Matematica

Università degli Studi di Milano

Facoltà di Agraria

Corso di Laurea in Scienze e Tecnologie Alimentari
Corso di Laurea in Viticoltura ed Enologia

TEMI D'ESAME

assegnati dal Prof. C. Zanco nel periodo
novembre 2001 - settembre 2007
con soluzioni e parziali tracce di svolgimento

E COMPLEMENTI

5ª edizione

A cura della dott.ssa Gloria Faccanoni

Software: typography
TEX and AMSTEX are trademarks of the American Mathematical Society.
LATEX is a program whose copyright belongs to Leslie Lamport.

Fifth printing, revised October 2007

All inquiries should be addressed to:
Gloria Faccanoni
CEA/DEN/DANS/DM2S/SFME/LETR
Commissariat à l'Energie Atomique - Saclay
91191 GIF SUR YVETTE
France

Author's email: `gloria.faccanoni@cea.fr`

LA PRESENTE RACCOLTA di testi di temi d'esame con soluzioni NON È e NON VUOLE ESSERE UN ESERCIZIARIO: di ogni quesito o esercizio riportato è presente la risposta o la soluzione, ma solo saltuariamente è corredata da adeguate giustificazioni e/o dai passaggi necessari per ottenerla. Fornire tali dettagli è compito dello studente, che potrà sempre rivolgersi ai docenti nel caso non sia in grado di agire autonomamente.

La raccolta è inoltre corredata da:

- ☆ un capitolo iniziale che richiama metodi algebrici basilari per la soluzione di semplici equazioni e disequazioni;
- ☆ due capitoli successivi rispettivamente sul concetto di media e su cenni basilari al calcolo delle probabilità, entrambi a cura del Prof. Gianluigi Forti, che ringraziamo sentitamente per averli resi disponibili;
- ☆ un breve riepilogo dei principali limiti notevoli;
- ☆ cinque capitoli conclusivi che ospitano ulteriori esercizi rispettivamente su disequazioni, limiti di successioni e di funzioni, studio di funzione, primitive e calcolo combinatorio.

È presente un sommario indice analitico.

Si ringrazia fin d'ora chiunque volesse evidenziare eventuali errori e/o omissioni.

Paris, 6 novembre 2007.

Gloria Faccanoni†

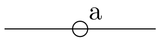
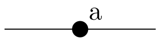
†CEA/DEN/DANS/DM2S/SFME/LETR
Commissariat à l'Energie Atomique - Saclay
91191 GIF SUR YVETTE
France
✉ gloria@cmap.polytechnique.fr
☎ 0033 6 27726243

INDICE

Notazioni

Elenco dei simboli usati nel testo

$>$	maggiore
$<$	minore
$\geqslant$	maggiore o uguale
$\leqslant$	minore o uguale
$\neq$	diverso
$\cong$	circa
$\equiv$	coincide
$\{\quad\}$	insieme
$\mid$	tale che
$\in$	appartiene
$\notin$	non appartiene
$\forall$	per ogni (quantificatore universale)
$\exists$	esiste (quantificatore universale)
$\nexists$	non esiste
$\subset$	è sottoinsieme proprio (è contenuto)
$\subseteq$	è sottoinsieme (è contenuto o coindide)
$\cup$	unione fra insiemi
$\cap$	intersezione fra insiemi
$\vee$	oppure
$\wedge$	e
$\emptyset$	insieme vuoto
$\Rightarrow$	se ... allora
$\Leftrightarrow$	se e solo se
$\ln$	logaritmo in base e
∞	infinito
$\int$	simbolo di integrale
$\sum_{i=0}^{n} a_i$	sommatoria rispetto all'indice i, equivale a $a_0 + a_1 \cdots + a_n$
$\mathbb{N}$	insieme dei numeri naturali (zero incluso)
$\mathbb{Z}$	insieme dei numeri interi relativi
$\mathbb{R}$	insieme dei numeri reali
$\mathbb{R} \setminus \{ x_0 \}$	insieme privato del punto x_0

$g \circ f$	g composto f
$n!$	n fattoriale
$f'(x), y'(x), \frac{df(x)}{dx}$	simboli di derivata
	il valore a è escluso
	il valore a è incluso
inf	estremo inferiore
sup	estremo superiore
min	minimo
max	massimo
$\stackrel{(H)}{=}$	teorema di de l'Hôspital
$\stackrel{(P.P.)}{=}$	integrazione per parti
$\stackrel{(X)}{=}$, $X = A, B, \ldots, G$	limite notevole

Parte I.

Promemoria

Ci sono alcune conoscenze che sono essenziali per un qualunque corso di matematica. Per affrontare i temi d'esame assumeremo che le possediate perfettamente — non solo una vaga idea — e che sappiate padroneggiarle con disinvoltura. Senza queste conoscenze potreste incontrare estrema difficoltà. Questa prima parte contiene alcune di queste nozioni di base, non per spiegarvele ma solo per ricordarvele. Questo non è un libro di testo, pertanto non aspettatevi che vi vengano diffusamente illustrati questi argomenti. In questa introduzione vogliamo solo ricordarvi concetti che dovreste aver già acquisito. Se vi trovate in difficoltà consultate un libro di testo.

CAPITOLO i

Equazioni e disequazioni

Equazioni e disequazioni razionali

Proprietà delle potenze

① $a^b \cdot a^c = a^{b+c}$

② $a^b : a^c = a^{b-c}$

③ $\left(a^b\right)^c = a^{b \cdot c}$

④ $(a \cdot b)^c = a^c \cdot b^c$

⑤ $(a : b)^c = a^c : b^c$

⑥ $(a)^c = \left(\dfrac{1}{a}\right)^{-c}$

⑦ $\sqrt[c]{a} = a^{1/c}$

Prodotti notevoli

① $(A \pm B)^2 = A^2 \pm 2AB + B^2$

② $(A \pm B)^3 = A^3 \pm 3A^2B + 3AB^2 \pm B^3$

③ $(A \pm B + C)^2 = A^2 + B^2 + C^2 \pm 2AB + 2AC \pm 2BC$

④ $(A - B - C)^2 = A^2 + B^2 + C^2 - 2AB - 2AC + 2BC$

⑤ $(A^2 - B^2) = (A - B) \cdot (A + B)$

⑥ $(A^3 - B^3) = (A - B) \cdot (A^2 + AB + B^2)$

⑦ $(A^3 + B^3) = (A + B) \cdot (A^2 - AB + B^2)$

Gli ultimi 3 punti sono un caso particolare della fattorizzazione dei binomi del tipo $A^n \pm B^n$. La tabella i.1 nella pagina seguente illustra quando il polinomio $x^n \pm a^n$ è divisibile per il polinomio $x \pm a$ in funzione di n numero naturale.

	$x-a$	$x+a$
$x^n - a^n$	$\forall\, n \in \mathbb{N}$	$n \in \mathbb{N}$ pari
$x^n + a^n$	$\nexists\, n$	$n \in \mathbb{N}$ dispari

Tabella i.1.: *Fattorizzazione dei binomi del tipo* $x^n \pm a^n$

In particolare si ha che:

- $x^n + a^n$
  - con n dispari è divisibile solo per $x+a$ e si ha

    $$x^n + a^n = (x+a) \cdot (x^{n-1} - ax^{n-2} + \cdots - a^{n-2}x + a^{n-1})$$

  - con n pari non è scomponibile
- $x^n - a^n$
  - con n dispari è divisibile solo per $x-a$ e si ha

    $$x^n - a^n = (x-a) \cdot (x^{n-1} + ax^{n-2} + \cdots + a^{n-2}x + a^{n-1})$$

  - con n pari è divisibile sia per $x-a$ che per $x+a$. Per la scomposizione conviene comunque considerare il binomio come differenza di due quadrati:

    $$x^n - a^n = \left(x^{n/2} + a^{n/2}\right) \cdot \left(x^{n/2} - a^{n/2}\right)$$

    Si controlla poi se i due binomi così ottenuti sono o meno ulteriormente scomponibili.

Equazioni e disequazioni di I° grado

	Soluzioni dell'equazione $ax = b$	Soluzioni della disequazione $ax > b$	Soluzioni della disequazione $ax < b$
$a > 0$	$x = \frac{b}{a}$	$x > \frac{b}{a}$	$x < \frac{b}{a}$
$a < 0$	$x = \frac{b}{a}$	$x < \frac{b}{a}$	$x > \frac{b}{a}$

Equazioni e disequazioni di II° grado

Consideriamo solo il caso $a > 0$ al quale ci si può sempre ricondurre.

Ricordiamo che

$\Delta := b^2 - 4ac$ $(a > 0)$	Soluzioni dell'equazione $ax^2 + bx + c = 0$	Soluzioni della disequazione $ax^2 + bx + c > 0$	Soluzioni della disequazione $ax^2 + bx + c < 0$
$\Delta > 0$	$x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ $(x_1 < x_2)$	$x < x_1 \ \vee \ x > x_2$	$x_1 < x < x_2$
$\Delta = 0$	$x_1 = x_2 = -\dfrac{b}{2a}$	$x \neq -\dfrac{b}{2a}$	$\nexists$ soluzione
$\Delta < 0$	$\nexists$ soluzione reale	$\forall\ x$	$\nexists$ soluzione

Tabella i.2.: *Equazioni e disequazioni di II grado*

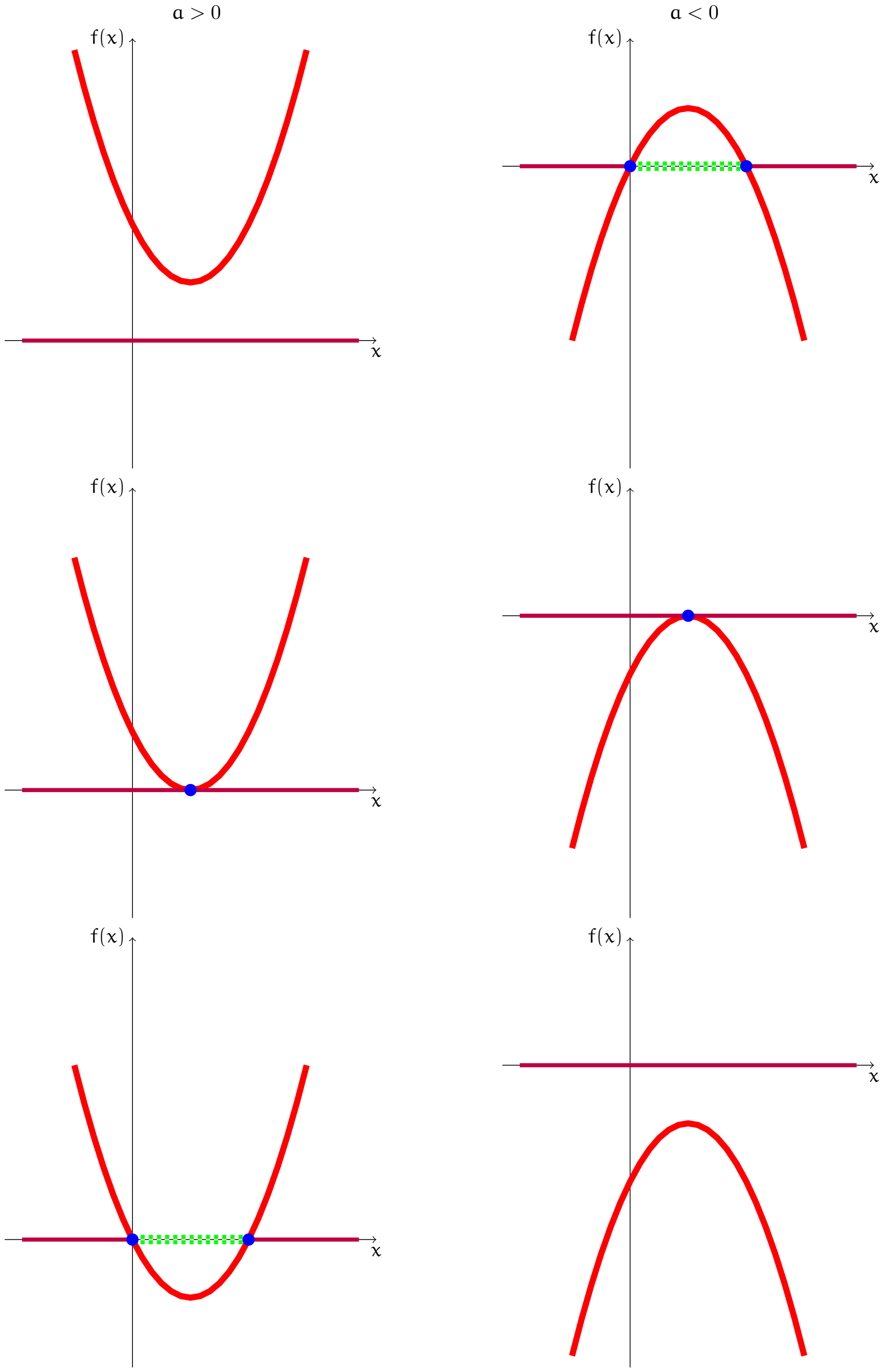
- $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$
- $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$

Vediamo ora di giustificare geometricamente la tabella precedente. Allo scopo, associamo al trinomio $ax^2 + bx + c$ l'equazione della parabola avente la medesima espressione e vediamo graficamente le soluzioni dell'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ come intersezioni di tale curva con l'asse delle x.

Nella colonna di sinistra abbiamo i tre casi in cui $a > 0$; dall'alto verso il basso: due intersezioni, una intersezione, nessuna intersezione (rispettivamente, $\Delta > 0$, $\Delta = 0$, $\Delta < 0$). Analogamente a destra abbiamo i tre casi in cui $a < 0$; dall'alto verso il basso: due intersezioni, una intersezione, nessuna intersezione (rispettivamente, $\Delta > 0$, $\Delta = 0$, $\Delta < 0$).

Per risolvere la disequazione $ax^2 + bx + c > 0$ o $ax^2 + bx + c < 0$ è allora sufficiente esaminare la posizione della parabola associata nel piano:

- i pallini rappresentano le soluzioni dell'equazione $ax^2 + bx + c = 0$;
- in blu sono rappresentate le soluzioni della disequazione $ax^2 + bx + c > 0$;
- in verde punteggiato sono rappresentate le soluzioni della disequazione $ax^2 + bx + c < 0$.



Equazioni e disequazioni di grado superiore al II°

Equazioni e disequazioni binomie

Consideriamo solo il caso $a > 0$ al quale ci si può sempre ricondurre.

$(a > 0)$		Soluzioni dell'equazione $ax^n + b = 0$	Soluzioni della disequazione $ax^n + b > 0$	Soluzioni della disequazione $ax^n + b < 0$
n dispari		$x = \sqrt[n]{-\frac{b}{a}}$	$x > \sqrt[n]{-\frac{b}{a}}$	$x < \sqrt[n]{-\frac{b}{a}}$
n pari	$b > 0$	$\nexists\, x \in \mathbb{R}$	$\forall\, x \in \mathbb{R}$	$\nexists\, x \in \mathbb{R}$
	$b = 0$	$x = 0$	$x \neq 0$	$\nexists\, x \in \mathbb{R}$
	$b < 0$	$x_{1,2} = \pm \sqrt[n]{-\frac{b}{a}}$	$x < -\sqrt[n]{-\frac{b}{a}} \ \vee \ x > \sqrt[n]{-\frac{b}{a}}$	$-\sqrt[n]{-\frac{b}{a}} < x < \sqrt[n]{-\frac{b}{a}}$

Equazioni e disequazioni trinomie

Le equazioni (disequazioni) trinomie hanno forma normale

$$ax^{2n} + bx^n + c \gtreqqless 0$$

La strategia risolutiva consiste nel porre $x^n = t$. Ci si riconduce così ad un'equazione (disequazione) di II° grado in t: $at^2 + bt + c \gtreqqless 0$. Ottenute le soluzioni t_1 e t_2 si risolvono le due equazioni (disequazioni) binomie $x^n \lesseqqgtr t_1$ e $x^n \gtreqqless t_2$.

Algoritmo di Ruffini

A Paolo Ruffini è dovuto un algoritmo per la divisione di un polinomio $p(x)$ per un binomio del tipo $x - k$ (con $k \in \mathbb{R}$).
Si scrive il polinomio $p(x)$ in modo completo (considerando i termini eventualmente mancanti come termini con coefficiente 0) e ordinando secondo le potenze decrescenti di x:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \,.$$

Per il teorema del resto le radici razionali del polinomio $p(x)$ (ossia i valori che sostituiti alla x annullano il polinomio) sono da cercare fra i divisori del termine noto a_0, presi sia con il segno positivo sia con il segno negativo, o tra i rapporti tra tali divisori e quelli del coefficiente del termine di grado massimo a_n. Pertanto si pone k uguale ad uno di essi in modo che $p(k) = 0$.
Si scrivono i coefficienti e il termine noto inserendoli in uno schema di questo tipo:

$$\begin{array}{c|cccc|c} & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 & a_0 \\ k & \downarrow & & & & \\ \hline & a_n & & & & \end{array}$$

Si moltiplica il coefficiente a_n per k e si scrive il risultato nella colonna successiva:

$$\begin{array}{c|cccc|c} & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 & a_0 \\ \boxed{k} & \downarrow & \boxed{a_n \cdot k} & & & \\ \hline & \boxed{a_n} & & & & \end{array}$$

Si esegue l'addizione in colonna e si trova così un nuovo coefficiente $b_{n-1} := a_{n-1} + a_n \cdot k$:

$$\begin{array}{c|cccc|c} & a_n & \boxed{a_{n-1}} & \cdots & a_1 & a_0 \\ & & + & & & \\ k & \downarrow & \boxed{a_n \cdot k} & & & \\ \hline & & \| & & & \\ & a_n & \boxed{b_{n-1}} & & & \end{array}$$

Si ripete l'operazione per ogni coefficiente $b_{n-i} := a_{n-i} + (b_{n-i+1} \cdot k)$:

$$\begin{array}{c|cccccc|c} & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & a_0 \\ k & \downarrow & a_n \cdot k & b_{n-1} \cdot k & \cdots & b_2 \cdot k & b_1 \cdot k \\ \hline & a_n & b_{n-1} & b_{n-2} & \cdots & b_1 & b_0 \end{array}$$

b_0 è il resto della divisione. Per la scelta iniziale di k, esso dovrà essere 0:

$$\begin{array}{c|cccccc|c} & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & a_0 \\ k & \downarrow & a_n \cdot k & b_{n-1} \cdot k & \cdots & b_2 \cdot k & b_1 \cdot k \\ \hline & a_n & b_{n-1} & b_{n-2} & \cdots & b_1 & 0 \end{array}$$

In conclusione

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = (x-k) \cdot (a_n x^{n-1} + b_{n-1}x^{n-2} + \cdots + b_1)$$

Equazioni e disequazioni fratte

★ $\dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$ è verificata per quei valori di x per i quali $g(x) \neq 0$ e $f(x) = 0$;

★ $\dfrac{f(x)}{g(x)} > 0$ è verificata per quei valori di x per i quali $g(x) \neq 0$ e $f(x)$ e $g(x)$ hanno segno concorde perciò nel grafico del "confronto dei segni" si considerano gli intervalli positivi;

★ $\dfrac{f(x)}{g(x)} < 0$ è verificata per quei valori di x per i quali $g(x) \neq 0$ e $f(x)$ e $g(x)$ hanno segno discorde perciò nel grafico del "confronto dei segni" si considerano gli intervalli negativi.

Osserviamo che, come il quoziente, anche il prodotto di due termini è positivo se e solo se essi sono di segno concorde. Dunque, come per le disequazioni fratte, si tratta semplicemente si studiare separatamente il segno di ciascun termine e di impostare l'opportuno schema per il "confronto dei segni".

Sistemi di disequazioni

Due o più disequazioni costituiscono un *sistema di disequazioni* se devono essere verificate contemporaneamente.
Risolvere un sistema significa perciò determinare le soluzioni COMUNI a tutte le disequazioni che formano il sistema stesso. Ovviamente, essendo le soluzioni delle disequazioni rappresentate da intervalli, occorrerà "sovrapporre" tali intervalli per determinare un sottointervallo in cui tutte le disequazioni sono contemporaneamente soddisfatte. Il procedimento risolutivo di un sistema di questo tipo, perciò, non comporta altra difficoltà se non la predisposizione corretta di uno schema che consenta il confronto dei singoli intervalli risolutivi. Il confronto in sé non dipende dal grado delle disequazioni del sistema, le quali saranno risolte singolarmente.

Come comportarsi in presenza di valori assoluti

Elenchiamo alcune proprietà del valore assoluto di un numero:

① $|a| = 0 \iff a = 0$

② $|a| = |-a| \quad \forall\, a \in \mathbb{R}$

③ $|a \cdot b| = |a| \cdot |b| \quad \forall\, a, b \in \mathbb{R}$

④ $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|} \quad \forall\, a, b \in \mathbb{R},\ b \neq 0$

⑤ $|a| = |b| \iff a = b \text{ o } a = -b \quad \forall\, a, b \in \mathbb{R}$

⑥ $|a| \leqslant b \iff -b \leqslant a \leqslant b \quad \forall\, a, b \in \mathbb{R},\ b \geqslant 0$

⑦ $|a| \geqslant b \iff a \leqslant -b \text{ o } a \geqslant b \quad \forall\, a, b \in \mathbb{R},\ b \geqslant 0$

⑧ $|a| \leqslant |b| \iff a^2 \leqslant b^2 \quad \forall\, a, b \in \mathbb{R}$

⑨ $\sqrt{a^2} = |a| \quad \forall\, a \in \mathbb{R}$

⑩ $\big|\, |a| - |b| \,\big| \leqslant |a + b| \leqslant |a| + |b| \quad \forall\, a, b \in \mathbb{R}$ (disuguaglianze triangolari)

Equazioni e disequazioni contenenti un valore assoluto

$$|f(x)| :=\begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) \geqslant 0 \\ -f(x) & \text{se } f(x) < 0 \end{cases}$$

Pertanto

$$|f(x)| = g(x) \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} f(x) \geqslant 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases} \vee \begin{cases} f(x) < 0 \\ -f(x) = g(x) \end{cases}$$

$$|f(x)| > g(x) \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} f(x) \geqslant 0 \\ f(x) > g(x) \end{cases} \vee \begin{cases} f(x) < 0 \\ -f(x) > g(x) \end{cases}$$

$$|f(x)| < g(x) \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} f(x) < g(x) \\ f(x) > -g(x) \end{cases}$$

In particolare per $k \in \mathbb{R}$:

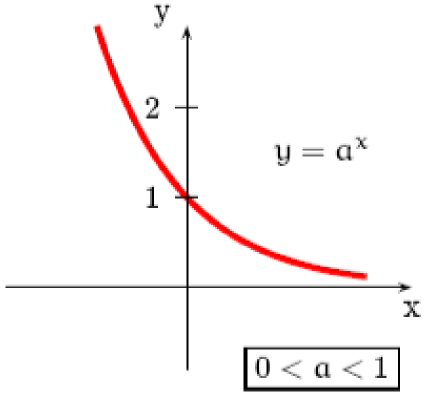
	$k < 0$	$k = 0$	$k > 0$
$\lvert f(x)\rvert = k$	$\nexists\, x \in \mathbb{R}$	$f(x) = 0$	$f(x) = \pm k$
$\lvert f(x)\rvert > k$	$\forall\, x \in \mathbb{R}$	$f(x) \neq 0$	$\begin{cases} f(x) \geqslant 0 \\ f(x) > k \end{cases} \vee \begin{cases} f(x) < 0 \\ -f(x) > k \end{cases}$
$\lvert f(x)\rvert < k$	$\nexists\, x \in \mathbb{R}$	$\nexists\, x \in \mathbb{R}$	$\begin{cases} f(x) < k \\ f(x) > -k \end{cases}$

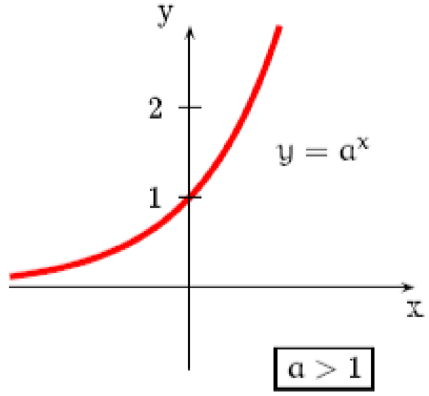
Equazioni e disequazioni irrazionali

	Soluzioni dell'equazione $A(x) = \sqrt[n]{B(x)}$	Soluzioni della disequazione $A(x) > \sqrt[n]{B(x)}$	Soluzioni della disequazione $A(x) < \sqrt[n]{B(x)}$
n dispari	$(A(x))^n = B(x)$	$(A(x))^n > B(x)$	$(A(x))^n < B(x)$
n pari	$\begin{cases} A(x) \geqslant 0 \\ (A(x))^n = B(x) \end{cases}$	$\begin{cases} B(x) \geqslant 0 \\ A(x) > 0 \\ (A(x))^n > B(x) \end{cases}$	$\begin{cases} A(x) < 0 \\ B(x) \geqslant 0 \end{cases} \vee \begin{cases} A(x) \geqslant 0 \\ (A(x))^n < B(x) \end{cases}$

Equazioni e disequazioni esponenziali

La funzione esponenziale





Equazioni esponenziali

Un'equazione si dice esponenziale se l'incognita compare a esponente.

Equazione	Soluzione
$a^x = c$ (con $a > 0$, $a \neq 1$)	$x = \log_a c$
$ma^{f(x)} = nb^{g(x)}$ (con $a, b > 0$, $a \neq 1$, $b \neq 1$)	$\ln m + f(x) \ln a = \ln n + g(x) \ln b$
$f(a^x) = c$ (con $a > 0$, $a \neq 1$)	Si pone $t := a^x$

Disequazioni esponenziali

Disequazione	Parametri		Soluzione
$a^x > c$ (con $a > 0$, $a \neq 1$)	$c \leqslant 0$		$\forall\, x \in \mathbb{R}$
	$c > 0$	$0 < a < 1$	$x < \log_a c$
		$a > 1$	$x > \log_a c$
$a^x < c$ (con $a > 0$, $a \neq 1$)	$c \leqslant 0$		$\nexists\, x \in \mathbb{R}$
	$c > 0$	$0 < a < 1$	$x > \log_a c$
		$a > 1$	$x < \log_a c$

Osservando che per $a > 0$ si può scrivere $a^x = \left(\frac{1}{a}\right)^{-x}$ possiamo allora ricondurci sempre a disequazioni con base maggiore di 1.

	$0 < a < 1$	$a > 1$
$a^{f(x)} > a^{g(x)}$ con $a > 0$ e $a \neq 1$	$f(x) < g(x)$	$f(x) > g(x)$
$m\, a^{f(x)} > n\, b^{g(x)}$ con $a, b > 0$ e $a \neq 1$, $b \neq 1$	$\ln m + f(x) \ln a > \ln n + g(x) \ln b$	

Equazioni e disequazioni logaritmiche

Proprietà dei logaritmi

Sia $a > 0,\ a \neq 1$.

① Se $b_1 > 0$ e $b_2 > 0$ allora $\log_a(b_1 \cdot b_2) = \log_a b_1 + \log_a b_2$.

② Se $b_1 > 0$ e $b_2 > 0$ allora $\log_a\left(\frac{b_1}{b_2}\right) = \log_a b_1 - \log_a b_2$.

③ Se $b > 0$ allora $\log_a b^k = k \log_a b$.

④ $\log_a 1 = 0$.

⑤ $\log_a a = 1$.

⑥ $\log_a (a^c) = c$.

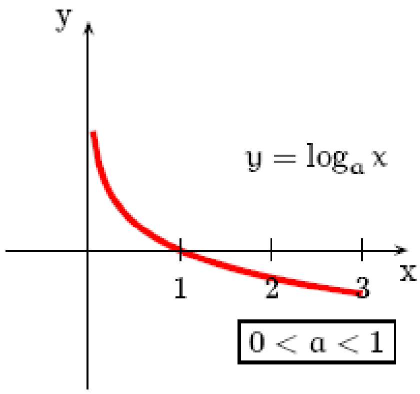
⑦ Se $c > 0$ allora $a^{\log_a c} = c$.

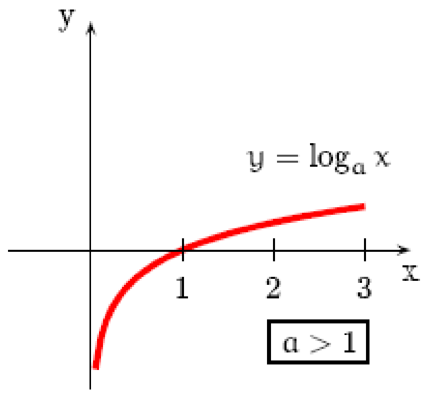
⑧ Se $b > 0$ allora $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$ con $c > 0$ e $c \neq 1$ (Regola del cambiamento di base).

In particolare vale la seguente successione di uguaglianze:

$$\log_a x = -\log_a \frac{1}{x} = -\log_{\frac{1}{a}} x = \log_{\frac{1}{a}} \frac{1}{x} = \frac{1}{\log_x a}$$

La funzione logaritmica





Equazioni logaritmiche

Un'equazione si dice logaritmica se l'incognita compare sotto il simbolo di logaritmo. Poiché si ha $\log_x a = \log_x e \cdot \ln a = \dfrac{\ln a}{\ln x}$, ci si può sempre ridurre al caso in cui l'incognita compare solo nell'argomento del logaritmo.

Equazione	Soluzione
$\log_a f(x) = c$ (con $a > 0,\ a \neq 1$)	$\begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) = a^c \end{cases}$
$\log_a f(x) = \log_a g(x)$ (con $a > 0,\ a \neq 1$)	$\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases}$
$f(\log_a g(x)) = c$ (con $a > 0,\ a \neq 1$)	Deve essere $g(x) > 0$ Si pone $t := \log_a g(x)$

Disequazioni logaritmiche

	$0 < a < 1$	$a > 1$
$\log_a f(x) > c$	$0 < f(x) < a^c$	$f(x) > a^c$
$\log_a f(x) < c$	$f(x) > a^c$	$0 < f(x) < a^c$
$\log_a f(x) > \log_a g(x)$	$0 < f(x) < g(x)$	$f(x) > g(x) > 0$

Poiché per $a > 0$, $a \neq 1$ si può scrivere $\log_a x = -\log_{1/a} x$ è sempre possibile ridursi a disequazioni con base maggiore di 1.

CAPITOLO ii

Sul concetto di media

a cura del Prof. **Gianluigi Forti**

TUTTI conoscono le singole medie che si incontrano abitualmente: aritmetica, geometrica, armonica. Meno ovvio sembra sapere quale media utilizzare in un dato problema e inserire le tre medie sopra citate in un concetto più generale.
Cominciamo con alcuni semplici esempi che possano chiarire il problema.

Esempio 1. *Un'auto percorre 5 km; il primo chilometro alla velocità* v_1*, il secondo alla velocità* v_2*, fino al quinto alla velocità* v_5*. Ci chiediamo quale sia la sua velocità media sull'intero percorso, espressa in termini delle quantità* $v_1, \cdots, v_5$*.*
Poiché il k*–esimo chilometro (*$k = 1, 2, 3, 4, 5$*) è percorso nel tempo* $\frac{1}{v_k}$*, la velocità media è*

$$v_m = \frac{5}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \frac{1}{v_3} + \frac{1}{v_4} + \frac{1}{v_5}},$$

cioè è la media armonica di $v_1, \cdots, v_5$*.*

Esempio 2. *Il tasso di inflazione negli ultimi tre anni è stato del* 4.7%*,* 5.1%*,* 2.7% *rispettivamente. Qual è stato il tasso medio nell'ultimo triennio?*
Dobbiamo innanzi tutto chiarire il significato della domanda: il tasso r *cercato è quello che avremmo dovuto avere in ciascun anno per arrivare alla fine del triennio con la medesima crescita complessiva dei prezzi. Dovrà allora essere*

$$(1 + r)^3 = 1.047 \times 1.051 \times 1.027$$

e quindi

$$1 + r = \sqrt[3]{1.1303} = 1.0416;$$

il tasso di inflazione medio è stato del 4.16%*.*
In questo caso ciò che abbiamo fatto è stata la media geometrica dei tre numeri $(1+0.047)$*,* $(1+0.051)$*,* $(1 + 0.027)$*; il suo risultato è stato* $1 + r$*.*

Esempio 3. *Una persona desidera lastricare uno stretto camminamento del suo giardino, mediante grosse piastrelle quadrate di varie dimensioni, da sistemare in modo consecutivo, cioè la larghezza del lastrico è pari a quella di una piastrella. Telefona ad un venditore il quale risponde di avere* n *di tali piastrelle quadrate di lati* $x_1, \cdots, x_n$*. Il cliente si limita a chiedere la media di tali lunghezze.*

Appurato che sono sufficienti per i suoi scopi, chiede che gli vengano inviate e, poché il costo della spedizione dipende dal peso, chiede la media delle lunghezze anche a questo scopo. Quali saranno i due numeri che il venditore comunicherà?
Nel primo caso, dato il modo di costruzione del lastricato, la media m_1 *dovrà essere tale che*

$$n\,m_1 \;=\; x_1 + x_2 + \cdots + x_n,$$

cioè

$$m_1 \;=\; \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

è la media aritmetica di $x_1, x_2, \cdots, x_n$.
Supponendo, ovviamente, che le piastrelle siano dello stesso spessore e dello stesso materiale, il peso di ogni piastrella è proporzionale alla sua superficie, quindi la media m_2 *richiesta nel secondo caso dovrà essere tale che*

$$n\,m_2^2 \;=\; x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2,$$

cioè

$$m_2 \;=\; \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{n}}$$

è la media quadratica di $x_1, x_2, \cdots, x_n$.

Esempio 4. *Un circuito elettrico è costituito da tre resistenze di valori* R_1, R_2 *e* R_3 *rispettivamente, collegate nel modo seguente: le prime due sono in parallelo e la terza è in serie al blocco delle prime due. Ci chiediamo quale sia il valore medio delle tre resistenze.*
Anche in questo caso è necessario chiarire il problema: vogliamo determinare un valore R_m *tale che sostituendo alle tre resistenze date tre resistenze uguali di valore* R_m, *collegate nel modo descritto, rimanga immutato il valore* I *della corrente circolante.*
Per la legge di Ohm, detta E *la differenza di potenziale applicata al circuito, l'intensità di corrente* I *è data da*

$$I \;=\; \frac{E}{\frac{1}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}} + R_3},$$

da cui otteniamo

$$\frac{1}{\frac{1}{R_m}+\frac{1}{R_m}} + R_m \;=\; \frac{1}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}} + R_3,$$

cioè

$$R_m \;=\; \frac{2}{3}\left[\frac{1}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}} + R_3\right].$$

Esempio 5. *Riprendiamo l'Esempio 1 modificando i dati del problema nel modo seguente: un'auto percorre* M *km; i primi* m_1 *chilometri alla velocità* v_1, *i successivi* m_2 *alla velocità* v_2, *fino agli ultimi* m_k *percorsi alla velocità* v_k. *Ovviamente sarà* $m_1 + m_2 + \cdots + m_k = M$. *Ci chiediamo quale sia la sua velocità media sull'intero percorso, espressa in termini delle quantità* $v_1, \cdots, v_k$.
Poiché lo j*–esimo tratto di* m_j *chilometri* ($j = 1, 2, \cdots, k$) *è percorso nel tempo* $\dfrac{m_j}{v_j}$, *la velocità media è*

$$V \;=\; \frac{M}{\frac{m_1}{v_1} + \frac{m_2}{v_2} + \cdots + \frac{m_k}{v_k}},$$

e, posto $p_j = \frac{m_j}{M}$,

$$V \;=\; \frac{1}{\frac{p_1}{v_1} + \frac{p_2}{v_2} + \cdots + \frac{p_k}{v_k}},$$

cioè è la media armonica pesata di $v_1, \cdots, v_k$ *con i pesi* $p_1, \cdots, p_k$.

Questi semplici esempi mostrano come la richiesta di determinare la *media* di certe quantità $x_1, x_2, \cdots, x_n$ non abbia alcun senso se non riferita ad un particolare problema.
Questo ci porta al concetto generale di media come formulato da O. Chisini nel 1929.
Chisini mette in rilevo che *la ricerca di una media ha come scopo quello di semplificare una data questione sostituendo, in essa, a due o più quantità date una quantità sola che valga a sintetizzarle, senza alterare la visione d'insieme del fenomeno considerato.*
Formalmente, siano $x_1, x_2, \cdots, x_n$ grandezze omogenee di cui interessa la funzione

$$\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n) \ ;$$

se per un dato valore x è

$$\varphi(x, x, \cdots, x) \ = \ \varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n) \ ,$$

vuol dire che agli effetti del calcolo della funzione φ di cui ci stiamo occupando, tutto va come se le n variabili avessero il medesimo valore x.
Diremo che x è *la media di* $x_1, x_2, \cdots, x_n$ *agli effetti del calcolo della funzione* φ.

La definizione sopra data è però eccessivamente generale: potrebbe accadere che non esista una media o che ne esista più d'una.
Se, per esempio, fosse $\varphi(x_1, x_2) = x_1 - x_2$, è chiaro che dati x_1, x_2 con $x_1 \neq x_2$, non esiste alcuna media, in quanto per ogni x è $\varphi(x, x) = 0$.
D'altra parte se $\varphi(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$, allora sia $x_p = \sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2}{2}}$ che $x_n = -\sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2}{2}}$ sarebbero medie.
È quindi necessario fare delle restrizioni su φ e sull'insieme dove possono essere prese le variabili.
Supporremo d'ora in avanti che le variabili assumano i loro valori in un intervallo I (limitato o no) e la funzione

$$\varphi\colon \underbrace{I \times I \times \cdots \times I}_{n \ \mathit{volte}} \to \mathbb{R}$$

sia tale che, posto $\Phi(x) = \varphi(x, \cdots, x)$, è $\Phi : I \to \mathbb{R}$ iniettiva e avente lo stesso codominio di φ, cioè assuma tutti e soli gli stessi valori che vengono assunti da φ. In tal caso la funzione Φ è invertibile sul suo codominio (che, ripetiamo, coincide con quello di φ) e allora la media di $x_1, \cdots, x_n \in I$ relativa a φ esiste, è unica ed è data da

$$\Phi^{-1}[\varphi(x_1, \cdots, x_n)],$$

dove Φ^{-1} è la funzione inversa di Φ.

CAPITOLO iii

Cenni di calcolo delle probabilità

a cura del Prof. **Gianluigi Forti**

Supponiamo di compiere un esperimento, i cui esiti possibili siano in numero finito. L'insieme di tutti questi esiti lo indicheremo con Ω e lo chiameremo *spazio campione* o *spazio campionario* (finito).
Ogni parte di Ω (cioè ogni sottoinsieme di Ω) viene chiamato *evento*. Potremo chiamare *eventi elementari* quegli eventi costituiti da un solo punto di Ω.
Per rendere Ω uno *spazio di probabilità* procediamo come segue.
Se $\Omega = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ assegnamo a ciascun elemento $a_i \in \Omega$ un numero reale p_i, la *probabilità* di a_i, con le seguenti proprietà:

$$\begin{aligned} &\textit{per ogni} \quad i = 1, \cdots, n, \quad 0 \leqslant p_i \leqslant 1; \\ &p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1. \end{aligned}$$

La probabilità di un evento $A \subset \Omega$ è quindi la somma delle probabilità degli elementi di A:

$$P(A) = \sum_{i: a_i \in A} p_i .$$

Conseguenze immediate sono le seguenti:

- la probabilità dell'evento vuoto, cioè impossibile, è 0;
- la probabilità dell'intero spazio Ω, cioè dell'evento certo, è 1.

Esempio 6. *Tre cavalli,* A, B *e* C*, sono in gara; la probabilità di vittoria di* A *è il doppio di quella di* B *e la probabilità di vittoria di* B *è il doppio di quella di* C*. Calcolare* $P(A), P(B), P(C)$.
Posto $p = P(C)$*, è* $P(B) = 2p$ *e* $P(A) = 4p$*. Poiché deve essere*

$$P(A) + P(B) + P(C) = 4p + 2p + p = 7p = 1,$$

otteniamo

$$P(A) = \frac{4}{7}, \quad P(B) = \frac{2}{7}, \quad P(C) = \frac{1}{7}.$$

Se A e B sono due eventi incompatibili, cioè non possono accadere simultaneamente (questo, dal punto di vista insiemistico, è espresso dal fatto che la loro intersezione è vuota: $A \cap B = \emptyset$), allora la probabilità della loro unione, cioè la probabilità che ne accada almeno uno dei due, è data da

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

In generale, se $A_1, A_2, \dots, A_s$ sono eventi incompatibili, allora

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_s) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_s).$$

Se A e B sono due eventi qualsiasi (quindi non necessariamente incompatibili) abbiamo

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Consideriamo un caso particolare, e particolarmente semplice, di spazio di probabilità finito, quello in cui tutti gli eventi elementari sono *equiprobabili*. In tanti casi concreti questa è la situazione che si presenta in modo del tutto naturale; se pensiamo al lancio di una moneta non abbiamo alcun motivo di pensare che le due facce si comportino in maniera differente. Lo stesso accade per il lancio di un dado (non truccato) o per l'uscita di un numero alla roulette (sempre non truccata!).
In queste situazioni se $\Omega = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$, si ha che ogni a_i ha probabilità $1/n$. Allora la probabilità di un evento A sarà data dal rapporto fra il numero degli elementi di A (i cosiddetti *casi favorevoli*) e il numero degli elementi dell'intero spazio Ω (il numero dei *casi possibili*). Indicando con $|A|$ il numero degli elementi di A, abbiamo

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

Spesso il fatto che gli eventi elementari siano equiprobabili, viene indicato da espressioni linguistiche del tipo *completamente a caso* o, semplicemente, *a caso*.
La formula $P(A) = \dfrac{|A|}{|\Omega|}$ traduce quindi problemi di probabilità in problemi di conteggio.

