda_1 = -1 \qquad \text{et} \qquad \lambda_2 = 1.$$
Toutes les solutions de l'homogène sont les fonctions $y_H(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$ pour tout $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.
Comme le terme source est $g(x) = e^{2x}$, on a $n = 0$, $\mu = 2$ et $\vartheta = 0$; comme $\Delta > 0$, $\vartheta = 0$ mais $\mu \neq \lambda_1$ et $\mu \neq \lambda_2$ alors $m = 0$: la solution particulière sera de la forme $y_P(x) = q_1 e^{2x}$. Pour qu'elle soit une solution particulière on doit imposer qu'elle vérifie l'EDO complète ; comme $y_P'(x) = 2q_1 e^{2x}$ et $y_P''(x) = 4q_1 e^{2x}$ il faut que
$$4q_1 e^{2x} - q_1 e^{2x} = e^{2x}$$
qui donne $q_1 = \frac{1}{3}$.
En conclusion toutes les solutions sont les fonctions $y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + \frac{1}{3}e^{2x}$ pour tout $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.
5. Toute solution est de la forme $y(x) = y_H(x) + y_P(x)$ où y_H représente toutes les solutions de l'équation $y''(x) - y'(x) = 0$ tandis que y_P est une solution particulière de $y''(x) - y'(x) = e^x$. Le polynôme caractéristique est $2\lambda^2 - 1 = 0$ qui a comme racines les deux réels $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = 1$. Par conséquent $y_H(x) = C_1 + C_2 e^x$. En adoptant la notation du cours on a $n = 0$, $\mu = 1$, $\vartheta = 0$, $\Delta > 0$ et $\mu = \lambda_2 = 1$ par conséquent $m = 1$: la solution particulière est alors de la forme $y_P(x) = Cxe^x$. Pour déterminer C on impose à y_P d'être solution de l'EDO. Comme $y_P'(x) = C(1+x)e^x$ et $y_P''(x) = C(2+x)e^x$, il faut que $\big(C(2+x)e^x\big) - \big(C(1+x)e^x\big) = e^x$, ce qui donne $C = 1$. On conclut que toutes les solutions de l'EDO s'écrivent
$$y(x) = C_1 + C_2 e^x + xe^x.$$

Exercice 12.32

Résoudre le problème de Cauchy
$$\begin{cases} y''(x) - 2y'(x) + 10y(x) = 0, \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 2. \end{cases}$$

Correction
L'équation différentielle est linéaire du second ordre, à coefficients constants, et sans second membre (*i.e.* elle est déjà homogène !). L'équation caractéristique $\lambda^2 - 2\lambda + 10 = 0$ a discriminant $\Delta < 0$. Comme $\sigma = 1$ et $\omega = 3$, l'intégrale générale de l'équation homogène est

$$y_H(x) = e^x \left(c_1 \cos(3x) + c_2 \sin(3x)\right), \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Puisque $y(0) = 1$ alors $c_1 = 1$. Comme $y'(0) = 2$ et $y'(x) = e^x\left((c_1 + 3c_2)\cos(3x) + (c_1 - 3c_2)\sin(3x)\right)$ alors $c_2 = 1/3$. On conclut que la solution du problème de Cauchy est

$$y(x) = e^x \left(\cos(3x) + \frac{1}{3}\sin(3x)\right).$$

Exercice 12.33

Calculer toutes les solutions de l'EDO $2y''(x) - 5y'(x) + 3y(x) = e^x$.

Correction
Toute solution est de la forme

$$y(x) = y_H(x) + y_P(x)$$

où y_H représente toutes les solutions de l'équation $2y''(x) - 5y'(x) + 3y(x) = 0$ tandis que y_P est une solution particulière de $2y''(x) - 5y'(x) + 3y(x) = e^x$.

- ⋆ $\boxed{\text{Calcul de } y_H.}$ Le polynôme caractéristique est $2\lambda^2 - 5\lambda + 3 = 0$ qui a comme racines les deux réels $\lambda_1 = 1$ et $\lambda = 3/2$. Par conséquent
$$y_H(x) = C_1 e^x + C_2 e^{3x/2}.$$
- ⋆ $\boxed{\text{Calcul de } y_P.}$ En adoptant la notation du cours on a $n = 0$, $\mu = 1$, $\vartheta = 0$, $\Delta > 0$ et $\mu = \lambda_1 = 1$ par conséquent $m = 1$: la solution particulière est alors de la forme $y_P(x) = Cxe^x$. Pour déterminer C on impose à y_P d'être solution de l'EDO. Comme $y_P'(x) = C(1+x)e^x$ et $y_P''(x) = C(2+x)e^x$, il faut que
$$2\big(C(2+x)e^x\big) - 5\big(C(1+x)e^x\big) + 3\big(Cxe^x\big) = e^x,$$
ce qui donne $C = 1$.

On conclut que toutes les solutions de l'EDO s'écrivent

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{3x/2} + xe^x.$$

Exercice 12.34

Calculer toutes les solutions de l'EDO $2y''(x) - 7y'(x) + 5y(x) = -3e^x$.

Correction
Toute solution est de la forme

$$y(x) = y_H(x) + y_P(x)$$

où y_H représente toutes les solutions de l'équation $2y''(x) - 7y'(x) + 5y(x) = 0$ tandis que y_P est une solution particulière de $2y''(x) - 7y'(x) + 5y(x) = -3e^x$.

- ⋆ $\boxed{\text{Calcul de } y_H.}$ Le polynôme caractéristique est $2\lambda^2 - 7\lambda + 5 = 0$ qui a comme racines les deux réels $\lambda_1 = 1$ et $\lambda = 5/2$. Par conséquent
$$y_H(x) = C_1 e^x + C_2 e^{5x/2}.$$
- ⋆ $\boxed{\text{Calcul de } y_P.}$ En adoptant la notation du cours on a $n = 0$, $\mu = 1$, $\vartheta = 0$, $\Delta > 0$ et $\mu = \lambda_1 = 1$ par conséquent $m = 1$: la solution particulière est alors de la forme $y_P(x) = Cxe^x$. Pour déterminer C on impose à y_P d'être solution de l'EDO. Comme $y_P'(x) = C(1+x)e^x$ et $y_P''(x) = C(2+x)e^x$, il faut que
$$2\big(C(2+x)e^x\big) - 7\big(C(1+x)e^x\big) + 5\big(Cxe^x\big) = -3e^x,$$
ce qui donne $C = 1$.

On conclut que toutes les solutions de l'EDO s'écrivent

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{5x/2} + xe^x.$$

Exercice 12.35

$$\begin{cases} y''(x)-2y'(x)+y(x)=(x+1)e^{x}, \\ y(0)=1, \\ y'(0)=2. \end{cases}$$

Correction

Comme l'EDO n'est pas homogène on cherche ses solutions sous la forme $y(x)=y_H(x)+y_P(x)$ où les y_H sont toutes les solutions de l'EDO homogène $y''(x)-2y'(x)+y(x)=0$ (y_H contient deux constantes d'intégration) et y_P est une solution particulière de l'EDO complète $y''(x)-2y'(x)+y(x)=(x+1)e^{x}$.
Le polynôme caractéristique associé à l'EDO est $\lambda^2-2\lambda+1=0$ qui a discriminant $\Delta=4-4=0$, l'unique racine réelle est

$$\lambda_1=\lambda_2=1.$$

Par conséquent, les solutions de l'EDO homogène sont les fonctions $y_H(x)=(C_1+C_2x)e^{x}$ pour tout $C_1,C_2\in\mathbb{R}$.
Comme le terme source est $g(x)=(x+1)e^{x}$, on a $n=1$, $\mu=1$ et $\vartheta=0$; puisque $\Delta=0$, $\vartheta=0$ et $\mu=\lambda$ alors $m=2$: la solution particulière sera de la forme $y_P(x)=x^2e^{x}(\alpha+\beta x)=(\alpha x^2+\beta x^3)e^{x}$. Pour qu'elle soit une solution particulière on doit imposer qu'elle vérifie l'EDO complète ; comme $y_P'(x)=(2\alpha x+3\beta x^2+\alpha x^2+\beta x^3)e^{x}=(2\alpha x+(3\beta+\alpha)x^2+\beta x^3)e^{x}$ et $y_P''(x)=(2\alpha+(6\beta+4\alpha)x+(6\beta+\alpha)x^2+\beta x^3)e^{x}$, il faut

$$(2\alpha+(6\beta+4\alpha)x+(6\beta+\alpha)x^2+\beta x^3)e^{x}-2(2\alpha x+(3\beta+\alpha)x^2+\beta x^3)e^{x}+(\alpha x^2+\beta x^3)e^{x}=(x+1)e^{x}$$

c'est-à-dire $(2\alpha)+(6\beta+4\alpha-4\alpha)x+(6\beta+\alpha-6\beta-2\alpha+\alpha)x^2+(\beta-2\beta+\beta)x^3=1+x$, ce qui donne $\alpha=\frac{1}{2}$ et $\beta=\frac{1}{6}$.
En conclusion les solutions de l'EDO sont les fonctions $y(x)=(C_1+C_2x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3)e^{x}$ pour tout $C_1,C_2\in\mathbb{R}$.
On cherche parmi ces solutions celles qui vérifient $y(0)=1$; comme $y(0)=C_1$ on obtient les fonctions $y(x)=(1+C_2x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3)e^{x}$ pour tout $C_2\in\mathbb{R}$. Parmi ces solutions, on cherche maintenant celle qui vérifie $y'(0)=2$; comme $y'(0)=1+C_2$ on conclut que l'unique solution du problème de Cauchy donné est la fonction $y(x)=(1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3)e^{x}$.

Exercice 12.36

$$\begin{cases} y''(x)+2y'(x)+y(x)=(1-x)e^{-x}, \\ y(0)=1, \\ y'(0)=2. \end{cases}$$

Correction

Comme l'EDO n'est pas homogène on cherche ses solutions sous la forme $y(x)=y_H(x)+y_P(x)$ où les y_H sont toutes les solutions de l'EDO homogène $y''(x)+2y'(x)+y(x)=0$ (y_H contient deux constantes d'intégration) et y_P est une solution particulière de l'EDO complète $y''(x)+2y'(x)+y(x)=(1-x)e^{-x}$.
Le polynôme caractéristique associé à l'EDO est $\lambda^2+2\lambda+1=0$ qui a discriminant $\Delta=4-4=0$, la solution réelle est

$$\lambda_1=\lambda_2=-1.$$

Par conséquent, les solutions de l'EDO homogène sont les fonctions $y_H(x)=(C_1+C_2x)e^{-x}$ pour tout $C_1,C_2\in\mathbb{R}$.
Comme le terme source est $g(x)=(1-x)e^{-x}$, selon la notation du polycopié on a $n=1$, $\mu=-1$ et $\vartheta=0$; comme $\Delta=0$, $\vartheta=0$ et $\mu=\lambda$ alors $m=2$: la solution particulière sera de la forme $y_P(x)=x^2e^{-x}(\alpha+\beta x)=(\alpha x^2+\beta x^3)e^{-x}$. Pour qu'elle soit une solution particulière on doit imposer qu'elle vérifie l'EDO complète ; comme $y_P'(x)=(2\alpha x+(3\beta-\alpha)x^2-\beta x^3)e^{-x}$ et $y_P''(x)=(2\alpha+(6\beta-4\alpha)x-(6\beta-\alpha)x^2+\beta x^3)e^{-x}$, il faut

$$(2\alpha+(6\beta-4\alpha)x-(6\beta-\alpha)x^2+\beta x^3)e^{-x}+2(2\alpha x+(3\beta-\alpha)x^2-\beta x^3)e^{-x}+(\alpha x^2+\beta x^3)e^{-x}=(1-x)e^{-x}$$

c'est-à-dire $(2\alpha)+(6\beta-4\alpha+4\alpha)x+(-6\beta+\alpha+6\beta-2\alpha+\alpha)x^2+(+\beta-2\beta+\beta)x^3=1+x$, ce qui donne $\alpha=\frac{1}{2}$ et $\beta=\frac{1}{6}$.
En conclusion les solutions de l'EDO sont les fonctions $y(x)=(C_1+C_2x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3)e^{-x}$ pour tout $C_1,C_2\in\mathbb{R}$.
On cherche parmi ces solutions celles qui vérifient $y(0)=1$; comme $y(0)=C_1$ on obtient les fonctions $y(x)=(1+C_2x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3)e^{-x}$ pour tout $C_2\in\mathbb{R}$. Parmi ces solutions, on cherche maintenant celle qui vérifie $y'(0)=2$; comme $y'(0)=1+C_2$ on conclut que l'unique solution du problème de Cauchy donné est la fonction $y(x)=(1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3)e^{-x}$.