Esempio 7. *Consideriamo il lancio di una moneta (testa o croce) e consideriamo come favorevole l'uscita di testa (*T*). Ovviamente* $P(T) = \dfrac{1}{2}$*. Supponiamo, ora, di effettuare* n *lanci; preso* $k \leqslant n$*, ci chiediamo quale sia la probabilità dell'evento* A *costituito dall'uscita di testa* k *volte.*
Cominciamo col determinare lo spazio campionario Ω*. Esso è l'insieme delle* n*–uple ordinate costituite dai due simboli* T *e* C *(croce), cioè l'insieme delle sequenze di* n *elementi del tipo*

$$\underbrace{T\,T\,C\,C\,C\,C\,T\,C\,C\,T}_{n \text{ volte}}.$$

Allora la cardinalità di Ω *(cioè il numero dei suoi elementi) è il numero di queste sequenze. Ma queste non sono altro che le disposizioni con ripetizione di* 2 *oggetti di classe* n *e il loro numero sappiamo essere uguale a* 2^n*. Quindi*

$$|\Omega| = 2^n.$$

Il numero dei casi favorevoli è quello delle sequenze precedenti che presentano k *volte* T*. Ma ciò significa semplicemente scegliere* k *posti fra gli* n *e assegnare* T *a tali posti. Allora il numero cercato è quello dei diversi modi con cui possiamo scegliere* k *oggetti fra* n*, cioè*

$$|A| = \binom{n}{k}.$$

In conclusione, la probabilità cercata, che indichiamo con $P(n, k)$*, è*

$$P(n, k) = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Esempio 8 (I compleanni). *Se in un'aula si trovano* n *studenti, qual'è la probabilità che almeno due fra di essi abbiano lo stesso compleanno?*
Per semplificare le cose supponiamo che ogni anno abbia 365 *giorni. Se* A *è l'evento di cui cerchiamo la probabilità, allora il suo complementare* A^c *è l'evento comunque scelti due studenti, essi hanno compleanni in giorni differenti. Calcoliamo* $P(A^c)$*. Poiché la probabilità che un dato giorno sia il compleanno di uno degli studenti è uguale quale che sia il giorno, siamo nel caso di equiprobabilità e basterà contare il numero dei casi possibili e la cardinalità di* A^c*. Le possibilità sono naturalmente*

365^n, *il numero delle disposizioni con ripetizione di* 365 *oggetti (i giorni) di classe* n *(gli studenti). La cardinalità di* A^c *è invece data dal numero delle disposizioni (senza ripetizione!) di* 365 *oggetti di classe* n, *cioè*

$$|A^c| = 365 \cdot 364 \dots (365 - n + 1) = \frac{365!}{n!},$$

e quindi

$$P(A^c) = \frac{365!}{n!} \frac{1}{365^n}$$

e

$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{365!}{n!} \frac{1}{365^n}.$$

Si può facilmente vedere che per $n = 23$ *è* $P(A) = 0.507$, *per* $n = 70$ *è* $P(A) = 0.999$.

Probabilità condizionata.

Sia E un evento in uno spazio campionario Ω, con $P(E) > 0$. La probabilità che un evento A si verifichi una volta verificatosi l'evento E, la *probabilità condizionata di* A *dato* E, indicata con $P(A|E)$, è definita nel modo seguente

$$P(A|E) = \frac{P(A \cap E)}{P(E)}.$$

Nel caso di uno spazio con probabilità equidistribuita abbiamo

$$P(A|E) = \frac{|A \cap E|}{|E|}.$$

Esempio 9. *Si lanci una coppia di dadi. Se la somma è* 6, *determinare la probabilità che uno dei dadi abbia dato l'esito* 2.
L'evento E *condizionante è*

$$E = \{ \text{ la somma è } 6 \ \} = \{ \ (1,5), \ (2,4), \ (3,3), \ (4,2), \ (5,1) \ \},$$

mentre l'evento che ci interessa è

$$A = \{ \text{ si presenta } \quad 2 \quad \text{ su almeno un dado } \}.$$

Dobbiamo calcolare $P(A|E)$.
Poiché lo spazio campionario delle coppie di valori dati dai due dadi è con probabilità equidistribuita, abbiamo $P(A|E) = \dfrac{|A \cap E|}{|E|}$.
$A \cap E = \{ \ (2,4), (4,2) \ \}$, *quindi*

$$P(A|E) = \frac{2}{5}.$$

Si dice che un evento B è *indipendente* da un evento A se la probabilità che si verifichi B non è influenzata dal fatto che A si sia verificato oppure no. In altre parole, se $P(B|A) = P(B)$. Quindi in questo caso

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Consideriamo, ora, un caso simile a quello dell'Esempio 7 nella pagina precedente, ma un po' più generale.
Abbiamo un evento A di probabilità p (per esempio, lanciando un dado l'evento A sia *esce un numero minore o uguale a* 2; in questo caso è $p = 1/3$) e ci chiediamo, ripetendo il nostro esperimento n volte, quale sia la probabilità che si abbia A per k volte, $k \leqslant n$. L'evento sfavorevole, cioè che non si abbia A e quindi si abbia A^c, ha probabilità $1 - p$, infatti

$$A \cup A^c = \Omega \quad e \quad P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c) = P(\Omega) = 1.$$

Poiché ogni ripetizione dell'esperimento è indipendente da quelli precedentemente effettuati, abbiamo che la probabilità di una sequenza di k esiti A e $n-k$ esiti A^c è il prodotto delle probabilità dei singoli esiti, cioè

$$p^k(1-p)^{n-k}.$$

Come nell'esempio precedente, di sequenze del tipo indicato ce ne sono $\binom{n}{k}$ e sono fra loro incompatibili, quindi la probabilità che esca una di tali sequenze è la somma delle probabilità di ciascuna di esse che, indicata ancora con $P(n,k)$, è

$$P(n,k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Fissato n, $P(n,k)$ è una funzione definita su $\{0,1,\cdots,k\}$ a valori in $\mathbb{R}$: la *distribuzione di probabilità binomiale.*

Variabili casuali.

Una *variabile casuale* X su uno spazio campionario finito $\Omega = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ è una funzione da Ω in $\mathbb{R}$:

$$X\colon \Omega \to \mathbb{R}.$$

Poniamo $X(\Omega) = \{\, x_1, x_2, \ldots, x_n \,\}$ e rendiamo $X(\Omega)$ uno spazio di probabilità definendo la probabilità di x_i come

$$f(x_i) = P(X = x_i).$$

Questa funzione f è detta *distribuzione di probabilità* di X.
Il *valor medio* o *speranza matematica* o *valore atteso* o *valore sperato* di X, indicato con $E(X)$ o μ_X, è definito da

$$E(X) = \mu_X = x_1 f(x_1) + x_2 f(x_2) + \cdots + x_n f(x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i),$$

cioè è la media aritmetica dei numeri x_i ponderati con le loro probabilità $f(x_i)$.
La *varianza* di X è definita da

$$Var(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu_X)^2 f(x_i) = E\big((X - \mu_X)^2\big).$$

Lo *scarto quadratico medio* di X è

$$\sigma_X = \sqrt{Var(X)}.$$

Per il calcolo della varianza può essere utile il seguente semplice teorema.

Teorema 1.

$$Var(X) = E(X^2) - \mu_X^2.$$

Dimostrazione. Ricordando che $\sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i) = \mu_X$ e $\sum_{i=1}^{n} f(x_i) = 1$, otteniamo

$$Var(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu_X)^2 f(x_i) = \sum_{i=1}^{n} [x_i^2 f(x_1) - 2\mu_X x_i f(x_i) + \mu_X^2 f(x_i)] =$$
$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 f(x_1) - 2\mu_X^2 + \mu_X^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 f(x_1) - \mu_X^2 = E(X^2) - \mu_X^2.$$

□

CAPITOLO iv

Limiti fondamentali e limiti notevoli

Qui di seguito vengono esposti i limiti ai quali si ricorre più frequentemente. Si tenga presente che con il simbolo "$\stackrel{(X)}{=}$, $X = A, B, \dots, G$" indicheremo il limite corrispondente in questo elenco cui si fa riferimento nell'esercizio, mentre con "$\stackrel{(H)}{=}$" indicheremo l'utilizzo del teorema di de l'Hôpital.

A. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1, \quad x$ in radianti

B. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}, \quad x$ in radianti

C. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\dfrac{\alpha}{x}\right)^x = e^{\alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$

D. $\lim\limits_{x\to 0} (1+\alpha x)^{1/x} = e^{\alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$

E. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$

F. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x - 1}{x} = \ln a, \quad a>0$

G. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^{\alpha} - 1}{x} = \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}$

Parte II.

Prove d'esame

TEMA 1

Prima prova in itinere a.a. 2001/02
13 novembre 2001

Esercizio 1.1

Nel piano dotato di un riferimento cartesiano ortogonale Oxy, assegnato il fascio di circonferenze di equazione $x^2 + y^2 + 2\lambda x - 1 = 0$, individuare

A) l'equazione della retta dei centri,

B) l'equazione dell'asse radicale,

C) il valore del parametro λ cui corrisponde la circonferenza passante per il punto di coordinate $(1, 0)$,

D) il valore del parametro λ cui corrispondono le circonferenze tangenti la retta di equazione $x + y = \sqrt{2}$.

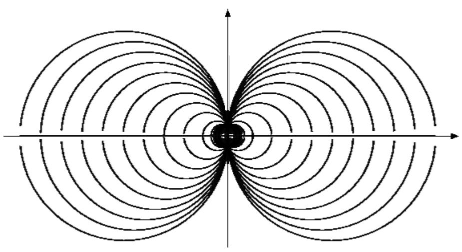
✍ Soluzione

A) i centri hanno coordinate $(-\lambda, 0)$ dunque appartengono alla retta di equazione $y = 0$;

B) $x = 0$;

C) deve essere $1^2 + 0^2 + \lambda - 1 = 0$ da cui $\lambda = 0$;

D) imponendo la tangenza $\begin{cases} x^2 + y^2 + 2\lambda x - 1 = 0 \\ y = -x + \sqrt{2} \end{cases}$, l'equazione $2x^2 + 2(\lambda - \sqrt{2})x + 1 = 0$ deve avere una sola soluzione (doppia); questo accade se e solo se $(\lambda - \sqrt{2})^2 - 2 = 0$ cioè $\lambda = 0, \quad \lambda = 2\sqrt{2}$.



Esercizio 1.2

Risolvere la disequazione $\dfrac{x - 2\sqrt{x}}{x - 2} \leqslant 1$.

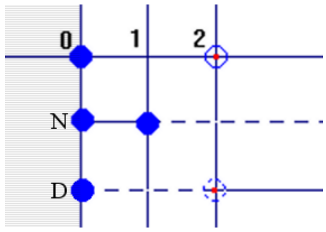
✍ Soluzione

Deve essere $x \geqslant 0$ perché abbia senso il numeratore e $x \neq 2$ perché abbia senso il denominatore. La disequazione data equivale alla seguente

$$2\frac{1-\sqrt{x}}{x-2} \leqslant 0.$$

Consideriamo i segni del numeratore e del denominatore:

$$\begin{aligned} N :\ &= 1-\sqrt{x} \geqslant 0 \qquad \text{per } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ D :\ &= x-2 > 0 \qquad \text{per } x > 2 \end{aligned}$$



e riportiamoli su un grafico (la linea continua indica il segno positivo, la linea tratteggiata il segno negativo).
Deduciamo allora che il rapporto è negativo o nullo per $x \in [0,1] \cup (2,+\infty)$

Esercizio 1.3

Dei due limiti seguenti, uno esiste e l'altro non esiste. Individuare quello che esiste e calcolarlo e precisare i motivi della non esistenza dell'altro.

$$A = \lim_{n\to+\infty} \sin\left(\frac{6n^3+n^2+4}{6n^2}\pi\right) \qquad B = \lim_{n\to+\infty} \sin\left(\frac{12n^3+n^2+4}{6n^2}\pi\right)$$

✍ Soluzione

$A = \lim_{n\to+\infty} \sin\left(\frac{6n^3+n^2+4}{6n^2}\pi\right) = \lim_{n\to+\infty} \sin\left(n\pi + \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3n}\right)$ non esiste (la successione costituita dai termini di posto pari tende a $1/2$, quella costituita dai termini di posto dispari a $-1/2$: infatti, a meno di una quantità che tende a 0, l'argomento del sin vale $n\pi + \frac{\pi}{6}$)
$B = \lim_{n\to+\infty} \sin\left(\frac{12n^3+n^2+4}{6n^2}\pi\right) = \lim_{n\to+\infty} \sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3n}\right) = 1/2$ (infatti, a meno di una quantità che tende a 0, l'argomento del sin vale $2n\pi + \dfrac{\pi}{6}$).

Esercizio 1.4

Calcolare i seguenti limiti: $\quad A = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{n\cos\left(2/\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n}-3}, \qquad B = \lim_{n\to+\infty} \left(n^2 - \left(1+n^2\right)\cos\left(4/n\right)\right).$

✍ Soluzione

$$A = \lim_{n\to+\infty} \frac{n\cos\left(\frac{2}{\sqrt{n}}\right)}{\sqrt{n}-3} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}\frac{\cos\left(\frac{2}{\sqrt{n}}\right)}{1-\frac{3}{\sqrt{n}}} = +\infty$$

$$B = \lim_{n\to+\infty} n^2\left(1-\cos\left(\frac{4}{n}\right)\right) - \cos\left(\frac{4}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-\cos\left(\frac{4}{n}\right)}{\frac{1}{n^2}} - \cos\left(\frac{4}{n}\right) =$$

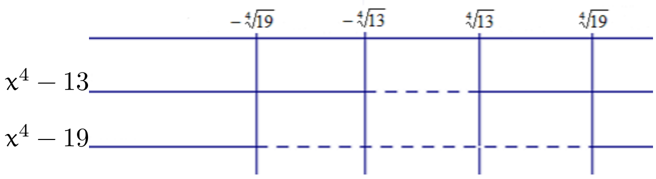
$$= \lim_{n\to+\infty} 16\,\frac{1-\cos\left(\frac{4}{n}\right)}{\left(\frac{4}{n}\right)^2} - \cos\left(\frac{4}{n}\right) \overset{(B)}{=} 16\,\frac{1}{2} - 1 = 7$$

Esercizio 1.5

Risolvere la disequazione $|x^4 - 13| \geqslant |x^4 - 19|$.

✍ Soluzione

Si chiede che la distanza di x^4 da 13 sia maggiore o uguale da quella da 19. Dunque deve essere $x^4 \geqslant 16$, cioè $x \in (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$.
Qualora non si sia notato questo, è comunque possibile applicare la regola generale: studiamo dapprima i segni delle espressioni che si trovano all'interno del segno di modulo e riportiamoli su uno stesso grafico (la linea continua indica il segno positivo, la linea tratteggiata il segno negativo):



Notiamo che l'asse reale risulta diviso in cinque intervalli:
$x \leqslant -\sqrt[4]{19}$; $\quad -\sqrt[4]{19} < x \leqslant -\sqrt[4]{13}$; $\quad -\sqrt[4]{13} < x \leqslant \sqrt[4]{13}$; $\quad \sqrt[4]{13} < x \leqslant \sqrt[4]{19}$; $\quad x > \sqrt[4]{19}$
in ognuno dei quali l'equazione equivale a uno dei seguenti sistemi:

$$A := \begin{cases} x \leqslant -\sqrt[4]{19} \ \cup \ x > \sqrt[4]{19} \\ x^4 - 13 \geqslant x^4 - 19 \end{cases}$$

$$B := \begin{cases} -\sqrt[4]{19} < x \leqslant -\sqrt[4]{13} \ \cup \ \sqrt[4]{13} < x \leqslant -\sqrt[4]{19} \\ x^4 - 13 \geqslant 19 - x^4 \end{cases}$$

$$C := \begin{cases} -\sqrt[4]{13} < x \leqslant \sqrt[4]{13} \\ 13 - x^4 \geqslant 19 - x^4 \end{cases}$$

Risolvendo i tre sistemi si ha per le soluzioni lo schema seguente:

A: $x \leqslant -\sqrt[4]{19} \ \cup \ x > \sqrt[4]{19}$

B: $-\sqrt[4]{19} < x \leqslant -2 \cup 2 \leqslant x \leqslant \sqrt[4]{19}$

C: nessuna soluzione

Quindi le soluzioni della disequazione data sono $x \in (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$

Esercizio 1.6

Assegnate le funzioni $f(x) = \sin(\pi x)$ e $g(x) = \sqrt{\log_{1/2}(3x)}$, stabilire se esistono, e in caso affermativo calcolare, i valori $(f \circ g)(1/6)$ e $(g \circ f)(1/6)$.

✍ Soluzione

$$(f \circ g)(1/6) = \sin\left(\pi\sqrt{\log_{1/2}\left(3\frac{1}{6}\right)}\right) = \sin\left(\pi\sqrt{1}\right) = 0$$

$$(g \circ f)(1/6) = \sqrt{\log_{1/2}\left(3\sin\left(\pi\frac{1}{6}\right)\right)}$$ non esiste perché si ha $\log_{1/2}(3/2) < 0$

Esercizio 1.7

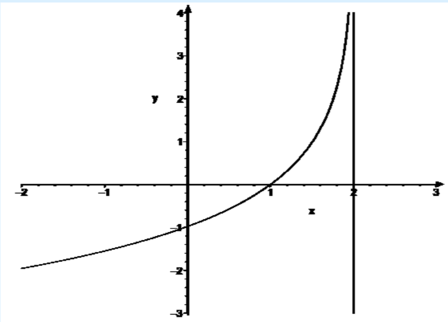
Assegnati gli intervalli $I = [-1, +\infty)$ e $J = (-3, -2]$, determinare estremo inferiore ed estremo superiore, specificando se siano anche rispettivamente minimo e massimo, di ciascuno dei seguenti insiemi: $I + J$, $I \cdot J$, I/J (dove, per esempio, si intende che $I + J$ è l'insieme di tutti i numeri che si ottengono sommando un qualunque numero di I con un qualunque numero di J).

✍ Soluzione

$$\begin{array}{llcl@{\qquad}llcl} \inf & \{I+J\} & = & -4 & \sup & \{I+J\} & = & +\infty \\ \inf & \{I \cdot J\} & = & -\infty & \sup & \{I \cdot J\} & = & 3 \\ \inf & \{I/J\} & = & -\infty & \sup & \{I/J\} & = & 1/2 \text{ (massimo)} \end{array}$$

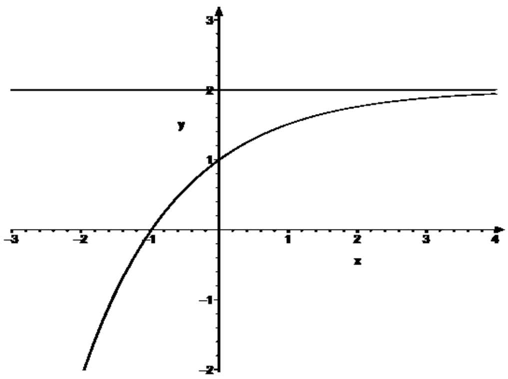
Esercizio 1.8

Quello in figura è il diagramma della funzione $y = f(x)$.

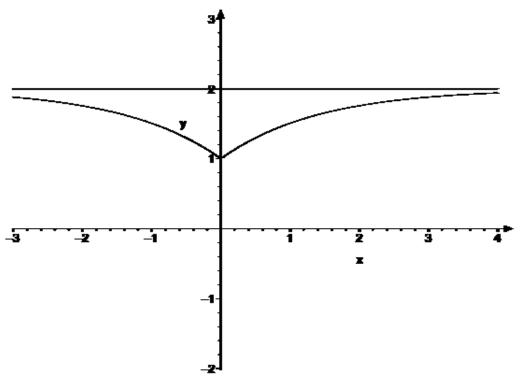


Tracciare il diagramma della funzione $x = f^{-1}(y)$ e quindi quello della funzione $z = f^{-1}(|y|)$.

✍ Soluzione



(a) $x = f^{-1}(y)$



(b) $z = f^{-1}(|y|)$

TEMA 2

Seconda prova pre-esame a.a. 2001/02
7 gennaio 2002

Esercizio 2.1

Determinare la derivata di ordine 100 della funzione $\quad f(x) = (x^2 - x)^{-1}$.

✍ Soluzione

Si ha $\quad (x^2 - x)^{-1} = (x-1)^{-1} - x^{-1} \qquad$ da cui $\qquad f^{(100)}(x) = 100!\big((x-1)^{-101} - x^{-101}\big)$.

Esercizio 2.2

Determinare una primitiva sull'intervallo $(0,1)$ della funzione $\quad f(x) = \dfrac{\sin^2(2x)}{\sin x}$.

Calcolare quindi $\quad I = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\sin^2(2x) + \sin(x^3)}{|\sin x|}\, dx\,.$

✍ Soluzione

f è una funzione dispari infatti $f(-x) = \dfrac{\sin^2(-2x)}{\sin(-x)} = \dfrac{\sin^2(2x)}{-\sin x} = -f(x)$.

Una primitiva di f su $(0,1)$ è

$$G(x) = \int \frac{\sin^2(2x)}{\sin x}\, dx = \int \frac{4\sin^2 x \cos^2 x}{\sin x}\, dx = 4\int \sin x \cos^2 x\, dx \overbrace{=\!=\!=}^{\substack{t:=\cos x\\ dt=-\sin x\, dx}}$$

$$= -4\int t^2\, dt = -\frac{4}{3}\cos^3 x + k, \quad k \in \mathbb{R}$$

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{\sin^2(2x)+\sin(x^3)}{|\sin x|}\, dx = 2\int_0^1 f(x)\, dx + \int_{-1}^{1} \frac{\sin x^3}{|\sin(x)|}\, dx =$$

$$= 2\left[\left(-\frac{4}{3}\right)\cos^3 x\right]_0^1 + 0 = \frac{8}{3}\left(1 - \cos^3 1\right).$$

Esercizio 2.3

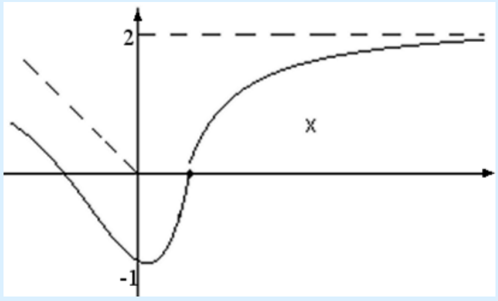
Calcolare il seguente limite: $L = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{6n+5}{6n-5}\right)^{3n}$.

✍ Soluzione

$$L = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{6n+5}{6n-5}\right)^{3n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\left(1+\frac{5/2}{3n}\right)^{3n}}{\left(1+\frac{-5/2}{3n}\right)^{3n}} \overset{(C)}{=} \frac{e^{5/2}}{e^{-5/2}} = e^5$$

Esercizio 2.4

Quello in figura è il diagramma della funzione f. Tracciare, sullo stesso sistema di assi cartesiani, il diagramma della funzione $f^{1/3}$.



✍ Soluzione

Vedi fig. 2.1

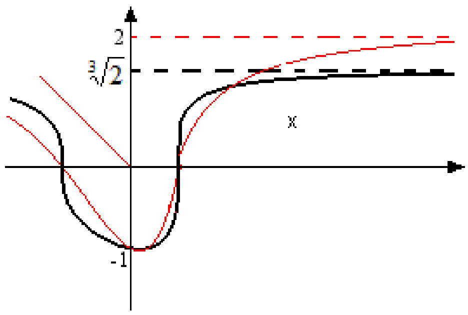


Figura 2.1. f *in rosso e* $f^{1/3}$ *in nero*

Esercizio 2.5

Studiare la funzione $y = f(x) = \frac{x}{2} + \arctan\left(\frac{x}{x-2}\right)$.

✍ Soluzione

- Dominio: $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$
- Limiti agli estremi del dominio: $\lim_{x\to\mp\infty} f(x) = \mp\infty$, $\lim_{x\to 2^\mp} f(x) = 1 \mp \frac{\pi}{2}$
- Equazioni degli eventuali asintoti:

$$\lim_{x\to\mp\infty}\frac{f(x)}{x} = \frac{1}{2}$$
$$\lim_{x\to\mp\infty} f(x) - \frac{x}{2} = \frac{\pi}{4}$$
$$y = \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \quad \text{asintoto a } \pm\infty$$

- Derivata prima e suoi limiti agli estremi del suo dominio:

$$f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{2}{2x^2 - 4x + 4}; \qquad \lim_{x \to \mp\infty} f'(x) = \frac{1}{2}; \qquad \lim_{x \to 2} f'(x) = 0$$

- Eventuali punti estremanti: $x = 0$ è punto di massimo relativo.
- Derivata seconda: $f''(x) = 2\dfrac{4x-4}{(2x^2-4x+4)^2}$
- Verso della concavità ed eventuali punti di flesso:

  f è concava su $(-\infty, 1]$, convessa su $[1, 2)$ e su $(2, \infty)$;

  $x = 1$ è punto di flesso.
- Diagramma qualitativo (non necessariamente in scala): vedi fig. 2.2.

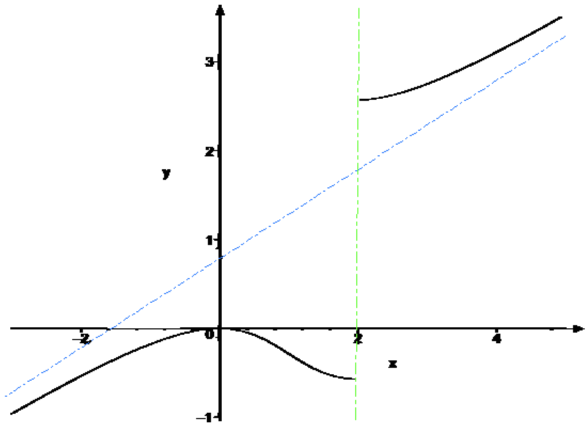


Figura 2.2. $y = f(x) = \dfrac{x}{2} + \arctan\dfrac{x}{x-2}$

Esercizio 2.6

Quante (non quali!) sono le soluzioni dell'equazione $2x + 1 - 4\arctan x = 0$?
Risposta e sintetica giustificazione

✍ Soluzione

Confrontando i diagrammi di $f(x) = 2x + 1$ e di $g(x) = 4\ \arctan\ x$, si constata subito che essi si intersecano in uno e un solo punto di ascissa negativa; poiché, per $x \geqslant 0$, si ha $f'(x) = g'(x)$ se e solo se $x = 1$ e si ha $f(1) = 3 < \pi = g(1)$, vi sono altre 2 intersezioni in punti di ascissa positiva. In totale l'equazione ha tre soluzioni distinte.

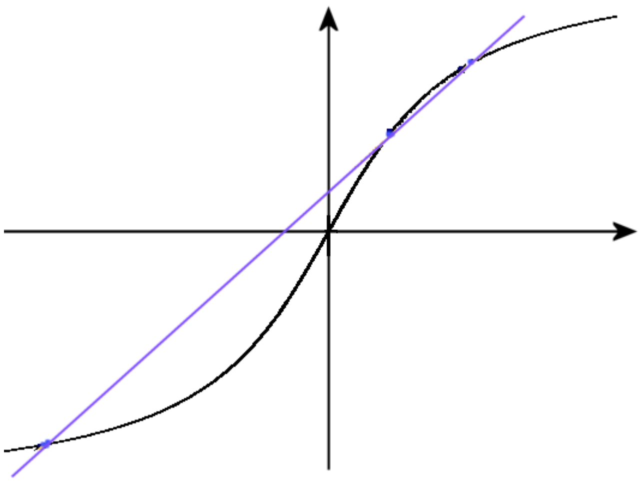


Figura 2.3. $y = 2x + 1$ *e* $y = 4 \arctan x$

TEMA 3

Prova scritta del 9 gennaio 2002

Esercizio 3.1

Risolvere la disequazione $\log_2 |x-1| \leqslant 6 + \log_{1/2}\left((x-1)^2\right)$.

✍ Soluzione

Dapprima osserviamo che la presenza dei logaritmi impone $|x-1| > 0$ e $(x-1)^2 > 0$ ossia $x \neq 1$.
Dobbiamo allora risolvere

$$\begin{aligned}\log_2 |x-1| \leqslant 6 - \log_2 (x-1)^2 &\Leftrightarrow \log_2\left(|x-1|(x-1)^2\right) \leqslant 6 \quad \Leftrightarrow \log_2 |x-1|^3 \leqslant 6 \quad \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow |x-1|^3 \leqslant 2^6 \,,\ x \neq 1 \quad \Leftrightarrow |x-1| \leqslant 2^2 \,,\ x \neq 1 \quad \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -3 \leqslant x \leqslant 5 \,,\ x \neq 1\end{aligned}$$

Pertanto la soluzione è $x \in [-3, 1) \cup (1, 5]$.

Esercizio 3.2

Calcolare il seguente limite: $L = \lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{\log\left(e + \sin^2 x\right) + \cos x}{\tan^2 x}$ (il logaritmo è inteso in base "e").

✍ Soluzione

$$L = \lim_{x\to\pi} \frac{\log\left(e+\sin^2 x\right) + \cos x}{\tan^2 x} \overset{(t:=x-\pi)}{=\!=\!=} \lim_{t\to 0} \frac{\log\left(e+\sin^2(t+\pi)\right) + \cos(t+\pi)}{\tan^2(t+\pi)} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\log\left(e+\sin^2 t\right) - \cos t}{\tan^2 t} = \lim_{t\to 0} \cos^2 t \cdot \frac{\log e + \log\left(1+\dfrac{\sin^2 t}{e}\right) - \cos t}{\sin^2 t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \cos^2 t \cdot \left(\frac{1-\cos t}{t^2} \cdot \frac{t^2}{\sin^2 t} + \frac{\log\left(1+\dfrac{\sin^2 t}{e}\right)}{\dfrac{\sin^2 t}{e}} \cdot \frac{1}{e} \right) \overset{(B)(E)}{=\!=\!=} 1 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{e}\right)$$

Esercizio 3.3

Determinare una primitiva G sull'intervallo $\left[0, \dfrac{\pi}{6}\right]$ della funzione $f(x) = \dfrac{2^{\tan x}}{1-\sin^2 x}$.

Calcolare quindi $I = \displaystyle\int_0^{\pi/6} f(x)\,dx$.

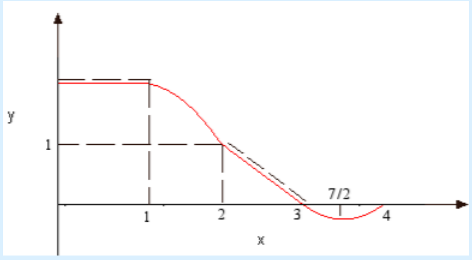
✍ Soluzione

$$G(x) = \int \frac{2^{\tan x}}{1-\sin^2 x}\,dx = \int \frac{2^{\tan x}}{\cos^2 x}\,dx \underbrace{=\!=\!=}_{\substack{t:=\tan x\\ dx/\cos^2 x = dt}} \int 2^t\,dt = \frac{2^t}{\ln 2} \overset{t=\tan x}{=\!=} \frac{2^{\tan x}}{\ln 2} + k, \quad k \in \mathbb{R}$$

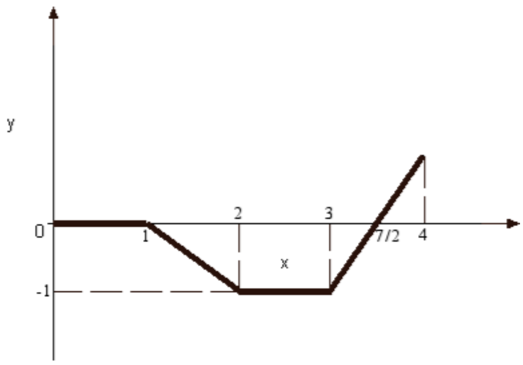
$$I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} f(x)\,dx = G\left(\frac{\pi}{6}\right) - G(0) = \frac{2^{1/\sqrt{3}} - 1}{\ln 2}$$

Esercizio 3.4

Sia $f\colon (0,4) \to \mathbb{R}$ la funzione derivabile il cui diagramma è qualitativamente quello in figura (i tratti di diagramma affiancati da tratteggio sono rettilinei). Tracciare un diagramma plausibile di f'.



✍ Soluzione



Esercizio 3.5

1. Studiare la funzione f così definita su tutto $\mathbb{R}$: $f(x) = \begin{cases} (|x|-x)e^{(x+1)/x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$.

   Stabilire se f è derivabule in $x = 0$, calcolando $f'(0)$ in caso di risposta affermativa e motivando la risposta.

2. Per quali interi positivi k vale la relazione $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^k} = 0$?

3. Qual è l'espressione analitica della funzione composta $f \circ f$?

✍ Soluzione

1. Osserviamo che

$$f(x) = \begin{cases} -2\,x\,e^{(x+1)/x} & x < 0 \\ 0 & x \geqslant 0 \end{cases}$$

❦ Limiti:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 \qquad \lim_{x\to0} = 0 = f(0)$$

❦ Equazioni degli eventuali asintoti:

- ❧ Asintoto orizzontale a $+\infty$: $y = 0$
- ❧ Ricerca dell'eventuale asintoto obliquo: $$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = -2e := m$$ $$\lim_{x\to-\infty} f(x) + 2ex = -2e := q$$

  Asintoto obliquo a $-\infty$: $y = -2ex - 2e$

❦ Derivata prima:

$$f'(x) = \begin{cases} -2\,\dfrac{x-1}{x}\,e^{(x+1)/x} & x < 0 \\ 0 & x \geqslant 0 \end{cases}$$

❦ Esiste, ed in caso affermativo quanto vale, $f'(0)$?

$$\lim_{x\to0^-} f'(x) = \lim_{x\to0^+} f'(x) = 0 = f'(0) \qquad \text{essendo } f \text{ continua .}$$

❦ Derivata seconda:

$$f''(x) = \begin{cases} \dfrac{-2}{x^3}\,e^{(x+1)/x} & x < 0 \\ 0 & x \geqslant 0 \end{cases}$$

❦ Diagramma qualitativo: vedi fig. 3.1.

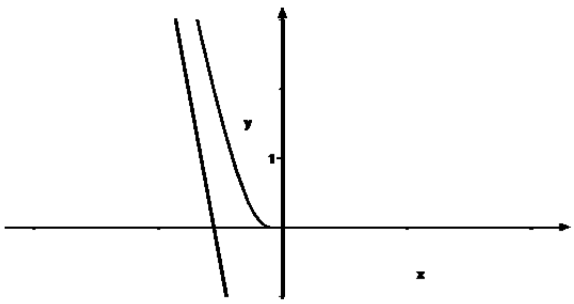


Figura 3.1. $f(x)$

2. Per quali interi positivi k vale la relazione $\lim_{x\to0} \dfrac{f(x)}{x^k} = 0$?

   Per ogni valore di k.

3. Qual è l'espressione analitica della funzione composta $f \circ f$?

$$(f \circ f)\,(x) \equiv 0$$

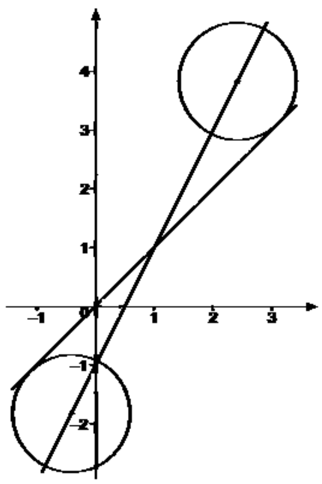
TEMA 4

Prova scritta del 22 febbraio 2002

Esercizio 4.1

Nel piano dotato di un riferimento cartesiano ortogonale Oxy, stabilire quali punti della retta di equazione $y - 2x + 1 = 0$ sono centri di circonferenze di raggio 1 tangenti la retta di equazione $y - x = 0$.

✍ Soluzione



I punti $P \equiv (x_P, y_P)$ cercati appartengono alla retta $y-2x+1=0$, pertanto $y_P - 2x_P + 1 = 0$. Affinché siano centri di circonferenze di raggio 1 tangenti la retta r di equazione $y - x = 0$ dovranno distare da tale retta 1. Pertanto deve essere

$$d(P, r) = \left| \frac{y_P - 2x_P + 1}{\sqrt{1+1}} \right| = 1$$

da cui $x_P = 1 \pm \sqrt{2}$. In conclusione i punti cercati sono $(1+\sqrt{2}, 1+2\sqrt{2})$, $\quad (1-\sqrt{2}, 1-2\sqrt{2})$.

Esercizio 4.2

Calcolare $\quad L = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{\log(3n^4 - 8)}{\log(5n^2+6)}$.

✍ Soluzione

$$L = \lim_{n\to+\infty} \frac{\log(3n^4 - 8)}{\log(5n^2+6)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\log(n^4) + \log\left(3 - \dfrac{8}{n^4}\right)}{\log(n^2) + \log\left(5 - \dfrac{6}{n^2}\right)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{4\log n}{2\log n} = 2.$$

Esercizio 4.3

Determinare una primitiva G della funzione $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}+1}{x-\sqrt{x}}$ sull'intervallo $[2,4]$.

Calcolare quindi $I = \displaystyle\int_2^4 \left(f(x) + \sin^5(x-3)^7\right)dx$.

✍ Soluzione

$$G(x) = \int \frac{\sqrt{x}+1}{x-\sqrt{x}}\,dx \ \underset{\overbrace{\left(\substack{\sqrt{x}=t\\ dx=2t\,dt}\right)}}{=\!=\!=} \int \frac{t+1}{t^2-t}2t\,dt =$$

$$= 2\int \frac{t+1}{t-1}\,dt \ = \ 2\int \left(1 + \frac{2}{t-1}\right)\,dt \ \overset{(t=\sqrt{x})}{=\!=} \ 2\left(\sqrt{x} + 2\log(\sqrt{x}-1)\right) + k, \quad k \in \mathbb{R}$$

$$I = \int_2^4 f(x)\,dx + \int_2^4 \sin^5(x-3)^7\,dx =$$

(la funzione $g(x) = \sin^5(x-3)^7$ è dispari rispetto alla variabile $x-3$)

$$= \int_2^4 f(x)\,dx + 0 = G(4) - G(2) \ = \ 2\sqrt{2}\left(\sqrt{2} - 1 - \sqrt{2}\log(\sqrt{2}-1)\right)$$

Esercizio 4.4

Sia $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ una successione monotona di numeri reali e, per ogni n, sia $b_n = a_n^2$. La successione $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ è necessariamente monotona? Giustificare la risposta

✍ Soluzione

No, basta considerare, per esempio, $a_n = n - 10$, $n = 1, 2, \ldots$.

Esercizio 4.5

Studiare la funzione f così definita: $f(x) = x - 1 + \sqrt{x^2 - x - 2}$ e indicare il dominio della funzione $f \circ f$.

✍ Soluzione

- Dominio: $(-\infty, -1] \cup [2, +\infty)$.
- Segno: $f(x) > 0$ per $x \geqslant 2$, $f(x) < 0$ per $x \leqslant -1$.
- Limiti:
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\frac{1}{2}, \qquad \lim_{x\to-1^-} f(x) = -2 = f(-1), \qquad \lim_{x\to 2^+} f(x) = 1 = f(2), \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$
- Equazioni degli asintoti:
$$y = -\frac{1}{2} \quad \text{è asintoto orizzontale per } x \to -\infty;$$
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} 1 + \sqrt{1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}} = 2,$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - 2x = -1 + \lim_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}} - 1\right) =$$
$$= -1 + \lim_{x\to+\infty} x\left(-\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}\right)\frac{\sqrt{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}} - 1}{-\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}} \overset{(G)}{=\!=} -\frac{3}{2},$$
$$y = 2x - 3/2 \quad \text{è asintoto obliquo per } x \to +\infty.$$

❦ Eventuali punti di non derivabilità: $x = 1, \quad x = 2.$

❦ Derivata prima: $f'(x) = 1 + \dfrac{2x - 1}{2\sqrt{x^2 - x - 2}}$.

❦ Deduzioni sulla monotonia di f:

f è decrescente per $x \leqslant -1$,

f è crescente per $x \geqslant 2$.

❦ Derivata seconda: $f''(x) = -\dfrac{9}{4(x^2 - x - 2)^{3/2}}$.

❦ Deduzioni sul verso della concavità di f:

f è concava per $x \leqslant -1$ e per $x \geqslant 2$.

❦ Diagramma qualitativo di f: vedi fig. 4.1.

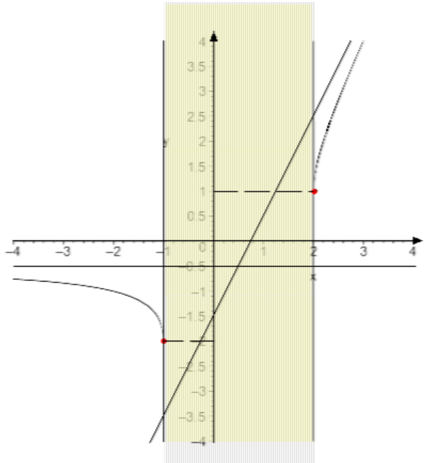


Figura 4.1. $f(x) = x - 1 + \sqrt{x^2 - x - 2}$

❦ Dominio della funzione $f \circ f$: $[-2, -1] \cup [11/5, +\infty)$ (si tratta di unire le soluzioni della disequazione $f(x) \leqslant -1$ a quelle della disequazione $f(x) \geqslant 2$).

TEMA 5

Prova scritta del 12 aprile 2002

Esercizio 5.1

Un treno ha coperto una distanza di *200 km*, correndo per metà tragitto alla velocità di *50 km*/h e per l'altra metà alla velocità di *100 km*/h. Qual è stata la velocità media sull'intero tragitto?

✍ Soluzione

Il treno percorre i primi 100 km in 2 ore e gli ultimi 100 km in 1 ora perciò la velocità media è 200/3=66, $\overline{6}$ km/h

Esercizio 5.2

Determinare una primitiva G su $(0, +\infty)$ della funzione $f(x) = \dfrac{(1 + \log x)^4}{2x}$ (il logaritmo è inteso in base "e").

Calcolare quindi $I = \displaystyle\int_{1/e}^{1} f(x)dx$.

✍ Soluzione

$$G(x) = \int \frac{(1 + \log x)^4}{2x}\,dx \overset{\overbrace{\substack{1+\log(x)=t \\ dx/x=dt}}}{=\!=\!=\!=} \frac{1}{2}\int t^4\,dt = \frac{1}{2}\frac{t^5}{5} = \frac{(1 + \log x)^5}{10} + k, \quad k \in \mathbb{R}$$

$$I = G(1) - G(1/e) = 1/10$$

Esercizio 5.3

Determinare tutte le soluzioni della disequazione $\dfrac{3|x|}{\sqrt{x+2}+x} \geqslant 1.$

✍ Soluzione

Dapprima osserviamo che la radice impone $x \geqslant -2$ e che la disequazione può essere soddisfatta solo se il denominatore è positivo.
La disequazione è equivalente alla seguente:

$$\frac{3|x| - x - \sqrt{x+2}}{\sqrt{x+2}+x} \geqslant 0.$$

Studiamo separatamente il segno del numeratore e del denominatore.

- $N := 3|x| - x - \sqrt{x+2}$ $N \geqslant 0 \Rightarrow 3|x| \geqslant x + \sqrt{x+2}$. Questa disequazione è equivalente ai due sistemi seguenti:

$$\begin{cases} x \geqslant 0 \\ 3x \geqslant x + \sqrt{x+2} \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x < 0 \\ -3x \geqslant x + \sqrt{x+2} \end{cases}$$

cioè

$$\begin{cases} x \geqslant 0 \\ 4x^2 - x - 2 \geqslant 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} -2 \leqslant x < 0 \\ 16x^2 - x - 2 \geqslant 0 \end{cases}$$

ossia

$$-2 \leqslant x \leqslant \frac{1-\sqrt{129}}{32} \cup 0 \leqslant x \leqslant \frac{1+\sqrt{33}}{8}.$$

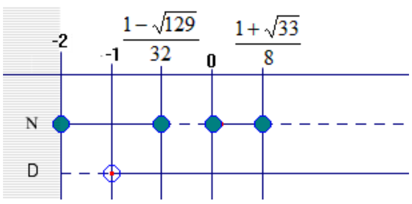
- $D := \sqrt{x+2} + x$ $D > 0 \Rightarrow \sqrt{x+2} > -x$. Questa disequazione è equivalente ai due sistemi seguenti:

$$\begin{cases} -x < 0 \\ x+2 \geqslant 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} -x \geqslant 0 \\ x+2 > x^2 \end{cases}$$

ossia

$$x > -1.$$

Riportiamo i valori su un grafico (la linea continua indica il segno positivo, la linea tratteggiata il segno negativo).



La disequazione è verificata quindi per $-1 < x \leqslant \dfrac{1-\sqrt{129}}{32} \quad \cup \quad x \geqslant \dfrac{1+\sqrt{33}}{8}$

Esercizio 5.4

Determinare le equazioni degli asintoti al diagramma della funzione

$$f(x) = \left(\log(e^{-x}+1)\right) \cos\frac{2}{\sqrt{|x|}}$$

(il logaritmo è inteso in base "e").

✍ Soluzione

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\big(\log(e^{-x}+1)\big)\cos\frac{2}{\sqrt{|x|}}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\big(\log(e^{-x}+1)\big)}{x} =$$
$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\log(e^{-x}) + \log(1+e^{x})}{x} = -1 =: m$$

$$\lim_{x\to-\infty} (f(x) - (-x)) = \lim_{x\to-\infty} \big(\log(e^{-x}+1)\big)\cos\frac{2}{\sqrt{|x|}} + x =$$
$$= \lim_{x\to-\infty} (-x + \log(1+e^{x}))\cos\frac{2}{\sqrt{-x}} + x =$$
$$= \lim_{x\to-\infty} x\left(1 - \cos\frac{2}{\sqrt{-x}}\right) = -4\lim_{x\to-\infty} \frac{1-\cos\frac{2}{\sqrt{-x}}}{\frac{2}{\sqrt{-x}}} \overset{(B)}{=\!=} -2 =: q$$

Quindi la funzione ha

- asintoto orizzontale $y = 0$ per $x \to +\infty$,
- asintoto obliquo $y = -x - 2$ per $x \to -\infty$.

Esercizio 5.5

Stabilire se esistono, e in caso affermativo determinarli, valori del parametro reale a in corrispondenza ai quali la funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ così definita:

$$f(x) = |x^2 + a|\,(x^4 - 1)$$

risulti derivabile su tutto l'asse reale.

✍ Soluzione

Se $a \geqslant 0 \Rightarrow x^2 + a \geqslant 0 \Rightarrow$ la funzione è derivabile su tutto l'asse reale.
Se $a < 0$ bisogna imporre

$$\lim_{x\to(\mp\sqrt{-a})^+} f'(x) = \lim_{x\to(\mp\sqrt{-a})^-} f'(x)$$

e questo vale solo per $a = -1$.
In conclusione $a \in \{-1\} \cup [0, +\infty)$.

Esercizio 5.6

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione così definita: $f(x) = |x - \pi| + \sin\, x$.

① Stabilire in quali punti f si annulla, giustificando la risposta.

② Tracciare un diagramma qualitativo, ma fedele, di f.

③ Su quali intervalli f è invertibile?

✍ Soluzione

① $f(\pi) = 0$.

Per $x > \pi$ si ha $f'(x) = 1 + \cos x$, per cui f è strettamente crescente.

Per $x < \pi$ si ha $f'(x) = \cos x - 1$, per cui f è strettamente decrescente.

Allora π è l'unico zero di f.

② Il diagramma si ottiene facilmente da quelli delle funzioni $g(x) = |x - \pi|$ e $h(x) = \sin x$ (vedi fig. 5.1).

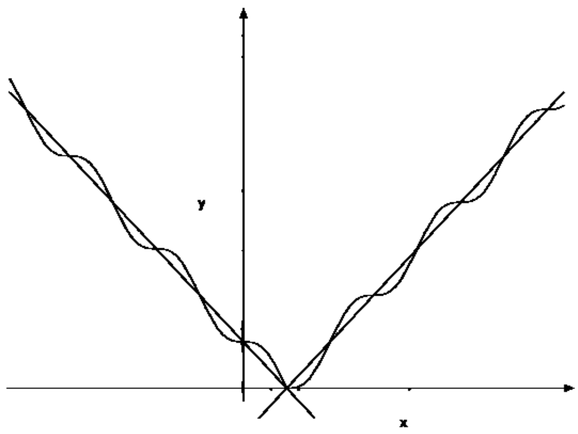


Figura 5.1. $f(x) = |x - \pi| + \sin\ x$

③ La funzione è invertibile su tutti gli intervalli che non contengono π all'interno.

TEMA 6

Prova scritta del 24 giugno 2002

Esercizio 6.1

Nel piano dotato di un riferimento cartesiano ortogonale Oxy, si individui la (cioè si scriva l'equazione della) famiglia di parabole aventi per asse l'asse "y" e tangenti la retta di equazione $y = 2 - x$ in punti situati nel semipiano superiore (cioè aventi ordinata positiva).

✍ Soluzione

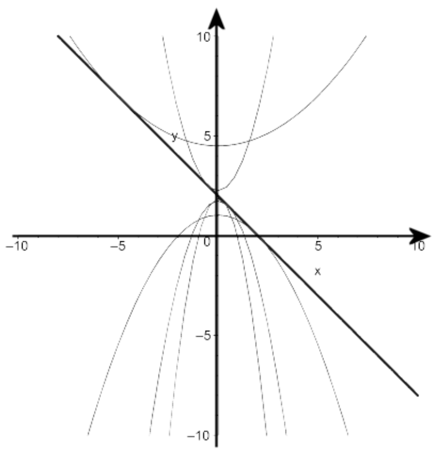
La generica parabola con asse verticale ha equazione $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$.
Affinché abbia per asse l'asse "y" deve essere $-b/(2a) = 0$ cioè $b = 0 \Rightarrow y = ax^2 + c$.
Affinché sia tangente alla retta di equazione $y = 2 - x$ bisogna imporre che il punto di intersezione sia unico cioè

$$\begin{cases} y = ax^2 + c \\ y = 2 - x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 - x = ax^2 + c \\ y = 2 - x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ax^2 + x + c - 2 = 0 \\ y = 2 - x \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Delta = 1 - 4a(c-2) = 0 \quad \Rightarrow \quad c = \left(\frac{1}{4a}\right) + 2 \quad \Rightarrow \quad y = ax^2 + \frac{1}{4a} + 2$$

e il punto di intersezione è $\left(-\frac{1}{2a}, 2 + \frac{1}{2a}\right)$.

Affinché il punto di intersezione sia situato nel semipiano superiore deve essere $2 + \frac{1}{2a} > 0$ cioè $\frac{4a+1}{2a} > 0$ ossia $a < -1/4 \ \vee \ a > 0$.
In conclusione $y = ax^2 + 2 + 1/(4a)$ con $a < -1/4 \ \vee \ a > 0$.



Esercizio 6.2

Risolvere la disequazione $\log_2 x \ > \ 4 + \dfrac{5}{\log_2 x}$.

✍ Soluzione

Osserviamo dapprima che deve essere $x > 0$ e $x \neq 1$.
Poniamo $\log_2 x = t$. Dobbiamo allora risolvere

$$\begin{aligned} t > 4 + \frac{5}{t} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{t^2 - 4t - 5}{t} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad -1 < t < 0 \ \vee \ t > 5 \quad \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad -1 < \log_2 x < 0 \ \vee \ \log_2 x > 5 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} < x < 1 \ \vee \ x > 32 \end{aligned}$$

Esercizio 6.3

Calcolare $L = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\log(x^4) + \sin(2\pi x)}{1-(2-x^2)^{1/3}}$ (il logaritmo è inteso in base “e”).

✍ Soluzione

$$\begin{aligned} L \ &= \ \lim_{x\to 1} \frac{\log(x^4) + \sin(2\pi x)}{1-(2-x^2)^{1/3}} \ \overset{(x-1=t)}{=\!=\!=} \ \lim_{t\to 0} \frac{4\log(1+t) \ + \ \sin(2\pi t)}{1-(1-2t-t^2)^{1/3}} \ = \\ &= 4\lim_{t\to 0} \frac{\log(1+t)}{1-(1-2t-t^2)^{1/3}} \ + \ \lim_{t\to 0} \frac{\sin(2\pi t)}{1-(1-2t-t^2)^{1/3}} \ = \\ &= 4\lim_{t\to 0} \frac{\log(1+t)}{t} \frac{t}{1-(1-2t-t^2)^{1/3}} \ + \ \lim_{t\to 0} \frac{\sin(2\pi t)}{2\pi t} \frac{2\pi t}{1-(1-2t-t^2)^{1/3}} \ = \\ &= 4 \cdot 1 \cdot \frac{3}{2} + 1 \cdot 2\pi \cdot \frac{3}{2} \ = \ 6 + 3\pi \end{aligned}$$

In alternativa, poiché il limite si presenta come una forma indeterminata del tipo $\dfrac{[0]}{[0]}$, è possibile applicare il teorema di de l'Hôpital:

$$L \ = \ \lim_{x\to 1} \frac{\log(x^4) + \sin(2\pi x)}{1-(2-x^2)^{1/3}} \ \overset{H}{=} \ \lim_{x\to 1} \frac{\frac{4}{x} + 2\pi\cos(2\pi x)}{\frac{2x}{3(2-x^2)^{2/3}}} \ = \ 6 + 3\pi$$

Esercizio 6.4

Determinare una primitiva G su $\mathbb{R}$ della funzione $f(x) = (2x-1)^{1/3}\, x$.
Calcolare quindi $I = \displaystyle\int_{1/2}^{1} f(x)\, dx$.

✍ Soluzione

$$\begin{aligned} G(x) \ &= \ \int (2x-1)^{1/3}\, x\, dx \ \overset{(2x-1=t^3)}{=\!=\!=} \ \int t\, \frac{t^3+1}{2}\, \frac{3}{2}\, t^2\, dt \ = \ \frac{3}{4}\int t^6 + t^3\, dt \ = \\ &= \frac{3}{4}\left(\frac{t^7}{7} + \frac{t^4}{4}\right) \ = \ \frac{3}{4}\left(\frac{(2x-1)^{7/3}}{7} + \frac{(2x-1)^{4/3}}{4}\right) + k, \quad k \in \mathbb{R} \\ I \ &= G(1) - G(1/2) \ = \ 33/112 \end{aligned}$$

Esercizio 6.5

Sia f la funzione così definita su tutto $\mathbb{R}$: $f(x) = x\, e^x$.
Calcolare la derivata di f di ordine 500.

✍ Soluzione

$$f^{(500)}(x) \;=\; (x+500)\, e^x.$$

Esercizio 6.6

Studiare la funzione f così definita: $f(x) = \dfrac{x+2}{\sqrt{x+1}}$.

✍ Soluzione

- Insieme di definizione: $(-1, +\infty)$
- Limiti agli estremi dell'insieme di definizione: $\lim_{x\to -1} f(x) \;=\; \lim_{x\to +\infty} f(x) \;=\; +\infty$ senza asintoto.
- Derivata prima: $f'(x) \;=\dfrac{1}{2}\, x(x+1)^{-3/2}$
- Eventuali estremanti: $x = 0$ è punto di minimo assoluto.
- Derivata seconda: $f''(x) \;=\dfrac{1}{4}\,(2-x)(x+1)^{-5/2}$
- Verso della concavità ed eventuali punti di flesso:

  f è convessa su $(-1, 2)$, concava su $(2, +\infty)$.
- Diagramma qualitativo di f: vedi fig. 6.1.

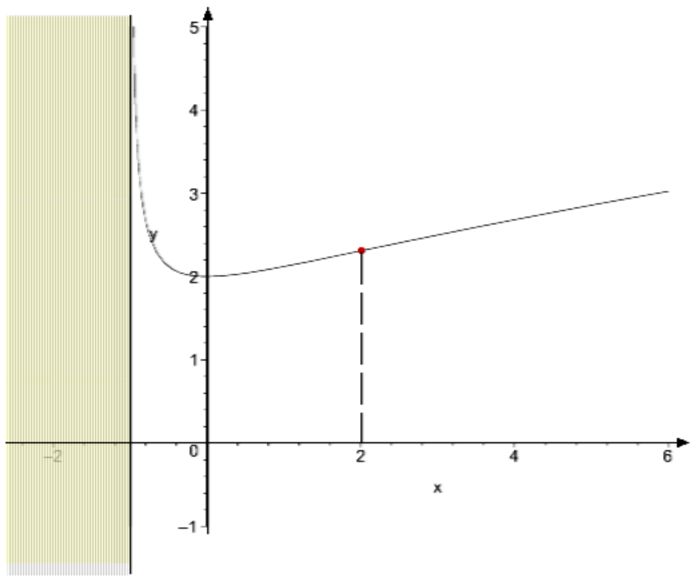


Figura 6.1. $f(x) = \dfrac{x+2}{\sqrt{x+1}}$

TEMA 7

Prova scritta del 12 luglio 2002

Esercizio 7.1

Sia $E = (-3, 0) \cup [1, 2]$. Al variare di x e y in E, determinare

$$\sup\{\,x+y\,\}, \qquad \sup\{\,x-y\,\}, \qquad \sup\{\,x\,y\,\}, \qquad \sup\left\{\,\frac{x}{y}\,\right\}, \qquad \sup\{\,x^2-y^2\,\}, \qquad \sup\left\{\,\frac{x^2}{y}\,\right\}$$

specificando, in ogni singolo caso, se sia anche massimo oppure no.

✍ Soluzione

$$\begin{array}{lll}
\sup\{\,x+y\,\} & =4 & \text{È anche massimo? Si } (x=y=2) \\
\sup\{\,x-y\,\} & =5 & \text{È anche massimo? No } (x=2, y\to -3^+) \\
\sup\{\,x\,y\,\} & =9 & \text{È anche massimo? No } (x, y\to -3^+) \\
\sup\{\,x/y\,\} & =+\infty & \text{È anche massimo? No } (x=-1, y\to 0^-) \\
\sup\{\,x^2-y^2\,\} & =9 & \text{È anche massimo? No } (x\to -3^+, y\to 0^-) \\
\sup\{\,x^2/y\,\} & =9 & \text{È anche massimo? No } (x\to -3^+, y=1)
\end{array}$$

Esercizio 7.2

Calcolare $\qquad L := \lim\limits_{n\to\infty} n\left[\left(1+\dfrac{5}{n^2}\right)^{2n} - 1\right].$

✍ Soluzione

Si può scrivere $L = \lim\limits_{n\to+\infty} n\left[e^{2n\ln\left(1+\frac{5}{n^2}\right)} - 1\right]$

Da (E) segue $2n\ln\left(1+\frac{5}{n^2}\right) \to 0$, per cui da (F) si ottiene

$$L = \lim_{n\to+\infty} 2n^2\ln\left(1+\frac{5}{n^2}\right) = 10\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2}{5}\ln\left(1+\frac{5}{n^2}\right) \overset{(E)}{=} 10.$$

Esercizio 7.3

Determinare una primitiva G su $(-\infty, 0)$ della funzione $\quad f(x) = \dfrac{1}{x^2-2x}.$
Calcolare quindi il valor medio V di f sull'intervallo $(-4, -1)$.

✍ Soluzione

$$G(x) = \int \frac{1}{x^2 - 2x}\,dx = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x}\right)dx = \frac{1}{2}\log\frac{x-2}{x} + k, \quad k \in \mathbb{R}$$

$$V = \frac{\displaystyle\int_{-4}^{-1} f(x)\,dx}{-1-(-4)} = \frac{G(-1) - G(-4)}{3} = \frac{\log 2}{6}$$

Esercizio 7.4

Determinare l'equazione della retta tangente al diagramma della funzione

$$f(x) = (3x)^{2\log x}$$

nel punto $\big(1, f(1)\big)$. (Il logaritmo è inteso in base "e").

✍ Soluzione

La retta tangente ad una curva di equazione $y = f(x)$ in un suo punto A di ascissa a ha equazione

$$\frac{y - f(a)}{x - a} = f'(a).$$

Si ha

$$f(x) = e^{2\log x \log(3x)}$$

Calcoliamo dunque $f'(1)$:

$$f'(x) = (3x)^{2\log x}\left(\frac{2\log(3x)}{x} + \frac{2\log(x)}{x}\right) \qquad \Rightarrow \qquad f'(1) = 2\log(3)$$

Pertanto la retta cercata ha equazione $y = 1 - 2\,\log 3 + 2x\,\log 3$

Esercizio 7.5

Sia f la funzione così definita su tutto $\mathbb{R}$:

$$f(x) = e^x(x^2 - x - 1).$$

Al variare del parametro reale α, precisare il numero delle soluzioni distinte in $\mathbb{R}$ dell'equazione

$$f(x) = \alpha.$$

(Si consiglia di tracciare preventivamente un diagramma qualitativo della funzione f).

✍ Soluzione

Per tracciare un diagramma qualitativo studiamo la funzione $f(x)$:

- Dominio: $\mathbb{R}$
- $f > 0$ per $x < (1 - \sqrt{5})/2$ e $x > (1 + \sqrt{5})/2$
- $\lim_{x \to -\infty} f = 0^+$, $\quad \lim_{x \to +\infty} f = +\infty$
- $f'(x) = e^x(x^2 + x - 2) \Rightarrow$
  - f è crescente per $x < -2$ e $x > 1$,

- decrescente per $-2 < x < 1$;
- $(-2, 5e^{-2})$ è un massimo,
- $(1, -e)$ è un minimo

- Diagramma qualitativo: vedi fig. 7.1

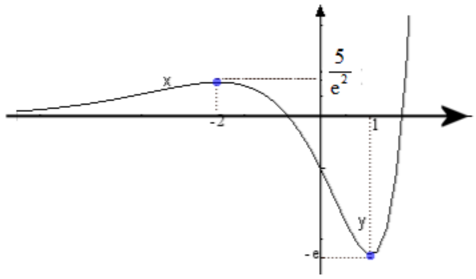


Figura 7.1. $f(x) = e^x(x^2 - x - 1)$

In conclusione il numero di soluzioni dell'equazione data in funzione di α è (vedi fig. 7.2):

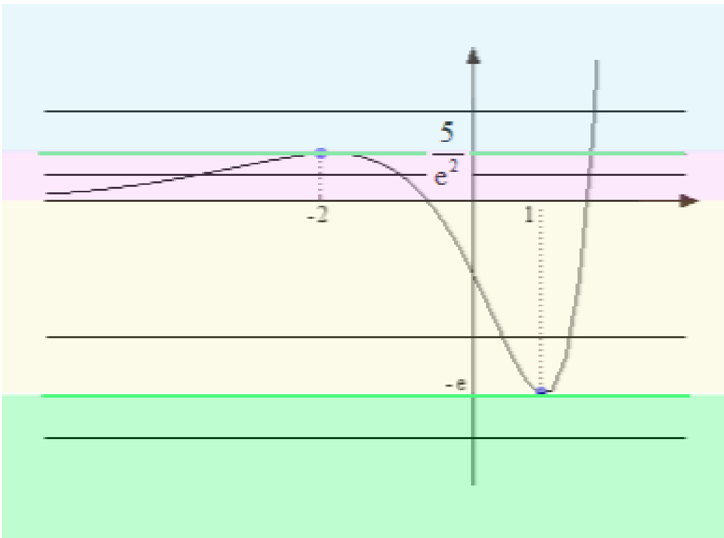
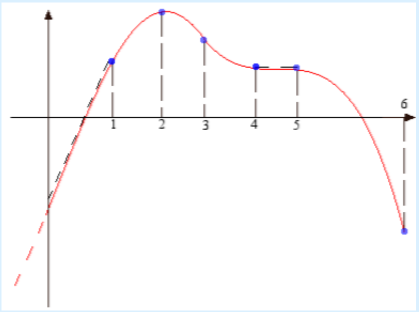


Figura 7.2. $f(x) = e^x(x^2 - x - 1)$ *e* $f(x) = \alpha$

$\alpha < -e$	nessuna
$\alpha = -e$	una
$-e < \alpha \leqslant 0$	due
$0 < \alpha < 5\,e^{-2}$	tre
$\alpha = 5\,e^{-2}$	due
$\alpha > 5\,e^{-2}$	una

Esercizio 7.6

Sia $f\colon (0,6) \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile il cui diagramma è qualitativamente quello indicato nella figura (i tratti di diagramma affiancati da tratteggio sono rettilinei). Tracciare un diagramma plausibile della sua derivata f'.



✍ Soluzione

Vedi fig. 7.3 (non necessariamente in scala).

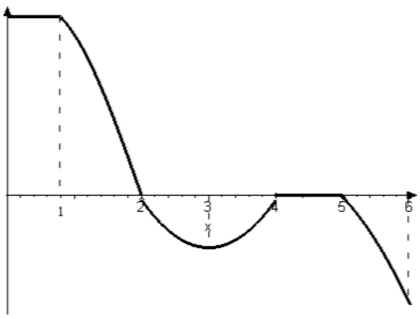


Figura 7.3. $y = f'(x)$

TEMA 8

Prova scritta del 19 settembre 2002

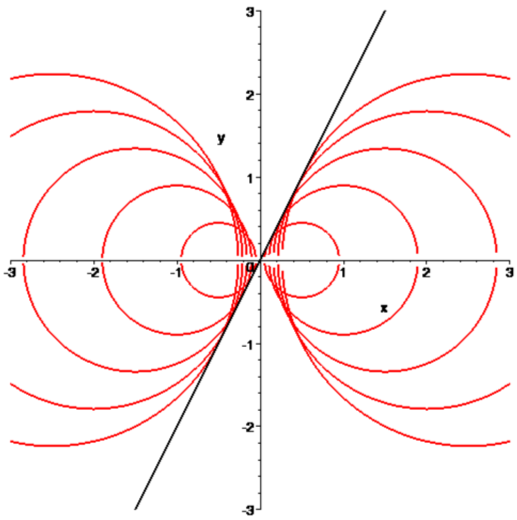
Esercizio 8.1

Nel piano dotato di un riferimento cartesiano ortogonale Oxy, si individui la (cioè si scriva l'equazione della) famiglia di circonferenze aventi centro sull'asse "x" e tangenti la retta di equazione $y = 2x$.

✍ Soluzione

L'equazione della generica circonferenza è $x^2 + y^2 + a\,x + b\,y + c = 0$. Affinché il centro appartenga all'asse delle ascisse deve essere $b = 0$. Affinché sia tangente alla retta $y = 2x$ l'equazione $5x^2 + a\,x + c = 0$ deve avere una sola soluzione, cioè deve essere $\Delta = a^2 - 20\,c = 0$. Dunque l'equazione cercata è

$$x^2 + y^2 + \alpha\,x + \frac{\alpha^2}{20} = 0\,, \qquad \alpha \neq 0.$$

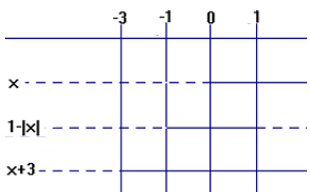


Esercizio 8.2

Risolvere la disequazione $\quad \big|1 - |x|\,\big| < \; |x + 3|.$

✍ Soluzione

Studiamo dapprima i segni delle espressioni che si trovano all'interno del segno di modulo e riportiamoli su uno stesso grafico (la linea continua indica il segno positivo, la linea tratteggiata il segno negativo):



Notiamo che l'asse reale risulta diviso in cinque intervalli:

$x \leqslant -3$; $\quad -3 < x \leqslant -1$; $\quad -1 < x \leqslant 0$; $\quad 0 < x \leqslant 1$; $\quad x > 1$

in ognuno dei quali l'equazione equivale a uno dei seguenti sistemi:

$$A := \begin{cases} x \leqslant -3 \\ -x-1 < -x-3 \end{cases}$$

$$B := \begin{cases} -3 < x \leqslant -1 \\ -x-1 < x+3 \end{cases}$$

$$C := \begin{cases} -1 < x \leqslant 0 \\ 1+x < x+3 \end{cases}$$

$$D := \begin{cases} 0 < x \leqslant 1 \\ 1-x < x+3 \end{cases}$$

$$E := \begin{cases} x > 1 \\ x-1 < x+3 \end{cases}$$

Risolvendo i cinque sistemi si ha per le soluzioni lo schema seguente:

A : nessuna soluzione

B : $-2 < x \leqslant -1$

C : $-1 < x \leqslant 0$

D : $0 < x \leqslant 1$

E : $x > 1$

Quindi la soluzione della disequazione data è $x > -2$.

Oss: La presenza di $|x|$ suggerisce che le soluzioni della disequazione si possono ottenere in maniera più veloce, infatti esse sono le soluzioni non negative di $|1-x| < |x+3|$ e quelle negative di $|1+x| < |x+3|$ ossia

$$\begin{cases} x \geqslant 0 \\ |1-x| < |x+3| \end{cases} \qquad \cup \qquad \begin{cases} x < 0 \\ |1+x| < |x+3| \end{cases}$$

Nel primo caso si ottiene $x \geqslant 0$, nel secondo $-2 < x < 0$. In definitiva $x > -2$.

Esercizio 8.3

Calcolare $\quad L = \lim_{x\to 2\pi} \dfrac{\log(\cos x)}{(x-2\pi)\sin x} \quad$ (il logaritmo è inteso in base "e").

✍ Soluzione

$$L = \lim_{x\to 2\pi} \frac{\log(\cos x)}{(x-2\pi)\sin x} =$$

posto $t := x - 2\pi$, per la periodicità si ha

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\log(\cos t)}{t \sin t} = \lim_{t\to 0} \frac{\log(1+\cos t - 1)}{\cos t - 1}\,\frac{\cos t - 1}{t^2}\,\frac{t}{\sin t} \overset{(A)(B)(E)}{=\!=\!=} -\frac{1}{2}.$$

In alternativa, poiché il limite si presenta come una forma indeterminata del tipo $\dfrac{[0]}{[0]}$, è possibile applicare il teorema di de l'Hôpital:

$$L = \lim_{x\to 2\pi} \frac{\log(\cos x)}{(x-2\pi)\sin x} \overset{H}{=} \lim_{x\to 2\pi} \frac{-\frac{\sin(x)}{\cos(x)}}{\sin(x) + (x-2\pi)\cos(x)} \overset{H}{=}$$

$$\overset{H}{=} \lim_{x\to 2\pi} \frac{-1-\frac{(\sin(x))^2}{(\cos(x))^2}}{2\cos(x) - (x-2\pi)\sin(x)} = -\frac{1}{2}.$$

Esercizio 8.4

Determinare una primitiva G su $\mathbb{R}$ della funzione $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+4}$.

Calcolare quindi $I = \displaystyle\int_0^{2\sqrt{3}} f(x)dx$.

✍ Soluzione

$$\begin{aligned} G(x) &= \int \frac{x^2-1}{x^2+4}dx = \int \left(1 - \frac{5}{x^2+4}\right) dx = \int \left(1 - \frac{5}{4}\frac{1}{1+(x/2)^2}\right) dx = \\ &= x - \frac{5}{2}\arctan\frac{x}{2} + k, \quad k \in \mathbb{R} \\ I &= G(2\sqrt{3}) - G(0) = 2\sqrt{3} - 5\pi/6 \end{aligned}$$

Esercizio 8.5

Studiare la funzione f così definita: $f(x) = \dfrac{\log|x|}{x}$ (il logaritmo è inteso in base "e").

✍ Soluzione

- Insieme di definizione: $x \neq 0$, f è dispari
- Limiti agli estremi dell'insieme di definizione

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0^{\pm} \quad \Rightarrow \quad y = 0 \text{ è asintoto orizzontale}$$

$$\lim_{x\to 0^{\pm}} f(x) = \mp\infty \quad \Rightarrow \quad x = 0 \text{ è asintoto verticale}$$

- Derivata prima: $f'(x) = \dfrac{1-\log|x|}{x^2}$.
- Eventuali estremanti:
  - $x = e$ punto di massimo relativo,
  - $x = -e$ punto di minimo relativo.
- Derivata seconda: $f''(x) = \dfrac{2\log|x| - 3}{x^3}$.
- Verso della concavità ed eventuali punti di flesso:
  - $x = \pm e^{3/2}$ punti di flesso;
  - f convessa su $[-e^{3/2}, 0)$ e su $[e^{3/2}, +\infty)$,
  - concava su $(-\infty, -e^{3/2}]$ e su $(0, e^{3/2}]$.
- Diagramma qualitativo di f: vedi fig. 8.1 nella pagina successiva.

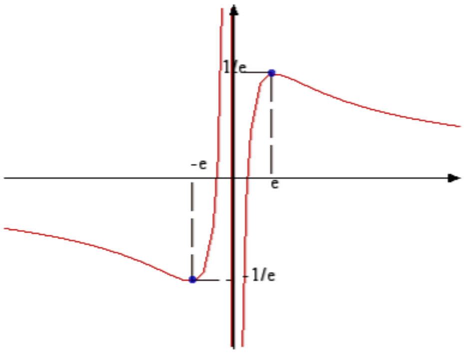


Figura 8.1. $f(x) = \dfrac{\log|x|}{x}$

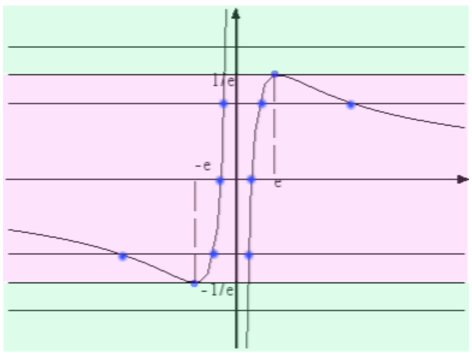
Esercizio 8.6

Sia f la funzione di cui al punto precedente. Al variare del parametro reale α, precisare il numero delle soluzioni dell'equazione $f(x) = \alpha$.
(N.B.: non si chiede di determinare le soluzioni!)

✍ Soluzione

Si ha $f(\pm e) = \pm 1/e$ per cui si hanno:

una soluzione se $|\alpha| > 1/e$
due soluzioni se $|\alpha| = 1/e$ o $\alpha = 0$
tre soluzioni se $0 < |\alpha| < 1/e$.



TEMA 9

Prova scritta del 26 novembre 2002

Esercizio 9.1

In un contenitore vi sono 21 litri di una soluzione con il 18% di alcool. Quanti litri di questa soluzione si devono sostituire con una soluzione al 90% di alcool per ottenere una soluzione al 42% di alcool?

✍ Soluzione

$$21\frac{18}{100} - x\frac{18}{100} + x\frac{90}{100} = 21\frac{42}{100} \quad \Rightarrow \quad x = 7 \;\text{ litri.}$$

Esercizio 9.2

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ la funzione così definita: $f(x) = 3^{x/5}$.
Fornire l'espressione analitica della funzione inversa f^{-1}.

✍ Soluzione

$$\frac{x}{5} = \log_3 y \;\Rightarrow\; x = 5\log_3 y.$$

Esercizio 9.3

Calcolare $\quad L = \lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{\cos x - x^2} - 1}{\tan^2 x}$.

✍ Soluzione

Vogliamo ricondurci ai limiti fondamentali (A) e (B). Osservando che

- $\sqrt{\cos x - x^2} - 1 = \dfrac{\cos x - x^2 - 1}{\sqrt{\cos x - x^2} + 1} = \dfrac{-x^2\left(\dfrac{1-\cos x}{x^2} + 1\right)}{\sqrt{\cos x - x^2} + 1}$
- $\dfrac{1}{\tan^2 x} = \dfrac{\cos^2 x}{\sin^2 x}$

il limite diviene

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{\cos x - x^2} - 1}{\tan^2 x} = \lim_{x\to 0} -\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2 \frac{\left(\frac{1-\cos x}{x^2} + 1\right)\cos^2 x}{\sqrt{\cos x - x^2} + 1} = -(1^2)\frac{(\frac{1}{2}+1)\,1}{1+1} = -\frac{3}{4}.$$

In alternativa, poiché il limite si presenta come una forma indeterminata del tipo $\frac{[0]}{[0]}$, è possibile applicare il teorema di de l'Hôpital, ma i calcoli sono lunghi e laboriosi:

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{\cos x} - x^2 - 1}{\tan^2 x} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-1/2\,\frac{\sin(x)+2x}{\sqrt{\cos(x)-x^2}}}{2\tan(x)\left(1+(\tan(x))^2\right)} \overset{H}{=}$$

$$\overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{-4\sin(x)x-(\cos(x))^2+2\cos(x)x^2-4\cos(x)-1}{4(-\cos(x)+x^2)\sqrt{\cos(x)-x^2}}}{2\left(1+(\tan(x))^2\right)^2+4(\tan(x))^2\left(1+(\tan(x))^2\right)} = -\frac{3}{4}.$$

Esercizio 9.4

Determinare una primitiva G su $(-\pi/2, \pi/2)$ della funzione $f(x) = (1+\tan^2 x)\sin x$.

Calcolare quindi $I = \int_0^{\pi/4} f(x)\,dx$.

✍ Soluzione

Integrando per parti*

$$G(x) = \int (1+\tan^2 x)\sin x\,dx \overset{P.P.}{=\!=} \sin x \tan x - \int -\cos x \tan x\,dx = \frac{\sin^2 x}{\cos x} + \int \sin x\,dx =$$

$$= \frac{\sin^2 x}{\cos x} + \cos x = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos x} = \frac{1}{\cos x} + k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

$$I = G(\pi/4) - G(0) = \sqrt{2} - 1$$

Esercizio 9.5

Studiare la funzione f così definita: $f(x) = \log^2(2\log^2 x - 1)$
(i logaritmi sono intesi in base "e").

✍ Soluzione

- Insieme di definizione: $(0, e^{-1/\sqrt{2}}) \cup (e^{1/\sqrt{2}}, +\infty)$
- Limiti agli estremi dell'insieme di definizione:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to e^{\mp 1/\sqrt{2}}} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \qquad \text{(senza asintoto)}$$

- Derivata prima:

$$f'(x) = \frac{8\log(2\log^2 x - 1)}{x(2\log^2 x - 1)} \cdot \log x$$

- Eventuali estremanti:

  $x_0 = 1/e, \quad x_1 = e \qquad$ punti di minimo assoluto

- Diagramma qualitativo di f: vedi fig. 9.1 a fronte.

---

* $\int h(x)g'(x)\,dx = h(x)g(x) - \int h'(x)g(x)\,dx$

$$h(x) = \sin x \quad \rightsquigarrow \quad h'(x) = -\cos x$$
$$g(x) = \int g'(x)\,dx = \tan x \quad \leftsquigarrow \quad g'(x) = 1 + \tan^2 x$$

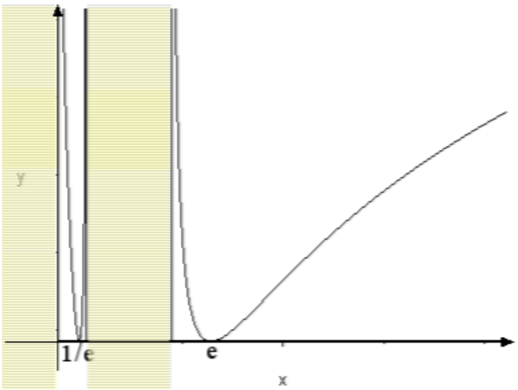


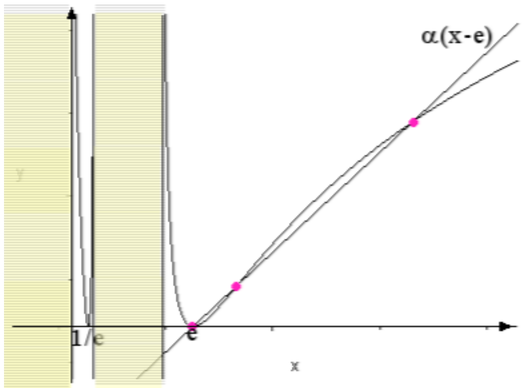
Figura 9.1. $f(x) = \log^2(2\log^2 x - 1)$

Esercizio 9.6

Sia f la funzione di cui all'esericizio 5 nella pagina precedente. Esistono valori del parametro reale positivo α, tali che l'equazione $f(x) = \alpha(x - e)$ abbia più di due soluzioni distinte? Giustificare brevemente la risposta, eventualmente con l'aiuto di grafici.
N.B. Non si chiede di individuare eventuali valori di α, ma solo di stabilirne l'esistenza o la non esistenza.

✍ Soluzione

SI. Infatti f è convessa in un intorno di e, che è punto di minimo, concava in un intorno di $+\infty$ e, per ogni α, $\dfrac{f(x)}{\alpha(x-e)}$ tende a 0 per $x \to +\infty$.

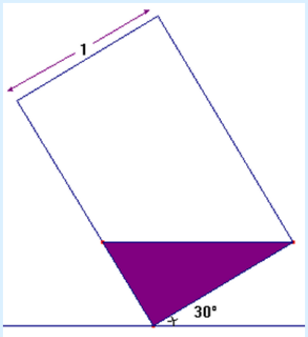


TEMA 10

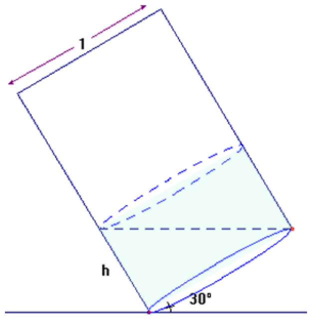
Prova scritta del 9 gennaio 2003

Esercizio 10.1

Un recipiente a forma di cilindro retto, con base circolare di un metro di diametro, contiene acqua. Inclinato di 30° sulla verticale, si presenta in sezione come mostrato dalla figura (la parte colorata corrisponde a quella occupata dall'acqua). Quanti litri d'acqua contiene?