Exercice 12.37

$$\begin{cases} y''(x)-5y'(x)+4y(x)=2xe^{4x},\\ y(0)=1,\\ y'(0)=2. \end{cases}$$

Correction
Comme l'EDO n'est pas homogène on cherche ses solutions sous la forme $y(x)=y_H(x)+y_P(x)$ où les y_H sont toutes les solutions de l'EDO homogène $y''(x)-5y'(x)+4y(x)=0$ (y_H contient deux constantes d'intégration) et y_P est une solution particulière de l'EDO complète $y''(x)-5y'(x)+4y(x)=2xe^{4x}$.
Le polynôme caractéristique associé à l'EDO est $\lambda^2-5\lambda+4=0$ qui a discriminant $\Delta=25-16=9$, les deux solutions réelles sont $\lambda_1=1$ et $\lambda_2=4$. Par conséquent, les solutions de l'EDO homogène sont les fonctions $y_H(x)=C_1e^x+C_2e^{4x}$ pour tout $C_1,C_2\in\mathbb{R}$.
Comme le terme source est $g(x)=2xe^{4x}$, selon la notation du polycopié on a $n=1$, $\mu=4$ et $\vartheta=0$; comme $\Delta>0$, $\vartheta=0$ et $\mu=\lambda_2$ alors $m=1$: la solution particulière sera de la forme $y_P(x)=xe^{4x}(\alpha x+\beta)=(\alpha x^2+\beta x)e^{4x}$. Pour qu'elle soit une solution particulière on doit imposer qu'elle vérifie l'EDO complète ; comme $y_P'(x)=(\beta+(2\alpha+4\beta)x+4\alpha x^2)e^{4x}$ et $y_P''(x)=((2\alpha+8\beta)+(16\alpha+16\beta)x+16\alpha x^2)e^{4x}$, il faut

$$((2\alpha+8\beta)+(16\alpha+16\beta)x+16\alpha x^2)e^{4x}-5(\beta+(2\alpha+4\beta)x+4\alpha x^2)e^{4x}+4(\alpha x^2+\beta x)e^{4x}=2xe^{4x}$$

c'est-à-dire $(2\alpha+8\beta-5\beta)+(16\alpha+16\beta-10\alpha-20\beta+\beta)x+(16\alpha-20\alpha+4\alpha)x^2=2x$, ce qui donne $\alpha=\frac{1}{3}$ et $\beta=-\frac{2}{9}$.
En conclusion les solutions de l'EDO sont les fonctions $y(x)=C_1e^x+\left(C_2-\frac{2}{9}x+\frac{1}{3}x^2\right)e^{4x}$ pour tout $C_1,C_2\in\mathbb{R}$. On cherche parmi ces solutions celles qui vérifient $y(0)=1$; comme $y(0)=C_1+C_2$ on obtient les fonctions $y(x)=C_1e^x+\left(1-C_1-\frac{2}{9}x+\frac{1}{3}x^2\right)e^{4x}$ pour tout $C_1\in\mathbb{R}$. Parmi ces solutions, on cherche maintenant celle qui vérifie $y'(0)=2$; comme $y'(0)=4-\frac{2}{9}-3C_1$ on conclut que l'unique solution du problème de Cauchy donné est la fonction $y(x)=\frac{16}{27}e^x+\left(\frac{11}{27}-\frac{2}{9}x+\frac{1}{3}x^2\right)e^{4x}$.

Exercice 12.38
Résoudre le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y''(x)+9y(x)=108x\cos(3x),\\ y(0)=0,\\ y'(0)=0. \end{cases}$$

Correction
Comme l'EDO n'est pas homogène on cherche ses solutions sous la forme $y(x)=y_H(x)+y_P(x)$ où les y_H sont toutes les solutions de l'EDO homogène $y''(x)+9y(x)=0$ (y_h contient deux constantes d'intégration) et y_P est une solution particulière de l'EDO complète $y''(x)+9y(x)=108x\cos(3x)$.
Le polynôme caractéristique associé à l'EDO est $\lambda^2+9=0$ qui a discriminant $\Delta=-9$, les deux racines complexes conjuguées sont

$$\lambda_1=-3i,\qquad \lambda_2=3i.$$

Par conséquent, les solutions de l'EDO homogène sont les fonctions $y_H(x)=C_1\cos(3x)+C_2\sin(3x)$ pour tout $C_1,C_2\in\mathbb{R}$.
Comme le terme source est $g(x)=108x\cos(3x)$, on a $n=1$, $\mu=0$ et $\vartheta=3$; puisque $\Delta<0$, $\vartheta=\omega=3$ et $\mu=0$ alors $m=12$: la solution particulière sera de la forme $y_P(x)=x\big((\alpha x+\beta)\cos(3x)+(\gamma x+\delta)\sin(3x)\big)=(\alpha x^2+\beta x)\cos(3x)+(\gamma x^2+\delta x)\sin(3x)$. Pour qu'elle soit une solution particulière on doit imposer qu'elle vérifie l'EDO complète ; comme $y_P'(x)=(3\gamma x^2+(2\alpha+3\delta)x+\beta)\cos(3x)+(-3\alpha x^2+(2\gamma-3\beta)x+\delta)\sin(3x)$ et $y_P''(x)=(-9\alpha x^2+(12\gamma-9\beta)x+2\alpha+6\delta)\cos(3x)+(-9\gamma x^2+(-12\alpha-9\delta)x+2\gamma-6\beta)\sin(3x)$, il faut

$$\begin{aligned}&(-9\alpha x^2+(12\gamma-9\beta)x+2\alpha+6\delta)\cos(3x)+(-9\gamma x^2+(-12\alpha-9\delta)x+2\gamma-6\beta)\sin(3x)\\ &+9\big((\alpha x^2+\beta x)\cos(3x)+(\gamma x^2+\delta x)\sin(3x)\big)\\ &=108x\cos(3x)\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$(12\gamma x+2\alpha+6\delta)\cos(3x)+(-12\alpha x+2\gamma-6\beta)\sin(3x)=108x\cos(3x)$$

ce qui donne

$$\begin{cases} 12\gamma = 108, \\ 2\alpha + 6\delta = 0, \\ -12\alpha = 0, \\ 2\gamma - 6\beta = 0 \end{cases} \implies \alpha = \delta = 0, \ \beta = 3, \ \gamma = 9.$$

En conclusion les solutions de l'EDO sont les fonctions $y(x) = (C_1 + 3x)\cos(3x) + (C_2 + 9x^2)\sin(3x)$ pour tout $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. On cherche parmi ces solutions celles qui vérifient $y(0) = 0$; comme $y(0) = C_1$ on obtient les fonctions $y(x) = 3x\cos(3x) + \left(C_2 + 9x^2\right)\sin(3x)$ pour tout $C_2 \in \mathbb{R}$. Parmi ces solutions, on cherche maintenant celle qui vérifie $y'(0) = 0$; comme $y'(0) = 3 + 3C_2$ on conclut que l'unique solution du problème de Cauchy donné est la fonction $y(x) = 3x\cos(3x) + (9x^2 - 1)\sin(3x)$.

Exercice 12.39

Trouver la solution des problèmes de CAUCHY suivants :

(1) $\begin{cases} y''(t) - 2\sqrt{2}y'(t) + 2y(t) = 0 \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = 3 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} y''(t) - 4y'(t) + 5y(t) = 0 \\ y(\pi/2) = 1 \\ y'(\pi/2) = 1 \end{cases}$ (3) $\begin{cases} y''(t) + y'(t) - 12y(t) = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 4 \end{cases}$

Correction

(1) L'équation caractéristique $\lambda^2 - 2\sqrt{2}\lambda + 2 = 0$ a discriminant $\Delta = 0$ et l'unique racine double $\lambda = \sqrt{2}$. La solution générale de l'EDO sur $\mathbb{R}$ est donc

$$y(t) = (At + B)e^{\sqrt{2}t}, \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

Déterminons la valeur des constantes A et B correspondant à l'unique solution vérifiant $y(0) = 2$ et $y'(0) = 3$. On a

$$y'(t) = [A + (At + B)\sqrt{2}]e^{\sqrt{2}t},$$

donc

$$\begin{cases} y(0) = 2, \\ y'(0) = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} B = 2, \\ A + \sqrt{2}B = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} B = 2, \\ A = 3 - 2\sqrt{2}. \end{cases}$$

L'unique solution du problème de Cauchy donné est l'application

$$\begin{aligned} y \colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto [(3 - 2\sqrt{2})t + 2]e^{\sqrt{2}t} \end{aligned}$$

(2) L'équation caractéristique $\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$ a discriminant $\Delta = -4 < 0$ et deux racines complexes conjuguées de partie réelle $\sigma = 2$ et partie imaginaire 1 et -1. La solution générale de l'EDO sur $\mathbb{R}$ est donc

$$y(t) = (A\cos(t) + B\sin(t))e^{2t}, \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

Déterminons la valeur des constantes A et B correspondant à l'unique solution vérifiant $y(\pi/2) = 1$ et $y'(\pi/2) = 1$. On a

$$y'(t) = [(2A + B)\cos(t) + (2B - A)\sin(t)]e^{2t},$$

donc

$$\begin{cases} y(\pi/2) = 1, \\ y'(\pi/2) = 1, \end{cases} \iff \begin{cases} Be^{\pi} = 1, \\ (2B - A)e^{\pi} = 1, \end{cases} \iff \begin{cases} A = e^{-\pi}, \\ B = e^{-\pi}. \end{cases}$$

L'unique solution du problème de Cauchy donné est l'application

$$\begin{aligned} y \colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto (\cos(t) + \sin(t))e^{2t-\pi} \end{aligned}$$

(3) L'équation caractéristique $\lambda^2 + \lambda - 12 = 0$ a discriminant $\Delta = 49 > 0$ et admet deux racines réelles distinctes, $\lambda = -4$ et $\lambda = 3$. La solution générale de l'EDO sur $\mathbb{R}$ est donc

$$y(t) = Ae^{-4t} + Be^{3t}, \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

Déterminons la valeur des constantes A et B correspondant à l'unique solution vérifiant $y(0)=1$ et $y'(0)=4$. On a

$$y'(t) = -4Ae^{-4t} + 3Be^{3t},$$

donc

$$\begin{cases} y(0)=1, \\ y'(0)=4, \end{cases} \iff \begin{cases} A+B=1, \\ -4A+3B=4, \end{cases} \iff \begin{cases} A=-1/7, \\ B=8/7. \end{cases}$$

L'unique solution du problème de Cauchy donné est l'application

$$\begin{aligned} y\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto \frac{1}{7}(-e^{-4t}+8e^{3t}) \end{aligned}$$

Exercice 12.40

Calculer la solution générale des EDO d'ordre 2 linéaires à coefficients constants suivantes :

(1) $y''(t)+3y'(t)+2y(t)=(t^2+1)e^{-t}$,

(2) $y''(t)-2y'(t)-3y(t)=4e^{3t}$.