✍ Soluzione



L'acqua occupa un volume pari alla metà del volume del cilindro tratteggiato in figura. Il volume di tale cilindro è $\pi r^2 h = \pi \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{1}{\sqrt{3}}$ m^3 pertanto l'acqua occupa $\frac{\pi\left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{1}{\sqrt{3}}}{2}$ m^3 $= \frac{\pi}{8\sqrt{3}}$ m^3. Poiché un litro è un decimetro cubo, il recipiente contiene allora $\frac{125\,\pi}{\sqrt{3}}$ litri.

Esercizio 10.2

Risolvere la disequazione $|x-4| < x^2 + x + 2$.

✍ Soluzione

Poiché si ha

$$|x-4| = \begin{cases} x-4 & \text{per } x \geqslant 4 \\ 4-x & \text{per } x < 4 \end{cases}$$

le soluzioni della disequazione si ottengono unendo le soluzioni dei due seguenti sistemi:

$$\begin{cases} x-4 \geqslant 0 \\ x-4 < x^2+x+2 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x-4 < 0 \\ 4-x < x^2+x+2 \end{cases}$$

Risolvendoli si ottiene rispettivamente

$$\begin{cases} x \geqslant 4 \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x < 4 \\ x < -1-\sqrt{3} \ \cup \ x > -1+\sqrt{3} \end{cases}$$

Pertanto la disequazione è verificata per $x \in (-\infty, -1-\sqrt{3}) \cup (-1+\sqrt{3}, +\infty)$.

Esercizio 10.3

Determinare le equazioni degli asintoti al diagramma della funzione $\quad f(x) = \sqrt{x^2+4x}$.

✍ Soluzione

Osserviamo che il dominio della funzione (continua) è $(-\infty, -4] \ \cup \ [0, +\infty)$.

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm 1 \qquad \lim_{x\to\pm\infty} f(x) \mp x = \pm 2.$$

Pertanto non esistono asintoti né verticali né orizzontali ma esistono due asintoti obliqui:

$y = -2-x \quad$ per $\quad x \to -\infty$,

$y = \quad x+2 \quad$ per $\quad x \to +\infty$.

Esercizio 10.4

Determinare una primitiva G su $\mathbb{R}$ della funzione $\ f(x) = \log(1+x^2)$ (il logaritmo è inteso in base "e").

Calcolare quindi $\quad I = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$.

✍ Soluzione

Integrando per parti*

$$G(x) = \int f(x)\,dx \overset{\text{P.P.}}{=\!=} x\log(1+x^2) - 2\int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx \ = x\log(1+x^2) - 2\int 1\,dx \ + 2\int \frac{dx}{1+x^2} =$$

$$= x\ \log(1+x^2) - 2x + 2\ \arctan x + k, \quad k \in \mathbb{R}$$

$$I = G(1) - G(0) = \log 2 - 2 + \frac{\pi}{2}$$

Esercizio 10.5

Studiare la funzione f così definita: $\ f(x) = \arctan \dfrac{x}{1-x}$.

✍ Soluzione

❦ Insieme di definizione $x \neq 1$

*$\int h(x)g'(x)\,dx \ = h(x)g(x) - \int h'(x)g(x)\,dx$

$$\begin{array}{lcl} h(x) = \log(1+x^2) & \rightsquigarrow & h'(x) = \frac{2x}{1+x^2} \\ g(x) = \int g'(x)\,dx \ = x & \leftsquigarrow & g'(x) = 1 \end{array}$$

- Limiti agli estremi dell'insieme di definizione

  $\lim_{x \to \mp\infty} f(x) = (-\pi/4)^{\pm} \qquad \Rightarrow \qquad y = -\pi/4$ è asintoto orizzontale

  $\lim_{x \to 1^{\mp}} f(x) = \pm\pi/2$

- Derivata prima: $f'(x) = \dfrac{1}{2x^2 - 2x + 1}$.

- Eventuali estremanti: non ve ne sono

- Derivata seconda: $f''(x) = \dfrac{-4x + 2}{(2x^2 - 2x + 1)^2}$.

- Verso della concavità ed eventuali punti di flesso:

  f è convessa su $(-\infty, 1/2]$, concava su $[1/2, 1)$ e su $(1, +\infty)$

  $x = 1/2$ è punto di flesso

- Diagramma qualitativo di f: vedi fig. 10.1.

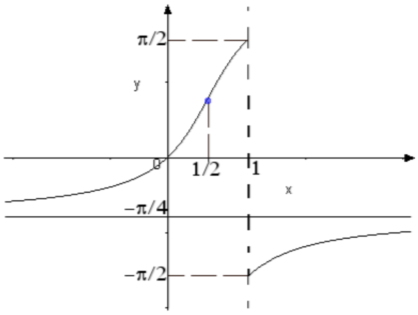


Figura 10.1. $f(x) = \arctan \dfrac{x}{1-x}$

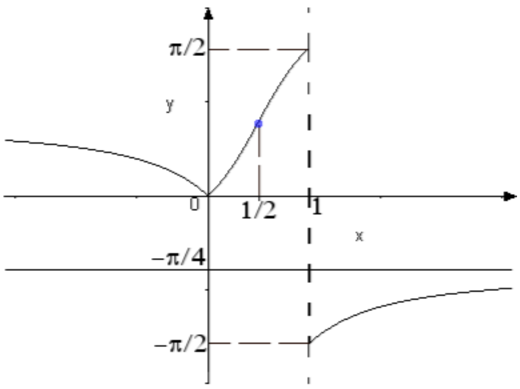
Esercizio 10.6

Utilizzando il diagramma della funzione di cui al punto precedente, tracciare un diagramma qualitativo delle funzioni g e h così definite

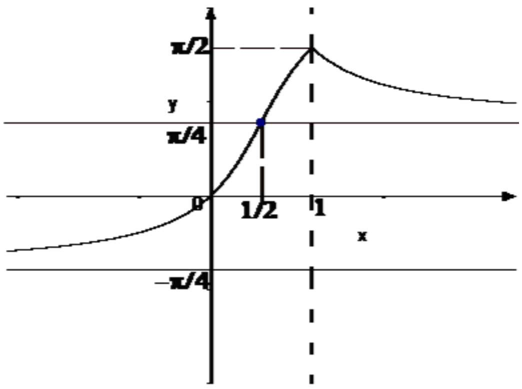
$$g(x) = \arctan \frac{|x|}{1-x} \,, \qquad h(x) = \arctan \frac{x}{|1-x|}.$$

✍ Soluzione

Vedi fig. 60 nella pagina successiva.



(a) $g(x) = \arctan \frac{|x|}{1-x}$



(b) $h(x) = \arctan \frac{x}{|1-x|}$

TEMA 11

Prima prova in itinere a.a. 2002/03
10 gennaio 2003

Esercizio 11.1

Siano m e n i due numeri (positivi) tali che $\log_{10} m = 13,7$ e $\log_{10} n = 6,3$. Quante cifre ha (in rappresentazione decimale) la parte intera del numero m/n?

✍ Soluzione

$m = 10^{13,7}$, $n = 10^{6,3} \Rightarrow \dfrac{m}{n} = 10^{13,7-6,3} = 10^{7,4} \Rightarrow$ la parte intera del numero $\dfrac{m}{n}$ ha 8 cifre.

Esercizio 11.2

Nel piano dotato di un riferimento cartesiano ortogonale Oxy, si considerino il punto $P \equiv (3,3)$ e la circonferenza γ di equazione $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0$. Individuare le coordinate del punto di γ più vicino a P.

✍ Soluzione

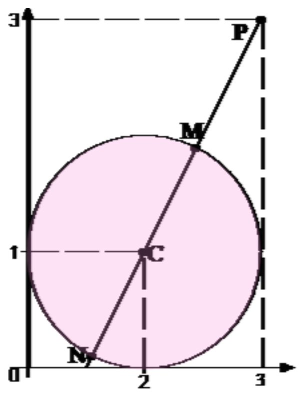
Il punto da determinare appartiene all'intersezione della circonferenza γ con la retta passante per P e per il centro di γ. Il centro di γ è $C \equiv (2,1)$ dunque la retta ha equazione $y = 2x-3$. Il sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0 \\ y = 2x - 3 \end{cases}$$

fornisce i due punti

$$M \equiv \left(2 + \frac{1}{\sqrt{5}}, 1 + \frac{2}{\sqrt{5}}\right) \qquad N \equiv \left(2 - \frac{1}{\sqrt{5}}, 1 - \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

Il più vicino a P è il punto M (vedi figura a lato).



Esercizio 11.3

Nel mese di gennaio 2003 con una certa somma di denaro si possono acquistare 3 capi di un certo tipo di vestiario che, per ragioni di moda, ogni mese viene deprezzato dei 2/5 del prezzo che aveva nel mese precedente. A partire da quale mese del 2003, con la stessa somma di denaro, si potranno acquistare (almeno) 13 capi di quel tipo di vestiario?

✍ Soluzione

Se 1 è il prezzo del capo a gennaio, dopo n mesi il prezzo è $\left(\frac{3}{5}\right)^n$.

Il più piccolo intero tale che $\left(\frac{3}{5}\right)^n \cdot 13 \leqslant 3$ è 3. Dunque il mese è aprile.

Esercizio 11.4

Determinare il coefficiente del termine di grado -6 e il coefficiente del termine di grado -27 nello sviluppo del binomio $\left(\frac{2}{x^5} - x\right)^9$.

✍ Soluzione

Dall'espressione $\left(\frac{2}{x^5} - x\right)^9 = x^9\left(\frac{2}{x^6} - 1\right)^9 = x^9 \sum_{k=0}^{9} \binom{9}{k} (2x^{-6})^k (-1)^{9-k} = x^9 \sum_{k=0}^{9} \binom{9}{k} 2^k (-1)^{9-k} x^{-6k}$

abbiamo

- coeff. termine di gr. -6 = 0
- coeff. termine di gr. $-27 \overset{\left(\substack{9-6k=-27\\ \Updownarrow\\ k=6}\right)}{=\!=\!=} (-)^3 \left(\binom{9}{6}\right) 2^6 = -64 \cdot 84 = -5376$

Esercizio 11.5

Risolvere la disequazione $\quad 2 + \sqrt{x+1} > |x|.$

✍ Soluzione

Le soluzioni della disequazione si ottengono unendo le soluzioni dei due seguenti sistemi:

$$\begin{cases} x \geqslant 0 \\ x < 2 + \sqrt{x+1} \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x < 0 \\ x > -2 - \sqrt{x+1} \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} x \geqslant 0 \\ \sqrt{x+1} > x - 2 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x < 0 \\ \sqrt{x+1} > -x - 2 \end{cases}$$

- Risolviamo il primo sistema: $\sqrt{x+1} > x - 2$ con $x \geqslant 0$. La soluzione di tale equazione è data dall'unione delle soluzioni dei due sistemi

$$\begin{cases} x \geqslant 0 \\ x + 1 \geqslant 0 \\ x - 2 < 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x \geqslant 0 \\ x - 2 \geqslant 0 \\ x + 1 > (x-2)^2 \end{cases}$$

  dunque è $0 \leqslant x < \frac{5 + \sqrt{13}}{2}$.

❦ Risolviamo ora il secondo sistema: $\sqrt{x+1} > -x-2$ con $x < 0$. La soluzione di tale equazione è data dall'unione delle soluzioni dei due sistemi

$$\begin{cases} x < 0 \\ x+1 \geqslant 0 \\ -x-2 < 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x < 0 \\ -x-2 \geqslant 0 \\ x+1 > (-2-x)^2 \end{cases}$$

dunque è $-1 \leqslant x < 0$.

In conclusione, unendo le soluzioni delle due disequazioni otteniamo:

$$-1 \leqslant x < \frac{5+\sqrt{13}}{2}$$

Esercizio 11.6

Sia S il sottoinsieme di $\mathbb{R}$ così definito: $S := [-1, 0) \cup (2, 6]$. Determinare estremo inferiore ed estremo superiore, specificando se siano anche rispettivamente minimo e massimo, di ciascuno dei seguenti insiemi:

$A := \{\, xyz \mid x, y, z \in S \,\}$, $B := \left\{ \frac{|\,xy\,|}{z} \;\middle|\; x, y, z \in S \right\}$,

$C := \left\{ \frac{xy}{z} \;\middle|\; x, y, z \in S \right\}$, $D := \{\, x(\cos y)(\sin^2 z) \mid x, y, z \in S \,\}$.

✍ Soluzione

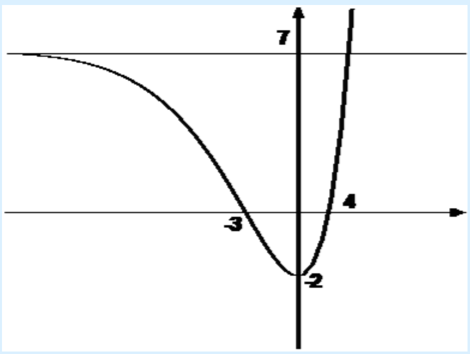
$\inf A = -36$	È minimo?	SI $(x = y = 6, z = -1)$	$\sup A = 216$	È massimo?	SI $(x = y = z = 6)$
$\inf B = -\infty$	È minimo?	NO	$\sup B = 18$	È massimo?	NO
$\inf C = -\infty$	È minimo?	NO	$\sup C = +\infty$	È massimo?	NO
$\inf D = -6$	È minimo?	SI $\left(x = 6, y = \pi, z = \frac{3}{2}\pi\right)$	$\sup D = 6$	È massimo?	NO

Esercizio 11.7

Quello in figura a lato è il diagramma della funzione (definita su tutto $\mathbb{R}$) $y = f(x)$.
Al variare del parametro reale α, si consideri la funzione $F_\alpha(x) = \alpha \arctan x$.
Per quali valori di α la funzione composta $f \circ F_\alpha$

i) assume solo valori negativi?

ii) assume solo valori positivi?



✍ Soluzione

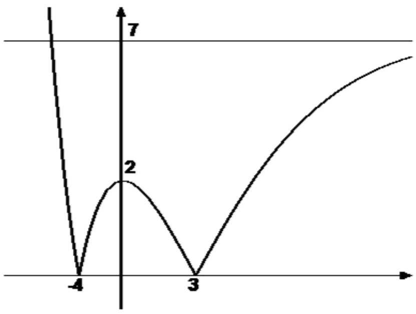
$f \circ F_\alpha$ assume solo valori negativi per $|\alpha| \leqslant \frac{6}{\pi}$ (occorre che $|\alpha \arctan x| < 3\ \forall x$, dunque $\frac{\pi}{2}\alpha \leqslant 3$).
$f \circ F_\alpha$ assume solo valori positivi per NESSUN VALORE DI α (qualunque sia α, $|\alpha \arctan x|$ può assumere valori minori di 3).

Esercizio 11.8

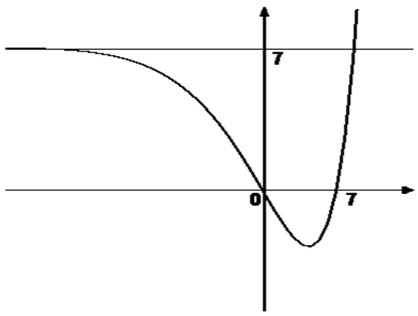
Sia f la funzione di cui all'esercizio 7 nella pagina precedente. Tracciare i diagrammi delle seguenti funzioni:

$$g(x) = |f(-x)|\,, \qquad h(x) = f(x-3)\,, \qquad p(x) = f(x)+3\,, \qquad x = \left(f_{|\mathbb{R}^+}\right)^{-1}(y)\,.$$

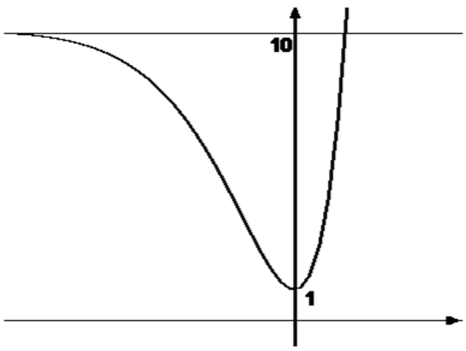
✍ Soluzione



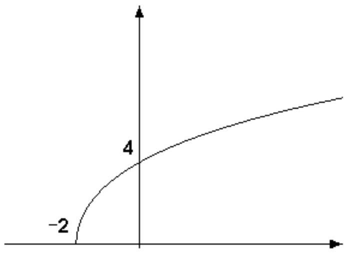
(a) $g(x) = |f(-x)|$



(b) $h(x) = f(x-3)$



(c) $p(x) = f(x)+3$



(d) $x = \left(f_{|\mathbb{R}^+}\right)^{-1}(y)$

TEMA 12

Prova scritta del 14 febbraio 2003

Esercizio 12.1

L'altro ieri ho investito 1.000 euro in azioni di una certa società. Ieri le azioni di quella società si sono deprezzate del 4%, mentre oggi hanno subito un rialzo del 4,1%. Se in questo istante le rivendo, perdo o guadagno? Quanti euro?

✍ Soluzione

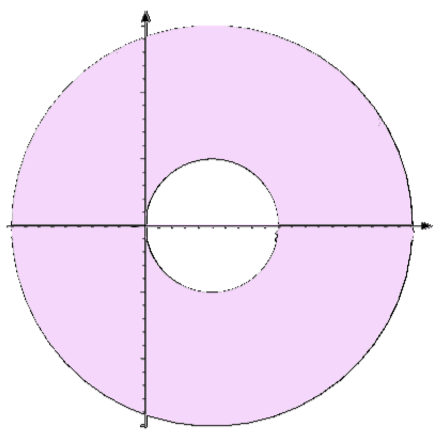
Perdo 0,64 euro infatti oggi ho $1\,000 \cdot \frac{100-4}{100} \cdot \frac{100+4{,}1}{100} = 999{,}36$ euro.

Esercizio 12.2

Nel piano dotato di un riferimento cartesiano ortogonale Oxy, si individui il luogo dei punti (x, y) tali che $0 \leqslant x^2 + y^2 - 2x \leqslant 8$.

✍ Soluzione

Si tratta della corona circolare (vedi figura a lato) delimitata internamente dalla circonferenza di centro (1,0) e raggio 1 ed esternamente dalla circonferenza di centro (1,0) e raggio 3. Le due circonferenze sono incluse.



Esercizio 12.3

Risolvere la disequazione $\dfrac{\log_2(2x^2-3x-2)}{(x+1)(3x-10)} \geqslant 0.$

✍ Soluzione

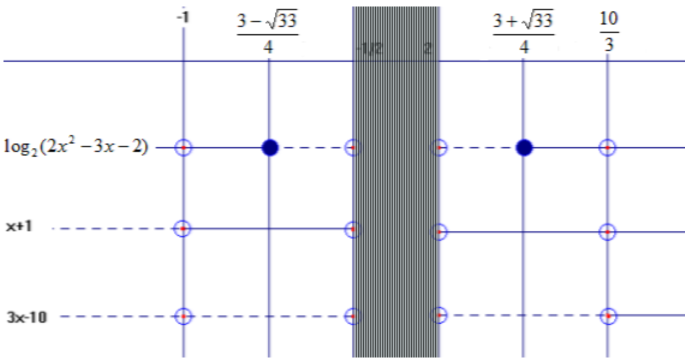
Dapprima determiniamo il campo d'esistenza:

$$\begin{cases}(2x^2-3x-2)\geqslant 0\\(x+1)\neq 0\\(3x-10)\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(2x^2-3x-2)\geqslant 0\\x\neq -1\\x\neq 10/3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x<-1/2 \vee x>2\\x\neq -1\\x\neq 10/3\end{cases}$$

Si tratta ora di determinare il segno di ciascun fattore, applicando successivamente la regola dei segni. Si ha:

$$\begin{array}{lclcl}\log_2(2x^2-3x-2)\geqslant 0 & & (2x^2-3x-2)\geqslant 1 & & x\leqslant \frac{3-\sqrt{33}}{4} \vee x \geqslant \frac{3+\sqrt{33}}{4}\\(x+1)>0 & \Leftrightarrow & x>-1 & \Leftrightarrow & x>-1\\(3x-10)>0 & & x>10/3 & & x>10/3\end{array}$$

Riportiamo i valori su un grafico (la linea continua indica il segno positivo, la linea tratteggiata il segno negativo).



La disequazione è verificata quindi per

$$x \in (-\infty,-1) \cup [(3-\sqrt{33})/4,-1/2) \cup (2,(3+\sqrt{33})/4] \cup (10/3,+\infty)$$

Esercizio 12.4

Determinare una primitiva G su $\mathbb{R}$ della funzione $f(x)=\dfrac{1}{e^{2x}+1}$.

✍ Soluzione

$$G(x) = \int \frac{1}{e^{2x}+1}\,dx \underbrace{=\!=\!=\!=}^{\substack{t:=e^{2x}+1\\ dx=dt/(2(t-1))}} \int \frac{1}{2t(t-1)}\,dt = -\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t-1}\right)dt =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\log|t|+\log|t-1|\right) = x-\frac{1}{2}\log\left(e^{2x}+1\right)+k, \quad k\in\mathbb{R}$$

Esercizio 12.5

Studiare la funzione f così definita: $f(x)=\sqrt{x^2-2x}+|x-3|.$

✍ Soluzione

- Insieme di definizione: $x \in (-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$
- Limiti agli estremi dell'insieme di definizione
$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0) = 3, \qquad \lim_{x\to 2^+} f(x) = f(2) = 1.$$
- Equazioni degli eventuali asintoti:
$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)/x = \pm 2 \qquad \lim_{x\to\pm\infty} f(x) \mp 2x = \mp 4$$
  - Asintoto obliquo a $-\infty$: $y = -2x + 4$
  - Asintoto obliquo a $+\infty$: $y = 2x - 4$
- Derivata prima e suoi limiti agli estremi del suo dominio: $f'(x) = \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}} + \operatorname{sgn}(x-3), \quad x \neq 3$
$$\lim_{x\to 3^\pm} f'(x) = \frac{2}{\sqrt{3}} \pm 1, \qquad \lim_{x\to 0^-} f'(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to 2^+} f'(x) = +\infty$$
- Eventuali punti angolosi: $x = 3$
- Eventuali estremanti:

  $x = 0$ punto di minimo relativo,

  $x = 2$ punto di minimo assoluto
- Derivata seconda: $f''(x) = -(x^2 - 2x)^{-3/2} \quad x \neq 3$
- Verso della concavità ed eventuali punti di flesso:

  f è concava separatamente su $(-\infty, 0]$, su $[2,3]$ e su $[3, +\infty)$
- Diagramma qualitativo di f: vedi fig. 12.1.

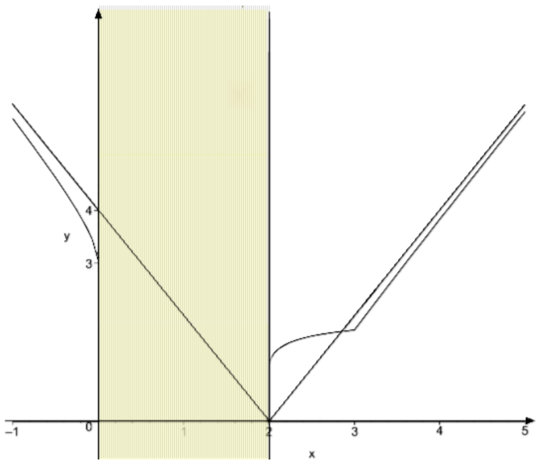
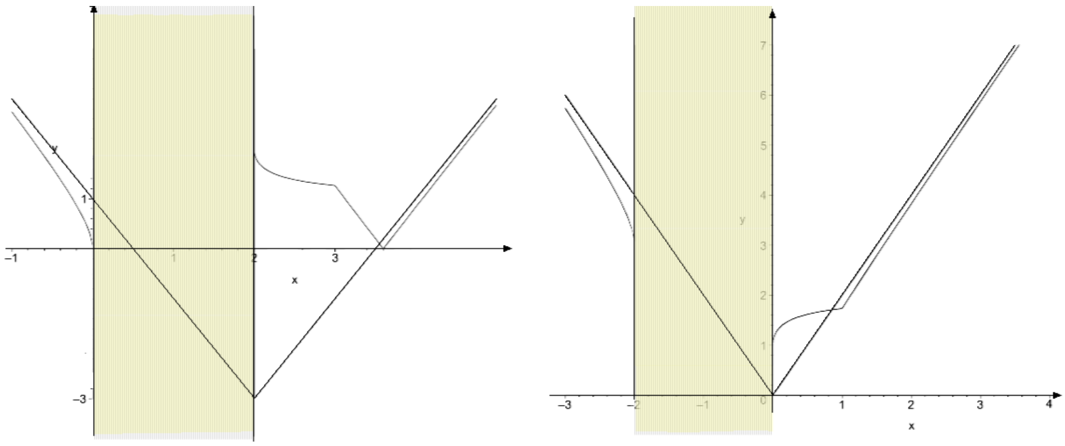


Figura 12.1. $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x} + |x - 3|$

Esercizio 12.6

Utilizzando il diagramma della funzione di cui all'esercizio 5 a fronte, tracciare un diagramma qualitativo delle funzioni g e h così definite
$$g(x) = |f(x) - 3|, \qquad h(x) = \sqrt{x^2 + 2x} + |x - 1|.$$



(a) $g(x) = |f(x) - 3|$ **(b)** $h(x) = \sqrt{x^2 + 2x} + |x - 1| = f(x + 2)$.

Figura 12.2. *Esercizio 6 nella pagina precedente*

✍ Soluzione

Vedi fig. 12.2.

TEMA 13

Seconda prova pre-esame a.a. 2002/03
24 marzo 2003

Esercizio 13.1

Calcolare $L = \lim_{x\to 2} \dfrac{\log^3(x-1)}{\sin^3(2\pi x) + \sin^4(\pi x)}$ (Il logaritmo è inteso in base "e").

✍ Soluzione

Vogliamo ricondurci ai limiti fondamentali (A) ed (E). Se poniamo $t := x - 2$ avremo

- $\log^3(x-1) \Rightarrow \log^3(t+1)$
- $\sin^3(2\pi x) \Rightarrow \sin^3(2\pi t + 4\pi) = \sin^3(2\pi t)$
- $\sin^4(\pi x) \Rightarrow \sin^4(\pi t + 2\pi) = \sin^4(\pi t)$

e il limite diviene
$$L = \lim_{t\to 0} \frac{\log^3(t+1)}{\sin^3(2\pi t) + \sin^4(\pi t)} = \lim_{t\to 0} \frac{\log^3(t+1)}{\sin^3(2\pi t) + \sin^4(\pi t)}\,\frac{t^3}{t^3} =$$
$$= \lim_{t\to 0} \frac{\dfrac{\log^3(t+1)}{t^3}}{\dfrac{\sin^3(2\pi t)}{t^3} + \dfrac{\sin^4(\pi t)}{t^3}} = \lim_{t\to 0} \frac{\left(\dfrac{\log(t+1)}{t}\right)^3}{\left(\dfrac{\sin(2\pi t)}{t}\right)^3 + \sin(\pi t)\left(\dfrac{\sin(\pi t)}{t}\right)^3} =$$
$$= \lim_{t\to 0} \frac{\left(\dfrac{\log(t+1)}{t}\right)^3}{8\pi^3\left(\dfrac{\sin(2\pi t)}{2\pi t}\right)^3 + \pi^3\sin(\pi t)\left(\dfrac{\sin(\pi t)}{\pi t}\right)^3} \overset{(A)(E)}{=} \frac{1}{8\pi^3}.$$

In alternativa, poiché il limite si presenta come una forma indeterminata del tipo $\dfrac{[0]}{[0]}$, è possibile applicare il teorema di de l'Hôpital ma i calcoli sono lunghi e laboriosi:

$$L = \lim_{x\to 2} \frac{\log^3(x-1)}{\sin^3(2\pi x) + \sin^4(\pi x)} \overset{H}{=} \lim_{x\to 2} \frac{3\,\frac{(\ln(x-1))^2}{x-1}}{\left(6\,(\sin(2\pi x))^2\cos(2\pi x) + 4\,(\sin(\pi x))^3\cos(\pi x)\right)\pi} =$$

$$\overset{H}{=} \lim_{x\to 2} \frac{-3\,\frac{\ln(x-1)(-2+\ln(x-1))}{(x-1)^2}}{\left(24\sin(2\pi x)(\cos(2\pi x))^2 - 12\,(\sin(2\pi x))^3 + 12\,(\sin(\pi x))^2(\cos(\pi x))^2 - 4\,(\sin(\pi x))^4\right)\pi^2} =$$

$$\stackrel{H}{=} \lim_{x\to 2} \frac{6\,\frac{1-3\ln(x-1)+(\ln(x-1))^2}{(x-1)^3}}{\left(48\,(\cos(2\pi x))^3 - 168\,(\sin(2\pi x))^2\cos(2\pi x) + 24\sin(\pi x)\,(\cos(\pi x))^3 - 40\,(\sin(\pi x))^3\cos(\pi x)\right)\pi^3} =$$

$$= \frac{6}{48\pi^3} = \frac{1}{8\pi^3}$$

Esercizio 13.2

Determinare una primitiva G su $(0,+\infty)$ della funzione $f(x) = x^3 e^{2x^2}$.

Calcolare quindi $I = \displaystyle\int_{-1}^{1} |x|^3 e^{2x^2}\,dx$.

✍ Soluzione

Integrando per parti* abbiamo:

$$G(x) = \int x^3 e^{2x^2}\,dx \stackrel{\text{P.P.}}{=\!=} \frac{1}{4}\left(x^2 e^{2x^2} - \frac{1}{2}e^{2x^2}\right) = \frac{e^{2x^2}}{8}(2x^2-1)+k, \quad k\in\mathbb{R};$$

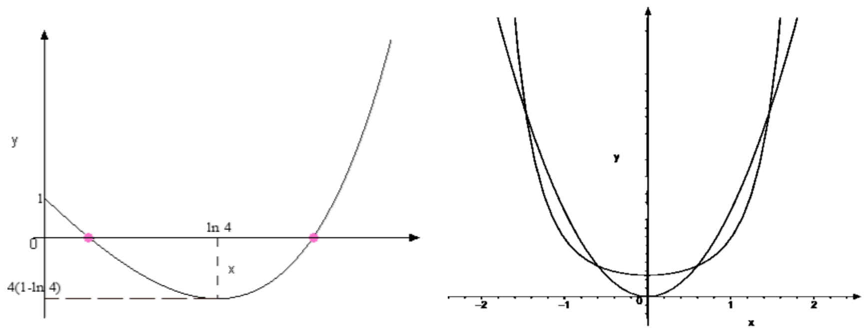
$$I = 2\,[\,G(1) - G(0)\,] = 2\int_0^1 x^3 e^{2x^2}\,dx = \frac{1}{4}(e^2-1)$$

Esercizio 13.3

Determinare il numero di soluzioni distinte (in $\mathbb{R}$) dell'equazione $e^{x^2} = 4x^2$.

✍ Soluzione

L'equazione ha in $\mathbb{R}$ 4 soluzioni distinte. Infatti si ponga $t := x^2$. La funzione $f(t) = e^t - 4t$ (vedi fig. 13.1a) è positiva in $t = 0$ e per $t \to +\infty$, ma il suo valore minimo, assunto per $t = \log 4$, è negativo: essendo convessa, si annulla esattamente in due punti positivi, che forniscono 4 soluzioni (2 negative e 2 positive) in x (vedi fig. 13.1b).



(a) $f(t) = e^t - 4t$ (b) $e^{x^2} = 4x^2$

Figura 13.1. $e^{x^2} = 4x^2$

---

*$\int h(x)g'(x)\,dx = h(x)g(x) - \int h'(x)g(x)\,dx$

$$h(x) = x^2 \quad \rightsquigarrow \quad h'(x) = 2x$$

$$g(x) = \int g'(x)\,dx = \frac{e^{2x^2}}{4} \quad \leftsquigarrow \quad g'(x) = xe^{2x^2}$$

Esercizio 13.4

Sia g la funzione così definita su $\mathbb{R}$: $g(x) = x^{1/3}\sin(x^2/2)^{1/3}$. Stabilire se g è derivabile in $x = 0$, calcolando $g'(0)$ in caso di risposta affermativa o motivando l'eventuale risposta negativa.

✍ Soluzione

Si ha

$$\lim_{h\to 0^\pm}\frac{g(0+h)-g(0)}{h} = \lim_{h\to 0^\pm}\frac{g(h)}{h} = \lim_{h\to 0^\pm}\frac{\sin(h^2/2)^{1/3}}{h^{2/3}} = \lim_{h\to 0^\pm}\left(\frac{1}{2}\frac{\sin(h^2/2)}{h^2/2}\right)^{1/3} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

per cui $g'(0)$ esiste e vale $2^{-1/3}$.

Esercizio 13.5

Studiare la funzione f così definita: $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-25}}$.

✍ Soluzione

- Insieme di definizione: $|x| > 5$, $\quad f$ è pari
- Limiti agli estremi dell'insieme di definizione:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to 5^+} f(x) = \lim_{x\to -5^-} f(x) = +\infty$$

- Equazioni degli eventuali asintoti:
  - asintoti verticali: $x = \pm 5$
  - essendo $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = \pm 1$ e $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} f(x) \mp x = \lim_{x\to\pm\infty} x\left(\left(1-\frac{25}{x^2}\right)^{-1/2} \mp 1\right) \overset{(G)}{=} 0$, si ha asintoto obliquo per $x \to \pm\infty$: $y = \pm x$
- Derivata prima: $\quad f'(x) = \dfrac{x^3 - 50x}{(x^2-25)^{3/2}}$
- Eventuali estremanti: $x = \pm\sqrt{50}$ punti di minimo assoluto
- Derivata seconda: $\quad f''(x) = \dfrac{25x^2 + 1250}{(x^2-25)^{5/2}}$
- Verso della concavità ed eventuali punti di flesso:

  f convessa su $(-\infty, -5)$ e su $(5, +\infty)$
- Diagramma qualitativo di f: vedi fig. 13.2 nella pagina seguente.

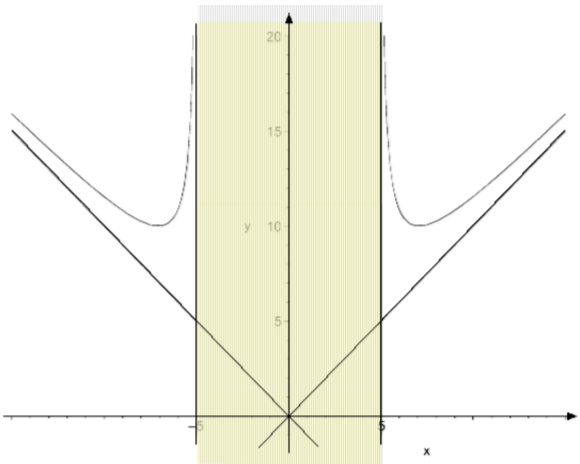


Figura 13.2. $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2 - 25}}$

TEMA 14

Prova scritta del 24 marzo 2003

Esercizio 14.1

Una popolazione a crescita zero è composta da 60 milioni di individui la cui vita media è 80 anni. Qual è il numero medio di nascite (e di decessi) all'anno?

✍ Soluzione

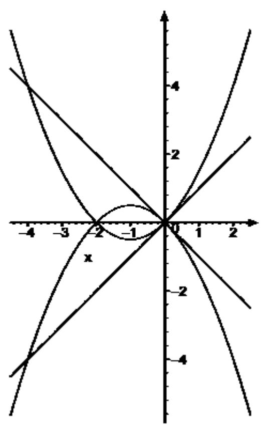
60 000 000 / 80 = 750 000

Esercizio 14.2

Nel piano dotato di un riferimento cartesiano ortogonale Oxy, si rappresenti il luogo L dei punti (x, y) tali che $x^2 - y^2 = 0$. Fra le parabole passanti per l'origine e aventi per asse la retta di equazione $x = -1$, si determinino quindi quelle che intersecano L nel minor numero di punti possibile, precisando tale numero.

✍ Soluzione

L è costituito dall'unione delle due rette di equazioni $y = x$ e $y = -x$. Perché la generica parabola $y = ax^2 + bx + c$ passi per l'origine deve essere $c = 0$; affinché abbia per asse la retta di equazione $x = -1$ deve essere $b = 2a$; in conclusione $y = ax(x + 2)$. Fra queste parabole cerchiamo quelle che intersecano L nel minor numero di punti possibile, cioè quelle parabole che sono tangenti o all'una o all'altra retta in $x = 0$. Poiché $y' = 2ax + 2a$, deve essere $2a = \pm 1$ dunque le equazioni delle parabole sono $y = \pm(x + x^2/2)$ e il numero minimo di intersezioni è 2.



Esercizio 14.3

Risolvere la disequazione $\quad 3+\log_{1/2}\left(\sqrt{x}+5\right) > 0.$

✍ Soluzione

Risolviamo la disequazione $\log_{1/2}\left(\sqrt{x}+5\right) > -3$. Poiché $-3=\log_{1/2}(1/2)^{-3}$ la disequazione può essere scritta come

$$\begin{aligned} \log_{1/2}\left(\sqrt{x}+5\right) > \log_{1/2}(1/2)^{-3} \quad &\Leftrightarrow \quad 0<\left(\sqrt{x}+5\right)<(1/2)^{-3}=8 \quad \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad -5<\sqrt{x}<3 \quad \Leftrightarrow \quad 0\leqslant x<9 \end{aligned}$$

Esercizio 14.4

Determinare una primitiva G su $(-\pi,0)$ della funzione $\quad f(x)=(\cos x)\log(\sin^2 x)$ (il logaritmo è inteso in base "e"). Calcolare quindi $\quad I=\displaystyle\int_{-\pi/2}^{-\pi/6} f(x)\,dx$.

✍ Soluzione

Integrando per parti*

$$\begin{aligned} G(x) = &\int(\cos x)\log(\sin^2 x)\,dx \overset{\text{P.P.}}{=\!=} \sin x\log(\sin^2 x)-\int\frac{2\cos x\sin x}{\sin^2 x}\sin x\,dx = \\ = &\left(\log(\sin^2 x)-2\right)\sin x+k = 2\left(\log|\sin x|-1\right)\sin x+k, \quad k\in\mathbb{R} \end{aligned}$$

$$I = G\left(-\tfrac{\pi}{6}\right)-G\left(-\tfrac{\pi}{2}\right)=\log 2-1$$

Esercizio 14.5

Studiare la funzione f così definita: $f(x)=x\log(1-x^3)$ (il logaritmo è inteso in base "e").

✍ Soluzione

- ❦ Insieme di definizione: $(-\infty,1)$
- ❦ Limiti agli estremi dell'insieme di definizione:
  $f(x)\to-\infty$ per $x\to-\infty$ (senza asintoto) e per $x\to1^-$
- ❦ Derivata prima: $f'(x)=\log(1-x^3)-\dfrac{3x^3}{1-x^3}$. Chiaramente si ha $\operatorname{sgn} f'(x)=-\operatorname{sgn} x$.
- ❦ Eventuali estremanti: $\quad x=0 \quad$ punto di massimo assoluto
- ❦ Derivata seconda: $f''(x)=\dfrac{3x^2(x^3-4)}{(1-x^3)^2}$
- ❦ Verso della concavità ed eventuali punti di flesso: f è concava su $(-\infty,1)$.
- ❦ Diagramma qualitativo di f: vedi fig. 14.1 nella pagina successiva.

---

*$\int h(x)g'(x)\,dx = h(x)g(x)-\int h'(x)g(x)\,dx$

$$\begin{aligned} h(x) &= \ln(\sin^2 x) &\rightsquigarrow\quad h'(x)&=2\frac{\cos x}{\sin x} \\ g(x) &= \int g'(x)\,dx = \sin x &\leftsquigarrow\quad g'(x)&=\cos x \end{aligned}$$

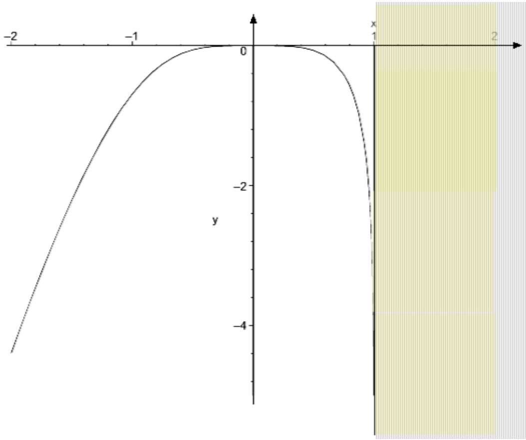


Figura 14.1. $f(x) = x\log(1-x^3)$

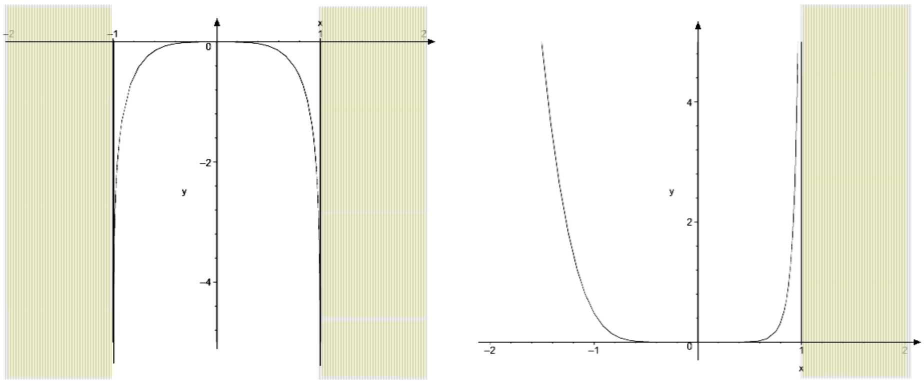
Esercizio 14.6

Sia f la funzione di cui all'esercizio 5 a fronte. Tracciare un diagramma qualitativo di ciascuna delle funzioni

$$g(x) = f(|x|) \qquad \text{e} \qquad h(x) = \big(f(x)\big)^6 \,.$$

✍ Soluzione

Vedi fig. 14.2.



(a) $g(x) = f(|x|)$ **(b)** $h(x) = (f(x))^6$

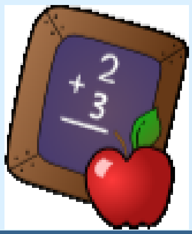
Figura 14.2. *Esercizio 6*

TEMA 15

Prova scritta del 7 aprile 2003

Esercizio 15.1

La media degli studenti promossi in una certa scuola nel quadriennio 1998-2001 è stata di 325 studenti all'anno. Nel quinquennio 1998-2002 la media è stata superiore del 20%. Infine, nel 2003 nella scuola sono stati promossi 450 studenti. Quanti studenti sono stati promossi nel 2002? Qual è la media degli studenti promossi annualmente nel sestennio 1998-2003?



✍ Soluzione

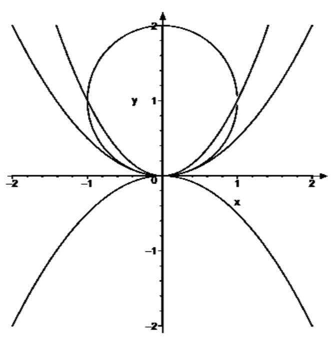
Il numero complessivo di studenti promossi nel quadriennio 1998-2001 è $325 \cdot 4$.
Il numero complessivo di studenti promossi nel quinquennio 1998-2002 è $(325 + 20\% \cdot 325) \cdot 5 = 390 \cdot 5$.
Pertanto il numero degli studenti promossi nel 2002 è $390 \cdot 5 - 325 \cdot 4 = 650$.
La media degli studenti promossi nel sestennio 1998-2003 è $(390 \cdot 5 + 450)/6 = 400$.

Esercizio 15.2

Nel piano dotato di un riferimento cartesiano ortogonale Oxy, sia γ la circonferenza di centro $(0, 1)$ e raggio 1 e sia p_k la parabola di equazione $y = k\,x^2$, dove k è un parametro reale non nullo. Stabilire per quali valori di k le curve γ e p_k hanno il minor numero possibile di punti in comune, precisando tale numero.

✍ Soluzione

Il minor numero possibile di punti in comune fra γ e p_k è 1.



Le curve hanno il minor numero possibile di punti in comune per $k \leqslant 1/2$ $(k \neq 0)$ (cioè per quei valori di k in corrispondenza ai quali l'equazione $x^2(1 - 2k + k^2x^2) = 0$ ha solo la soluzione nulla.

Esercizio 15.3

Sia γ la circonferenza di cui all'esercizio precedente: si determini esplicitamente la funzione g il cui diagramma è la semicirconferenza costituita dalla parte di γ che sta al di sotto della retta di equazione $y = 1$. Si consideri quindi la funzione $f_k = k|x|^{3/2}$, dove k è un parametro reale non nullo, e si calcoli, al variare di k, $L_k = \lim_{x\to 0} \dfrac{f_k(x)}{g(x)}$.
Utilizzando il risultato ottenuto, si svolga l'esercizio precedente, dopo aver sostituito nell'enunciato alla parabola p_k il diagramma d_k della funzione f_k.

✍ Soluzione

$$g(x) = 1 - \sqrt{1-x^2}$$

$$L_k = \begin{cases} +\infty & k > 0 \\ -\infty & k < 0 \end{cases}$$

Il minor numero possibile di punti in comune fra γ e d_k è 1.
γ e d_k hanno il minor numero di punti in comune per $k < 0$ (per $k > 0$ si hanno comunque intersezioni al di fuori dell'origine: infatti, per $x \to 0$, g tende a zero "più in fretta" di f_k).

Esercizio 15.4

Determinare una primitiva su $\mathbb{R}$ della funzione $f(x) = x^3\sqrt{3+x^2}$.

✍ Soluzione

$$\int x^3\sqrt{3+x^2}\,dx \overset{\substack{t^2:=3+x^2 \\ \overbrace{t\,dt=x\,dx}}}{=\!=\!=} \int (t^2-3)t^2\,dt =$$

$$= \frac{t^5}{5} - t^3 = \frac{1}{5}(3+x^2)^{5/2} - (3+x^2)^{3/2}$$

Esercizio 15.5

Quante sono le possibili colonne del totocalcio in cui il segno "2" compare esattamente 3 volte?

✍ Soluzione

$$\binom{13}{3}2^{10} = 292\,864$$

Esercizio 15.6

Studiare la funzione f così definita:

$$f(x) = e^{\frac{1}{\ln x}}$$

(il logaritmo è inteso in base "e").

✍ Soluzione

- Insieme di definizione: $x \in (0,1) \cup (1,+\infty)$

- Limiti agli estremi dell'insieme di definizione:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1^- \qquad \lim_{x\to 1^-} f(x) = 0^+ \qquad \lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to +\infty} f(x) = 1^+$$

- Derivata prima e suoi limiti agli estremi del suo insieme di definizione:

$$f'(x) = e^{1/\log x}\left(-\frac{1}{x\log^2 x}\right)$$

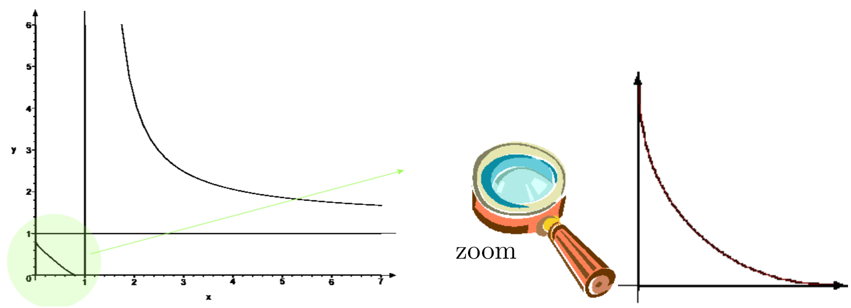
$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 1^+} f'(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to +\infty} f'(x) = 0^-$$

- Derivata seconda: $f''(x) = e^{\frac{1}{\log x}}\left(\dfrac{\log^2 x + 2\log x + 1}{x^2\log^4 x}\right)$

- Verso della concavità
  $f(x)$ convessa in $(0, 1)$ e in $(1, +\infty)$

- Diagramma qualitativo di f: vedi fig. 15.1a e fig. 15.1b per il particolare.



(a) (b)

Figura 15.1. $f(x) = e^{1/\log x}$

Esercizio 15.7

Sia f la funzione di cui all'esercizio 6 a fronte. Tracciare un diagramma qualitativo della funzione $g(x) = f(|x-1|)$.

✍ Soluzione

Vedi fig. 15.2 nella pagina successiva.

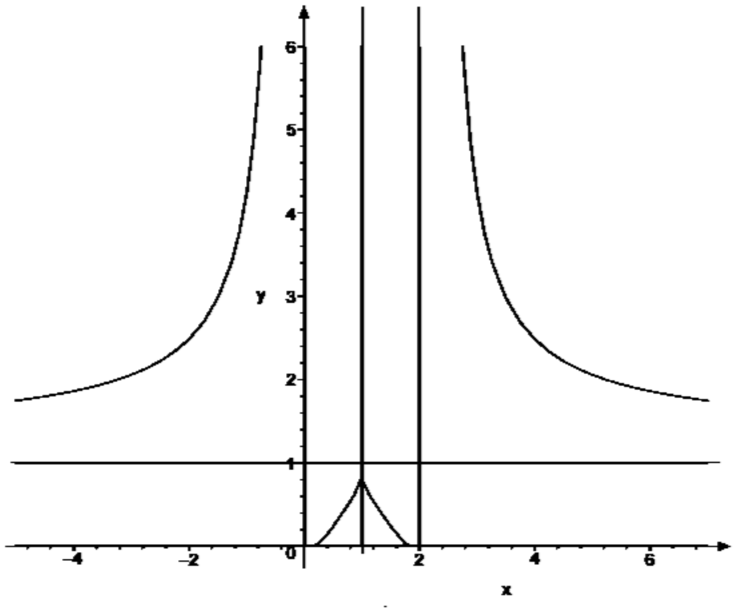


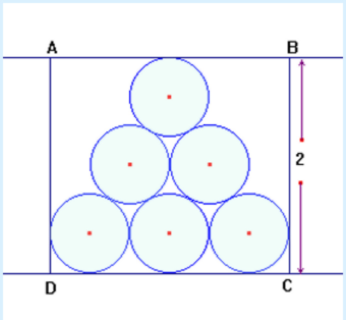
Figura 15.2. $g(x) = f(|x - 1|)$

TEMA 16

Prova scritta 23 del giugno 2003

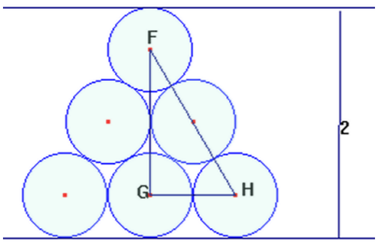
Esercizio 16.1

I cerchi in figura hanno tutti lo stesso raggio r. L'altezza del rettangolo $ABCD$ vale 2. Quanto vale r?



✍ Soluzione

Dal disegno si deduce che $FG = 2 - 2r$, $GH = 2r$ e $FH = 4r$ perciò per il teorema di Pitagora $(2-2r)^2 + (2r)^2 = (4r)^2$ da cui $r = \dfrac{1}{\sqrt{3}+1}$.



Esercizio 16.2

Risolvere la disequazione $\left|\dfrac{x}{x-2}\right| \leqslant 5$

✍ Soluzione

$$\left|\tfrac{x}{x-2}\right| \leqslant 5 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{x-2} \leqslant 5 \\ \dfrac{x}{x-2} \geqslant -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{10-4x}{x-2} \leqslant 0 \\ \dfrac{6x-10}{x-2} \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leqslant 2 \vee x \geqslant 5/2 \\ x \leqslant 5/3 \vee x \geqslant 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \leqslant \frac{5}{3} \vee x \geqslant \frac{5}{2}$$

Oppure: individuare quei punti x la cui distanza dall'origine non supera 5 volte la distanza da 2 ($|x| \leqslant 5|x-2|$).

Esercizio 16.3

Assegnata la funzione $f(x) = \dfrac{x}{ax+b}$ si determinino i valori di a e b in modo che la retta di equazione $y = 1/2$ e la retta di equazione $x = 3$ siano entrambe asintoti al diagramma di f.

✍ Soluzione

$$\text{Qualunque sia } b, \text{ si ha } \lim_{x\to\infty} \frac{x}{ax+b} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow a = 2$$
$$\text{Inoltre si ha } \lim_{x\to 3} \frac{x}{2x+b} = \infty \Leftrightarrow b = -6$$

Esercizio 16.4

Determinare una primitiva G su $(0, +\infty)$ della funzione $f(x) = \dfrac{e^{\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}$.

Calcolare quindi $I = \displaystyle\int_1^{16} f(x)\,dx$.

✍ Soluzione

$$\begin{aligned} G(x) &= \int \frac{e^{\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\,dx \underset{\underbrace{4t^3\,dt = dx}}{\overset{t := \sqrt[4]{x}}{=\!=\!=}} 4\int te^t\,dt \overset{\text{P.P.}}{=\!=} 4\left(te^t - \int e^t\,dt\right) = \\ &= 4(t-1)e^t = 4(\sqrt[4]{x}-1)e^{\sqrt[4]{x}} + k, \quad k \in \mathbb{R} \\ I &= \int_1^{16} f(x)\,dx = G(16) - G(1) = 4\,e^2 \end{aligned}$$

Esercizio 16.5

Quante sono le possibili colonne del totocalcio in cui il segno "2" compare *almeno* 3 volte?

✍ Soluzione

Occorre escludere quelle in cui non compare, quelle in cui compare esattamente una volta e quelle in cui compare esattamente due volte. Dunque

$$3^{13} - \binom{13}{0} 2^{13} - \binom{13}{1} 2^{12} - \binom{13}{2} 2^{11} = 3^{13} - 2^{13} - 13 \cdot 2^{12} - 78 \cdot 2^{11} = 1\,373\,139$$

Esercizio 16.6

Studiare la funzione f così definita: $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}\, e^{\frac{1}{x}}$.

✍ Soluzione

- Insieme di definizione: $x \neq 0$ e $x \neq 1$

- Limiti agli estremi dell'insieme di definizione:
$$\lim_{x\to\mp\infty} f(x) = \mp\infty \qquad \lim_{x\to 0^-} f(x) = 0 \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to 1^\mp} f(x) = \mp\infty$$
- Equazioni degli eventuali asintoti:
$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\dfrac{x^2 e^{1/x}}{x-1}}{x} = 1 =: m$$
$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2 e^{1/x}}{x-1} - x = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2(e^{1/x}-1)}{x-1} + \frac{x}{x-1} =$$
$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{e^{1/x}-1}{1/x} \cdot \frac{x}{x-1} + \frac{x}{x-1} \overset{(F)}{=} 2 =: q$$
Asintoto obliquo per $x \to \pm\infty$: $y = x + 2$
- Derivata prima: $f'(x) = \dfrac{e^{1/x}\,(x^2-3x+1)}{(x-1)^2}$
- Eventuali estremanti:
  - $x = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ punto di minimo relativo
  - $x = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ punto di massimo relativo
- Derivata seconda: $f''(x) = \dfrac{e^{1/x}(5x^2-4x+1)}{x^2(x-1)^3}$
- Verso della concavità ed eventuali punti di flesso:

  f è convessa per $x > 1$, concava per $x < 0 \;\vee\; 0 < x < 1$
- Diagramma qualitativo di f: vedi fig. 16.1.

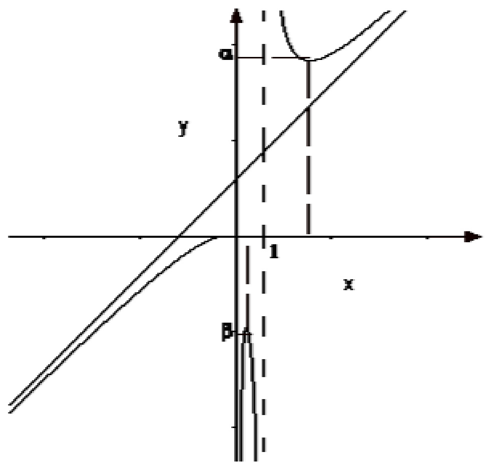


Figura 16.1. $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}\, e^{1/x}$

Esercizio 16.7

Sia f la funzione di cui al punto precedente. Al variare del parametro reale k, indicare il numero delle soluzioni distinte dell'equazione $f(x) = k$.
(N.B. Non si chiede di determinare le soluzioni!)

✍ Soluzione

Poniamo $\alpha := f\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) \quad \beta := f\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$

Otteniamo:

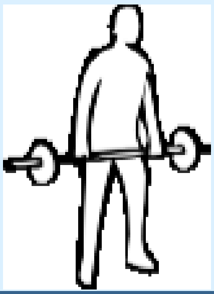
Otteniamo:	se $k < \beta$	3 soluzioni
	se $k = \beta$	2 soluzioni
	se $\beta < k < 0$	1 soluzione
	se $0 \leqslant k < \alpha$	nessuna soluzione
	se $k = \alpha$	1 soluzione
	se $k > \alpha$	2 soluzioni

TEMA 17

Prova scritta del 14 luglio 2003

Esercizio 17.1

Una palestra è aperta tutto l'anno eccetto il mese di agosto. L'iscrizione è su base annuale: chi vuole frequentarla deve pagare un importo che ne consente l'utilizzo per 12 mesi effettivi. Se, per esempio, un cliente si è iscritto in data 15 aprile 2003, potrà usufruirne fino al 14 maggio 2004. Supponendo che quel cliente voglia dal 15/4/2003 in poi frequentare la palestra in ogni giorno di apertura, in quale giorno del 2008 dovrà rinnovare l'iscrizione?



✍ Soluzione

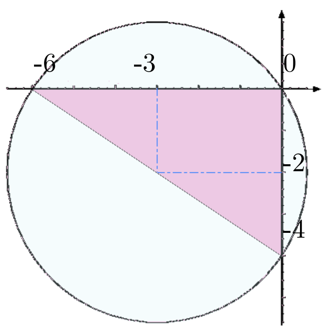
L'iscrizione andrà rinnovata il 15 ottobre 2008.

Esercizio 17.2

Nel piano dotato di un riferimento cartesiano ortogonale Oxy, determinare l'equazione della circonferenza per la quale il segmento di estremi $(0,0)$ e $(-6,-4)$ è diametrale. Determinare quindi l'area del triangolo i cui vertici sono i punti di intersezione di detta circonferenza con gli assi di riferimento.

✍ Soluzione

Il centro della circonferenza è il punto $(-3,-2)$ e il raggio vale $\sqrt{52}/2$, perciò l'equazione della circonferenza è $x^2+y^2+6x+4y=0$. I punti di intersezione con gli assi cartesiani sono $(0,0)$, $(-6,0)$ e $(0,-4)$, per cui l'area del triangolo è 12.



Esercizio 17.3

Risolvere la disequazione $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-3x} < 4$

✍ Soluzione

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-3x} < 4 \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-3x} < \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} \quad \Leftrightarrow \quad x^2-3x > -2 \quad \Leftrightarrow \quad x < 1 \ \vee \ x > 2$$

Esercizio 17.4

Determinare i valori dei parametri a e b in corrispondenza ai quali il diagramma della funzione $f(x) = a\ x\ \cos(b/\sqrt{x})$ ha come asintoto per $x \to +\infty$ la retta di equazione $y = 3x - 1$ (il logaritmo è inteso in base "e").

✍ Soluzione

$$\lim_{x\to+\infty} a\ x\ \cos\left(\frac{b}{\sqrt{x}}\right) = +\infty \qquad \text{se } a > 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} a\ \cos\left(\frac{b}{\sqrt{x}}\right) = 3 \Leftrightarrow a = 3$$

$$\lim_{x\to+\infty} 3x\cos\left(\frac{b}{\sqrt{x}}\right) - 3x = \lim_{x\to+\infty} 3x\left(\cos\left(\frac{b}{\sqrt{x}}\right) - 1\right) = \lim_{x\to+\infty} -3b^2\frac{1-\cos\left(\frac{b}{\sqrt{x}}\right)}{\frac{b^2}{x}} =$$

$$= -1 \Leftrightarrow b = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$$

Esercizio 17.5

Determinare una primitiva G su $\mathbb{R}$ della funzione $f(x) = \sqrt{e^x - 1}$.

Calcolare quindi $I = \int_0^{\log 5} f(x)dx$.

✍ Soluzione

$$G(x) = \int \sqrt{e^x-1}\,dx \underset{\substack{t:=\sqrt{e^x-1}\\ (2t/(1+t^2))\,dt=dx}}{=\!=\!=\!=\!=} \int t\frac{2t}{t^2+1}\,dt = 2\int \frac{t^2}{t^2+1}\,dt = 2\int \frac{t^2+1-1}{t^2+1}\,dt$$

$$= 2\int \left(1 - \frac{1}{t^2+1}\right)dt = 2\,(t - \arctan t) = 2(\sqrt{e^x-1} - \arctan\sqrt{e^x-1}) + k, \quad k \in \mathbb{R}$$

$$I = G(\log 5) - G(0) = 2(2 - \arctan 2)$$

Esercizio 17.6

Studiare la funzione f così definita: $f(x) = x\ \log(x^3+1)$ (il logaritmo è inteso in base "e").

✍ Soluzione

- Insieme di definizione: $x > -1$
- Limiti agli estremi dell'insieme di definizione:

$$\lim_{x\to-1^+} x\ \log(x^3+1) = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} x\ \log(x^3+1) = +\infty \qquad \text{(senza asintoto)}$$

- Derivata prima ed eventuali punti estremanti: $f'(x) = \log(x^3+1) + 3\frac{x^3}{x^3+1}$
  - $f'(x) > 0$ per $x > 0$ (f crescente)
  - $f'(x) < 0$ per $-1 < x < 0$ (f decrescente)
  - $f'(x) = 0$ per $x = 0$ (punto di minimo)
- Derivata seconda: $f''(x) = 3x^2\frac{x^3+4}{(x^3+1)^2}$
- Verso della concavità:

  f è convessa per $-1 < x < 0 \vee x > 0$
- Diagramma qualitativo di f: vedi fig. 17.1.

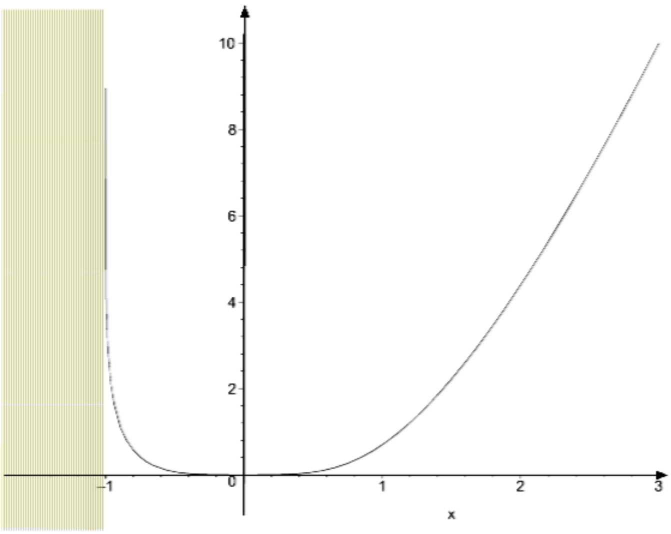


Figura 17.1. $f(x) = x\ \log(x^3+1)$

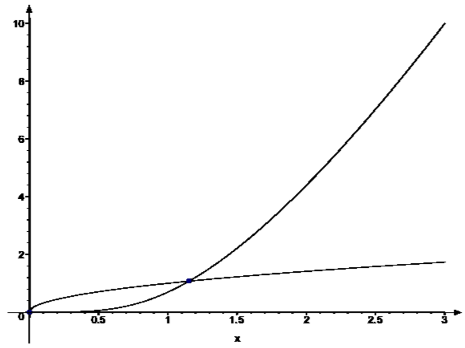
Esercizio 17.7

Sia f la funzione di cui all'esercizio 6 a fronte. Determinare il numero delle soluzioni dell'equazione $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Per ciascuna delle eventuali soluzioni non intere, indicare la parte intera (cioè il più grande intero che le precede). Giustificare tutte le risposte fornite.

✍ Soluzione

Poniamo $g(x) := \sqrt[3]{x}$.

- Se $x < 0$ si ha $f(x) < 0$ mentre $g(x) > 0$ quindi non esiste soluzione
- Se $x = 0$ si ha $f(0) = g(0) = 0$ ossia una soluzione
- Se $x > 0$ si ha $f(x) > 0$ e $g(x) > 0$ quindi possono esistere soluzioni. Dal momento che in un intorno destro di $x = 0$ si ha $g(x) > f(x)$, mentre in un intorno di $+\infty$ si ha $g(x) < f(x)$, deve esserci almeno un'altra soluzione. Poiché $f(x)$ è convessa e $g(x)$ è concava per $x \geqslant 0$, tale soluzione è unica.



Da

- $f(1) = \log 2 < 1$ mentre $g(1) = 1$
- $f(2) = 2 \log 9 > 2$ mentre $g(2) < 2$

segue che tale soluzione è compresa fra 1 e 2.

In conclusione si hanno due soluzioni: una soluzione è $x = 0$, l'altra soluzione ha parte intera $=$ 1.

TEMA 18

Prova scritta del 24 settembre 2003

Esercizio 18.1

Una vasca possiede un tubo di scarico in grado di svuotarla (quando è piena) in 3 ore e un rubinetto in grado di riempirla (quando è vuota) in 4 ore. Se la vasca è piena e si aprono contemporaneamente sia lo scarico sia il rubinetto, dopo quanto tempo sarà vuota?

✍ Soluzione

La vasca sarà vuoto dopo 12 ore. Infatti in 1 ora la vasca si svuota per 1/3 e si riempie per 1/4, cioè si svuota per 1/12.

Esercizio 18.2

Nel piano dotato di un riferimento cartesiano ortogonale Oxy, si considerino l'iperbole di equazione

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{25} = 1$$

e i suoi due punti A e B di ascissa 5.
Si determinino:

i) l'area del triangolo avente per vertici l'origine degli assi e i due punti A e B;

ii) per ciascuno dei punti A e B, l'equazione della retta tangente l'iperbole in tale punto.

✍ Soluzione

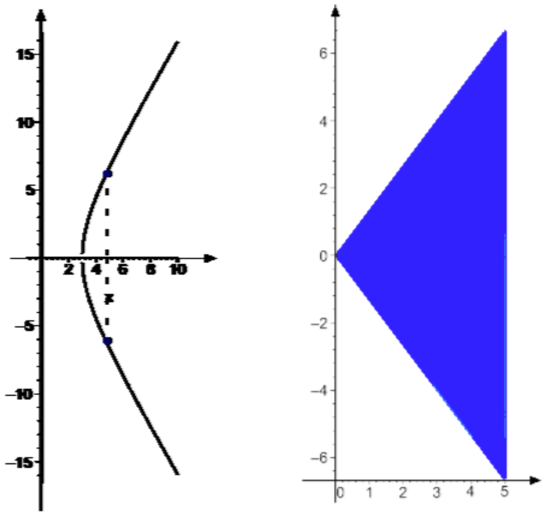
i) Vedi figg. 18.1 nella pagina successiva:

$$\frac{25}{9} - \frac{y^2}{25} = 1 \;\Rightarrow\; y^2 = \left(\frac{25}{9} - 1\right) 25 = \frac{400}{9} \;\Rightarrow\; y = \pm\frac{20}{3}$$

$$\text{Area} = \left(\frac{20}{3} \cdot 2 \cdot 5\right) \frac{1}{2} = \frac{100}{3}$$

ii) La retta tangente ad una curva di equazione $y = f(x)$ in un suo punto P di ascissa p ha equazione

$$y = f'(p)(x - p) + f(p).$$



(a) Iperbole

(b) Triangolo

Figura 18.1. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{25} = 1$

Nel nostro caso

- $p = 5$
- $f(p) = \pm\frac{20}{3}$
- $f'(p) = \pm\frac{25}{12}$

Pertanto le rette cercate hanno equazione $y = \pm\frac{25}{12}(x-5) \pm \frac{20}{3}$.

Esercizio 18.3

Risolvere la disequazione $\ln x - \frac{2}{\ln x} + 1 \geqslant 0$ (il logaritmo è inteso in base “e”).

✍ Soluzione

Osserviamo dapprima che deve essere $x > 0$ e $x \neq 1$.
Poniamo $\ln x = t$. Dobbiamo allora risolvere

$$
\begin{aligned}
t - \frac{2}{t} + 1 \geqslant 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{t^2 + t - 2}{t} \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad -2 \leqslant t < 0 \ \vee \ t \geqslant 5 \quad \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \quad -2 \leqslant \ln x < 0 \ \vee \ \ln x \geqslant 5 \quad \Leftrightarrow \quad e^{-2} \leqslant x < 1 \ \vee \ x \geqslant e
\end{aligned}
$$

Esercizio 18.4

Determinare, per $x \to +\infty$, l’equazione dell’asintoto al diagramma della funzione

$$f(x) = x\cos^3(1/\sqrt{x}).$$

✍ Soluzione

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 =: m$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - x = \lim_{x\to+\infty} x\left(\cos^3\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) - 1\right) \overset{\overbrace{A^3-1=(A-1)(A^2+A+1)}}{=\!=\!=\!=\!=}$$

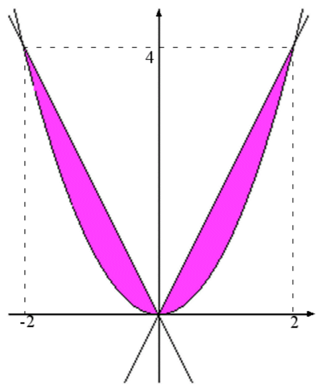
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) - 1}{\frac{1}{x}}\left(\cos^2\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) + \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) + 1\right) \overset{(B)}{=} -\frac{3}{2} =: q$$

Asintoto obliquo per $x \to +\infty$: $y = x - \dfrac{3}{2}$.

Esercizio 18.5

Stabilire per quali valori del parametro reale m l'area della regione piana delimitata dalla retta di equazione $y = mx$ e dalla parabola di equazione $y = x^2$ vale $\dfrac{4}{3}$.

✍ Soluzione



La retta incontra la parabola nei punti $O(0,0)$ e (m, m^2); se $m > 0$, si deve determinare m in modo che risulti

$$\frac{4}{3} = \int_0^m (m\,x - x^2)\,dx = \left[m\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^m =$$

$$= \frac{m^3}{2} - \frac{m^3}{3} = \frac{m^3}{6} \Rightarrow m^3 = 8$$

$$\Rightarrow m = 2.$$

Per simmetria, se $m < 0$, dovrà essere $m = -2$. In definitiva, $m = \pm 2$.

Esercizio 18.6

Studiare la funzione f così definita: $y = \dfrac{x}{\ln(x^6)}$ (il logaritmo è inteso in base "e").

✍ Soluzione

- Insieme di definizione: $x \neq 0$ e $x \neq \pm 1$. La funzione è DISPARI.
- Limiti agli estremi dell'insieme di definizione:
  $$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{\ln(x^6)} = \pm\infty \qquad \lim_{x\to 0} \frac{x}{\ln(x^6)} = 0 \qquad \lim_{x\to 1^{\pm}} \frac{x}{\ln(x^6)} = \pm\infty$$
- Derivata prima: $y' = \dfrac{\ln(x^6) - 6}{(\ln(x^6))^2}$
- Eventuali estremanti: $y' = 0 \;\Leftrightarrow\; \ln(x^6) = 6 \;\Leftrightarrow\; x = \pm e$
- Derivata seconda: $y'' = -6\dfrac{\ln(x^6) - 12}{(\ln(x^6))^3\,x}$

❦ Verso della concavità ed eventuali punti di flesso:

$$y'' > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x < -e^2 \ \cup\ -1 < x < 0 \ \cup\ 1 < x < e^2 \qquad (f \text{ convessa})$$

$$y'' < 0 \quad \Leftrightarrow \quad -e^2 < x < -1 \ \cup\ 0 < x < 1 \ \cup\ x > e^2 \qquad (f \text{ concava})$$

Allora $\quad x = \pm e^2 \quad$ sono punti di flesso.

❦ Diagramma qualitativo di f: vedi fig. 18.2.

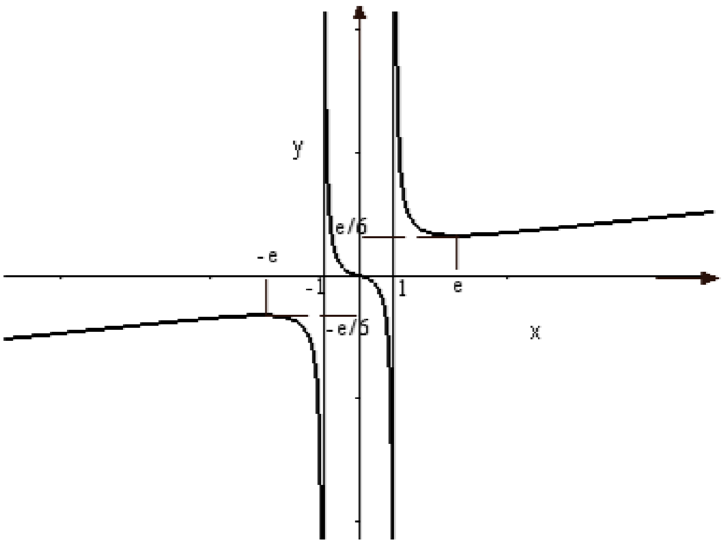


Figura 18.2. $y = \dfrac{x}{\ln(x^6)}$

Esercizio 18.7

Sia f la funzione di cui all'esercizio precedente. Al variare del parametro reale α, precisare il numero delle soluzioni dell'equazione $f(x) = \alpha$.
N.B. Si chiede solo di precisare <u>il numero</u> delle soluzioni, non di determinarle!

✍ Soluzione

Poiché $\quad f(\pm e) = \pm\dfrac{e}{6} \quad$ otteniamo:

3 soluzioni $\quad$ se $\alpha < -\dfrac{e}{6} \ \vee\ \alpha > \dfrac{e}{6}$

2 soluzioni $\quad$ se $\alpha = \pm\dfrac{e}{6}$

1 soluzione $\quad$ se $-\dfrac{e}{6} < \alpha < \dfrac{e}{6}$

TEMA 19

Prova scritta del 20 novembre 2003

Esercizio 19.1

A 500 litri di una soluzione di un certo acido al 20% vengono addizionati 200 litri di una soluzione dello stesso acido al 90%. Qual è la percentuale di acido nella soluzione che si ottiene?

✍ Soluzione

$$500 \cdot \frac{20}{100} + 200 \cdot \frac{90}{100} = 700 \cdot \frac{x}{100} \qquad \Rightarrow \qquad x = 40 : \text{ si ottiene una soluzione al } 40\%.$$

Esercizio 19.2

Nel piano dotato di un riferimento cartesiano ortogonale Oxy, si consideri la retta r di equazione $y = 1 - 2x$. Si scriva l'equazione della circonferenza con centro sull'asse "y" e tangente la retta r nel punto in cui tale retta incontra l'asse "x".

✍ Soluzione

- La circonferenza di centro (x_c, y_c) e raggio R ha equazione $(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = R^2$. Se il centro appartiene all'asse "y" si ha $x^2 + (y - y_c)^2 = R^2$.
- La retta r incontra l'asse "x" nel punto $(1/2, 0)$. Imponiamo che la circonferenza passi per questo punto: $\left(\frac{1}{2}\right)^2 + (0 - y_c)^2 = R^2$ da cui $R^2 = y_c^2 + 1/4$.
- Affinché la circonferenza sia tangente la retta r, la distanza del centro da r dovrà essere pari al raggio R dunque
$$\frac{|y_c - 1|}{\sqrt{4+1}} = \sqrt{y_c^2 + 1/4}$$
da cui $y_c = -1/4$.

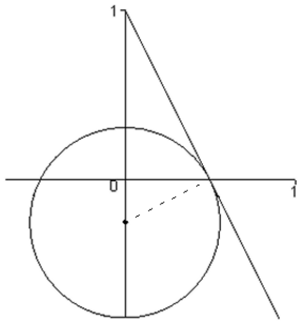


Figura 19.1. $x^2 + y^2 + \frac{1}{2}y - \frac{1}{4} = 0$

❦ In conclusione la circonferenza (vedi fig. 19.1) ha equazione:

$$x^2 + y^2 + \frac{1}{2}y - \frac{1}{4} = 0.$$

Esercizio 19.3

Risolvere la disequazione $(2 - \ln x)^2 \ln^2 x < 1$ (il logaritmo è inteso in base "e").

✍ Soluzione

$$(2-\ln x)^2 \ln^2 x < 1 \Leftrightarrow [(2-\ln x)\ln x]^2 < 1 \Leftrightarrow -1 < (2-\ln x)\ln x < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} (2-\ln x)\ln x < 1 \\ (2-\ln x)\ln x > -1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

se pongo $\ln x = t$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2-t)t < 1 \\ (2-t)t > -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t^2 - 2t + 1 > 0 \\ t^2 - 2t - 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (t-1)^2 > 0 \\ 1 - \sqrt{2} < t < 1 + \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \neq 1 \\ 1 - \sqrt{2} < t < 1 + \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \ln x \neq 1 \\ 1 - \sqrt{2} < \ln x < 1 + \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq e \\ e^{1-\sqrt{2}} < x < e^{1+\sqrt{2}} \end{cases}$$

Quindi la soluzione è $x \in (e^{1-\sqrt{2}}, e) \vee (e, e^{1+\sqrt{2}})$.

Esercizio 19.4

Determinare l'equazione dell'asintoto al diagramma della funzione

$$f(x) = \log\left(\left(\sqrt{1+e^{-x}} - 1\right) 3^x\right)$$

per $x \to +\infty$ (il logaritmo è inteso in base "e").

✍ Soluzione

Si ha che
$$f(x) = \log\left(\frac{\sqrt{1+e^{-x}}-1}{e^{-x}} e^{-x} 3^x\right) = \log\left(\frac{\sqrt{1+e^{-x}}-1}{e^{-x}}\left(\frac{3}{e}\right)^x\right) =$$

$$= \log\left(\frac{\sqrt{1+e^{-x}}-1}{e^{-x}}\right) + x\log\left(\frac{3}{e}\right) \overset{(G)}{=\!=} \log\frac{1}{2} + g(x) + x\log\left(\frac{3}{e}\right)$$

con $g(x)$ opportuna tendente a zero per $x \to +\infty$.

Pertanto si ha asintoto obliquo per $x \to +\infty$: $y = x \log\left(\frac{3}{e}\right) + \log\frac{1}{2}$.
Qualora non si sia notato questo, è comunque possibile applicare la regola generale:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty} \log\left(\frac{\sqrt{1+e^{-x}}-1}{e^{-x}} e^{-x}3^x\right) = \\
&= \lim_{x\to+\infty} \log\left(\frac{\sqrt{1+e^{-x}}-1}{e^{-x}} \left(\frac{3}{e}\right)^x\right) = \\
&= \lim_{x\to+\infty} \log\left(\frac{\sqrt{1+e^{-x}}-1}{e^{-x}}\right) + x\log\left(\frac{3}{e}\right) \overset{(G)}{=\!=} +\infty
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\log\left(\frac{\sqrt{1+e^{-x}}-1}{e^{-x}} e^{-x}3^x\right)}{x} = \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{\log\left(\frac{\sqrt{1+e^{-x}}-1}{e^{-x}}\right)}{x} + \frac{\log e^{-x}}{x} + \frac{\log 3^x}{x} = \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{\log\left(\frac{\sqrt{1+e^{-x}}-1}{e^{-x}}\right)}{x} - 1 + \log 3 \overset{(G)}{=\!=} \\
&= -1 + \log 3 =: m
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} f(x) - mx &= \lim_{x\to+\infty} \log\left(\frac{\sqrt{1+e^{-x}}-1}{e^{-x}} e^{-x}3^x\right) - (\log 3 - 1)x = \\
&= \lim_{x\to+\infty} \log\left(\frac{\sqrt{1+e^{-x}}-1}{e^{-x}} \left(\frac{3}{e}\right)^x\right) - x\log\left(\frac{3}{e}\right) = \\
&= \lim_{x\to+\infty} \log\left(\frac{\sqrt{1+e^{-x}}-1}{e^{-x}}\right) + x\log\left(\frac{3}{e}\right) - x\log\left(\frac{3}{e}\right) \overset{(G)}{=\!=} \\
&= \log\frac{1}{2} =: q
\end{aligned}$$

Asintoto obliquo per $x \to +\infty$: $y = (\log 3 - 1)x + \log 1/2$.

Esercizio 19.5

Determinare tutte le primitive sull'intervallo $(0, +\infty)$ della funzione $f(x) = \sqrt{x}\,\sin\sqrt{x}$.

✍ Soluzione

Integrando per parti* si ha:

$$\begin{aligned}
G(x) &= \int \sqrt{x}\sin\sqrt{x}\,dx \underset{}{\overset{\substack{\sqrt{x}=t\\ dx=2t\,dt}}{\overbrace{=\!=\!=}}} 2\int t^2 \sin t\,dt \overset{\text{P.P.1}}{=\!=} 2\left(-t^2\cos t + \int 2t\cos t\,dt\right) \overset{\text{P.P.2}}{=\!=} \\
&= 2\left(-t^2\cos t + 2\left(t\sin t - \int \sin t\,dt\right)\right) = 2\left(-t^2\cos t + 2t\sin t + 2\cos t\right) + k = \\
&= -2x\cos\sqrt{x} + 4\sqrt{x}\sin\sqrt{x} + 4\cos\sqrt{x} + k,\ \ k \in \mathbb{R}\ .
\end{aligned}$$

---

* $\int h(x)g'(x)\,dx = h(x)g(x) - \int h'(x)g(x)\,dx$

P.P.1 : $h_1(t) = t^2 \rightsquigarrow h_1'(t) = 2t$; $g_1(t) = \int g_1'(x)\,dx = -\cos t \leftsquigarrow g_1'(t) = \sin t$

P.P.2 : $h_2(t) = t \rightsquigarrow h_2'(t) = 1$; $g_2(t) = \int g_2'(t)\,dt = \sin t \leftsquigarrow g_2'(t) = \cos t$

Esercizio 19.6

Studiare la funzione f così definita: $\quad f(x) = \sin\left(\frac{6}{1+x^2}\right)$.