(3) $y''(t)+y(t)=\sin(t)$,

(4) $y''(t)+y(t)=\sin(3t)$,

(5) En déduire la solution générale de l'EDO
$y''(t)+y(t)=\sin^3(t)$.

Correction

(1) Considérons l'EDO $y''(t)+3y'(t)+2y(t)=(t^2+1)e^{-t}$.

1.1. *Calcul de la solution générale y_H de l'équation homogène $y''(t)+3y'(t)+2y(t)=0$.*
Elle admet pour équation caractéristique $\lambda^2+3\lambda+2=0$ qui a discriminant $\Delta=1>0$ et admet deux racines réelles distinctes, $\lambda_1=-2$ et $\lambda_2=-1$. La solution générale de l'EDO homogène sur $\mathbb{R}$ est donc

$$y_H(t) = Ae^{-2t}+Be^{-t}, \qquad A,B\in\mathbb{R}.$$

1.2. *Calcul d'une solution particulière y_P de l'équation $y''(t)+3y'(t)+2y(t)=(t^2+1)e^{-t}$.*
Puisque $g(t)=(t^2+1)e^{-t}$, *i.e.* $n=2$, $\mu=-1=\lambda_2$ et $\theta=0$, on cherchera y_P sous la forme $y_P(t)=te^{-t}(a+bt+ct^2)=(at+bt^2+ct^3)e^{-t}$. On a alors

$$\begin{aligned} y_P(t) &= (at+bt^2+ct^3)e^{-t}, \\ y_P'(t) &= (a+(2b-a)t+(3c-b)t^2-ct^3)e^{-t}, \\ y_P''(t) &= ((2b-2a)+(6c-4b+a)t+(-6c+b)t^2+ct^3)e^{-t}, \end{aligned}$$

d'où

$$y_P''(t)+3y_P'(t)+2y_P(t) = \Big(\big(a+2b\big)+\big(2b+6c\big)t+\big(3c\big)t^2+\Big)e^{-t} = (t^2+1)e^{-t}$$

Par identification (deux polynômes sont égaux s'ils ont mêmes coefficients) il vient

$$\begin{cases} a+2b=1 \\ 2b+6c=0 \\ 3c=1 \end{cases} \iff \begin{cases} a=3 \\ b=-1 \\ c=1/3 \end{cases}$$

On en déduit qu'une solution particulière est donc

$$\begin{aligned} y_P\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto (3t-t^2+t^3/3)e^{-t}. \end{aligned}$$

1.3. *Solution générale de l'équation $y''(t)+3y'(t)+2y(t)=(t^2+1)e^{-t}$.*
La solution générale de l'EDO est donc

$$\begin{aligned} y\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto Ae^{-2t}+Be^{-t}+(3t-t^2+t^3/3)e^{-t}, \qquad A,B\in\mathbb{R}. \end{aligned}$$

(2) Considérons l'EDO $y''(t)-2y'(t)-3y(t)=4e^{3t}$.

2.1. *Calcul de la solution générale y_H de l'équation homogène $y''(t)-2y'(t)-3y(t)=0$.*
Elle admet pour équation caractéristique $\lambda^2-2\lambda-3=0$ qui a discriminant $\Delta=16>0$ et admet deux racines réelles distinctes, $\lambda_1=-1$ et $\lambda_2=3$. La solution générale de l'EDO homogène sur $\mathbb{R}$ est donc

$$y_H(t)=Ae^{-t}+Be^{3t}, \qquad A,B\in\mathbb{R}.$$

2.2. *Calcul d'une solution particulière y_P de l'équation $y''(t)-2y'(t)-3y(t)=4e^{3t}$.*
Puisque $g(t)=4e^{3t}$, *i.e.* $n=0$, $\mu=3=\lambda_2$ et $\theta=0$, on cherchera y_P sous la forme $y_P(t)=Ate^{3t}$. On a alors

$$\begin{aligned} y_P(t)&=Ate^{3t},\\ y_P'(t)&=A(1+3t)e^{3t},\\ y_P''(t)&=A(6+9t)e^{3t},\end{aligned}$$

d'où

$$y_P''(t)-2y_P'(t)-3y_P(t)=4Ae^{3t}=4e^{3t}$$

Par identification (deux polynômes sont égaux s'ils ont mêmes coefficients) il vient $A=1$. On en déduit qu'une solution particulière est donc

$$\begin{aligned} y_P\colon \mathbb{R}&\to\mathbb{R}\\ t&\mapsto te^{3t}.\end{aligned}$$

2.3. *Solution générale de l'équation $y''(t)-2y'(t)-3y(t)=4e^{3t}$.*
La solution générale de l'EDO est donc

$$\begin{aligned} y\colon \mathbb{R}&\to\mathbb{R}\\ t&\mapsto Ae^{-t}+(B+t)e^{3t}, \qquad A,B\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

(3) Considérons l'EDO $y''(t)+y(t)=\sin(t)$.

3.1. *Calcul de la solution générale y_H de l'équation homogène $y''(t)+y(t)=0$.*
Elle admet pour équation caractéristique $\lambda^2+1=0$ qui a discriminant $\Delta<0$ et admet deux racines complexes conjuguées, $\lambda_1=-i$ et $\lambda_2=i$. La solution générale de l'EDO homogène sur $\mathbb{R}$ est donc

$$y_H(t)=(A\cos(t)+B\sin(t)), \qquad A,B\in\mathbb{R}.$$

3.2. *Calcul d'une solution particulière y_P de l'équation $y''(t)+y(t)=\sin(t)$.*
Puisque $g(t)=\sin(t)$, *i.e.* $n=0$, $\mu=0$ et $\theta=1=\omega$ avec $\Delta<0$, on cherchera y_P sous la forme $y_P(t)=t(C\cos(t)+D\sin(t))$. On a alors

$$\begin{aligned} y_P(t)&=t(C\cos(t)+D\sin(t)),\\ y_P'(t)&=t(-C\sin(t)+D\cos(t))+C\cos(t)+D\sin(t),\\ y_P''(t)&=t(-C\sin(t)-D\cos(t))-2C\sin(t)+2D\cos(t),\end{aligned}$$

d'où

$$y_P''(t)+y_P(t)=2(D\cos(t)-C\sin(t))=\sin(t).$$

Par identification (deux polynômes sont égaux s'ils ont mêmes coefficients) il vient $C=-1/2$ et $D=0$. On en déduit qu'une solution particulière est donc

$$\begin{aligned} y_P\colon \mathbb{R}&\to\mathbb{R}\\ t&\mapsto -t\cos(t)/2.\end{aligned}$$

3.3. *Solution générale de l'équation $y''(t)+y(t)=\sin(t)$.*

La solution générale de l'EDO est donc

$$\begin{aligned} y\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto (A\cos(t) + B\sin(t)) - t\cos(t)/2, \qquad A, B \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(4) Considérons l'EDO $y''(t) + y(t) = \sin(3t)$.

4.1. *Calcul d'une solution particulière y_P de l'équation $y''(t) + y(t) = \sin(3t)$.*
Puisque $g(t) = \sin(3t)$, *i.e.* $n = 0$, $\mu = 0$ et $\theta = 3 \neq \omega$ avec $\Delta < 0$, on cherchera y_P sous la forme $y_P(t) = C\cos(3t) + D\sin(3t)$. On a alors

$$\begin{aligned} y_P(t) &= C\cos(3t) + D\sin(3t), \\ y_P'(t) &= -3C\sin(3t) + 3D\cos(3t), \\ y_P''(t) &= -9C\cos(3t) - 9D\sin(3t), \end{aligned}$$

d'où

$$y_P''(t) + y_P(t) = -8(C\cos(3t) + D\sin(3t)) = \sin(3t).$$

Par identification (deux polynômes sont égaux s'ils ont mêmes coefficients) il vient $C = 0$ et $D = -1/8$. On en déduit qu'une solution particulière est donc

$$\begin{aligned} y_P\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto -\sin(3t)/8. \end{aligned}$$

4.2. *Solution générale de l'équation $y''(t) + y(t) = \sin(3t)$.*
La solution générale de l'EDO est donc

$$\begin{aligned} y\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto (A\cos(3t) + B\sin(3t)) - \sin(3t)/8, \qquad A, B \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(5) Considérons l'EDO $y''(t) + y(t) = \sin^3(t)$.

5.1. *Calcul d'une solution particulière y_P de l'équation $y''(t) + y(t) = \sin^3(t)$.*
Puisque $g(t) = \sin^3(t) = -\sin(3t)/4 + 3\sin(t)/4$, d'après le principe de superposition on en déduit qu'une solution particulière est donc

$$\begin{aligned} y_P\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto -(-\sin(3t)/8)/4 + 3(-t\cos(t)/2)/4 = \sin(3t)/32 - t\cos(t)/8. \end{aligned}$$

5.2. *Solution générale de l'équation $y''(t) + y(t) = \sin^3(t)$.*
La solution générale de l'EDO est donc

$$\begin{aligned} y\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto (A\cos(3t) + B\sin(3t)) + \sin(3t)/32 - t\cos(t)/8, \qquad A, B \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Exercice 12.41

On se propose de déterminer l'évolution au cours du temps de la charge q dans un circuit RLC soumis à une tension sinusoïdale. La charge est solution de l'équation différentielle

$$Lq''(t) + Rq'(t) + \frac{1}{C}q(t) = \omega v \sin(\omega t) \tag{12.3}$$

où v est une constante réelle, L et ω sont des constantes réelles positives et où R et C sont des constantes strictement positives.

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et $\beta \in \mathbb{R}$. Déterminer une primitive de la fonction

$$\begin{aligned} F\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto e^{\alpha t}\cos(\beta t) \end{aligned}$$

2. On suppose que $L = 0$. Calculer la solution de l'EDO (12.3) vérifiant $q(0) = 0$.
3. On suppose $L > 0$ et $R^2 - 4L/C > 0$. Déterminer la solution générale de l'EDO (12.3).