(Non è richiesto l'esame della derivata seconda)

Soluzione

- Insieme di definizione: $\mathbb{R}$. La funzione è PARI.
- Limiti agli estremi dell'insieme di definizione: $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0^+$
- Derivata prima: $f'(x) = -12\dfrac{x\cos\left(\frac{6}{1+x^2}\right)}{(1+x^2)^2}$
- Eventuali estremanti: $x = 0, \pm\sqrt{\frac{12}{\pi}-1}$ punti di massimo e $f(0) = \sin 6,\ f\left(\pm\sqrt{\frac{12}{\pi}-1}\right) = 1$

  $x = \pm\sqrt{\frac{4}{\pi}-1}$ punti di minimo e $f\left(\pm\sqrt{\frac{4}{\pi}-1}\right) = -1$
- Diagramma qualitativo di f: vedi fig. 19.2.

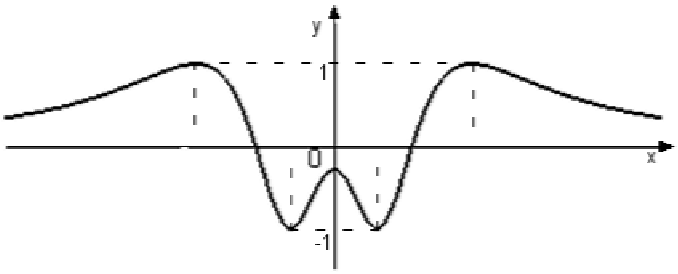


Figura 19.2. $f(x) = \sin\left(\frac{6}{1+x^2}\right)$

Esercizio 19.7

Sia f la funzione di cui all'esercizio 6. Al variare del parametro reale α, indicare il numero delle soluzioni distinte dell'equazione $\quad f(x) = \alpha$.
(N.B. Si chiede solo di precisare il numero delle soluzioni, non di determinarle!)

Soluzione

se $\alpha < -1$	$\nexists$ soluzioni
se $\alpha = -1$	2 soluzioni
se $-1 < \alpha \leqslant \sin 6$	4 soluzioni
se $\alpha = \sin 6$	3 soluzioni
se $\sin 6 < \alpha \leqslant 0$	2 soluzioni
se $0 < \alpha < 1$	4 soluzioni
se $\alpha = 1$	2 soluzioni
se $\alpha > 1$	$\nexists$ soluzioni

TEMA 20

Prima prova in itinere a.a. 2003/04
16 dicembre 2003

Esercizio 20.1

Il 45% della popolazione globale (quindi bambini e pensionati inclusi) di una data nazione non lavora. Qual è la percentuale di disoccupati fra i cittadini in grado di lavorare, se questi ultimi costituiscono il 60% della popolazione globale?

✍ Soluzione

$$\frac{45}{100} = \frac{40}{100} + x\frac{60}{100} \qquad \Longrightarrow \qquad x = \frac{25}{3}\%$$

Esercizio 20.2

Nel piano dotato di un riferimento cartesiano ortogonale Oxy, si consideri il triangolo individuato dalle tre rette di equazioni $y = 2x$, $y = -x/2$, $y = 1 - x$. Si determini l'area di tale triangolo e l'equazione della circonferenza ad esso circoscritta.

✍ Soluzione

Osserviamo che le rette $y = 2x$ e $y = -\frac{1}{2}x$ sono perpendicolari.

1. Le tre rette si intersecano nei punti $\begin{aligned} A &= (0,0) \\ B &= \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \\ C &= (2,-1) \end{aligned}$

   formando un triangolo rettangolo in A (vedi fig. 20.1 nella pagina seguente). Pertanto l'area del triangolo è

$$\text{Area} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{2} = \frac{\sqrt{\left(\frac{1}{3} - 0\right)^2 + \left(\frac{2}{3} - 0\right)^2} \cdot \sqrt{(2-0)^2 + (-1-0)^2}}{2} = \frac{5}{6}\,.$$

2. ❦ Il centro della circonferenza circoscritta si trova nel punto medio del lato BC di coordinate

$$D = \left(\frac{7}{6}, -\frac{1}{6}\right)$$

e il raggio è pari alla distanza di D da C:

$$\text{raggio} = \sqrt{\left(2 - \frac{7}{6}\right)^2 + \left(-1 + \frac{1}{6}\right)^2} = \sqrt{\frac{25}{18}} \, .$$

Pertanto la circonferenza ha equazione

$$\left(x - \frac{7}{6}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{6}\right)^2 = \frac{25}{18}.$$

❦ Alternativamente, dopo aver osservato che la circonferenza passa per l'origine, si può imporre all'equazione $x^2 + y^2 + ax + by = 0$ di essere soddisfatta dalle coordinate di B e di C, ricavando così a e b:

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + a\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 0 \\ 2^2 + (-1)^2 + 2a - b = 0 \end{cases}$$

cioè

$$x^2 + y^2 - \frac{7}{3}x + \frac{1}{3}y = 0 \, .$$

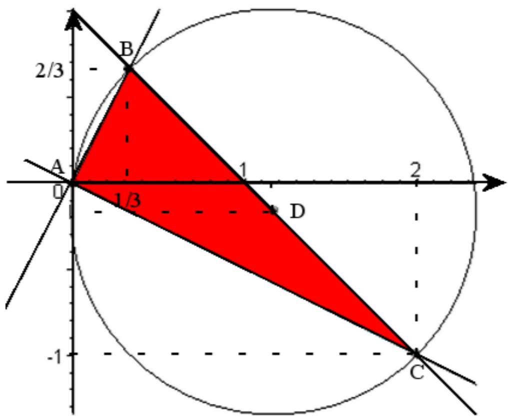


Figura 20.1. $x^2 + y^2 - \frac{7}{3}x + \frac{1}{3}y = 0$

Esercizio 20.3

Qual è la probabilità che, lanciati 2 dadi equi (le cui facce siano numerate da 1 a 6, come d'uso), la somma dei punteggi riportati sulle facce superiori sia 10?

✍ Soluzione

$\frac{1}{12}$: infatti 10 si può ottenere solo come 5+5 (in un modo solo) o 6+4 (in due modi), mentre le "uscite" possibili sono $6 \cdot 6 = 36$.

Esercizio 20.4

Tra i termini dello sviluppo del binomio $\left(x^2 - \frac{1}{x^7}\right)^{13}$, scrivere quello in cui la variabile "x" compare elevata al grado positivo più basso.

✍ Soluzione

Dall'espressione

$$\left(x^2 - \frac{1}{x^7}\right)^{13} = \sum_{k=0}^{13} \binom{13}{k} x^{2k} \, (-)^{13-k} \, x^{-7(13-k)} = \sum_{k=0}^{13} \binom{13}{k} \, (-)^{13-k} \, x^{9k-91}$$

il termine cercato si ottiene per $9k - 91 = 1$ cioè $k = 11$ ed è $78x^8$.

Esercizio 20.5

Risolvere la disequazione $\sqrt{(2 + \log_9 |x|) \log_9(x^4)} > \log_3 |x| + 1$.

✍ Soluzione

La disequazione è del tipo $A(x) < \sqrt[n]{B(x)}$ (vedi pag.7) dunque equivale a:

$$\begin{cases} |x| > 0 \\ \log_3 |x| + 1 < 0 \\ (2 + \log_9 |x|) \log_9(x^4) \geqslant 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} |x| > 0 \\ \log_3 |x| + 1 \geqslant 0 \\ (2 + \log_9 |x|) \log_9(x^4) > (\log_3 |x| + 1)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \neq 0 \\ -\frac{1}{3} < x < 0 \ \cup \ 0 < x < \frac{1}{3} \\ (2 + \log_9 |x|) \log_9(x^4) \geqslant 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x \neq 0 \\ x \leqslant -\frac{1}{3} \ \cup \ x \geqslant \frac{1}{3} \\ (2 + \log_9 |x|) \log_9(x^4) > (\log_3 |x| + 1)^2 \end{cases}$$

Se poniamo $\log_9 |x| = t$ abbiamo

$$\begin{aligned} (2 + \log_9 |x|) \log_9(x^4) \geqslant 0 \ &\Leftrightarrow \ (2 + t)4t \geqslant 0 \ \Leftrightarrow \ t \leqslant -2 \ \cup \ t \geqslant 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \ x \leqslant -\frac{1}{81} \cup x \geqslant \frac{1}{81} \\ (2 + \log_9 |x|) \log_9(x^4) > (\log_3 |x| + 1)^2 \ &\Leftrightarrow \ (2 + t)4t > (2t + 1)^2 \ \Leftrightarrow \ t > \frac{1}{4} \ \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \ x < -\sqrt{3} \cup x > \sqrt{3} \end{aligned}$$

Pertanto

$$\begin{cases} x \neq 0 \\ -\frac{1}{3} < x < 0 \cup 0 < x < \frac{1}{3} \\ x \leqslant -1 \ \cup \ -\frac{1}{81} \leqslant x \leqslant \frac{1}{81} \ \cup \ x \geqslant 1 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x \neq 0 \\ x \leqslant -\frac{1}{3} \ \cup \ x \geqslant \frac{1}{3} \\ x < -\sqrt{3} \ \cup \ x > \sqrt{3} \end{cases}$$

$$x < -\sqrt{3} \quad \vee \quad -\frac{1}{81} < x < 0 \quad \vee \quad 0 < x < \frac{1}{81} \quad \vee \quad x > \sqrt{3}$$

Esercizio 20.6

Sia S il sottoinsieme di $\mathbb{R}$ così definito: $S = [-1/2, 0) \cup (1, 2) \cup (3, 4)$. Determinare estremo inferiore ed estremo superiore, specificando se siano anche rispettivamente minimo e massimo, di ciascuno dei seguenti insiemi:

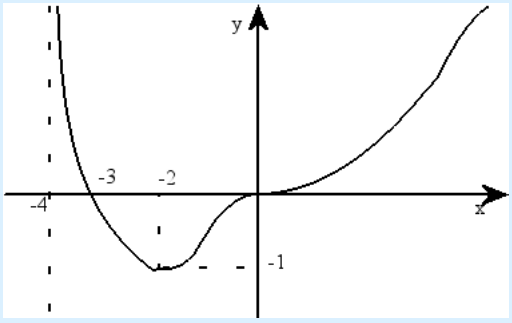
$$\begin{aligned} &A = \{x + y : \ x, y \in S\}, \quad B = \{x - y : \ x, y \in S\}, \quad C = \{xy : \ x, y \in S\}, \\ &D = \{x/y : \ x, y \in S\}, \quad E = \{x \sin y : \ x, y \in S\}. \end{aligned}$$

✍ Soluzione

$\inf A \overbrace{=\!=\!=}^{(x=y=-1/2)} -1$	È minimo? SI	$\sup A \overbrace{=\!=\!=}^{(x,y\to 4^-)} 8$	È massimo? NO
$\inf B \overbrace{=\!=\!=}^{\left(\substack{x=-1/2\\ y\to 4^-}\right)} -\dfrac{9}{2}$	È minimo? NO	$\sup B \overbrace{=\!=\!=}^{\left(\substack{x\to 4^-\\ y=-1/2}\right)} \dfrac{9}{2}$	È massimo? NO
$\inf C \overbrace{=\!=\!=}^{\left(\substack{x=-1/2\\ y\to 0^-}\right)} -2$	È minimo? NO	$\sup C \overbrace{=\!=\!=}^{(x,y\to 4^-)} 16$	È massimo? NO
$\inf D \overbrace{=\!=\!=}^{\left(\substack{x=3/2\\ y\to 0^-}\right)} -\infty$	È minimo? NO	$\sup D \overbrace{=\!=\!=}^{\left(\substack{x=-1/2\\ y\to 0^-}\right)} +\infty$	È massimo? NO
$\inf E \overbrace{=\!=\!=}^{(x,y\to 4^-)} 4\sin 4$	È minimo? NO	$\sup E \overbrace{=\!=\!=}^{\left(\substack{x=4\\ y\to\pi/2}\right)} 4$	È massimo? NO

Esercizio 20.7

Quello in figura è il diagramma della funzione $y = f(x)$.

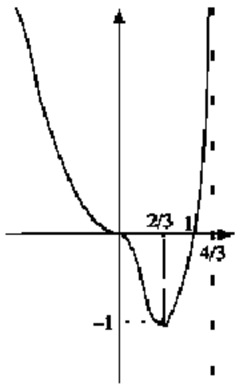


Tracciare i diagrammi delle seguenti funzioni:
$g(x) = f(-3x)$, $\quad h(x) = f(|x-3|)$,
$x = \left(f_{|[-2,+\infty)}\right)^{-1}(y)$.

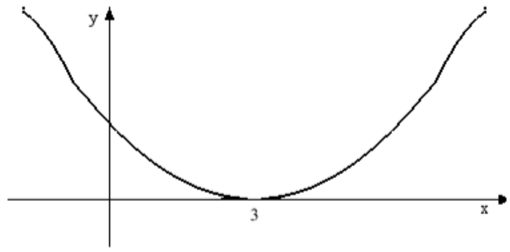
Per quali valori del parametro reale α la funzione $p(x) = f(2+\alpha\sin x)$ risulta definita su tutto $\mathbb{R}$?

✍ Soluzione

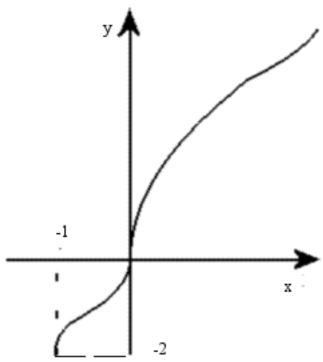
Vedi fig. 20.2 nella pagina successiva
La funzione $p(x) = f(2+\alpha\sin x)$ risulta definita su tutto $\mathbb{R}$ se $2+\alpha\sin x > -4$ per ogni x, quindi per $-6 < \alpha < 6$.



(a) $g(x) = f(-3x)$



(b) $h(x) = f(|x-3|)$



(c) $x = \left(f_{|[-2,+\infty)}\right)^{-1}(y)$

Figura 20.2. *Esercizio 7 nella pagina precedente*

TEMA 21

Prova scritta del 9 gennaio 2004

Esercizio 21.1

Nel piano dotato di un riferimento cartesiano ortogonale Oxy, si consideri la circonferenza di equazione $x^2+y^2-2x-y=0$ e il quadrato ad essa inscritto avente un vertice nell'origine. Determinare le coordinate degli altri tre vertici del quadrato e la sua area.

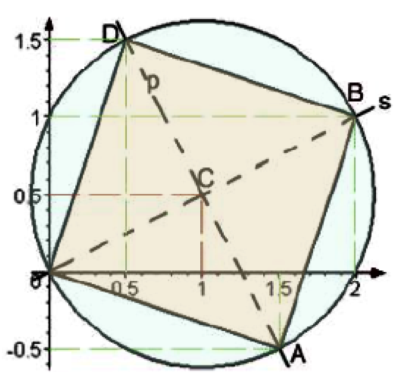
✍ Soluzione

La circonferenza γ ha centro $C = \left(1, \frac{1}{2}\right)$ e raggio $r = \frac{\sqrt{5}}{2}$. I vertici del quadrato inscritto sono dati dall'intersezione della retta s passante per O e per C con la circonferenza γ e dall'intersezione della retta p passante per C e perpendicolare a s.

L'equazione della retta s è $y = \frac{1}{2}x$ ed s interseca γ in O e in $B = (2, 1)$.

L'equazione della retta p è $y = -2x + \frac{5}{2}$ e p interseca γ in $A = \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ e in $D = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

Il lato del quadrato è dato da $\frac{\overline{OB}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{5}{2}}$.



Quindi l'area del quadrato è $\frac{5}{2}$.

Esercizio 21.2

Determinare il termine indipendente da x (completo di coefficiente) nello sviluppo del binomio

$$\left(\frac{y}{x^3} - x^2\right)^{10}.$$

✍ Soluzione

Dall'espressione

$$\left(\frac{y}{x^3} - x^2\right)^{10} = \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} \left(\frac{y}{x^3}\right)^k (-)^{10-k} x^{2(10-k)} = \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} (-)^{10-k} y^k x^{(20-5k)}$$

il termine cercato si ottiene per $20 - 5k = 0$ cioè $k = 4$ ed è quindi $\binom{10}{4} y^4 (-)^6 = 210y^4$.

Esercizio 21.3

Calcolare il limite della successione $\quad a_n = \left(\dfrac{n+2\sqrt{n}}{n+3\sqrt{n}}\right)^n.$

✍ Soluzione

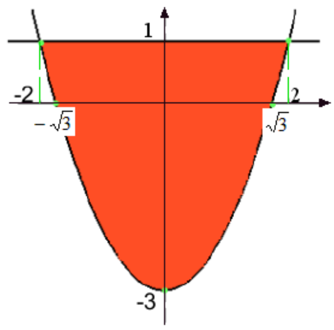
$$\lim a_n = \lim \left(\frac{n+2\sqrt{n}}{n+3\sqrt{n}}\right)^n = \lim \left(\frac{\left(1+\frac{2}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}}}{\left(1+\frac{3}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}}}\right)^{\sqrt{n}} \stackrel{(C)}{=\!=} \lim \left(\frac{2}{3}\right)^{\sqrt{n}} = 0.$$

Esercizio 21.4

Nel piano dotato di un riferimento cartesiano ortogonale Oxy, si calcoli l'area della regione S definita dalle seguenti limitazioni:

$$S = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 - 3 \leqslant y \leqslant 1 \right\}.$$

✍ Soluzione



La regione S è delimitata dalla retta $y = 1$ e dalla parabola $y = x^2 - 3$, come in figura. I punti di intersezione delle due curve sono $A = (-2, 1)$ e $B = (2, 1)$.

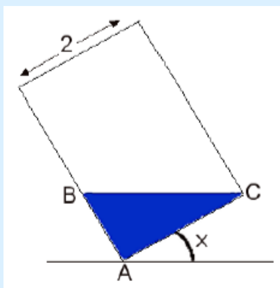
Per simmetria $\text{Area}(S) = 2\ \text{Area}(S^+)$ dove $S^+ := \{ (x,y) \in S \mid x \geqslant 0 \}$ e

$$\text{Area}(S^+) = -\int_0^2 (x^2-3) - 1\,dx = -\int_0^2 (x^2-4)\,dx = -\left[\frac{x^3}{3} - 4x\right]_{x=0}^{x=2} = \frac{16}{3}.$$

Quindi $\text{Area}(S) = 2\dfrac{16}{3} = \dfrac{32}{3}.$

Esercizio 21.5

Un recipiente a forma di cilindro retto, con base circolare di 2 metri di diametro, contiene $1.000\,\pi$ litri d'acqua. Inclinato di x gradi sulla verticale, si presenta in sezione come mostrato dalla figura (la parte colorata corrisponde a quella occupata dall'acqua). Quanto vale x?



✍ Soluzione

Poiché un litro è un decimetro cubo, un cilindro di base come la nostra (cioè di raggio 1 m) e altezza $\overline{AB} = \overline{AC} \cdot \tan x$ conterrebbe 200 π litri d'acqua, per cui, in metri cubi, 2 π m^3. Il volume di tale cilindro è perciò $\left(\dfrac{\overline{AC}}{2}\right)^2 \pi\,\overline{AB} = 2\pi$ da cui $\tan x = 1$ cioè $x = 45°$.

Esercizio 21.6

Stabilire per quali valori del parametro reale α l'equazione

$$2x^3 - 9x^2 = \alpha$$

ammette 3 distinte soluzioni.

✍ Soluzione

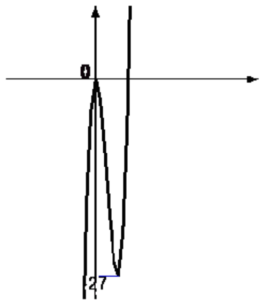
Possiamo studiare la funzione $f(x) := 2x^3 - 9x^2 = x^2(2x - 9)$.
La funzione assegnata può avere al massimo 3 zeri poiché è un polinomio di terzo grado. Studiamo l'andamento della funzione calcolando la derivata prima

$$f'(x) = 6x^2 - 18x$$

e studiandone il segno

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 \text{ per} \qquad & x = 0 \ \vee \ x = 3, \\ f'(x) > 0 \text{ per} \qquad & x < 0 \ \vee \ x > 3, \\ f'(x) = 0 \text{ per} \qquad & 0 < x < 3. \end{aligned}$$

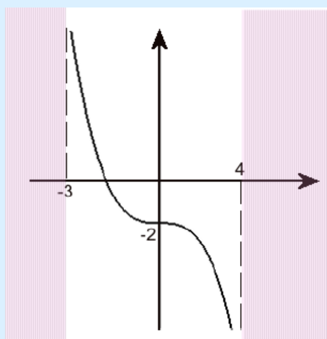
Pertanto $x = 0$ è un punto di massimo e $x = 3$ è un punto di minimo. Poiché $f(0) = 0$ e $f(3) = -27$ l'andamento della funzione è quello in figura,



cioè l'equazione ammette 3 distinte soluzioni se e solo se $-27 < \alpha < 0$.

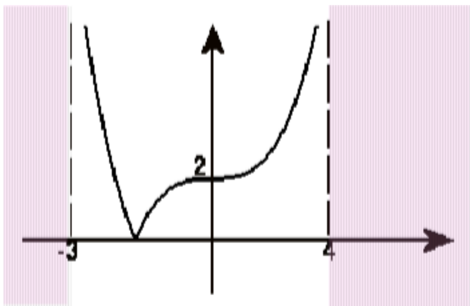
Esercizio 21.7

Quello in figura è il diagramma della funzione $y = f(x)$.
Tracciare i diagrammi delle seguenti funzioni:
$g(x) = |f(x)|, \quad h(x) = f(3|x|), \quad x = f^{-1}(y)$.
Per quali valori del parametro reale γ la funzione $p(x) = f(1 + \gamma \cos x)$ risulta definita su tutto $\mathbb{R}$?

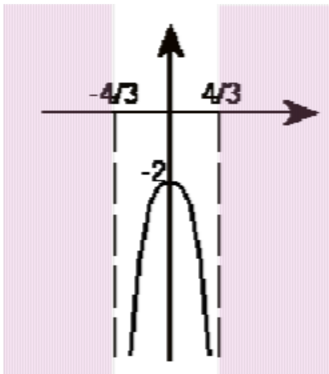


✍ Soluzione

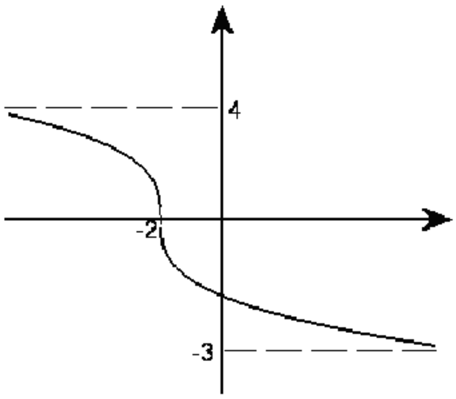
Perché p sia definita su tutto $\mathbb{R}$, occorre che si abbia $-3 < 1 + \gamma \cos x < 4$ per ogni x. Poiché $\cos x$ copre tutto l'intervallo $[-1, 1]$, ciò accade se e solo se $\gamma \in (-2, 2)$.



(a) $g(x) = |f(x)|$



(b) $h(x) = f(3|x|)$



(c) $x = f^{-1}(y)$

TEMA 22

Prova scritta del 23 febbraio 2004

Esercizio 22.1

Tre giorni fa ho investito una certa somma in azioni di una certa società. L'altro ieri quelle azioni sono scese del 2%. Oggi il valore di quelle azioni è pari alla somma che ho investito. Di quanto esattamente, in percentuale, sono salite ieri?

✍ Soluzione

Tre giorni fa ho investito una quantità che possiamo considerare unitaria.
L'altro ieri avevo il 98% della quantità iniziale.
Ieri ho ottenuto l'x% del 98% ottenendo ancora la quantità iniziale.
Quindi:

$$98\% + x \cdot 98\% = 1 \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{1}{49} \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{100}{49}\%.$$

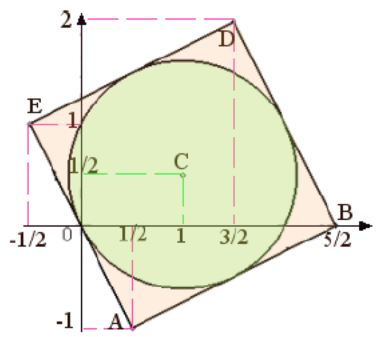
Esercizio 22.2

Nel piano dotato di un riferimento cartesiano ortogonale Oxy, si consideri la circonferenza γ di equazione $x^2 + y^2 - 2x - y = 0$ e il quadrato ad essa circoscritto uno dei cui lati contiene l'origine. Determinare le coordinate di almeno uno dei vertici del quadrato e la sua area.

✍ Soluzione

La circonferenza γ ha centro $C = \left(1, \frac{1}{2}\right)$ e raggio $r = \sqrt{5}/2$. I lati del quadrato circoscritto appartengono alle seguenti quattro rette:

- la retta s passante per O e tangente alla circonferenza γ;
- la retta s' passante per il punto simmetrico di O rispetto a C e tangente a γ;
- le due rette p e p' perpendicolari alle due precedenti e tangenti a γ.



L'equazione della retta s è $y = -2x$.
L'equazione della retta s' è $y = -2x + 5$.
L'equazione della retta p è $y = x/2 + 5/4$.
L'equazione della retta p' è $y = x/2 - 5/4$.

I vertici si ottengono intersecando a due a due le rette precedenti non parallele fra loro e sono:

$$A = \left(\frac{1}{2}, -1\right), \qquad B = \left(\frac{5}{2}, 0\right), \qquad D = \left(\frac{3}{2}, 2\right), \qquad E = \left(-\frac{1}{2}, 1\right).$$

Il lato del quadrato è semplicemente $2r = \sqrt{5}$. Quindi l'area del quadrato è 5.

Esercizio 22.3

Risolvere la disequazione $\quad x\sqrt{x^2-3} \;<\; |x|.$

✍ Soluzione

- Perché la radice abbia senso deve essere $\quad x^2 - 3 \geqslant 0 \quad \Rightarrow \quad x \leqslant -\sqrt{3} \;\vee\; x \geqslant \sqrt{3}$
- La disequazione è equivalente a risolvere

$$\begin{cases} x \leqslant -\sqrt{3} \\ x\sqrt{x^2-3} < -x \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x \geqslant \sqrt{3} \\ x\sqrt{x^2-3} < x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leqslant -\sqrt{3} \\ \sqrt{x^2-3} > -1 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x \geqslant \sqrt{3} \\ \sqrt{x^2-3} < 1 \end{cases}$$

$$x \leqslant -\sqrt{3} \quad \vee \quad \begin{cases} x \geqslant \sqrt{3} \\ x^2-3 < 1 \end{cases}$$

$$x \leqslant -\sqrt{3} \quad \vee \quad \begin{cases} x \geqslant \sqrt{3} \\ x < -2 \;\vee\; x > 2 \end{cases}$$

$$x \leqslant -\sqrt{3} \quad \vee \quad \sqrt{3} \leqslant x < 2$$

Quindi le soluzioni sono $\quad x \leqslant -\sqrt{3} \;\vee\; \sqrt{3} \leqslant x < 2\,.$

Esercizio 22.4

Insieme ad altre 11 persone, fra le quali vi sono 4 vegetariani, entro in un ristorante dove occuperemo 3 tavoli da 4 posti ciascuno. Qual è la probabilità che, sedendo ad un tavolo a caso, non mi trovi insieme ad alcun vegetariano?

✍ Soluzione

Le possibili terne di commensali al mio tavolo sono $\binom{11}{3}$;

le terne senza vegetariani sono

$$\frac{\binom{7}{3}\cdot\binom{7}{3}}{\binom{11}{3}} = \frac{7}{33} = 0,\overline{21}.$$

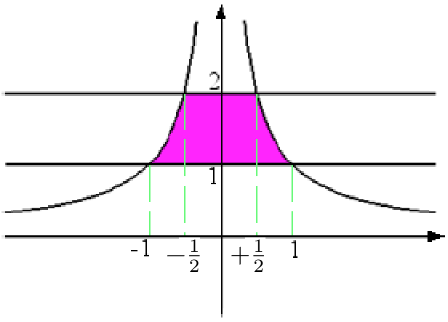
Esercizio 22.5

Nel piano dotato di un riferimento cartesiano ortogonale Oxy, si calcoli l'area della regione S definita dalle seguenti limitazioni

$$S \;=\; \left\{\ (x,y)\ \in\ \mathbb{R}^2\ \ \middle|\ \ 1 \leqslant y \leqslant 2,\ |x|y \leqslant 1 \right\}.$$

✍ Soluzione

La regione S è delimitata dalle rette $y = 1$ e $y = 2$ e dai rami di iperbole $y = \pm\frac{1}{x}$, come in figura. I punti di intersezione delle curve sono $(-1,1)$, $\left(-\frac{1}{2},2\right)$, $\left(\frac{1}{2},2\right)$, e $(1,1)$.
Per simmetria $\text{Area}(S) = 2\ \text{Area}(S^+)$ dove $S^+ := \{\ (x,x)\ \in\ S\ \mid\ x \geqslant 0\ \}$ e



$$\text{Area}(S^+) \;=\; \left(\frac{1}{2} - 0\right)\cdot(2-1) + \int_{1/2}^{1} \frac{1}{x}\,dx - \left(1 - \frac{1}{2}\right)\cdot(1-0) =$$
$$= \frac{1}{2} - \ln\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} \;=\; \ln 2.$$

Quindi $\quad \text{Area}(S) \;=\; 2\ \ln 2 \;=\; \ln 4.$

Esercizio 22.6

Studiare la funzione f così definita: $f(x) := x - 3\log(1+e^x)$
(il logaritmo è inteso in base "e").

✍ Soluzione

- Insieme di definizione: $\quad \mathbb{R}$.
- Limiti agli estremi dell'insieme di definizione: $\quad \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = -\infty.$
- Equazioni degli eventuali asintoti:

$$\left.\begin{array}{lcccc} \lim_{x\to-\infty} f(x) & = & -\infty & & \\ \lim_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} & = & 1 & =: & m \\ \lim_{x\to-\infty} f(x) - x & = & 0 & =: & q \end{array}\right] \quad\Rightarrow\quad \begin{array}{l} y = x \\ \text{è sintoto obliquo per} \\ x \to -\infty; \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{lcccc} \lim_{x\to+\infty} f(x) & = & -\infty & & \\ \lim_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} & = & -2 & =: & m \\ \lim_{x\to+\infty} f(x) + 2x & = & 0 & =: & q \end{array}\right] \quad\Rightarrow\quad \begin{array}{l} y = -2x \\ \text{è sintoto obliquo per} \\ x \to +\infty. \end{array}$$

- Derivata prima: $\qquad f'(x) = \dfrac{1-2e^x}{1+e^x}.$
- Eventuali estremanti:

$f'(x) > 0$ per $\ x < -\log 2 \qquad$ (f crescente),

$f'(x) < 0$ per $\ x > -\log 2 \qquad$ (f decrescente),

$$f'(x) = 0 \text{ per } x = -\log 2 \qquad \text{(punto di massimo).}$$

❦ Derivata seconda: $\quad f''(x) = -3\dfrac{e^x}{(1+e^x)^2}.$

❦ Verso della concavità ed eventuali punti di flesso:

$f''(x) < 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ $\qquad$ (f sempre concava).

❦ Diagramma qualitativo di f: vedi fig. 22.1.

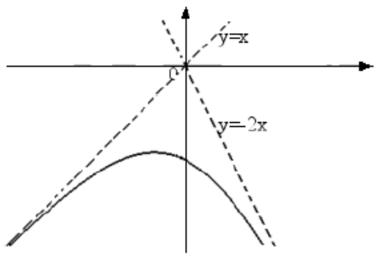


Figura 22.1. $f(x) = x - 3\log(1+e^x)$

Esercizio 22.7

Sia f la funzione di cui all'esercizio 6 nella pagina precedente. Per quali valori del parametro α la funzione

$$g_\alpha(x) = \sqrt{\alpha - f(x)}$$

è definita su tutto $\mathbb{R}$?

✍ Soluzione

Deve essere $\alpha - f(x) \geqslant 0$ per ogni x.

Poiché il punto di massimo di f è $x_M = -\ln 2$ e $f(x_M) = \ln\dfrac{4}{27}$, deve essere $\alpha \geqslant -\ln\dfrac{4}{27}$.

TEMA 23

Seconda prova pre-esame a.a. 2003/04
23 marzo 2004

Esercizio 23.1

Sia
$$f(x) = x^2\left(\sqrt{1+\left(\frac{1}{2x^2}\right)} - \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right).$$
Calcolare $\lim_{x\to 0} f(x)$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

✍ Soluzione

- Poiché $-1 \leqslant \cos\left(\frac{1}{x}\right) \leqslant 1$, per il teorema del confronto
$$x^2\left(\sqrt{1+\left(\frac{1}{2x^2}\right)} - 1\right) \leqslant f(x) \leqslant x^2\left(\sqrt{1+\left(\frac{1}{2x^2}\right)} + 1\right)$$
da cui
$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0.$$

- Osserviamo che
$$f(x) = x^2\left(\sqrt{1+\left(\frac{1}{2x^2}\right)} - \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \frac{\left(\sqrt{1+\left(\frac{1}{2x^2}\right)} - \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)}{\frac{1}{x^2}} =$$
$$= \frac{\left(\sqrt{1+\left(\frac{1}{2x^2}\right)} - 1 + 1 - \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)}{1/x^2} = \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{1+(1/2x^2)}-1}{1/2x^2} + \frac{1-\cos(1/x)}{1/x^2}$$
Quindi $\lim_{x\to+\infty} f(x) \overset{(C)(B)}{=\!=} \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2} = \frac{3}{4}$.

Esercizio 23.2

Determinare una primitiva G su $\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$ della funzione $f(x) = \dfrac{1}{(e^{\tan x}+2)\cos^2 x}$.

✍ Soluzione

$$G(x) = \int \frac{1}{(e^{\tan x}+2)\cos^2 x}\,dx =$$

Ponendo $t := e^{\tan x} + 2 \;\Rightarrow\; \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \dfrac{dt}{t-2}$ si ottiene

$$= \int \frac{1}{t(t-2)}\,dt = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{t}\,dt + \frac{1}{2}\int \frac{1}{t-2}\,dt = -\frac{1}{2}\ln|x| + \frac{1}{2}\ln|t-2| + k =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{|t-2|}{|t|}\right) + k = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{e^{\tan x}}{e^{\tan x}+2}\right) + k = \frac{1}{2}\left(\tan x - \ln\left(e^{\tan x}+2\right)\right) + k\,, \qquad k \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 23.3

Determinare l'intervallo I costituito dai numeri $x \in [0,\pi]$ tali che $1 - \sin x \leqslant \sin x$.
Calcolare quindi l'area della regione piana A così definita:

$$A = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 1 - \sin x \leqslant y \leqslant \sin x,\; x \in I \right\}.$$

✍ Soluzione

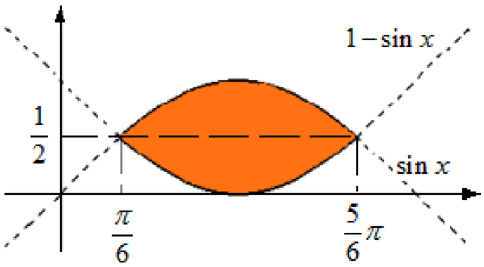
$I = \left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right]$.

Per questioni di simmetria:

$$A = 2\left(\int_{\pi/6}^{(5\pi)/6} \sin x\,dx - \frac{1}{2}\left(\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{6}\right)\right) =$$

$$= 2\left(-\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - \frac{\pi}{3}\right) =$$

$$= 2\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right).$$



Esercizio 23.4

Studiare la funzione f così definita: $f(x) = (x+4)e^{1/x}$.
L'equazione $f(x) = 4$ ammette soluzioni? Giustificare la risposta.

✍ Soluzione

- Insieme di definizione: $x \neq 0$.
- Limiti agli estremi dell'insieme di definizione:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty \qquad \lim_{x\to 0^-} f(x) = 0^+ \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$$

- Equazioni degli eventuali asintoti:
  - asintoto verticale $x = 0$,
  - essendo

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 =: m$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) - x = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{e^{1/x}-1}{1/x} + 4e^{1/x} \overset{(F)}{=} 5 =: q$$

  si ha asintoto obliquo $y = x + 5$ per $x \to \pm\infty$.

- Derivata prima: $f'(x) = \dfrac{(x^2 - x - 4)e^{1/x}}{x^2}$.
- Eventuali estremanti:
  - $x_m = \dfrac{1+\sqrt{17}}{2}$ punto di minimo,
  - $x_M = \dfrac{1-\sqrt{17}}{2}$ punto di massimo.
- Derivata seconda: $f''(x) = \dfrac{(9x+4)e^{1/x}}{x^4}$.
- Verso della concavità ed eventuali punti di flesso:
  - $f'' = 0$ per $x = -\frac{4}{9}$,
  - $f'' > 0$ per $-\frac{4}{9} < x < 0 \quad \cup \quad x > 0$,
  - $f'' < 0$ per $x < -\frac{4}{9}$.

  Perciò f è
  - convessa su $\left[-\frac{4}{9}, 0\right)$ e su $(0, +\infty)$,
  - concava su $\left(0, -\frac{4}{9}\right]$,
  - dunque $x = -\frac{4}{9}$ è punto di flesso.
- Diagramma qualitativo di f: vedi fig. 23.1.

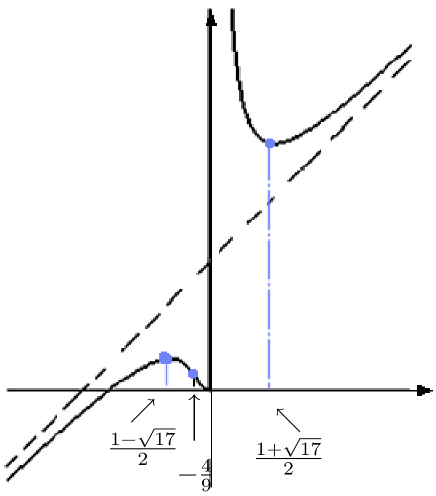


Figura 23.1. $f(x) = (x+4)e^{1/x}$

- L'equazione $f(x) = 4$ non ammette soluzioni poiché $f(x_m) > 4$ e $f(x_M) < 4$ (vedi fig. 23.2 nella pagina successiva).

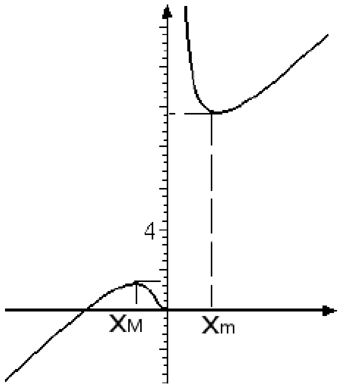


Figura 23.2. $f(x) = (x + 4)e^{1/x}$

TEMA 24

Prova scritta del 30 marzo 2004

Esercizio 24.1

Il 97% delle persone appartenenti ad un certo gruppo parla esattamente due lingue, l'1% parla esattamente tre lingue mentre il rimanente 2% parla una sola lingua. In quel gruppo, quale percentuale di persone parla più lingue della media?

✍ Soluzione

Il 98%, poiché la media delle lingue parlate è $98\% \cdot 2 + 1\% \cdot 3 + 2\% \cdot 1 = \frac{199}{100}$ cioè meno di 2 lingue.

Esercizio 24.2

Scrivere lo sviluppo in formula di Newton del binomio $(1+x)^{14}$.

Utilizzare quindi il risultato ottenuto per calcolare $\sum_{k=1}^{13} \binom{14}{k}$.

✍ Soluzione

$$\begin{aligned}
(1+x)^{14} &= \sum_{k=1}^{14} \binom{14}{k} 1^k x^{14-k} &&= \sum_{k=1}^{14} \binom{14}{k} x^k \\
\sum_{k=1}^{13} \binom{14}{k} &= (1+1)^{14} - \binom{14}{0} - \binom{14}{14} &&= 2^{14} - 2 = 16\,382
\end{aligned}$$

Esercizio 24.3

Calcolare $\quad L = \lim_{x \to 0} \frac{(e^{3x} - 1)\ \log^3(1-x)}{x^4}$ (il logaritmo è inteso in base "e").

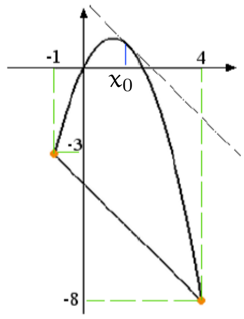
✍ Soluzione

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{(e^{3x}-1)\log^3(1-x)}{x^4} = \lim_{x\to 0}\ 3\left(\frac{e^{3x}-1}{3x}\right)\left(-\frac{\log^3(1-x)}{(-x)^3}\right) \stackrel{(E)(F)}{=\!=\!=} -3$$

Esercizio 24.4

Senza eseguire alcun calcolo, spiegare il motivo per il quale deve esistere almeno un punto x_0 nell'intervallo $(-1, 4)$ tale che la retta tangente al diagramma della funzione $f(x) = 2x - x^2$ in $(x_0, f(x_0))$ sia parallela alla retta passante per i punti $(-1, f(-1))$ e $(4, f(4))$. Determinare quindi uno dei punti x_0 di cui sopra.