Correction

1. Soit f et g deux fonctions dérivables. Alors
$$\int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$
On pose $I(t) = \int e^{\alpha t}\cos(\beta t)\,\mathrm{d}t$. En intégrant par parties ($f(t) = \cos(\beta t)$ et $g'(x) = e^{\alpha t}$) on trouve
$$I(t) = \int e^{\alpha t}\cos(\beta t)\,\mathrm{d}t = \frac{e^{\alpha t}}{\alpha}\cos(\beta t) + \frac{\beta}{\alpha}\int e^{\alpha t}\sin(\beta t)\,\mathrm{d}t.$$
De la même manière, on pose $J(t) = \int e^{\alpha t}\sin(\beta t)\,\mathrm{d}t$. En intégrant par parties ($f(t) = \sin(\beta t)$ et $g'(x) = e^{\alpha t}$) on trouve
$$J(t) = \int e^{\alpha t}\sin(\beta t)\,\mathrm{d}t = \frac{e^{\alpha t}}{\alpha}\sin(\beta t) - \frac{\beta}{\alpha}\int e^{\alpha t}\cos(\beta t)\,\mathrm{d}t = \frac{e^{\alpha t}}{\alpha}\sin(\beta t) - \frac{\beta}{\alpha}I(t).$$
On en déduit
$$I(t) = \frac{e^{\alpha t}}{\alpha}\cos(\beta t) + \frac{\beta}{\alpha}J(t) = \frac{e^{\alpha t}}{\alpha}\cos(\beta t) + \frac{\beta}{\alpha}\frac{e^{\alpha t}}{\alpha}\sin(\beta t) - \frac{\beta^2}{\alpha^2}I(t)$$
d'où
$$I(t) = \int e^{\alpha t}\cos(\beta t)\,\mathrm{d}t = \frac{\alpha\cos(\beta t) + \beta\sin(\beta t)}{\alpha^2 + \beta^2}e^{\alpha t}$$
et
$$J(t) = \int e^{\alpha t}\sin(\beta t)\,\mathrm{d}t = \frac{e^{\alpha t}}{\alpha}\sin(\beta t) - \frac{\beta}{\alpha}I(t) = \frac{\alpha\sin(\beta t) - \beta\cos(\beta t)}{\alpha^2 + \beta^2}e^{\alpha t}$$

2. Dans le cas $L = 0$ l'EDO (12.3) devient
$$Rq'(t) + \frac{1}{C}q(t) = \omega\nu\sin(\omega t).$$
   - ⋆ *Calcul de la solution générale de l'équation homogène $Rq'(t) + \frac{1}{C}q(t) = 0$.*
   L'application $t \mapsto 1/(RC)$ est continue et différente de zéro sur $\mathbb{R}$. Formellement on peut donc écrire $\frac{q'_H(t)}{q_H(t)} = -\frac{1}{RC}$, ce qui conduit à la solution générale sur $\mathbb{R}$ de l'équation homogène
$$\begin{aligned} q_H\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto \kappa e^{-t/(RC)} \qquad \text{avec } \kappa \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$
   - ⋆ *Calcul d'une solution particulière de l'équation $Rq'(t) + \frac{1}{C}q(t) = \omega\nu\sin(\omega t)$.*
   Considérons une nouvelle fonction inconnue $K(t)$ telle que $q_P(t) = K(t)e^{-t/(RC)}$ soit solution de $Rq'_P(t) + \frac{1}{C}q_P(t) = \omega\nu\sin(\omega t)$. On calcule $q'_P(t) = K'(t)e^{-t/(RC)} - K(t)e^{-t/(RC)}/(RC)$ et on le reporte dans l'EDO ; on obtient (en utilisant le résultat à la question 1)
$$K'(t) = \frac{\omega\nu}{R}\left(e^{t/(RC)}\sin(\omega t)\right) \quad \overset{\substack{\alpha=1/(RC)\\ \beta=\omega}}{\Longrightarrow} \quad K(t) = \frac{\omega\nu}{R}\left(\frac{\frac{\cos(\omega t)}{RC} + \omega\sin(\omega t)}{\frac{1}{(RC)^2} + \omega^2}e^{t/(RC)}\right)$$
   et donc la fonction
$$\begin{aligned} q_P\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto (\omega\nu C)\left(\frac{\sin(\omega t) - \omega RC\cos(\omega t)}{1 + (\omega RC)^2}e^{t/(RC)}\right) \end{aligned}$$
   est une solution particulière sur $\mathbb{R}$.
   - ⋆ *Calcul de la solution générale de l'équation $Rq'(t) + \frac{1}{C}q(t) = \omega\nu\sin(\omega t)$.*
   On en déduit que la solution générale de l'EDO sur $\mathbb{R}$ est l'application
$$\begin{aligned} q\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto q_H(t) + q_P(t) = \kappa e^{-t/(RC)} + \frac{\omega\nu C}{1 + (\omega RC)^2}\left(\sin(\omega t) - \omega RC\cos(\omega t)\right)e^{t/(RC)} \end{aligned}$$

- ⋆ *Calcul de la solution vérifiant $q(0) = 0$.*

  L'unique solution vérifiant $q(0) = 0$ est obtenue pour $\kappa = \dfrac{\omega^2 \nu RC^2}{1 + (\omega RC)^2}$.

3. Si $L > 0$, l'EDO (12.3) est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants.
   - ⋆ *Calcul de la solution générale q_H de l'équation homogène $Lq''(t) + Rq'(t) + \frac{1}{C}q(t) = 0$.*
     Elle admet pour équation caractéristique $L\lambda^2 + R\lambda + \frac{1}{C} = 0$ qui a discriminant $\Delta = R^2 - 4L/C$. Sous l'hypothèse $R^2 - 4L/C > 0$ elle admet deux racines réelles distinctes, $\lambda_1 = \frac{R^2-\sqrt{\Delta}}{2L}$ et $\lambda_2 = \frac{R^2+\sqrt{\Delta}}{2L}$. La solution générale de l'EDO homogène sur $\mathbb{R}$ est donc
     $$q_H(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}, \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$
   - ⋆ *Calcul d'une solution particulière q_P de l'équation $Lq''(t) + Rq'(t) + \frac{1}{C}q(t) = \omega\nu\sin(\omega t)$.*
     Puisque $g(t) = \omega\nu\sin(\omega t)$, *i.e.* $n = 0$, $\mu = 0$ et $\theta = \omega$, on cherchera q_P sous la forme $q_P(t) = \alpha\cos(\omega t) + \beta\sin(\omega t)$. On a alors
     $$\begin{aligned} q_P(t) &= \alpha\cos(\omega t) + \beta\sin(\omega t), \\ q_P'(t) &= \omega\big(-\alpha\sin(\omega t) + \beta\cos(\omega t)\big), \\ q_P''(t) &= \omega^2\big(-\alpha\cos(\omega t) - \beta\sin(\omega t)\big), \end{aligned}$$
     d'où
     $$Lq_P''(t) + Rq_P'(t) + \frac{1}{C}q_P(t) = \left(-L\omega^2\alpha + R\omega\beta + \frac{\alpha}{C}\right)\cos(\omega t) + \left(-L\omega^2\beta - R\omega\alpha + \frac{\beta}{C}\right)\sin(\omega t) = \omega\nu\sin(\omega t)$$
     Les réels α et β doivent donc être solution de
     $$\begin{cases} -L\omega^2\alpha + R\omega\beta + \frac{\alpha}{C} = 0 \\ -L\omega^2\beta - R\omega\alpha + \frac{\beta}{C} = \omega\nu \end{cases} \iff \begin{cases} \left(\frac{1}{C} - L\omega^2\right)\alpha = -R\omega\beta \\ \left(\frac{1}{C} - L\omega^2\right)\beta = \omega\nu - R\omega\alpha \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = -\frac{\omega^2\nu R}{\left(\frac{1}{C}-L\omega^2\right)^2+(R\omega)^2} \\ \beta = \frac{\omega\nu\left(\frac{1}{C}-L\omega^2\right)}{\left(\frac{1}{C}-L\omega^2\right)^2+(R\omega)^2} \end{cases}$$
     On en déduit qu'une solution particulière est donc
     $$\begin{aligned} q_P\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto -\frac{\omega^2\nu R}{\left(\frac{1}{C} - L\omega^2\right)^2 + (R\omega)^2}\cos(\omega t) + \frac{\omega\nu\left(\frac{1}{C} - L\omega^2\right)}{\left(\frac{1}{C} - L\omega^2\right)^2 + (R\omega)^2}\sin(\omega t). \end{aligned}$$
   - ⋆ *Solution générale de l'équation $Lq''(t) + Rq'(t) + \frac{1}{C}q(t) = \omega\nu\sin(\omega t)$.*
     La solution générale de l'EDO est donc
     $$\begin{aligned} q\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto Ae^{\frac{R^2-\sqrt{R^2-4L/C}}{2L}t} + Be^{\frac{R^2+\sqrt{R^2-4L/C}}{2L}t} - \frac{\omega^2\nu R}{\left(\frac{1}{C} - L\omega^2\right)^2 + (R\omega)^2}\cos(\omega t) + \frac{\omega\nu\left(\frac{1}{C} - L\omega^2\right)}{\left(\frac{1}{C} - L\omega^2\right)^2 + (R\omega)^2}\sin(\omega t), \qquad A, B \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Annales 2013-2016

L1 Sciences et Techniques – Semestre 1

Mathématiques M11

Examen du jeudi 10 janvier 2013

Calculatrices et tous documents interdits.
Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1 (Logique *(3 points)*)**.** On effectue une expérience chimique pour laquelle on peut seulement faire varier la température ou ajouter un catalyseur. On connait le principe suivant :

> Si on augmente la température de 10 degrés et si on n'ajoute pas de catalyseur alors la réaction va deux fois plus vite que normalement.

(1) Écrire la contraposée du principe ci-dessus, c'est-à-dire compléter la phrase “Si la réaction ne va pas deux fois plus vite que normalement alors...”.

(2) On observe que la température a augmenté de 10 degrés et que la réaction va 3 fois plus vite que normalement, que peut-on en déduire ? *Justifier en moins de* 5 *lignes*

(3) On observe que la réaction va 2 fois plus vite que normalement, peut-on en déduire quelque chose sur la variation de température ? *Justifier en moins de* 5 *lignes*

Exercice 2 (Tracés de courbes *(3 points)*)**.** On considère la fonction gaussienne

$$f: x \mapsto f(x) = e^{-x^2}.$$

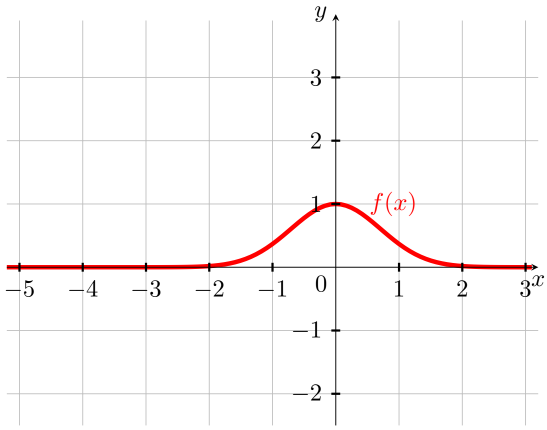
Tracer à main levée, dans le repère ci-contre, les courbes représentatives des fonctions :

(1) $x \mapsto -f(x)$,

(2) $x \mapsto f(x) + 2$,

(3) $x \mapsto f(x+3)$,

(4) $x \mapsto f(2x) - 2$.



Exercice 3 (Étude d'une fonction *(8 points)*)**.** Soit f la fonction d'une variable réelle définie par

$$f(x) = \frac{e^x}{1+x}$$

(1) Donner le domaine de définition de la fonction f et calculer les limites en ses extrémités.

(2) Calculer la dérivée f' de f. Vérifier que la dérivée seconde est $f''(x) = \dfrac{e^x(1+x^2)}{(1+x)^3}$.

(3) La fonction f a-t-elle un point d'inflexion sur son domaine de définition ? Déterminer les intervalles où f est convexe et ceux où f est concave.