✍ Soluzione



<u>Motivo:</u>
La funzione f soddisfa sull'intervallo $[-1, 4]$ le ipotesi del teorema di Lagrange, da cui l'esistenza del punto x_0 con i requisiti richiesti e la tesi.
Deve essere

$$f(4) - f(-1) = f'(x_0)(4 - (-1)),$$

quindi

$$-5 = (2 - 2x_0)5$$

da cui

$$x_0 = \frac{3}{2}.$$

Esercizio 24.5

Si determini l'intervallo D su cui è definita la funzione

$$f(x) = \frac{\log(1 - 2\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$$

(il logaritmo è inteso in base "e").
Si determinino quindi le primitive di f su D.

✍ Soluzione

- Deve essere $\begin{cases} 1 - 2\sqrt{x} > 0 \\ x \geqslant 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < \frac{1}{4} \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow D = \left(0, \frac{1}{4}\right)$

- Primitive di f su D: integrando per parti*

$$\int \frac{\ln(1-2\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,dx \underbrace{=\!=\!=\!=}_{}^{\substack{t:=1-2\sqrt{x} \\ -dx/\sqrt{x}=dt}} -\int \ln t\,dt \stackrel{P.P.}{=\!=} -t\ln t + t \stackrel{t=1-2\sqrt{x}}{=\!=\!=\!=}$$
$$= -(1-2\sqrt{x})\ln(1-2\sqrt{x}) - 2\sqrt{x} + k, \qquad k \in \mathbb{R}.$$

$^*\int h(x)g'(x)\,dx = h(x)g(x) - \int h'(x)g(x)\,dx$

$$\begin{array}{lcl} h(t) = \ln t & \rightsquigarrow & h'(t) = \frac{1}{t} \\ g(t) = \int g'(t)\,dt = t & \leftsquigarrow & g'(t) = 1 \end{array}$$

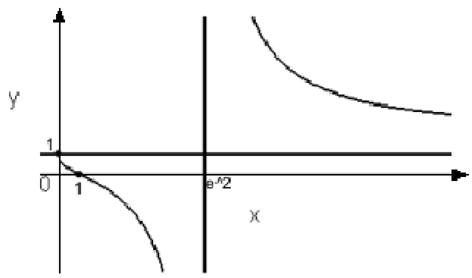


Figura 24.1. $f(x) = \dfrac{\log x}{\log x - 2}$

Esercizio 24.6

Studiare la funzione f così definita: $f(x) = \dfrac{\log x}{\log x - 2}$ (il logaritmo è inteso in base "e").

Soluzione

- Insieme di definizione:

$$\begin{cases} x > 0 \\ \log x \neq 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq e^2 \end{cases} \Rightarrow (0, e^2) \cup (e^2, +\infty)$$

- Limiti agli estremi dell'insieme di definizione:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1^- \qquad \lim_{x \to (e^2)^\mp} f(x) = \mp\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 1^+$$

- Equazioni degli eventuali asintoti:
  - asintoto orizzontale: $x = 1$ per $x \to \mp\infty$,
  - asintoto verticale: $x = e^2$.

- Derivata prima: $f'(x) = -\dfrac{2}{(\log x - 2)^2 x}$.

- Eventuali estremanti:

  non ci sono estremanti poiché $f'(x) \neq 0$ per ogni x nell'insieme di definizione.

- Derivata seconda: $f''(x) = 2\dfrac{\log x}{(\log x - 2)^3 x^2}$.

- Verso della concavità ed eventuali punti di flesso:
  - $f'' > 0$ per $x \in (0, 1) \cup (e^2, +\infty)$,
  - $f'' < 0$ per $x \in (1, e^2)$,
  - $f'' = 0$ per $x = 1$.

  Perciò f è
  - convessa su $(0, 1]$ e su $(e^2, +\infty)$,
  - concava su $[1, e^2)$,
  - dunque $x = 1$ è punto di flesso.

- Diagramma qualitativo di f: vedi fig. 24.1.

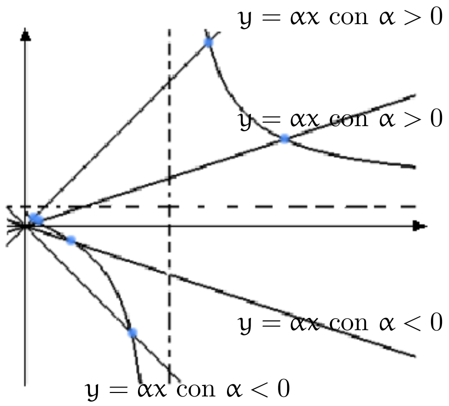
Esercizio 24.7

Sia f la funzione di cui al punto precedente. Al variare del parametro reale α, indicare il numero delle soluzioni dell'equazione $\quad f(x) \;-\; \alpha\, x \;=\; 0$.

✍ Soluzione

❦ Se $\alpha \leqslant 0$ l'equazione ha una ed una sola soluzione,

❦ se $\alpha > 0$ l'equazione ha due soluzioni.



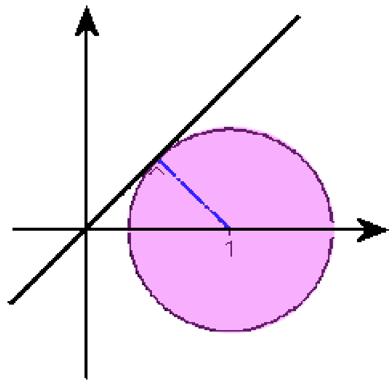
TEMA 25

Prova scritta del 27 aprile 2004

Esercizio 25.1

Nel piano dotato di un riferimento cartesiano ortogonale Oxy, si determini l'equazione della circonferenza con centro nel punto (1,0) e tangente alla retta di equazione $y = x$.

✍ Soluzione



La generica circonferenza con centro nel punto (1,0) ha equazione:

$$(x-1)^2 + (y-0)^2 = r^2.$$

Essa è tangente alla retta di equazione $y = x$ se il sistema

$$\begin{cases} y = x \\ (x-1)^2 + (y-0)^2 = r^2 \end{cases}$$

ha una sola soluzione.
Si ottiene l'equazione $2x^2 - 2x + 1 - r^2 = 0$ che ha una ed una sola soluzione se e solo se $\Delta = 0$ cioè $4 - 8(1 - r^2) = 0$ da cui $r^2 = \dfrac{1}{2}$.
Pertanto la circonferenza cercata ha equazione

$$x^2 + y^2 - 2x + \frac{1}{2} = 0.$$

Esercizio 25.2

Risolvere la disequazione $\sqrt{1 + \log_{1/4} x} > \log_2 x.$

✍ Soluzione

Osserviamo che $\log_{1/4} x = -\dfrac{1}{2}\log_2 x$, quindi:

❦ C.E.

$$\begin{cases} x > 0 \\ 1 + \log_{1/4} x \geqslant 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x > 0 \\ -\dfrac{1}{2}\log_2 x \geqslant -1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad 0 < x \leqslant 4.$$

❦ Risoluzione

$$\begin{cases} \log_2 x < 0 \\ 1 - \dfrac{1}{2}\log_2 x \geqslant 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} \log_2 x \geqslant 0 \\ 1 - \dfrac{1}{2}\log_2 x > (\log_2 x)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 1 \\ 0 < x \leqslant 4 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x \geqslant 1 \\ \log_2^2 x + \dfrac{1}{2}\log_2 x - 1 < 0 \end{cases}$$

pongo $t := \log_2 x$

$$0 < x < 1 \quad \vee \quad \begin{cases} t \geqslant 0 \\ t^2 + \dfrac{1}{2}t - 1 < 0 \end{cases}$$

$$0 < x < 1 \quad \vee \quad \begin{cases} t \geqslant 0 \\ \dfrac{-1-\sqrt{17}}{4} < t < \dfrac{-1+\sqrt{17}}{4} \end{cases}$$

$$0 < x < 1 \quad \vee \quad \begin{cases} x \geqslant 1 \\ \dfrac{-1-\sqrt{17}}{4} < \log_2 x < \dfrac{-1+\sqrt{17}}{4} \end{cases}$$

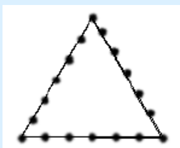
$$0 < x < 1 \quad \vee \quad \begin{cases} x \geqslant 1 \\ 2^{\frac{-1-\sqrt{17}}{4}} < x < 2^{\frac{-1+\sqrt{17}}{4}} \end{cases}$$

$$0 < x < 1 \quad \vee \quad 1 \leqslant x < 2^{\frac{\sqrt{17}-1}{4}}$$

e dunque $\quad 0 < x < 2^{\frac{\sqrt{17}-1}{4}}$.

Esercizio 25.3

Quanti sono i triangoli (non degeneri) i cui vertici siano 3 fra i 18 punti evidenziati nella figura?



✍ Soluzione

$$\binom{18}{3} - 3\binom{7}{3} = 711 \ .$$

Esercizio 25.4

Si consideri la funzione $f(x) = \dfrac{\sin(\pi x)}{\ln x}$, dove il logaritmo è inteso in base “e”.
Calcolare $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.

✍ Soluzione

① $-\dfrac{1}{\ln x} < \dfrac{\sin(\pi x)}{\ln x} < \dfrac{1}{\ln x} \xrightarrow{\text{Teorema del confronto}} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

② $$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{\sin(\pi x)}{x-1} \cdot \frac{x-1}{\ln(1+x-1)} \overbrace{=\!=\!=}^{\substack{\sin(a-\pi)= \\ =-\sin(a)}} \lim_{x\to 1}\left(\frac{-\sin(\pi(x-1))}{x-1} \cdot \frac{x-1}{\ln(1+x-1)}\right) \overset{(A)(E)}{=\!=\!=} -\pi.$$

Il limite può essere calcolato anche utilizzando il teorema di De l’Hôspital:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{\sin(\pi x)}{\ln x} \overset{(H)}{=\!=} \lim_{x\to 1} \frac{\pi \cdot \cos(\pi x)}{1/x} = -\pi.$$

Esercizio 25.5

Determinare una primitiva G su $\mathbb{R}$ della funzione $f(x) = \dfrac{1}{4+x^2}$.

Calcolare quindi $I = \displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx$.

✍ Soluzione

$$\begin{aligned} G(x) &= \int \frac{1}{4+x^2}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}\,dx \overbrace{=\!=\!=}^{\substack{t:=\frac{x}{2} \\ 2\,dt=dx}} \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+t^2}\,dt = \frac{1}{2}\arctan t + k = \frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2} + k, \qquad k\in\mathbb{R}. \end{aligned}$$

$$I = G(2) - G(0) = \frac{\pi}{8}.$$

Esercizio 25.6

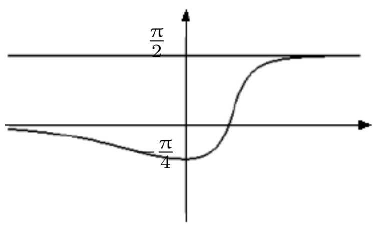
Sia $f(x) = \arctan\{e^x(x-1)\}$. Determinare l’estremo inferiore e l’estremo superiore di f, specificando se siano anche rispettivamente minimo e massimo assoluto.

✍ Soluzione

❦ Poiché la funzione è continua, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0^-$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \dfrac{\pi}{2}^-$, deve esserci un punto di minimo assoluto.

❦ Poiché $f'(x) = \dfrac{e^x x}{1+(x-1)^2 e^{2x}}$, $\quad f'(x) = 0$ se e solo se $x = 0$ e $f(0) = -\dfrac{\pi}{4}$.

❦ L’andamento di $f(x)$ è come in figura



Pertanto $\quad \inf f(x) = f(0) = -\dfrac{\pi}{4}$ ed è minimo, $\quad \sup f(x) = \dfrac{\pi}{2}$, ma non è massimo.

Esercizio 25.7

Determinare il numero delle eventuali soluzioni negative e il numero delle eventuali soluzioni positive dell'equazione $x^3 - 3x + 1 = 0$, precisando quante di esse cadono nell'intervallo (0,1).
Giustificare ogni risposta fornita.
N.B. Non si chiede di determinare le soluzioni!

✍ Soluzione

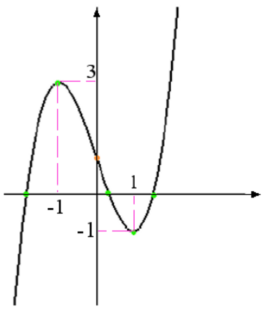
C'è una soluzione negativa.
Ci sono due soluzioni positive.
C'è una soluzione nell'intervallo (0,1).
<u>Giustificazioni:</u>
La funzione assegnata può avere al massimo 3 zeri poiché è un polinomio di terzo grado. Studiamo l'andamento della funzione calcolando la derivata prima

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

e studiandone il segno

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \quad \text{per} \quad x = \pm 1, \\ f'(x) &> 0 \quad \text{per} \quad x < -1 \ \vee \ x > 1, \\ f'(x) &< 0 \quad \text{per} \quad -1 < x < 1. \end{aligned}$$

Pertanto $x = -1$ è punto di massimo (relativo) e $x = 1$ è punto di minimo (relativo).
Poiché $f(-1) = 3$, $f(1) = -1$ ed $f(0) = 1$ l'andamento della funzione è quello in figura:



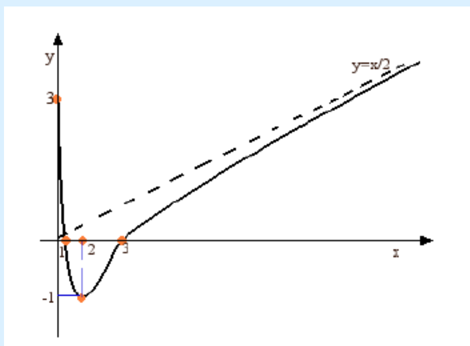
cioè la funzione ammette tre zeri, uno di ascissa negativa e due di ascissa positiva.

Esercizio 25.8

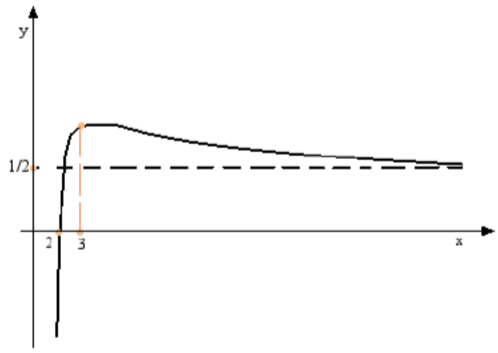
Quello in figura è il diagramma della funzione $y = f(x)$ definita sull'intervallo $(0, +\infty)$. Tracciare un diagramma qualitativo delle seguenti funzioni:

$$y' = f'(x), \qquad g(x) = |f(|x|)|, \qquad x = \left(f_{|(0,2)}\right)^{-1}(y)$$

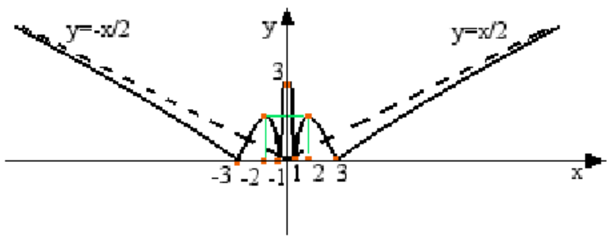
(quest'ultima è l'inversa della restrizione di f all'intervallo (0, 2)).



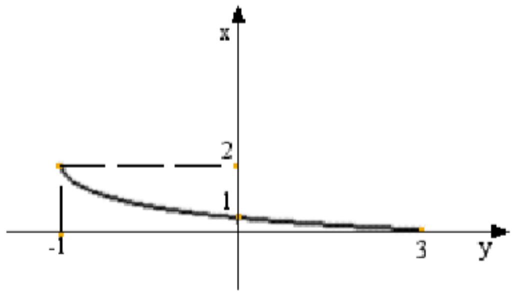
✍ Soluzione



(a) $y' = f'(x)$



(b) $g(x) = |f(|x|)|$



(c) $x = \left(f_{|(0,2)}\right)^{-1}(y)$

TEMA 26

Prova scritta del 23 giugno 2004

Esercizio 26.1

Per un certo corso di laurea, la durata legale degli studi è di 5 anni e le tasse universitarie subiscono un incremento del 20% annuo (cioè ogni studente, a qualunque anno di corso si iscriva successivo al primo, deve pagare il 20% in più rispetto all'anno precedente). Per iscriversi al primo anno di corso occorre versare 1.000 euro. Supponendo di laurearsi nei 5 anni previsti, quanto si verrà a spendere in totale per le tasse universitarie al termine degli studi?
Può essere utile ricordare che, qualunque sia l'intero positivo n e il numero x, vale la formula

$$(1 + x + x^2 + \ldots + x^n)\,(1 - x) \;=\; 1 - x^{n+1}\ .$$

✍ Soluzione

Consideriamo la seguente tabella:

1°	$1000 \cdot (1)$		
2°	$1000 \cdot (1+20\%)$	$\overset{120/100=:x}{=\!=\!=}$	$1000 \cdot x$
3°			$1000 \cdot x^2$
4°			$1000 \cdot x^3$
5°			$1000 \cdot x^4$
TOT.			$1000 \cdot (1 + x + x^2 + x^3 + x^4)$

Quindi

$$\text{TOT.} = 1\,000 \cdot (1 + x + x^2 + x^3 + x^4) = 1\,000 \cdot \frac{1 - x^5}{1 - x} = 1\,000 \cdot \frac{1 - \left(\frac{6}{5}\right)^5}{1 - \frac{6}{5}} = 1\,000 \cdot 7,4416 = \ 7\,441,6.$$

Esercizio 26.2

Nel piano dotato di un riferimento cartesiano ortogonale Oxy, si determinino le equazioni delle rette passanti per l'origine e tangenti la circonferenza di equazione

$$x^2 \ + \ y^2 \ - \ 4x \ - \ 2y \ + \ 1 \ = \ 0.$$

✍ Soluzione

Le rette passanti per l'origine hanno forma:

① $x = 0$,

② $y = mx$ per $m \in \mathbb{R}$.

Controlliamo quindi se la retta $x = 0$ è tangente alla circonferenza data e i valori di m per i quali le rette di secondo tipo sono tangenti alla circonferenza:

① $\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2 - 2y + 1 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (y - 1)^2 = 0 \\ x = 0 \end{cases}$

Poiché esiste un'unica soluzione la retta $x = 0$ è tangente alla circonferenza data.

② $\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0 \\ y = mx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1+m)^2x^2 + (-4-2m)x + 1 = 0 \\ y = mx \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad \Delta = (-4-2m)^2 - 4(1+m)^2 = 16m + 12 \quad \Rightarrow \quad \Delta \equiv 0 \text{ per } m = -\frac{3}{4}$$

Quindi l'altra retta tangente alla circonferenza data è la retta $y = -\frac{3}{4}x$.

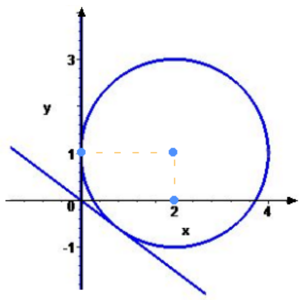


Figura 26.1. $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$

Esercizio 26.3

10 palline, numerate da 1 a 10, sono inserite in un'urna. Estraendone simultaneamente 3 a caso, qual è la probabilità che la terna di numeri estratta sia formata da numeri consecutivi (ad esempio $\{4, 5, 6\}$)?
N.B. La terna $\{9, 10, 1\}$ non è considerata ammissibile.

✍ Soluzione

$$\frac{8}{\binom{10}{3}} = \frac{1}{15}.$$

Esercizio 26.4

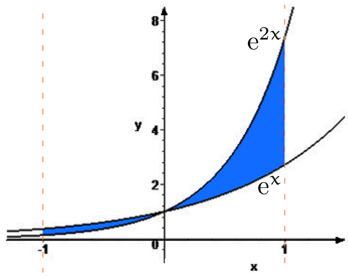
Nel piano dotato di un riferimento cartesiano ortogonale Oxy, si traccino i diagrammi delle funzioni

$$y = e^x \qquad \text{e} \qquad y = e^{2x}.$$

Si determini quindi l'area della regione limitata individuata dai diagrammi in questione e dalle rette di equazioni
$$x = 1 \qquad e \qquad x = -1,$$
cioè dalla regione descritta dalle condizioni
$$\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \min\{e^x, e^{2x}\} \leqslant y \leqslant \max\{e^x, e^{2x}\},\ |x| \leqslant 1 \right\}.$$

✍ Soluzione

$$\text{Area} = \int_{-1}^{0} \left(e^x - e^{2x}\right) dx + \int_{0}^{1} \left(e^{2x} - e^x\right) dx =$$
$$= \left[e^x - \frac{e^{2x}}{2}\right]_{x=-1}^{x=0} + \left[\frac{e^{2x}}{2} - e^x\right]_{x=0}^{x=1} =$$
$$= 1 - \frac{1}{e} + \frac{1}{2e^2} + \frac{e^2}{2} - e.$$



Esercizio 26.5

Risolvere la disequazione $\qquad \log_{1/2}(x^2 - 1) + \log_2(x^4 - 1) \leqslant 3.$

✍ Soluzione

Osserviamo che $\log_{1/2}(x^2 - 1) = -\log_2(x^2 - 1)$, quindi

- Deve essere $\begin{cases} x^2 - 1 > 0 \\ x^4 - 1 > 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x < -1 \ \cup \ x > 1$
- Risoluzione

$$\begin{aligned} \log_{1/2}(x^2-1) + \log_2(x^4-1) \leqslant 3 \quad &\Leftrightarrow \quad -\log_2(x^2-1) + \log_2(x^4-1) \leqslant 3 \quad \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad \log_2 \frac{x^4-1}{x^2-1} \leqslant 3 \quad \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad \log_2(x^2+1) \leqslant 3 \quad \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad x^2 + 1 \leqslant 2^3 \quad \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad x^2 \leqslant 7 \end{aligned}$$

Quindi, considerando la C.E., otteniamo $\qquad x \in [-\sqrt{7}, -1) \cup (1, \sqrt{7}].$

Esercizio 26.6

Determinare le equazioni degli asintoti al diagramma della funzione $f(x) = \log\left(e^x + e^{3x}\right)$ (il logaritmo è inteso in base "e").

✍ Soluzione

- Poiché $\log\left(e^x + e^{3x}\right) = \log\left(e^x(1 + e^{2x})\right) = x + \log(1 + e^{2x})$ e $\lim\limits_{x \to -\infty} \log(1 + e^{2x}) = 0$ allora $y = x$ è asintoto obliquo per $x \to -\infty$.
- Poiché $\log\left(e^x + e^{3x}\right) = \log\left(e^{3x}\left(\frac{1}{e^{2x}} + 1\right)\right) = 3x + \log\left(\frac{1}{e^{2x}} + 1\right)$ e $\lim_{x \to +\infty} \log\left(\frac{1}{e^{2x}} + 1\right) = 0$, allora $y = 3x$ è asintoto obliquo per $x \to +\infty$.

Esercizio 26.7

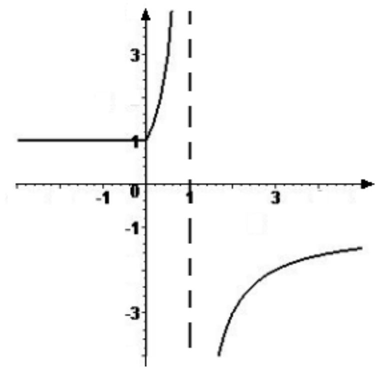
Studiare la funzione f così definita: $f(x) = \dfrac{1+|x|}{1-x}$.

✍ Soluzione

Può essere utile osservare che $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{per } x \leqslant 0, \\ \dfrac{1+x}{1-x}, & \text{per } x > 0. \end{cases}$

- Insieme di definizione: $x \neq 1$.
- Limiti agli estremi dell'insieme di definizione ed eventuali asintoti:
  - abbiamo già osservato che $f(x) \equiv 1$ per $x \leqslant 0$ pertanto
    $$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1, \qquad \lim_{x\to 1^-} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to 1^+} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = -1,$$
  - quindi
    - $x = 1$ è asintoto verticale,
    - $y = \pm 1$ sono asintoti orizzontali.
- Derivata prima: $f'(x) = \begin{cases} 0, & \text{per } x < 0, \\ \dfrac{2}{(1-x)^2}, & \text{per } x > 0. \end{cases}$ e $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = 2$

  perciò $x = 0$ è un punto angoloso.
- Eventuali estremanti:
  - x è MINIMO RELATIVO per ogni $x \leqslant 0$ e
  - x è MASSIMO RELATIVO per ogni $x < 0$.
- Derivata seconda: $f''(x) = \begin{cases} 0, & \text{per } x < 0, \\ \dfrac{4}{(1-x)^3}, & \text{per } x > 0. \end{cases}$
- Verso della concavità ed eventuali punti di flesso:
  - f è convessa su $(-\infty, 1)$,
  - f è concava su $(1, +\infty)$.
- Diagramma qualitativo di f:

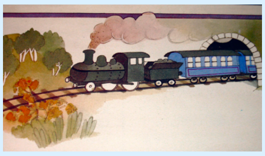


TEMA 27

Prova scritta del 12 luglio 2004

Esercizio 27.1

Sulla linea ferroviaria Tokyo-Osaka parte da Tokyo un rapido ogni 20 minuti (ai minuti 10, 30 e 50 di ogni ora) che effettua l'intero percorso in 3 ore. Sulla stessa linea, parte da Tokyo anche un diretto ogni 20 minuti (ai minuti 15, 35 e 55 di ogni ora) che effettua l'intero percorso in 4 ore e 10 minuti. Viaggiando su un rapido e supponendo che tutti i treni viaggino in orario, quanti diretti si sorpassano durante il tragitto?



✍ Soluzione

Viaggiando su un rapido si sorpassano 3 diretti.
Ad esempio, se viaggiamo sul rapido che parte da Tokyo alle 1.50 arriviamo a Osaka alle 4.50. Durante il tragitto sorpassiamo tutti i diretti partiti da Tokyo prima di noi che arriveranno a Osaka dopo di noi, quindi i 3 diretti che sono partiti da Tokyo alle 0.55, 1.15 e 1.35 che arriveranno a Osaka rispettivamente alle 5.05, 5.25 e 5.45.

Esercizio 27.2

Nel piano dotato di un riferimento cartesiano ortogonale Oxy, si determini l'equazione della parabola con asse verticale, vertice nel punto (1,0) e passante per il punto (2,1). Si determinino quindi le equazioni delle rette passanti per l'origine e tangenti tale parabola.

✍ Soluzione

La generica parabola con asse verticale ha equazione $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$.
Affinché abbia il vertice nel punto (1,0) deve passare per tale punto, quindi deve essere $a + b + c = 0$ e deve essere $-\dfrac{b}{2a} = 1$, dunque:

$$\begin{cases} a = c \\ b = -2c \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad y = cx^2 - 2cx + c.$$

Affinché passi per il punto (2,1) deve essere $1 = 4c - 4c + c$ da cui $c = 1$.
Quindi la parabola cercata ha equazione $y = x^2 - 2x + 1$.
Le rette passanti per l'origine hanno forma:

① $x = 0$,

② $y = mx$ per $m \in \mathbb{R}$.

La retta $x = 0$ non può essere tangente alla parabola perché è verticale (parallela all'asse). Cerchiamo i valori di m per i quali le rette di secondo tipo sono tangenti alla parabola: $\begin{cases} y = x^2 - 2x + 1 \\ y = mx \end{cases}$ $\Rightarrow$

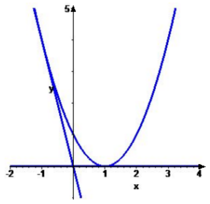
$$\begin{cases} x^2 + (-2 - m)x + 1 = 0 \\ y = mx \end{cases} \Rightarrow$$

$\Delta = (-2 - m)^2 - 4 = m(m + 4) \quad \Rightarrow \quad \Delta \equiv 0$ per $m = 0$ e $m = -4$.

quindi le rette tangenti alla parabola hanno equazione

$$y = 0\ ,$$

$$y = -4x\ .$$

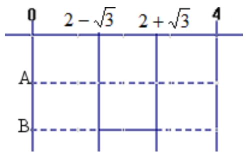


Esercizio 27.3

Risolvere la disequazione $(x^2 - 2x - 8)\ \log(4x - x^2)\ >\ 0$
(il logaritmo è inteso in base "e").

Soluzione

- Dapprima osserviamo che il logaritmo impone $4x - x^2 > 0$ cioè $0 < x < 4$.
- Studiamo separatamente il segno dei due fattori:
  - $A := x^2 - 2x - 8$
    $A > 0 \quad \Rightarrow \quad x < -2 \ \cup \ x > 4$,
  - $B := \log(4x - x^2)$
    $B > 0 \quad \Rightarrow \quad 4x - x^2 > 1 \quad \Rightarrow \quad 2 - \sqrt{3} < x < 2 + \sqrt{3}$.
  - Riportiamo i valori su un grafico (la linea continua indica il segno positivo, la linea tratteggiata il segno negativo):



La disequazione è verificata quindi per $0 < x < 2 - \sqrt{3} \ \cup \ 2 + \sqrt{3} < x < 4$.

Esercizio 27.4

Quante sono le possibili funzioni da un insieme di 5 elementi in un insieme di 10 elementi? Fra queste, quante sono suriettive e quante sono iniettive?

Soluzione

Possibili funzioni:	$10^5 = 100\,000$.
Funzioni suriettive:	0 (nessuna).
Funzioni iniettive:	$10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 30\,240$.

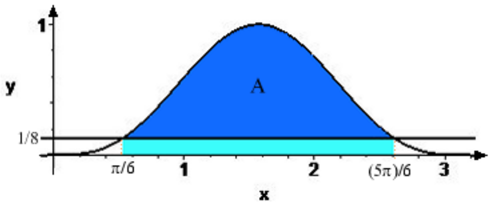
Esercizio 27.5

Nel piano dotato di un riferimento cartesiano ortogonale Oxy, si rappresenti graficamente la regione A individuata dalle condizioni

$$A = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0 < x < \pi,\ \frac{1}{8} \leqslant y \leqslant \sin^3 x \right\}$$

e se ne determini l'area.

✍ Soluzione



$$\text{Area di } A = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \sin^3 x\, dx - \left(\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{6}\right)\frac{1}{8} =$$

$$= \left[\frac{\cos^3 x}{3} - \cos x\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} - \frac{\pi}{12} = \frac{3\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{12}.$$

Esercizio 27.6

Sia f la funzione reale così definita: $f(x) = \dfrac{x^{1/2}-1}{x^{1/3}-1}$.

Calcolare ① $\lim_{x\to 0^+} f(x)$, ② $\lim_{x\to 1} f(x)$, ③ $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

✍ Soluzione

① $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$

② $\lim_{x\to 1} f(x) \overset{t:=x-1}{=\!=} \lim_{t\to 0} \dfrac{(1+t)^{1/2}-1}{(1+t)^{1/3}-1} =$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{(1+t)^{1/2}-1}{t} \cdot \frac{t}{(1+t)^{1/3}-1} \overset{(G)}{=\!=} \frac{1}{2} \cdot 3 = \frac{3}{2}$$

③ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^{1/2}\left(1-\frac{1}{x^{1/2}}\right)}{x^{1/3}\left(1-\frac{1}{x^{1/3}}\right)} =$

$$= \lim_{x\to+\infty} x^{1/6}\frac{\left(1-\frac{1}{x^{1/2}}\right)}{\left(1-\frac{1}{x^{1/3}}\right)} = +\infty \cdot 1 = +\infty$$

Esercizio 27.7

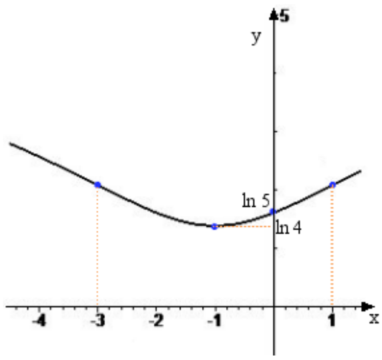
Studiare la funzione f così definita: $f(x) = \log(x^2+2x+5)$ (il logaritmo è inteso in base "e").

✍ Soluzione

❦ Insieme di definizione: $x^2+2x+5>0 \quad \Rightarrow \quad x \in \mathbb{R}$.

- Limiti agli estremi dell'insieme di definizione: $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$.
- Presenza di eventuali asintoti:
  - poiché il dominio è $\mathbb{R}$ non esistono asintoti verticali,
  - poiché $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$ non esistono asintoti orizzontali,
  - poiché $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ non esistono asintoti obliqui.
- Derivata prima: $f'(x) = \frac{2x+2}{x^2+2x+5}$.
- Eventuali estremanti:
  - $f'(x) > 0$ per $x > -1$ (f crescente)
  - $f'(x) < 0$ per $x < -1$ (f decrescente)
  - $f'(x) = 0$ per $x = -1$, $\quad x = -1$ è minimo assoluto e $f(-1) = \log 4$.
- Derivata seconda: $f''(x) = -\frac{2x^2+4x-6}{(x^2+2x+5)^2}$.
- Verso della concavità ed eventuali punti di flesso:
  - $f''(x) < 0$ per $x < -3 \ \cup \ x > 1$,
  - $f''(x) > 0$ per $-3 < x < 1$,
  - $f''(x) = 0$ per $x = -3, 1$,

  quindi
  - f concava su $(-\infty, -3]$ e su $[1, +\infty)$,
  - f convessa su $[-3, 1]$,
  - $x = -3$ e $x = 1$ punti di flesso.
- Diagramma qualitativo di f:



TEMA 28

Prova scritta del 16 settembre 2004

Esercizio 28.1

Una regione di 20 Km^2 di superficie è rappresentata su una mappa da un rettangolo di lati 4 cm e 20 cm. In che scala è la mappa?

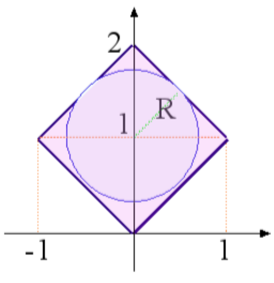
✍ Soluzione

Sulla mappa il rapporto tra base e altezza è di 5 : 1 pertanto la regione è un rettangolo di 10 Km di larghezza per 2 Km di altezza, dunque 1 cm sulla mappa corrisponde a 2 Km da cui una scala di 1 : 50 000

Esercizio 28.2

Nel piano dotato di un riferimento cartesiano ortogonale Oxy, si consideri il quadrato Q tre dei cui vertici sono l'origine degli assi, il punto $(-1, 1)$ e il punto $(1, 1)$. Si determini l'equazione della circonferenza inscritta in Q.

✍ Soluzione



La circonferenza cercata ha centro in $(0, 1)$ e raggio $R = \dfrac{\text{diagonale di } Q}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, cioè

$$(x-0)^2 + (y-1)^2 = \frac{1}{2}$$
$$\Downarrow$$
$$x^2 + y^2 - 2y + \frac{1}{2} = 0.$$

Esercizio 28.3

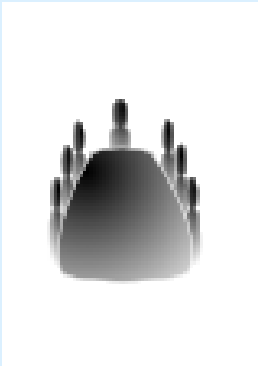
Risolvere la disequazione $|2 - \log_4(x^2)| < 1$.

✍ Soluzione

$$
\begin{aligned}
|2-\log_4(x^2)|<1 \quad &\Rightarrow \quad -1<2-\log_4(x^2)<1 &&\Rightarrow\\
&\Rightarrow \quad 1<\log_4(x^2)<3 &&\Rightarrow\\
&\Rightarrow \quad \begin{cases} x^2<4^3\\ x^2>4\end{cases} &&\Rightarrow\\
&\Rightarrow \quad \begin{cases} -2^3<x<2^3\\ x<-2 \ \cup \ x>2\end{cases} &&\Rightarrow\\
&\Rightarrow \quad -8<x<-2 \ \cup \ 2<x<8.
\end{aligned}
$$

Esercizio 28.4

Il comitato direttivo di un certo ente è composto da un presidente, un segretario e da altri 6 membri. Il comitato si riunisce ad un tavolo circolare attorno al quale sono disposte 7 sedie e una poltrona destinata al presidente. Tenuto conto che il segretario deve sedere a fianco del presidente, alla sua destra o alla sua sinistra, in quanti modi diversi fra loro possono disporsi i membri del comitato attorno al tavolo?



✍ Soluzione

$$2 \quad \cdot \quad 6\,! \quad = \quad 1\,440.$$

Esercizio 28.5

Calcolare

$$\int_{\pi^2/4}^{\pi^2} \cos\sqrt{x}\;dx$$

dopo aver indicato una primitiva della funzione integranda sull'intervallo di integrazione.

✍ Soluzione

Integrando per parti*

$$
\begin{aligned}
G(x)\ :=&\int \cos\left(\sqrt{x}\right)\,dx \overset{\overbrace{dx=2t\,dt}^{\sqrt{x}=t}}{=\!=\!=\!=} 2\int t\cos t\,dt \overset{\text{P.P.}}{=\!=} 2\left[t\sin t-\int \sin t\,dt\right] = 2\left[t\sin t+\cos t\right]+k=\\
=&2\sqrt{x}\sin\left(\sqrt{x}\right)+2\cos\left(\sqrt{x}\right)+k, \qquad k\in\mathbb{R}.\\
I\ :=&G(\pi^2)-G(\pi^2/4)=-2-\pi.
\end{aligned}
$$

*$\int h(t)g'(t)\,dt = h(t)g(t)-\int h'(t)g(t)\,dt$

$$
\begin{array}{lcl}
h(t)=t & \rightsquigarrow & h'(t)=1\\
g(t)=\int g'(t)\,dt=\sin t & \leftsquigarrow & g'(t)=\cos t
\end{array}
$$

Esercizio 28.6

Calcolare $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{\ln(x^3-7)}{\sin(x-2)}$ (il logaritmo è inteso in base "e").

✍ Soluzione

$$\lim_{x\to 2} \frac{\ln\left(x^3-7\right)}{\sin\left(x-2\right)} \overset{t:=x-2}{=\!=\!=} \lim_{t\to 0} \frac{\ln\left((t+2)^3-7\right)}{\sin\left(t\right)} = \lim_{t\to 0} \frac{\ln\left(t^3+6t^2+12t+1\right)}{\sin\left(t\right)} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\ln\left(t^3+6t^2+12t+1\right)}{t^3+6t^2+12t} \cdot \frac{t^3+6t^2+12t}{t} \cdot \frac{t}{\sin\left(t\right)} \overset{(E)(A)}{=\!=\!=}$$

$$= 1 \cdot 12 \cdot 1 = 12.$$

Esercizio 28.7

Studiare la funzione f così definita: $f(x) = \ln(x^3-2x)$ (il logaritmo è inteso in base "e").

✍ Soluzione

- Insieme di definizione: $(-\sqrt{2}, 0) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$.
- Limiti agli estremi dell'insieme di definizione:

$$\lim_{x\to -\sqrt{2}^+} \ln\left(x^3-2\,x\right) = -\infty$$

$$\lim_{x\to 0^-} \ln\left(x^3-2\,x\right) = -\infty$$

$$\lim_{x\to \sqrt{2}^+} \ln\left(x^3-2\,x\right) = -\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} \ln\left(x^3-2\,x\right) = +\infty$$

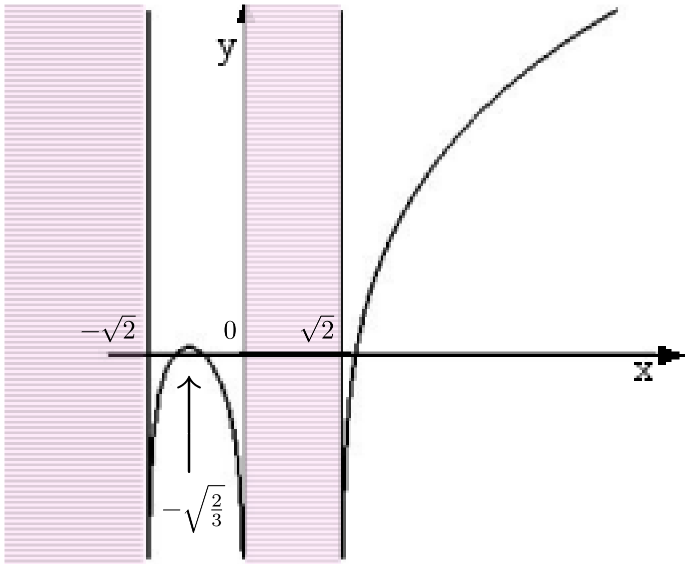
- Presenza di eventuali asintoti:
  - Asintoti orizzontali: nessuno.
  - Asintoti verticali: $x = \pm\sqrt{2}$ e $x = 0$.
  - Asintoti obliqui: nessuno poiché

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln\left(x^3-2\,x\right)}{x} = 0$$

- Derivata prima: $\displaystyle f'(x) = \frac{3\,x^2-2}{x\left(x^2-2\right)}$.
- Eventuali estremanti:
  - f crescente per $x < -\sqrt{\frac{2}{3}} \cup x > \sqrt{2}$,
  - f decrescente per $-\sqrt{\frac{2}{3}} < x < 0$,
  - $x = -\sqrt{\frac{2}{3}}$ è punto di massimo relativo e $f\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right) > 0$.
- Derivata seconda: $\displaystyle f''(x) = -\frac{3\,x^4+4}{x^2\left(x^2-2\right)^2}$.
- Verso della concavità ed eventuali punti di flesso:

- ❧ f mai convessa.
- ❧ f concava su $(-\sqrt{2}, 0)$ e su $(\sqrt{2}, +\infty)$.
- ❧ Punti di flesso: nessuno.