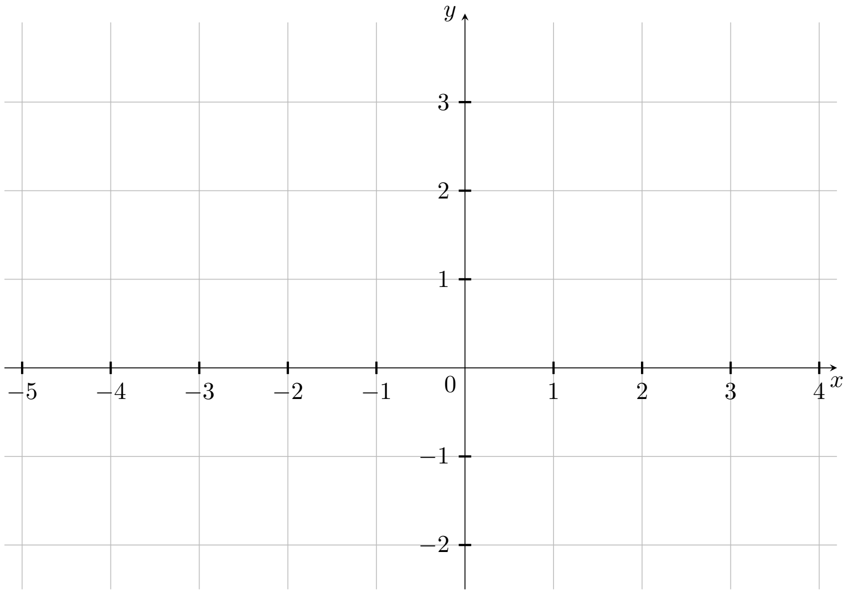
(4) Étudier le signe de la dérivée f', et donner le tableau de variations de f. Indiquer si f atteint un minimum ou un maximum local sur son domaine de définition.

(5) La courbe représentative de f admet-elle une droite asymptote en $-\infty$? Si oui, écrire son équation.

(6) La courbe représentative de f admet-elle une droite asymptote en $+\infty$? *Justifier la réponse.*

(7) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe en $x = 1$. En déduire pour quelle valeur elle croise l'axe des abscisses. Même question avec la tangente en $x = 2$.

(8) Tracer la courbe représentative de f ainsi que ses tangentes en $x = 1$ et $x = 2$.



Exercice 4 (Équation différentielle ordinaire *(3 points)*)**.**

(1) Quelles sont les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'(x) = -3y(x)$?

(2) Calculer une primitive de la fonction $x \mapsto xe^{2x}$.

(3) Quelles sont les solutions de l'équation différentielle $y'(x) = -3y(x) + xe^{-x}$?

<u>*On traitera au choix l'un des deux exercices suivants*</u>

Exercice 5 (Au choix 1 : Nombres complexes *(3 points)*)**.** Racines carrées et forme trigonométrique d'un nombre complexe :

(1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation
$$z^2 = -2 + 2\sqrt{3}\,\mathrm{i}.$$

(2) Donner le module de z et l'argument principal de z.

(3) Écrire chacune de ces deux solutions sous forme trigonométrique.

Exercice 6 (Au choix 2 : Étude de suite (3 points))**.** Soit a et b deux nombres réels, on considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par
$$\begin{cases} u_0 = a, \\ u_{n+1} = 3u_n + b \quad \text{pour tout } n \geq 0. \end{cases}$$

(1) Rappeler la définition d'une suite géométrique.

(2) Pour tout $n \geq 0$ on pose $v_n = u_n + \frac{b}{2}$. Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n et en déduire que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison q, dont on précisera la valeur.

(3) En déduire l'expression $u_n = (a + \frac{b}{2})q^n - \frac{b}{2}$ pour tout n.

(4) Quelles valeurs faut-il prendre pour a et b afin que $u_1 = 0$ et $u_2 = 1$?

L1 Sciences et Techniques – Semestre 1

Mathématiques M11

Examen du mardi 11 juin 2013

Calculatrices et tous documents interdits.
Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1 (Logique *(2 points)*)**.** On considère la proposition :

Si tous les insectes ont six pattes alors les araignées ne sont pas des insectes.

(1) Écrire la contraposée de la proposition ci-dessus.

(2) Écrire la négation de la proposition ci-dessus.

Exercice 2 (Tracés de courbes *(3 points)*)**.** On considère la fonction gaussienne suivante :

$$f\colon x \mapsto f(x) = e^x.$$

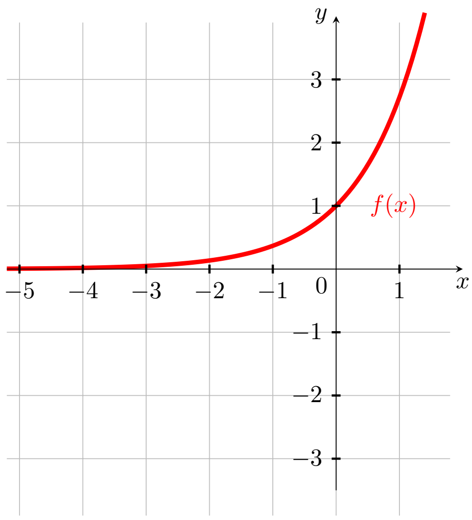
Tracer à main levée, dans le repère ci-contre, les courbes représentatives des fonctions :

(1) $x \mapsto -f(x)$,

(2) $x \mapsto f(x) - 1$,

(3) $x \mapsto f(x-2) - 3$,

(4) $x \mapsto f\left(\frac{x}{2}\right) + 1$.



Exercice 3 (Étude d'une fonction *(8 points)*)**.** Soit f la fonction d'une variable réelle définie par

$$f(x) = \frac{2}{1+e^x}$$

(1) Donner le domaine de définition de la fonction f et calculer les limites en ses extrémités.

(2) Calculer la dérivée f' de f. Vérifier que la dérivée seconde est $f''(x) = \dfrac{2e^x(1-e^x)}{(1+e^x)^3}$.

(3) La fonction f a-t-elle un point d'inflexion sur son domaine de définition ? Déterminer les intervalles où f est convexe et ceux où f est concave.

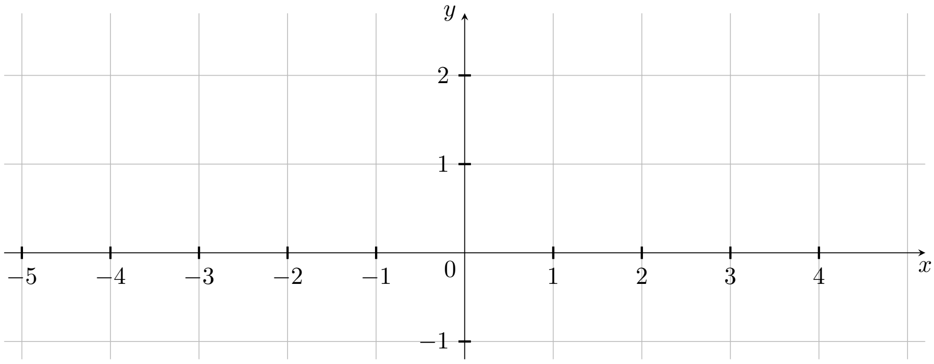
(4) Étudier le signe de la dérivée f', et donner le tableau de variations de f. Indiquer si f atteint un minimum ou un maximum local sur son domaine de définition.

(5) La courbe représentative de f admet-elle une droite asymptote en $-\infty$? Si oui, écrire son équation.

(6) La courbe représentative de f admet-elle une droite asymptote en $+\infty$? *Justifier la réponse.*

(7) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe en $x = 0$. En déduire pour quelle valeur elle croise l'axe des abscisses.

(8) Tracer la courbe représentative de f ainsi que sa tangente en $x = 0$.



Exercice 4 (Équation différentielle ordinaire *(3 points)*)**.**

(1) Quelles sont les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'(x) = 2y(x)$?

(2) Calculer une primitive de la fonction $x \mapsto xe^{-x}$.

(3) Quelles sont les solutions de l'équation différentielle $y'(x) = 2y(x) + xe^{x}$?

<u>On traitera au choix l'un des deux exercices suivants</u>

Exercice 5 (Au choix 1 : Nombres complexes *(4 points)*)**.** Racines carrées et forme trigonométrique d'un nombre complexe :

(1) Résoudre dans C l'équation
$$z^2 = 1 + i$$

(2) Donner le module de z^2 et l'argument principal (dans $[0, 2\pi)$) de z^2.

(3) Ecrire chacune de des deux solutions de l'équation sous la forme trigonométrique.

(4) Déduire de (1) et (2) la valeur de $\cos(\pi/8)$.

Exercice 6 (Au choix 2 : Étude de suite *(4 points)*)**.** Soit a et b deux nombres réels, on considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par
$$\begin{cases} u_0 = a, \\ u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n + b \quad \text{pour tout } n \geq 0. \end{cases}$$

(1) Rappeler la définition d'une suite arithmétique.

(2) Pour tout $n \geq 0$ on pose $v_n = u_n - \frac{2b}{3}$. Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n et en déduire que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géometrique de raison q, dont on précisera la valeur.

(3) En déduire l'expression $u_n = (a - \frac{2b}{3})q^n + \frac{2b}{3}$ pour tout n.

(4) Quelles valeurs faut-il prendre pour a et b afin d'avoir à a la fois $u_1 = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$?

L1 Sciences et Techniques – Semestre 1

Mathématiques M11

Examen du jeudi 9 janvier 2014

Documents manuscrits et distribués en cours autorisés.
Calculatrices et tous appareils électroniques interdits

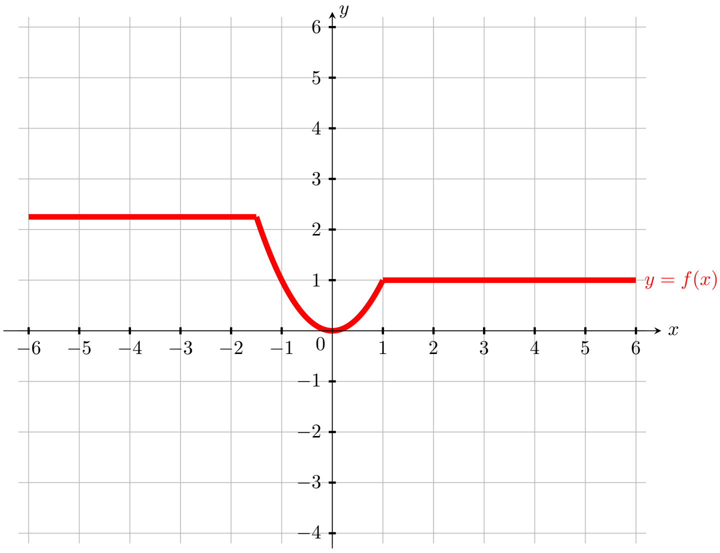
Exercice 1 (Logique)**.** On peut déduire de la loi des gaz parfaits le principe suivant :

Si le volume du gaz est constant, alors la température du gaz est une fonction croissante de la pression.

(1) Ecrire la négation du principe ci-dessus.
(2) Ecrire la contraposée du principe ci-dessus.
(3) On étudie un gaz qui a la propriété suivante : quand son volume est constant et sa température augmente, sa pression diminue. Peut-on dire si c'est un gaz parfait ou non?

Exercice 2 (Transformations sur le graphe)**.** On considère la fonction dont le graphe est donné ci-dessous. Tracer à main levée, sur cette feuille, les courbes représentatives des fonctions:

(1) $x \mapsto 6 - f(x)$,
(2) $x \mapsto f(x-1)+1$,
(3) $x \mapsto \frac{1}{2}f(x)-1$,
(4) $x \mapsto f(-2x)-4$.



Exercice 3 (Suite)**.** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite dont le premier terme est $u_0 = 1$ et vérifiant

$$u_{n+1} = 2u_n - \frac{1}{2}u_n^2$$

pour tout n dans $\mathbb{N}$.

(1) En utilisant le fait que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 2 \leq 0$$

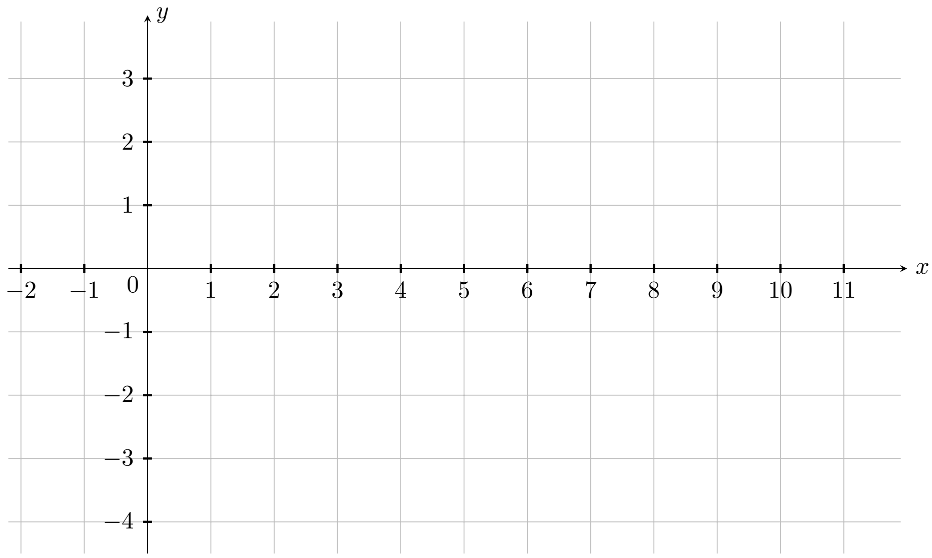
montrer par récurrence que $u_n \in [0,2]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(2) En supposant que la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existe, quelles valeurs peut-elle prendre ?
(3) En étudiant $u_{n+1} - u_n$, montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et calculer sa limite.

Exercice 4 (Étude d'une fonction)**.** Soit f la fonction d'une variable réelle définie par

$$f(x) = \frac{2(\ln(x+1)+1)}{x+1}$$

(1) Donner le domaine de définition de la fonction f et calculer les limites en ses extrémités.
(2) Calculer la dérivée f' de f.
Étudier le signe de la dérivée f', et donner le tableau de variations de f. Indiquer si f atteint un minimum ou un maximum local sur son domaine de définition.
(3) Calculer la dérivée seconde f'' de f.
La fonction f a-t-elle un point d'inflexion sur son domaine de définition? Déterminer les intervalles sur lesquels f est convexe et ceux où f est concave.
(4) La courbe représentative de f admet-elle une droite asymptote en $+\infty$? Si oui, écrire son équation.
(5) Déterminer l'équation de la tangente au graphe de f au point d'abscisse $e^{1/2}-1$. On prendra comme approximation $e^{1/2} \simeq 1,7$, ainsi que $e \simeq 3$ et $f(e^{1/2}-1) \simeq 1,8$.
(6) Tracer la courbe représentative de f.



Exercice 5 (Équation différentielle ordinaire)**.**

(1) Quelles sont les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'(x) = -2xy(x)$?
(2) Calculer une primitive de la fonction $x \mapsto xe^{x^2}$.
(3) Quelles sont les solutions de l'équation différentielle $y'(x) = -2xy(x) + x$?

Exercice 6 (Bonus: nombres complexes)**.**

(1) Trouver toutes les racines complexes de l'équation
$$z^2 - (1+2i)z + i - 1 = 0.$$
(2) Calculer l'argument principal ($\in [0, 2\pi[$) et module de chacune de ces racines.
(3) Trouver la forme trigonométrique de chacune de ces racines.

L1 Sciences et Techniques – Semestre 1

Mathématiques M11

Examen du 19 juin 2014

Justifiez vos réponses : la qualité de la rédaction est prise en compte.
Documents manuscrits et distribués en cours autorisés.
Calculatrices et tous appareils électroniques interdits

Exercice 1 (Logique)**.** On considère les propositions suivantes :

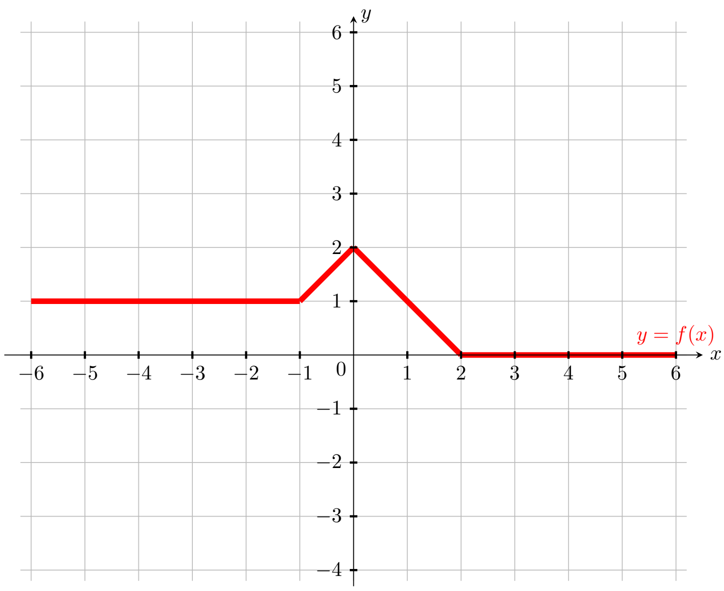
i. les éléphants portent toujours des pantalons courts;
ii. si un animal mange du miel alors il peut jouer de la cornemuse;
iii. si un animal est facile à avaler alors il mange du miel;
iv. si un animal porte des pantalons courts alors il ne peut pas jouer de la cornemuse.

On suppose que ces propositions sont vraies.

(1) Ecrire la contraposée de la proposition iii.
(2) Ecrire la négation de la proposition iv.
(3) Quelqu'un prétend déduire de ces propositions que les éléphants sont faciles à avaler. Cette déduction est-elle correcte ? *Justifier*

Exercice 2 (Tracés de courbes)**.** On considère la fonction dont le graphe est donné ci-dessous. Tracer à main levée, sur cette feuille, les courbes représentatives des fonctions:

(1) $x \mapsto 6 - f(x)$,
(2) $x \mapsto f(x+1) + 2$,
(3) $x \mapsto \frac{1}{2} f(x) - 2$,
(4) $x \mapsto f(-2x) - 4$.



Exercice 3 (Suite)**.** On considère une suite géométrique décroissante $(u_n)_{n\geq 0}$ dont on sait que les deux termes u_0 et u_3 sont les solutions de l'équation :

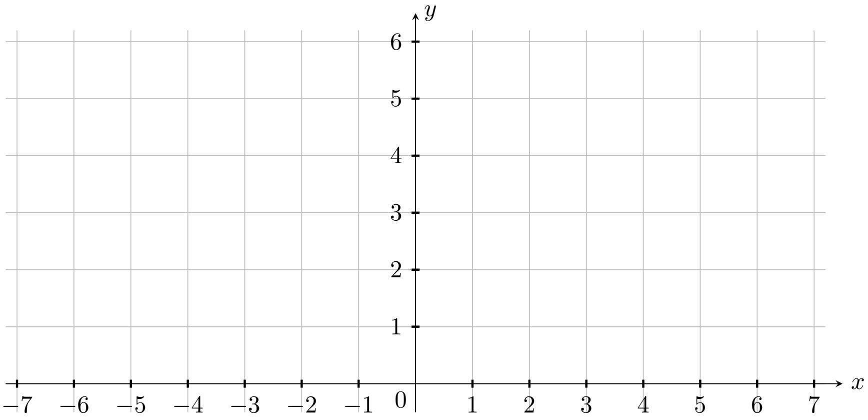
$$x^2 - 9x + 8 = 0$$

(1) Calculer les deux réels u_0 et u_3.
(2) Quelle est la raison de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$?
(3) Pour $n \geq 0$ calculer $z_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$. En déduire la valeur de $\lim_{n\to\infty} z_n$.

Exercice 4 (Étude d'une fonction)**.** Soit f la fonction d'une variable réelle définie par

$$f(x) = \ln(2x^2 + 2)$$

(1) Donner le domaine de définition de la fonction f et calculer les limites en ses extrémités.
(2) Calculer la dérivée f' de f.
Étudier le signe de la dérivée f', et donner le tableau de variations de f. Indiquer si f atteint un minimum ou un maximum local sur son domaine de définition.
(3) Calculer la dérivée seconde f'' de f.
La fonction f a-t-elle un point d'inflexion sur son domaine de définition? Déterminer les intervalles sur lesquels f est convexe et ceux où f est concave.
(4) La courbe représentative de f admet-elle une droite asymptote ou une direction asymptotique en $+\infty$?
(5) Déterminer l'équation de la tangente au graphe de f au point d'abscisse 1. On prendra comme approximation $\ln(2) \simeq 0,7$.
(6) Tracer la courbe représentative de f.



Exercice 5 (Équation différentielle ordinaire)**.**

(1) Quelles sont les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'(x) = 2(x-1)y(x)$?
(2) On pose $z(x) = K(x)e^{(x-1)^2}$. Montrer que

$$z'(x) = 2(x-1)z(x) + x - 1 \quad \text{si et seulement si} \quad K'(x) = (x-1)e^{-(x-1)^2}.$$

(3) Calculer une primitive de la fonction $x \mapsto (x-1)e^{-(x-1)^2}$.
(4) Quelles sont les solutions de l'équation différentielle $y'(x) = 2(x-1)y(x) + x - 1$?

Exercice 6 (Bonus: nombres complexes)**.**

(1) Trouver toutes les racines complexes de l'équation

$$2z^2 - z + \frac{1}{2} = 0.$$

(2) Calculer l'argument principal (dans $[0, 2\pi[$) et le module de chacune de ces racines.
(3) Trouver la forme trigonométrique de chacune de ces racines.

L1 Sciences et Techniques – Semestre 1

Mathématiques M11

Examen du jeudi 8 janvier 2015

Tous documents, calculatrices et appareils électroniques interdits.
La qualité et la clarté de la rédaction seront prises en compte.

Exercice 1 (Logique)**.** En mathématiques, le principe des tiroirs peut être énoncé ainsi :

Si le nombre de tiroirs de rangement est strictement inférieur au nombre de chaussettes et si on range toutes les chaussettes dans les tiroirs, alors il existe un tiroir qui contient au moins deux chaussettes.

(1) Soit P, Q et R trois propositions logiques. Écrire la négation de la proposition

$$(\,P \text{ et } Q\,) \Rightarrow R$$

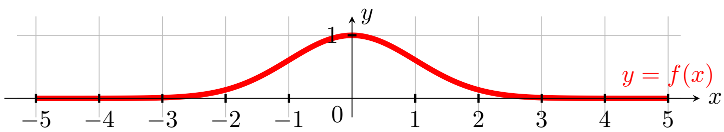
(2) Écrire la négation de la proposition :

$$\exists n \in \mathbb{N}, \qquad n \geq 2$$

(3) Écrire la négation du principe des tiroirs.
(4) Écrire la contraposée du principe des tiroirs.

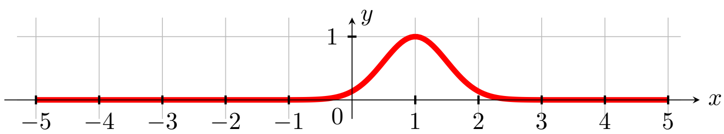
Exercice 2 (Transformations sur le graphe)**.** On considère la fonction gaussienne $f : x \mapsto e^{-\frac{x^2}{2}}$ dont le graphe est rappelé ci-dessous. Reporter ce graphe *sur votre copie* et tracer les courbes représentatives des fonctions suivantes :

(1) $x \mapsto -f(x) - 1$,
(2) $x \mapsto f(x-3) - 1$,
(3) $x \mapsto 2f(x) - 1$.



On considère maintenant le graphe suivant, indiquer à quelle transformation du graphe de f il correspond parmi les 4 propositions suivantes :

(a) $x \mapsto f(2(x+1))$,
(b) $x \mapsto f(2(x-1))$,
(c) $x \mapsto f(\frac{1}{2}(x+1))$,
(d) $x \mapsto f(\frac{1}{2}(x-1))$.



Exercice 3 (Suite)**.** Un joueur joue au casino de la manière suivante : il mise toujours tout son argent sur le rouge; si le rouge sort, alors il gagne le double de sa mise, sinon il perd sa mise et mise le double de sa dernière mise sur le rouge. Par exemple au tour numéro 1 il mise 1 euro, si le rouge sort il gagne 2 euros et s'il perd il mise 2 euros au tour numéro 2, et s'il perd à nouveau il mise 4 euros au tour numéro 3...
On note u_n la somme que le joueur mise au tour numéro n (en particulier $u_1 = 1$ et $u_2 = 2$).

(1) Rappeler la définition d'une suite géométrique.
(2) Pour $n \geq 1$, écrire une relation entre u_{n+1} et u_n.

(3) On suppose que le joueur perd à chaque tour. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est une suite géométrique, et en déduire une formule pour u_n en fonction de n.
(4) Quelle est la limite de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$?
(5) On suppose que le joueur perd ses neuf premières mises (du tour 1 au tour 9) : combien a-t-il perdu en tout ? On rappelle que $2^{10} = 1024$.
(6) On suppose maintenant qu'au tour 10 le joueur gagne enfin après avoir perdu aux 9 premiers tours. Le casino lui donne alors deux fois sa mise u_{10}. Combien le joueur a-t-il gagné (ou perdu) sur toute cette partie, en comptant les 9 tours perdants et le dixième tour gagnant ?

Exercice 4 (Étude d'une fonction)**.** Soit f la fonction d'une variable réelle définie par

$$f(x) = \ln\left(1 + e^{2x}\right) - x$$

(1) Donner le domaine de définition de la fonction f. Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x), \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x).$$

(2) Calculer la dérivée f' de f et vérifier que $f'(x) = 1 - \dfrac{2}{1+e^{2x}}$. Étudier le signe de la dérivée f', et donner le tableau de variations de f. Indiquer si f atteint un minimum ou un maximum local sur son domaine de définition.
(3) Calculer la dérivée seconde f'' de f. Indiquer si la fonction f a un (ou plusieurs) point(s) d'inflexion. Déterminer le(s) intervalle(s) sur lesquels f est convexe ou concave.
(4) Déterminer si la courbe représentative de f admet une droite asymptote en $-\infty$. Démontrer que la courbe représentative de f admet la droite $y = x$ comme asymptote en $+\infty$ (on pourra utiliser l'égalité $2x = \ln(e^{2x})$.
(5) Soit a un nombre réel, rappeler l'équation de la tangente au graphe de f au point d'abscisse a. Déterminer l'équation de la tangente au graphe de f au point d'abscisse $\ln(2)$. On pourra utiliser les valeurs $\ln(2) \simeq 0,7$ et $\ln(5) \simeq 1,6$.
(6) Tracer la courbe représentative de f, ainsi que la tangente de la question (5).

Exercice 5 (Bonus: Équation différentielle ordinaire)**.**

(1) Soit $a \in \mathbb{R}$ un paramètre fixe. Ecrire toutes les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$y'(x) = -ay(x).$$

(2) Résoudre le problème de Cauchy

$$y_a'(x) = -ay_a(x), \quad y_a(0) = 1$$

c'est-à-dire trouver la solution de l'équation différentielle $y'(x) = -ay(x)$ qui vaut 1 en 0.

(3) On considère la solution trouvée dans la question (2). Déterminer le paramètre a en sachant que $y_a(1) - \lim_{x\to+\infty} y_a(x) = 1/2$.
Existe-t-il un paramètre a tel que $y_a(1) - \lim_{x\to+\infty} y_a(x) = 2$? Justifier les réponses.
(4) Trouver une solution particulière sur $\mathbb{R}$ de l'équation non homogène

$$y'(x) = -y(x) + x$$

puis écrire toutes ses solutions.

Exercice 6 (Bonus: Nombres complexes)**.**

(1) Trouver la forme algébrique de toutes les racines complexes de l'équation

$$z^2 + z + 1 - i = 0.$$

(2) Calculer l'argument principal ($\in [0, 2\pi[$) et module de chacune de ces racines.
(3) Trouver la forme trigonométrique de chacune de ces racines.

L1 Sciences et Techniques – Semestre 1

Mathématiques M11

Examen du 1 juillet 2015

Tous documents, calculatrices et appareils électroniques interdits.
La qualité et la clarté de la rédaction seront prises en compte.

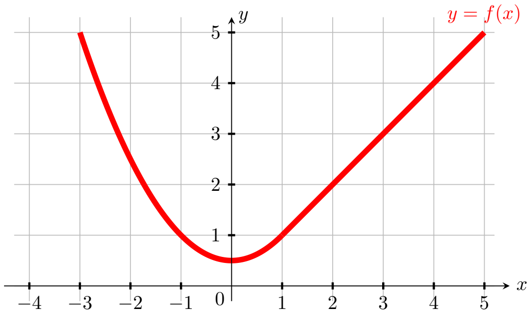
Exercice 1 (Logique)**.** On étudie la proposition suivante :

Si tous les interrupteurs sont éteints, alors l'électricité est coupée.

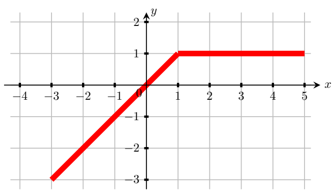
(1) Écrire la négation de cette proposition.
(2) Écrire la contraposée de cette proposition.
(3) Si on suppose que la proposition est vraie et que l'électricité est coupée, peut-on en déduire avec certitude que tous les interrupteurs sont éteints ?

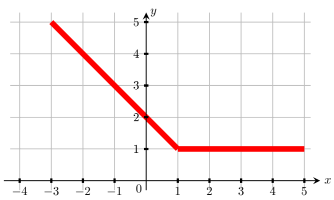
Exercice 2 (Transformations sur le graphe)**.** On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ dont le graphe est donné ci-dessous. Reporter ce graphe *sur votre copie* et tracer les courbes représentatives des fonctions suivantes :

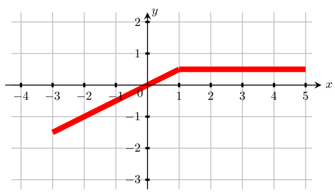
(1) $x \mapsto -f(x) - 2$,
(2) $x \mapsto f(2x) + 1$,
(3) $x \mapsto \frac{1}{2}f(x) - 1$.



On considère maintenant les trois graphes suivants, lequel correspond au graphe de la dérivée de f ?


(A)


(B)


(C)

Exercice 3 (Suite)**.** On considère la suite récurrente $(p_n)_{n\ge 0}$ définie par

$$\begin{cases} p_1 = 0, \\ \forall n \ge 0, \quad p_{n+1} = \frac{1}{3}(1 - p_n) \end{cases}$$

(1) Calculer p_0.
(2) Démontrer que pour tout $n \ge 1$ on a $p_n = \dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$.

(3) Calculer, si elle existe, la limite de la suite $(p_n)_{n\geq 0}$.
(4) La suite $(p_n)_{n\geq 0}$ est-elle croissante ? Décroissante ? Justifier votre réponse.

Exercice 4 (Étude d'une fonction)**.** Soit f la fonction d'une variable réelle définie par

$$f(x) = \frac{-x^3+x}{x^2+1}$$

(1) Donner le domaine de définition de la fonction f. Montrer que f est impaire. Calculer les limites de f aux extrémités de son domaine de définition.
(2) Calculer la dérivée f' de f.
Étudier le signe de la dérivée f', et donner le tableau de variations de f. Indiquer si f atteint un minimum ou un maximum local sur son domaine de définition.
(3) Déterminer les réels a et b tels que, pour tout réel x :

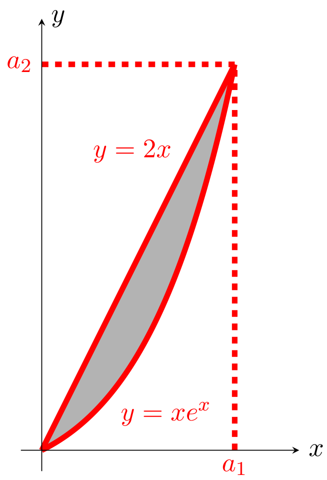
$$f(x) = ax + \frac{bx}{x^2+1}.$$

La courbe représentative de f admet-elle une droite asymptote en $-\infty$ et en $+\infty$? Si oui, écrire son équation. Dans ce cas, préciser la position de la courbe représentative de f par rapport à son asymptote (au-dessus ou au-dessous).
(4) Calculer la dérivée seconde f'' de f.
La fonction f a-t-elle un point d'inflexion sur son domaine de définition? Déterminer les intervalles sur lesquels f est convexe et ceux où f est concave.
(5) Déterminer l'équation de la tangente au graphe de f au point d'abscisse 0.
(6) Tracer la courbe représentative de f.

Exercice 5 (Calcul intégral)**.** On considère la région plane P définie par:

$$P = \{(x,y) \mid x \geq 0, xe^x \leq y \leq 2x\}$$

et représentée en gris sur le graphique suivant :



(1) Calculer les coordonnées $(a_1, a_2) \neq (0,0)$ du point d'intersection de la droite d'équation $y = 2x$ avec la courbe d'équation $y = xe^x$.
(2) Une fois a_1 déterminé, calculer

$$I_1 = \int_0^{a_1} 2x\mathrm{d}x, \qquad I_2 = \int_0^{a_1} xe^x\mathrm{d}x.$$

(3) Calculer la surface de la région P.

L1 Sciences et Techniques – Semestre 1

Mathématiques M11

Examen du 08 janvier 2016

Une feuille A4 manuscrite recto-verso autorisée. Autres documents interdits.
Calculatrices et tous appareils électroniques interdits

Exercice 1 (Logique)**.**

Pour étudier la validité d'une hypothèse scientifique H, on la confronte à la théorie déjà admise et on fait plusieurs expériences. On adopte le principe suivant :

Si H ne contredit pas la théorie et si toutes les expériences sont réussies,
alors H est validée.

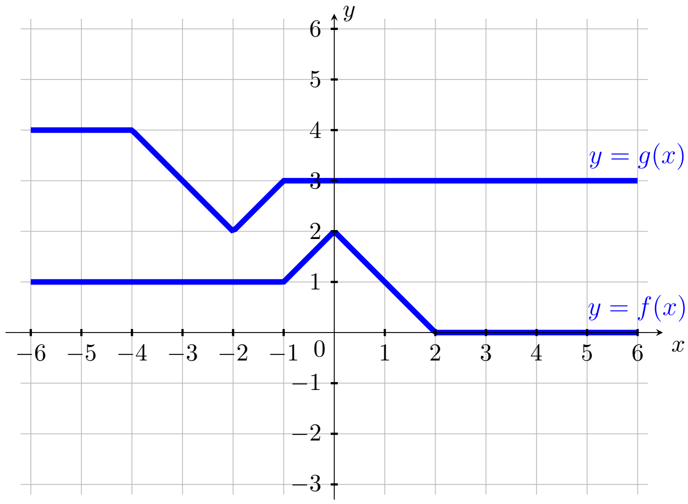
(1) Écrire la négation de la proposition ci-dessus.
(2) Écrire la contraposée de la proposition ci-dessus.
(3) On suppose que toutes les expériences ont réussi et que l'hypothèse H est validée. Peut-on en déduire que H ne contredit pas la théorie ?

Exercice 2 (Tracés de courbes)**.**

Soit les fonctions f et g dont les graphes sont donnés ci-dessous.

(1) Tracer à main levée, sur cette feuille, les courbes représentatives des fonctions:

(a) $x \mapsto 6 - f(x)$,
(b) $x \mapsto f(x-1)+1$,
(c) $x \mapsto \frac{1}{2}f(x) - 3$,
(d) $x \mapsto f(-2x) - 2$.



(2) Exprimer g sous la forme $g(x) = af(bx+c)+d$ en explicitant les valeurs de a, b, c, d.

Exercice 3 (Suite)**.**

On considère une suite géométrique $(u_n)_{n\ge 0}$ dont on sait que les trois termes u_0, u_2 et u_3 vérifient:

$$\begin{cases} u_0 - 5u_2 + u_3 &= -1 \\ 2u_0 - 7u_2 + 3u_3 &= 5 \\ -u_0 + 2u_2 + 9u_3 &= 5 \end{cases}$$

(1) Calculer les trois réels u_0, u_2 et u_3.
(2) Quelle est la raison de la suite $(u_n)_{n\ge 0}$?
(3) Pour $n \ge 0$ calculer $z_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$, puis $\lim\limits_{n\to\infty} z_n$.

Exercice 4 (Étude d'une fonction)**.**

Soit f la fonction d'une variable réelle définie par

$$f(x) = x + \ln\Big((x+1)^2 - 1\Big).$$

(1) Montrer que le domaine de définition de la fonction f est $D_f =]-\infty; -2[\cup]0; +\infty[$, et calculer les limites en ses extrémités.
(2) Calculer la dérivée f' de f.
Montrer que le signe de $f'(x)$ est identique à celui de $x^2 + 4x + 2$ pour tout $x \in D_f$, et donner le tableau de variations de f. Indiquer si f atteint un minimum ou un maximum local sur son domaine de définition.
(3) Calculer la dérivée seconde f'' de f.
La fonction f a-t-elle un point d'inflexion sur son domaine de définition? Déterminer les intervalles sur lesquels f est convexe et ceux où f est concave.
(4) La courbe représentative de f admet-elle une droite asymptote en $+\infty$, en $-\infty$, des asymptotes verticales? Si oui, écrire leurs équations.
(5) Déterminer l'équation de la tangente au graphe de f au point d'abscisse $x = 1$.
Existe-t-il un point (ou plusieurs) sur le graphe de f pour lequel la tangente admet coefficient directeur égal à 2? Si oui, trouver ce(s) point(s).
(6) Tracer la courbe représentative de f.

Exercice 5 (Bonus: Équation différentielle ordinaire)**.**

On considère les équations différentielles

$$(A) \qquad y'(x) + y(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}$$

et

$$(B) \qquad u'(x) + u(x) = xe^x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(1) Ecrire toutes les solutions de l'équation (A).
(2) Déterminer une primitive de xe^{2x}.
(3) Ecrire l'ensemble des solutions de l'équation (B).
(4) Résoudre le problème de Cauchy

$$\begin{cases} u'(x) + u(x) = xe^x, & x \in \mathbb{R}, \\ u(0) = 1 \end{cases}$$

Exercice 6 (Bonus: nombres complexes)**.**

(1) Trouver toutes les racines complexes de l'équation

$$2z^2 - z + \frac{1}{2} = 0.$$

(2) Calculer l'argument principal ($\in [0, 2\pi[$) et le module de chacune de ces racines.
(3) Trouver la forme trigonométrique de chacune de ces racines.

L1 Sciences et Techniques – Semestre 1

Mathématiques M11

Examen ratrappage Juin 2016

Une feuille A4 manuscrite recto-verso autorisée. Autres documents interdits.
Calculatrices et tous appareils électroniques interdits

Exercice 1 (Logique)**.** Soit P, Q et R trois propositions logiques.

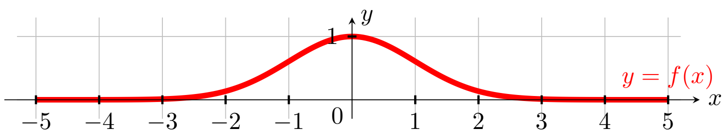
(1) Écrire la négation de la proposition
$$(\,P \text{ et } Q\,) \Rightarrow R$$

(2) Écrire la contraposée de la proposition
$$(\,P \text{ et } Q\,) \Rightarrow R$$

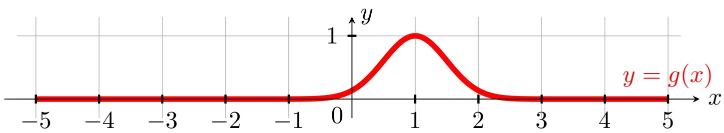
(3) Écrire la négation de la proposition :
$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists k \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq k, \quad g_n < \varepsilon$$

Exercice 2 (Transformations sur le graphe)**.** On considère la fonction gaussienne $f : x \mapsto e^{-\frac{x^2}{2}}$ dont le graphe est rappelé ci-dessous. Reporter ce graphe *sur votre copie* et tracer les courbes représentatives des fonctions suivantes :

(1) $x \mapsto -f(x) - 2$,
(2) $x \mapsto f(x-1) - 1$,
(3) $x \mapsto 2f(x) + 1$.



On considère maintenant le graphe de la fonction $g(x) = f(ax+b) + c$ représenté ci-dessous. Déterminer les réels a, b, c.



Exercice 3 (Étude d'une fonction)**.** Soit f la fonction d'une variable réelle définie par
$$f(x) = \frac{2}{1+e^{x/2}}$$

(1) Donner le domaine de définition de la fonction f et calculer les limites en ses extrémités.

(2) Calculer la dérivée f' de f. Vérifier que la dérivée seconde est $f''(x) = \frac{1}{2}\dfrac{e^{x/2}(e^{x/2}-1)}{(1+e^{x/2})^3}$.

(3) La fonction f a-t-elle un point d'inflexion sur son domaine de définition? Déterminer les intervalles où f est convexe et ceux où f est concave.

(4) Étudier le signe de la dérivée f', et donner le tableau de variations de f. Indiquer si f atteint un minimum ou un maximum local sur son domaine de définition.

(5) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe en $x = 0$. En déduire pour quelle valeur de x cette tangente croise l'axe des abscisses.

(6) La courbe représentative de f admet-elle une droite asymptote en $-\infty$? Si oui, écrire son équation.

(7) La courbe représentative de f admet-elle une droite asymptote en $+\infty$? *Justifier la réponse.*

(8) Tracer la courbe représentative de f ainsi que sa tangente en $x = 0$.

Exercice 4 (Suite)**.**

On considère une suite géométrique $(z_n)_{n\geq 0}$ dont on sait que les trois termes z_0, z_1 et z_3 vérifient:

$$\begin{cases} z_0 + \frac{1}{4}z_1 - z_3 &= 8 \\ \frac{1}{4}z_0 - z_1 + 2z_3 &= 0 \\ z_0 + z_1 + 2z_3 &= 14 \end{cases}$$

(1) Calculer les trois réels z_0, z_1 et z_3.
(2) En notant q la raison de la suite géométrique $(z_n)_{n\geq 0}$, donner la relation entre z_3 et z_0.
(3) Quelle est la raison de la suite $(z_n)_{n\geq 0}$?
(4) Pour $n \geq 0$ calculer $u_n = z_0 + z_1 + \ldots + z_n$, puis $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

Exercice 5 (Bonus: Équation différentielle ordinaire)**.**

On considère les équations différentielles

$$(A) \qquad y'(x) + y(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}$$

et

$$(B) \qquad u'(x) + u(x) = xe^x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(1) Ecrire toutes les solutions de l'équation (A).
(2) Déterminer une primitive de xe^{2x}.
(3) Ecrire l'ensemble des solutions de l'équation (B).
(4) Résoudre le problème de Cauchy

$$\begin{cases} u'(x) + u(x) = xe^x, \qquad x \in \mathbb{R}, \\ u(0) = 1 \end{cases}$$

Bibliographie

[1] Guy AULIAC, Jean AVIGNANT et Elie AZOULAY : *Aide-mémoire de Mathématiques*. EdiScience, 2006.

[2] Anne-Emmanuelle BADEL et François CLAUSSET : *Physique tout-en-un* - 1re *année*. Dunod, 2008.

[3] Vivina BARUTELLO, Monica CONTI, Davide L. FERRARIO, Susanna TERRACINI et Gianmaria VERZINI : *Analisi matematica con elementi di geometria e calcolo vettoriale*, volume 2. Apogeo, 2008.

[4] Vincent BLONDEL : *Mathématiques - Analyse*. Dunod, 2000.

[5] Xavier BUFF, Josselin GARNIER, Emmanuel HALBERTSTADT, Thomas LACHAND-ROBERT, François MOULIN et Jacques SAULOY : *Mathématiques tout-en-un pour la licence niveau L1*. Dunod, 2006.

[6] Xavier BUFF, Josselin GARNIER, Emmanuel HALBERTSTADT, François MOULIN, Monique RAMIS et Jacques SAULOY : *Mathématiques tout-en-un pour la licence niveau L2*. Dunod, 2007.

[7] Claudio CANUTO et Anita TABACCO : *Analisi matematica II - Teoria ed esercizi con complementi in rete*. Springer, 2008.

[8] Alexandre CASAMAYOU-BOUCAU, Pascal CHAUVIN et Guillaume CONNAN : *Programmation en Python pour les mathématiques*. Dunod, 2012.

[9] Yadolah DODGE : *Mathématiques de base pour économistes*. Springer, 2007.

[10] Daniel FREDON, Myriam MAUMY-BERTRAND et Frédéric BERTRAND : *Mathématiques Analyse en 30 fiches*. Dunod, 2009.

[11] François GUÉNARD et Patricia HUG : *QCM de Mathématiques*, volume 1. Dunod, 1993.

[12] Wieslawa J. KACZOR et Maria T. NOWAK : *PROBLÈMES D'ANALYSE I - Nombres réels, suites et séries*. EDP Sciences, 2008.

[13] Wieslawa J. KACZOR et Maria T. NOWAK : *PROBLÈMES D'ANALYSE II - Continuité et dérivabilité*. EDP Sciences, 2008.

[14] Jean-Pierre LECOUTRE et Philippe PILIBOSSIAN : *TD Analyse*. Dunod, 2008.

[15] François LIRET et Charlotte SCRIBOT : *Mini manuel d'Analyse*. Dunod, 2010.

[16] Jean-Marie MONIER : *Les méthodes et exercices de Mathématiques PCSI-PTSI*. Dunod, 2008.

[17] François MOULIN, Jean François RUAUD, Anne MIQUEL et Jean-Claude SIFRE : *Mathématiques tout-en-un* - 1re *année*. Dunod, 2003.

[18] Bernard MYERS et Dominique SOUDER : *Logique et Mathématiques*. Dunod, 2009.

[19] James STEWART : *Calculus concepts and contexts*. Brooks/Cole, 2010.

[20] James STEWART : *Calculus : early transcendentals*. Brooks/Cole Pub Co, 2010.

[21] James STEWART, Lothar REDLIN et Saleem WATSON : *Precalculus Mathematics for Calculus*. Brooks/Cole, 2009.