❦ Diagramma qualitativo di f:



TEMA 29

Prova scritta del 18 novembre 2004

Esercizio 29.1

Uno studente ha già superato nella sua carriera universitaria 7 esami. Qual è attualmente la media dei suoi voti (in trentesimi) sapendo che, nel caso in cui egli superi il prossimo esame con la votazione di 30/30, questa media si alzerebbe esattamente di 1/30?

✍ Soluzione

Sia x la media dei suoi 7 voti $v_1, \ldots, v_7$:

$$x = \frac{\sum_{i=1}^{7} v_i}{7}. \qquad (\star)$$

Dopo l'ottavo esame avremmo

$$x + \frac{1}{30} = \frac{\sum_{i=1}^{7} v_i + \frac{30}{30}}{8}.$$

Pertanto $\quad (\star) \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{7} v_i = 7x \quad \Rightarrow \quad x + \frac{1}{30} = \frac{7x + \frac{30}{30}}{8} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{22}{30}.$

Esercizio 29.2

Sia $\mathcal{S}$ l'intervallo $[-2, 2)$. Determinare estremo inferiore ed estremo superiore, specificando se siano anche rispettivamente minimo e massimo, di ciascuno dei seguenti insiemi:
$A := \{ x^2 + \sin y \mid x, y \in \mathcal{S} \}$, $\quad B := \{ x^2 + \cos y \mid x, y \in \mathcal{S} \}$,
$C := \{ \cos(xy) \mid x, y \in \mathcal{S} \}$, $\quad D := \{ x - y^2 \mid x, y \in \mathcal{S} \}$.

✍ Soluzione

$$\begin{array}{lllllll}
\sup A = (-2)^2 + \sin(\pi/2) = 5 & \text{è Max}, & \inf A = 0 + \sin(-\pi/2) = -1 & \text{è Min}, \\
\sup B = (-2)^2 + \cos(0) = 5 & \text{è Max}, & \inf B = 0 + \cos(-2) = \cos(2) & \text{è Min}, \\
\sup C = \cos(0) = 1 & \text{è Max}, & \inf C = \cos(\sqrt{\pi} \cdot \sqrt{\pi}) = -1 & \text{è Min}, \\
\sup D = 2 - 0 = 2 & \text{Non è Max}, & \inf D = -2 - (-2)^2 = -6 & \text{è Min}.
\end{array}$$

Esercizio 29.3

STAL Per quali valori del parametro reale a la disuguaglianza $(4-2a)x^2+2ax+1<0$ è soddisfatta da tutti i numeri reali x?

VE Risolvere la disequazione $e^{x^2-2x-1} \geqslant 9^{x^2}$.

Soluzione

STAL È sufficiente osservare che per $x=0$ la disuguaglianza non è mai soddisfatta.

In alternativa, considerando la tabella i.2 a pagina 3:

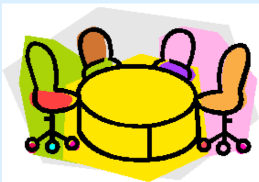
- se $(4-2a) \geqslant 0$ non esiste alcun valore di a tale che la disequazione valga per ogni x;
- se $(4-2a)<0$, cioè $a>2$, riscriviamo la disequazione nella forma descritta nella tabella i.2: $(2a-4)x^2-2ax-1>0$. Pertanto i valori di a per i quali la disequazione vale per ogni x si ottengono imponendo $\Delta/4<0$ cioè $a^2+(2a-4)<0$ da cui $-1-\sqrt{5}<a<-1+\sqrt{5}$, da scartare in quanto siamo nel caso $a>2$.

Quindi non esistono valori di a in corrispondenza ai quali la disuguaglianza sia soddisfatta per ogni x.

VE $e^{x^2-2x-1} \geqslant 9^{x^2} \quad \Leftrightarrow \quad e^{x^2-2x-1} \geqslant e^{x^2 \ln 9} \quad \Leftrightarrow \quad (\ln 9 - 1)x^2+2x+1 \leqslant 0$ impossibile.

Esercizio 29.4

Il comitato direttivo di un certo ente è composto da un presidente, un segretario e da altri 6 membri. Il comitato si riunisce ad un tavolo circolare attorno al quale sono disposte 7 sedie e una poltrona destinata al presidente. Tenuto conto che il segretario deve sedere a fianco del presidente (alla sua destra o alla sua sinistra) oppure esattamente di fronte al presidente, in quanti modi diversi fra loro possono disporsi i membri del comitato attorno al tavolo?



Soluzione

Immaginiamo che il segretario si sia sistemato in una delle 3 posizioni possibili: rimane ammissibile ogni permutazione dei 6 membri rimanenti. Dunque $3 \cdot 6! = 2\,160$.

Esercizio 29.5

STAL Si consideri la regione di piano E così definita:

$$E = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0 \leqslant x \leqslant 2\pi, \; \frac{1}{8} \leqslant y \leqslant \cos^3 x \right\}.$$

Si dia una rappresentazione grafica qualitativa di E e se ne calcoli l'area.

VE Si consideri la regione di piano E così definita:

$$E = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; -\pi \leqslant x \leqslant \pi, \; \frac{1}{8} \leqslant y \leqslant \cos^3 x \right\}.$$

Si dia una rappresentazione grafica qualitativa di E e se ne calcoli l'area.

✍ Soluzione

Si osservi innanzitutto che

$$\int \cos^3(x)\,dx \overset{\cos^2(x)=1-\sin^2(x)}{=\!=\!=} \int (1-\sin^2(x))\cos(x)\,dx =$$

$$= \int \cos(x) - \cos(x)\sin^2(x)\,dx = \sin x - \int \cos x\ \sin^2 x\,dx \overset{\substack{t:=\sin x\\ dt=\cos x\,dx}}{=\!=\!=}$$

$$= \sin x - \int t^2 dt = \sin x - \frac{t^3}{3} + k = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + k\,, \quad k \in \mathbb{R}\,.$$

STAL Nella figura 29.1 la regione E è quella ombreggiata; si noti che si ha $\cos^3 x = (1/8)$ se e solo se $x = \pi/3$ o $x = \pi\,(5/3)$. Dunque, anche tenendo conto della simmetria,

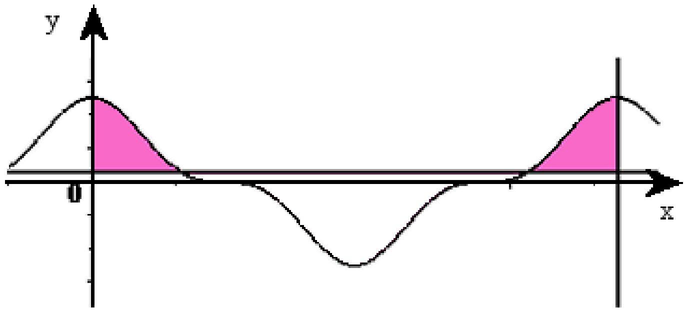


Figura 29.1. E

$$\text{Area }(E) = 2\left(\int_0^{\pi/3} \cos^3 x\,dx - \frac{\left(\frac{\pi}{3}-0\right)}{8}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{\pi}{24}\right) = \frac{9\sqrt{3}-\pi}{12}\,.$$

VE Nella figura 29.2 la regione E è quella ombreggiata. Dunque si ha

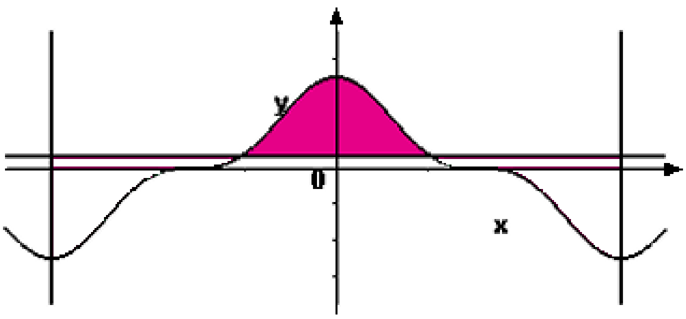


Figura 29.2. E

$$\text{Area }(E) = \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \cos^3 x\,dx - 2\cdot\frac{\left(\frac{\pi}{3}-0\right)}{8} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{\pi}{24}\right) = \frac{9\sqrt{3}-\pi}{12}\,.$$

Esercizio 29.6

STAL Sia $f(x) = \left(\cos^{1/5}(e^x) - 1\right) e^{-2x}$. Calcolare

$$A = \lim_{x\to-\infty} f(x) \qquad \text{e} \qquad B = \lim_{x\to+\infty} f(x).$$

VE Uno solo dei seguenti due limiti esiste. Lo si calcoli dopo averlo individuato e si precisi per quale motivo l'altro non esiste.

$$A = \lim_{x\to-\infty} x\sin(2^x) \qquad\qquad B = \lim_{x\to+\infty} x\sin(2^x).$$

✍ Soluzione

STAL Si ha $f(x) = \left(\cos^{1/5}(e^x) - 1\right) e^{-2x} = \dfrac{(1+\cos(e^x)-1)^{1/5}-1}{\cos(e^x)-1} \cdot \dfrac{\cos(e^x)-1}{e^{2x}}$ pertanto

$$A = \lim_{x\to-\infty} \frac{[(\cos(e^x)-1)+1]^{1/5}-1}{\cos(e^x)-1} \cdot \frac{\cos(e^x)-1}{(e^x)^2} \overset{(G)(B)}{=\!=} \frac{1}{5}\cdot\frac{-1}{2} = -\frac{1}{10}$$

$$-\frac{2}{e^{2x}} \leqslant \frac{\cos^{1/5}(e^x)-1}{e^{2x}} \leqslant 0 \xrightarrow{\text{Teorema del confronto}} B = 0$$

VE $A = \lim_{x\to-\infty} \dfrac{\sin 2^x}{2^x} \cdot \dfrac{2^x}{x^{-1}} \overset{(A)}{=\!=} 0$

$B \nexists$ poiché, ad esempio, $x\sin(2^x)$ assume valore 0 in $\log_2(k\pi)$ e valore $2k\pi + \pi/2$ in $\log_2(2k\pi+\pi/2)$ ed entrambe le successioni indicate tendono a $+\infty$ per $k \to +\infty$.

Esercizio 29.7

STAL Studiare la funzione f così definita: $f(x) = \dfrac{x-x^2+x^3}{1+x^2}$.

VE Studiare la funzione f così definita: $f(x) = \dfrac{x^2}{1+x}$.

✍ Soluzione

STAL Osserviamo che $f(x) = x - 1 + \dfrac{1}{1+x^2}$.

- Insieme di definizione: $\mathbb{R}$
- Limiti agli estremi dell'insieme di definizione:
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x-x^2+x^3}{1+x^2} = -\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{x-x^2+x^3}{1+x^2} = +\infty$$
- Presenza di eventuali asintoti:
dall'osservazione iniziale segue subito che $y = x-1$ è asintoto per $x\to\pm\infty$. Oppure:
$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} \frac{x-x^2+x^3}{(1+x^2)\,x} &= 1 &=: m_-\\
\lim_{x\to-\infty} \frac{x-x^2+x^3}{1+x^2} - x &= -1 &=: q_-\\
\lim_{x\to\infty} \frac{x-x^2+x^3}{(1+x^2)\,x} &= 1 &=: m_+\\
\lim_{x\to\infty} \frac{x-x^2+x^3}{1+x^2} - x &= -1 &=: q_+
\end{aligned}$$
Pertanto abbiamo lo stesso asintoto obliquo per $x\to\pm\infty$: $y = x - 1$.
- Derivata prima: $f'(x) = 1 - \dfrac{2x}{(1+x^2)^2} = \dfrac{1+2x^2-2x+x^4}{(1+x^2)^2} = \dfrac{(x-1)^2+x^2+x^4}{(1+x^2)^2}$.
- Eventuali estremanti:
la derivata prima è sempre strettamente positiva quindi la funzione è strettamente crescente e non ci sono estremanti.

❧ Derivata seconda: $f''(x) = 2\,\dfrac{-1+3\,x^2}{(1+x^2)^3}$.

❧ Verso della concavità ed eventuali punti di flesso:

❖ $f''(x) > 0$ per $x < -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ o $x > +\dfrac{1}{\sqrt{3}}$;

❖ $f''(x) = 0$ per $x = \mp\dfrac{1}{\sqrt{3}}$;

❖ $f''(x) < 0$ per $-\dfrac{1}{\sqrt{3}} < x < \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Pertanto

❖ f è convessa per $x < -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ e per $x > +\dfrac{1}{\sqrt{3}}$,

❖ f è concava per $-\dfrac{1}{\sqrt{3}} < x < \dfrac{1}{\sqrt{3}}$,

❖ $x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ sono punti di flesso.

❧ Diagramma qualitativo di f: vedi fig. 29.3

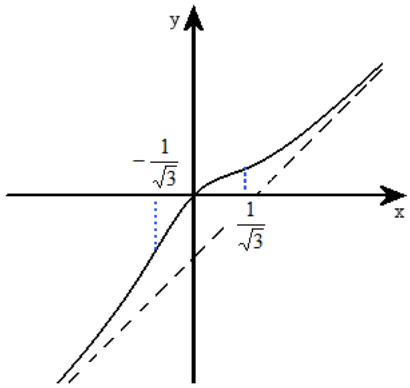


Figura 29.3. $f(x) = \dfrac{x - x^2 + x^3}{1+x^2}$

$\boxed{\text{VE}}$ Osserviamo che $f(x) = x - 1 + \dfrac{1}{1+x}$.

❧ Insieme di definizione: $x \neq -1$

❧ Limiti agli estremi dell'insieme di definizione:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{1+x} = \pm\infty \qquad \lim_{x\to -1^\pm} \frac{x^2}{1+x} = \pm\infty$$

❧ Presenza di eventuali asintoti:

❖ non esiste asintoto orizzontale;

❖ $x = -1$ è asintoto verticale;

❖ inoltre da

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{(1+x)\,x} &= 1 =: m \\ \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{(1+x)} - x &= -1 := q \end{aligned}$$

segue che $y = x - 1$ è asintoto obliquo per $x \to \pm\infty$. La cosa era comunque immediata dall'osservazione iniziale.

❧ Derivata prima: $f'(x) = \dfrac{x\,(2+x)}{(1+x)^2}$.

❧ Eventuali estremanti:

❖ $f'(x) < 0$ per $-2 < x < -1$ e per $-1 < x < 0$;

- $f'(x) = 0$ per $x = -2$ e per $x = 0$;
- $f'(x) > 0$ per $x < -2$ e per $x > 0$.

Pertanto

- f è decrescente per $-2 < x < -1$ e per $-1 < x < 0$;
- f è crescente per $x < -2$ e per $x > 0$;
- $x = 0$ è punto di minimo relativo e $x = -2$ è punto di massimo relativo.

❧ Derivata seconda: $f''(x) = \dfrac{2}{(1+x)^3}$.

❧ Verso della concavità ed eventuali punti di flesso:

- $f''(x) < 0$ per $x < -1$;
- $f''(x) = 0$ per nessun valore di x;
- $f''(x) > 0$ per $x > -1$.

Pertanto

- f è concava per $x < -1$,
- f è convessa per $x > -1$,
- non ci sono punti di flesso.

❧ Diagramma qualitativo di f: vedi fig. 29.4

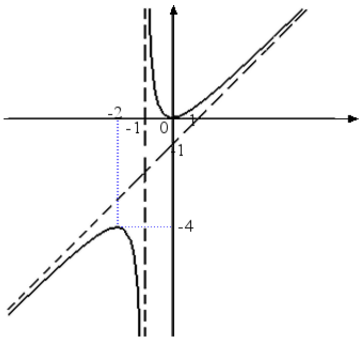


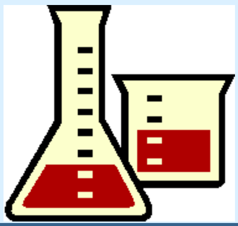
Figura 29.4. $f(x) = \dfrac{x^2}{1+x}$

TEMA 30

Prova scritta del 10 gennaio 2005

Esercizio 30.1

Ho 200 litri di una miscela ottenuta diluendo uno sciroppo con acqua. Se aggiungessi a questa miscela 4 litri di acqua, la percentuale di acqua nella nuova miscela che otterrei salirebbe dell' 1 %. Con quanti litri di sciroppo è stata ottenuta la miscela?



✍ Soluzione

Indichiamo con s i litri di sciroppo, allora

$$1 - \frac{s}{204} = 1 - \frac{s}{200} + \frac{1}{100} \qquad \Longrightarrow \qquad s = 102.$$

Esercizio 30.2

Nel piano dotato di un riferimento cartesiano ortogonale Oxy, si determini l'equazione della circonferenza γ soddisfacente le seguenti condizioni:

a) il centro di γ sta nel terzo quadrante;

b) γ passa per l'origine O degli assi;

c) detti A e B i punti di intersezione di γ rispettivamente con l'asse delle ascisse e con l'asse delle ordinate, l'angolo $\widehat{ABO}$ misura 30° e l'area del triangolo AOB vale $\sqrt{3}/2$.

✍ Soluzione

a) Indichiamo con a e b le coordinate del centro della circonferenza e con r il suo raggio

$$\gamma\colon (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \ .$$

Poiché il centro di γ sta nel terzo quadrante, deve essere $a, b < 0$.

b) γ passa per l'origine O degli assi quindi $a^2 + b^2 = r^2$.

c) Cerchiamo le coordinate di A e B (punti di intersezione di γ rispettivamente con l'asse delle ascisse e con l'asse delle ordinate):

$$① \begin{cases} y = 0 \\ (x-a)^2 + (y-b)^2 = a^2 + b^2 \end{cases} \Rightarrow A \equiv (2a, 0);$$

$$② \begin{cases} x = 0 \\ (x-a)^2 + (y-b)^2 = a^2 + b^2 \end{cases} \Rightarrow B \equiv (0, 2b).$$

L'angolo $\widehat{ABO}$ misura $30°$ quindi $\overline{AB}$ è il lato di un triangolo equilatero: $\overline{AB} = 2\overline{AO} = 2|2a| = 4|a| = -4a$; pertanto:

$$\overline{AB}^2 = 16a^2 = 4(a^2 + b^2) \quad \Rightarrow \quad b^2 = 3a^2 \quad \Rightarrow \quad b = \sqrt{3}\, a\ .$$

L'area del triangolo AOB vale $\sqrt{3}/2$ quindi

$$\text{Area} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\overline{OA}\ \overline{OB}}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{4ab}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{4a^2\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} a = -\dfrac{1}{2} \\ \\ b = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{matrix}$$

Pertanto la circonferenza γ ha equazione

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1^2 \qquad \text{cioè} \qquad x^2 + y^3 + x + \sqrt{3}y = 0\ .$$

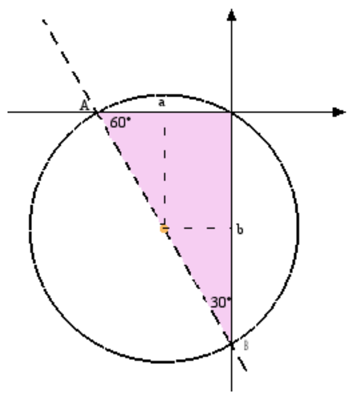


Figura 30.1. γ: $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1$

Esercizio 30.3

Risolvere la disequazione $\sqrt{x+2} + \sqrt{2x+6} \ < \ 3.$

✍ Soluzione

❦ Perché le radici siano definite deve essere $\begin{cases} x + 2 \geqslant 0 \\ 2x + 6 \geqslant 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad x \geqslant -2$

❦ Risoluzione

$$\begin{aligned}
\sqrt{x+2} &+ \sqrt{2x+6} &< 3\\
(\sqrt{x+2} &+ \sqrt{2x+6})^2 &< 9\\
(x+2)+(2x+6) &+ 2\sqrt{(x+2)(2x+6)} &< 9\\
\sqrt{(x+2)(2x+6)} & &< \left(\frac{1}{2}-\frac{3}{2}x\right)
\end{aligned}$$

La disequazione è del tipo $A(x) > \sqrt{B(x)}$ pertanto equivale al sistema

$$\begin{cases}(x+2)(2x+6) \geqslant 0\\ \frac{1}{2}-\frac{3}{2}x > 0\\ (x+2)(2x+6) < \left(\frac{1}{2}-\frac{3}{2}x\right)^2\end{cases}$$

$$\begin{cases}x \geqslant -2\\ x < \frac{1}{3}\\ x^2-46x-47 > 0\end{cases}$$

$$\begin{cases}x \geqslant -2\\ x < \frac{1}{3}\\ x < -1 \ \cup \ x > 47\end{cases}$$

Pertanto la soluzione è

$$-2 \leqslant x < -1 \; .$$

Esercizio 30.4

$\boxed{\text{STAL}}$ Quanti sono gli anagrammi (a due a due diversi fra loro) della parola "OCCHIALINI" che non iniziano con la lettera "A"?

$\boxed{\text{VE}}$ Quanti sono gli anagrammi (a due a due diversi fra loro) della parola "AZIENDA" che non iniziano con la lettera "Z"?

✍ Soluzione

Può essere utile ricordare la seguente definizione: dati n oggetti <u>a due a due distinti</u>, si chiama permutazione degli n oggetti ogni allineamento degli n oggetti. Il numero delle permutazioni semplici è

$$P_n \; : = \; n! \; .$$

Se gli n oggetti <u>non</u> sono a due a due distinti, ma k_1 sono uguali fra loro, k_2 sono uguali fra loro e distinti dai precedenti ecc., il numero P'_n delle permutazioni è chiaramente inferiore. Facilmente si ottiene:

$$P'_n \; : = \; \frac{n!}{k_1! \; k_2! \; \dots} \; .$$

$\boxed{\text{STAL}}$ **OCCHIALINI** Alle permutazioni delle 10 lettere NON distinte $\{A, C, C, H, I, I, I, L, N, O\}$ di cui $k_1 = 2$ uguali (C) e altre $k_2 = 3$ uguali (I) sottraiamo le permutazioni delle 9 lettere NON distinte $\{C, C, H, I, I, I, L, N, O\}$ di cui $k_1 = 2$ uguali (C) e altre $k_2 = 3$ uguali (I):

$$\frac{10!}{2! \; 3!} - \frac{9!}{2! \; 3!} = \frac{10! - 9!}{12} = \frac{3265920}{12} = 272\,160 \; .$$

VE **AZIENDA** Alle permutazioni delle 7 lettere NON distinte $\{A, A, D, E, I, N, Z\}$ di cui $k_1 = 2$ uguali (A) sottraiamo le permutazioni delle 6 lettere NON distinte $\{A, A, D, E, I, N\}$ di cui $k_1 = 2$ uguali (A):

$$\frac{7!}{2!} - \frac{6!}{2!} = \frac{7!-6!}{2} = \frac{4320}{2} = 2\,160 \,.$$

Esercizio 30.5

STAL Dopo aver calcolato una primitiva su $(0, +\infty)$ della funzione integranda, calcolare

$$\int_1^{e^2} \sqrt{x}\ \ln x \, dx \,.$$

VE Dopo aver calcolato una primitiva su $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ della funzione integranda, calcolare

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (\sin^2 x)\ \tan x \, dx \,.$$

✍ Soluzione

STAL Integrando per parti*:

$$\begin{aligned} G(x) &:= \int \sqrt{x}\,\ln(x)\,dx \overset{(P.P.)}{=\!=} \frac{2}{3}\ln(x)\,x^{3/2} - \frac{2}{3}\int\sqrt{x}\,dx = \\ &= \frac{2}{3}x^{3/2}\ln(x) - \frac{4}{9}x^{3/2} + k\,, \qquad k \in \mathbb{R}\,; \end{aligned}$$

$$I = \int_1^{e^2} \sqrt{x}\ \ln x\,dx = G(e^2) - G(1) = \frac{8}{9}e^3 + \frac{4}{9}\,.$$

VE

$$\begin{aligned} G(x) &:= \int \sin^2 x\ \tan x\ dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos x}\ \sin x\ dx = \\ &= \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos x}\ \sin x\ dx \overset{\substack{t:=\cos x \\ dt = -\sin x\,dx}}{=\!=\!=} \\ &= -\int \frac{1}{t} - t\,dt = -\log t + \frac{1}{2}t^2\,dt = \\ &= \frac{1}{2}\cos^2 x - \ln(\cos x) + k\,, \qquad k \in \mathbb{R}\,; \end{aligned}$$

$$I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 x \tan x\,dx = G\left(\frac{\pi}{3}\right) - G\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\ln 3\,.$$

Esercizio 30.6

STAL Calcolare
$$A = \lim_{n\to\infty} \frac{n^4(3-9n^2)-n^5}{5n^6-n^5-3} \quad \text{e} \quad B = \lim_{n\to\infty}\left(\cos\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)^n.$$

VE Calcolare
$$A = \lim_{n\to\infty} \frac{n(2-7n^4)-n^3}{4n^5-n^3-7} \quad \text{e} \quad B = \lim_{n\to\infty} \sqrt{2n+\sqrt{n}} - \sqrt{2n}.$$

---

* $\int h(x)g'(x)\,dx = h(x)g(x) - \int h'(x)g(x)\,dx$

$$\begin{aligned} h(x) &= \ln x & &\rightsquigarrow & h'(x) &= \tfrac{1}{x} \\ g(x) &= \int g'(x)\,dx = \tfrac{2}{3}x^{3/2} & &\leftsquigarrow & g'(x) &= \sqrt{x} \end{aligned}$$

✍ Soluzione

STAL A) $$\lim_{n\to\infty} \frac{n^4(3-9n^2)-n^5}{5n^6-n^5-3} = \lim_{n\to\infty} \frac{-9n^6\left(1-\dfrac{1}{3n^2}+\dfrac{1}{9n}\right)}{5n^6\left(1-\dfrac{1}{5n}-\dfrac{3}{5n^6}\right)} = -\frac{9}{5}\ ;$$

B) $$\lim_{n\to\infty}\left[\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\right]^n = \lim_{n\to\infty}\exp\left\{n\cdot\log\left[\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\right]\right\} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\exp\left\{n\cdot\log\left[1+\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)-1\right]\right\} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\exp\left\{\frac{\log\left[1+\cos\left(\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}\right)-1\right]}{\cos\left(\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}\right)-1}\cdot\frac{\cos\left(\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}\right)-1}{\dfrac{1}{n+1}}\cdot\frac{n}{n+1}\right\} \overset{(E)(B)}{=\!=} e^{-1/2}\ ;$$

VE A) $$\lim_{n\to\infty}\frac{n(2-7n^4)-n^3}{4n^5-n^3-7} = \lim_{n\to\infty}\frac{-7n^5\left(1+\dfrac{1}{7n^2}-\dfrac{2}{7n^5}\right)}{4n^5\left(1-\dfrac{1}{4n^2}-\dfrac{7}{4n^5}\right)} = -\frac{7}{4}\ ;$$

B) $$\lim_{n\to\infty}\sqrt{2n+\sqrt{n}}-\sqrt{2n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{2n+\sqrt{n}}-\sqrt{2n}\right)\frac{\left(\sqrt{2n+\sqrt{n}}+\sqrt{2n}\right)}{\left(\sqrt{2n+\sqrt{n}}+\sqrt{2n}\right)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\left(\sqrt{2n+\sqrt{n}}+\sqrt{2n}\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2}\left[1+\sqrt{1+\dfrac{1}{2\sqrt{n}}}\right]} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ .$$

Esercizio 30.7

STAL Studiare la funzione f così definita: $f(x) = \log(x^2-|2x-1|)$
(il logaritmo è inteso in base "e").

VE Studiare la funzione f così definita: $f(x) = \log(x^2-|x|)-\log(x^4)$
(il logaritmo è inteso in base "e").

✍ Soluzione

STAL Può essere utile osservare che

$$f(x) = \begin{cases} \ln(x^2+2x-1) & \text{per } x\leqslant \dfrac{1}{2} \\ \ln(x^2-2x+1) & \text{per } x\geqslant \dfrac{1}{2}\end{cases}$$

- Insieme di definizione: $x<-1-\sqrt{2}\ \cup\ -1+\sqrt{2}<x<1\ \cup\ x>1.$
- Limiti agli estremi dell'insieme di definizione:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to-1\pm\sqrt{2}} f(x) = \lim_{x\to 1^\pm} f(x) = -\infty$$

- Presenza di eventuali asintoti

- ❖ nessun asintoto orizzontale;
- ❖ $x = -1 \pm \sqrt{2}$ e $x = 1$ asintoti verticali;
- ❖ ricerca eventuali asintoti obliqui:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\ln\left(x^2 - |2x-1|\right)}{x} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \text{nessun asintoto obliquo.}$$

❧ Derivata prima:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2x+2}{x^2+2x-1} & \text{per} \quad x < -1-\sqrt{2} \ \cup\ -1+\sqrt{2} < x < \dfrac{1}{2} \\ \nexists & \text{per} \quad x = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{2x-2}{x^2-2x+1} & \text{per} \quad \dfrac{1}{2} < x < 1 \ \cup\ x > 1 \end{cases}$$

infatti $\lim_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-} f'(x) = 12$ mentre $\lim_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^+} f'(x) = -4$.

❧ Eventuali estremanti:

- ❖ $f'(x) < 0$ per $x < -1-\sqrt{2}$ e per $\dfrac{1}{2} < x < 1$;
- ❖ $f'(x) > 0$ per $-1+\sqrt{2} < x < \dfrac{1}{2}$ e per $x > 1$.

Pertanto

- ❖ f è decrescente per $x < -1-\sqrt{2}$ e per $\dfrac{1}{2} < x < 1$;
- ❖ f è crescente per $-1+\sqrt{2} < x < \dfrac{1}{2}$ e per $x > 1$.

Ne segue che $x = \dfrac{1}{2}$ è punto di massimo relativo.

❧ Derivata seconda:

$$f''(x) = \begin{cases} -2\,\dfrac{x^2+3+2x}{\left(x^2-1+2x\right)^2} & \text{per} \quad x < -1-\sqrt{2} \ \cup\ -1+\sqrt{2} < x < \dfrac{1}{2} \\ -2\,\dfrac{1}{\left(x^2-2x+1\right)} & \text{per} \quad \dfrac{1}{2} < x < 1 \ \cup\ x > 1 \end{cases}$$

❧ Verso della concavità ed eventuali punti di flesso:

- ❖ $f''(x) < 0$ per ogni x in cui è definita.

Pertanto

- ❖ f è concava su ogni intervallo su cui è definita.

❧ Diagramma qualitativo di f: vedi fig. 30.2

$\boxed{\text{VE}}$ Può essere utile osservare che

$$f(x) = \begin{cases} \ln\left(x^2+x\right) - 4\ln(-x) & \text{per } x < 0 \\ \ln\left(x^2-x\right) - 4\ln x & \text{per } x > 0 \end{cases}$$

e $f(x) = f(-x)$ per ogni x dunque f è una funzione PARI.

❧ Insieme di definizione: $x < -1 \quad \cup \quad x > 1$.

❧ Limiti agli estremi dell'insieme di definizione:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to-\infty} \ln\left(x^2+x\right) - 4\ln(-x) &= -\infty \\ \lim_{x\to-1^-} \ln\left(x^2+x\right) - 4\ln(-x) &= -\infty \\ \lim_{x\to1^+} \ln\left(x^2-x\right) - 4\ln x &= -\infty \\ \lim_{x\to+\infty} \ln\left(x^2-x\right) - 4\ln x &= -\infty \end{aligned}$$

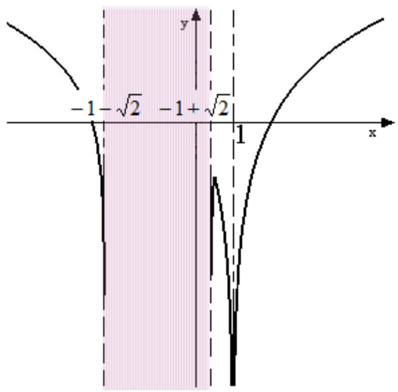


Figura 30.2. $f(x) = \log(x^2 - |2x - 1|)$

- Presenza di eventuali asintoti:
  - nessun asintoto orizzontale;
  - $x = \pm 1$ asintoti verticali;
  - ricerca eventuali asintoti obliqui:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \text{nessun asintoto obliquo.}$$

- Derivata prima:

$$f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{2\,x+3}{x\,(x+1)} & \text{per} \quad x < -1 \\ -\dfrac{2\,x-3}{x\,(x-1)} & \text{per} \quad x > 1 \end{cases}$$

- Eventuali estremanti:
  - $f'(x) < 0$ per $x < -\frac{3}{2} \ \vee \ x > \frac{3}{2}$;
  - $f'(x) = 0$ per $x = \pm\frac{3}{2}$;
  - $f'(x) > 0$ per $-\frac{3}{2} < x < -1 \ \vee \ 1 < x < \frac{3}{2}$.

  Pertanto
  - f è decrescente per $x < -\frac{3}{2}$ e per $x > \frac{3}{2}$;
  - f è crescente per $-\frac{3}{2} < x < -1$ e per $1 < x < \frac{3}{2}$.
  - $x = \pm\frac{3}{2}$ sono punti di massimo assoluto.
- Derivata seconda:

$$f''(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2+6x+3}{x^2\,(x+1)^2} & \text{per} \quad x < -1 \\ \dfrac{2x^2-6x+3}{x^2\,(x-1)^2} & \text{per} \quad x > 1 \end{cases}$$

- Verso della concavità ed eventuali punti di flesso:
  - $f''(x) < 0$ per $-\frac{3+\sqrt{3}}{2} < x < -1 \quad \cup \quad 1 < x < \frac{3+\sqrt{3}}{2}$;
  - $f''(x) = 0$ per $x = \pm\frac{3+\sqrt{3}}{2}$;
  - $f''(x) > 0$ per $x < -\frac{3+\sqrt{3}}{2} \quad \cup \quad x > \frac{3+\sqrt{3}}{2}$.

Pertanto

- ❖ f è concava per $-\dfrac{3+\sqrt{3}}{2} < x < -1$ e per $1 < x < \dfrac{3+\sqrt{3}}{2}$;
- ❖ f è convessa per $x < -\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}$ e per $x > \dfrac{3+\sqrt{3}}{2}$.
- ❖ $x = \pm\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}$ sono punti di flesso.

❧ Diagramma qualitativo di f: vedi fig. 30.3

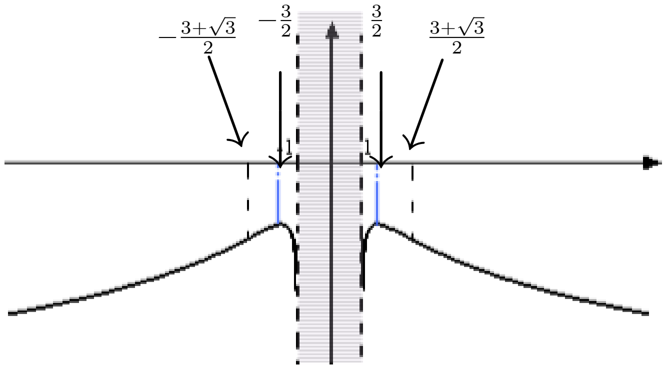


Figura 30.3. $f(x) = \log(x^2 - |x|) - \log(x^4)$

TEMA 31

Prima prova in itinere a.a. 2004/05
10 gennaio 2005

$\boxed{\text{I}}$ e $\boxed{\text{II}}$ indicano rispettivamente il tema numero 1 e il tema numero 2. Gli esercizi 1, 2, 3 nella pagina successiva, 6 nella pagina 156 e 7 nella pagina 156 sono leggere varianti di esercizi presenti nella prova scritta del 10 gennaio 2005, pertanto se ne riporta il solo risultato.

Esercizio 31.1

$\boxed{\text{I}}$ Ho 200 litri di una miscela ottenuta diluendo uno sciroppo con acqua. Se aggiungessi a questa miscela 2 litri di acqua, la percentuale di acqua nella nuova miscela che otterrei salirebbe dello 0,5 %. Con quanti litri di sciroppo è stata ottenuta la miscela?

$\boxed{\text{II}}$ Ho 200 litri di una miscela ottenuta diluendo uno sciroppo con acqua. Se aggiungessi a questa miscela 8 litri di acqua, la percentuale di acqua nella nuova miscela che otterrei salirebbe del 2 %. Con quanti litri di sciroppo è stata ottenuta la miscela?

✍ Soluzione

$\boxed{\text{I}}$ 101 $\boxed{\text{II}}$ 104

Esercizio 31.2

$\boxed{\text{I}}$ Nel piano dotato di un riferimento cartesiano ortogonale Oxy, si determini l'equazione della circonferenza γ soddisfacente le seguenti condizioni:

a) il centro di γ sta nel primo quadrante;

b) γ passa per l'origine O degli assi;

c) detti A e B i punti di intersezione di γ rispettivamente con l'asse delle ascisse e con l'asse delle ordinate, l'angolo BAO misura $60°$ e l'area del triangolo AOB vale $\sqrt{3}$.

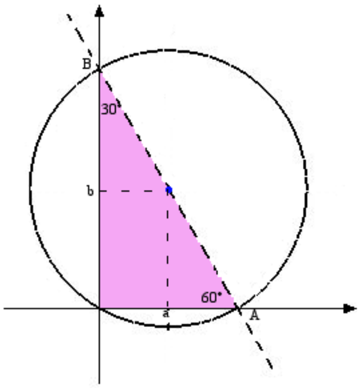
$\boxed{\text{II}}$ Nel piano dotato di un riferimento cartesiano ortogonale Oxy, si determini l'equazione della circonferenza γ soddisfacente le seguenti condizioni:

a) il centro di γ sta nel secondo quadrante;

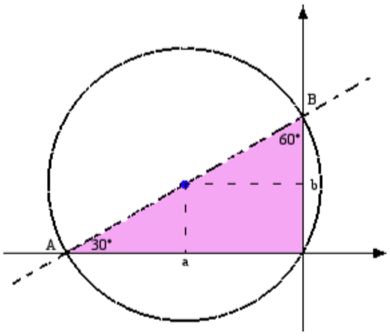
b) γ passa per l'origine O degli assi;

c) detti A e B i punti di intersezione di γ rispettivamente con l'asse delle ascisse e con l'asse delle ordinate, l'angolo BAO misura $30°$ e l'area del triangolo AOB vale $4\sqrt{3}$.

✍ Soluzione



$\boxed{\mathrm{I}}$ $x^2 + y^2 - \sqrt{2}x - \sqrt{6}y = 0$



$\boxed{\mathrm{II}}$ $x^2 + y^2 + 2\sqrt{6}x - 2\sqrt{2}y = 0$

Esercizio 31.3

$\boxed{\mathrm{I}}$ Quanti sono gli anagrammi (a due a due diversi fra loro) della parola "STORICA" che non iniziano con la lettera "S"? E quelli della parola "STORICI" che non iniziano con la lettera "T"?

$\boxed{\mathrm{II}}$ Quanti sono gli anagrammi (a due a due diversi fra loro) della parola "PROVATI" che non iniziano con la lettera "R"? E quelli della parola "TROVATI" che non iniziano con la lettera "A"?

✍ Soluzione

$\boxed{\mathrm{I}}$

STORICA 4 320

STORICI 2 160

$\boxed{\mathrm{II}}$

PROVATI 4 320

TROVATI 2 160

Esercizio 31.4

$\boxed{\mathrm{I}}$ Sia S il sottoinsieme di $\mathbb{R}$ così definito:

$$S = [-1, 0) \cup \left[\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right] .$$

Determinare estremo inferiore ed estremo superiore, specificando se siano anche rispettivamente minimo e massimo, di ciascuno dei seguenti insiemi:

$A = \{\, x + y \mid x, y \in S \,\}$, $B = \{\sqrt{|x|y^2} \mid x, y \in S\}$,

$C = \left\{ \cos\frac{x}{y} \;\middle|\; x, y \in S \right\}$, $D = \{\, y - x^2 y \mid x, y \in S \,\}$,

$E = \left\{ \arctan\frac{x^2}{y} \;\middle|\; x, y \in S \right\}$.

II Sia S il sottoinsieme di $\mathbb{R}$ così definito:

$$S = \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right] \cup (0,1] \ .$$

Determinare estremo inferiore ed estremo superiore, specificando se siano anche rispettivamente minimo e massimo, di ciascuno dei seguenti insiemi:

$A = \{\, x - y \ \mid \ x, y \in S \,\}$, $\quad B = \{\sqrt{x^2|y|} \mid x, y \in S\}$,

$C = \left\{ \sin\frac{x}{y} \ \middle| \ x, y \in S \right\}$, $\quad D = \{\, y - x^4 y \ \mid \ x, y \in S \,\}$,

$E = \left\{ \arctan\frac{x^4}{y} \ \middle| \ x, y \in S \right\}$.

✍ Soluzione

I

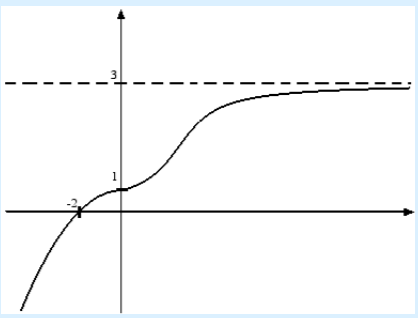
$\inf A = -1 - 1 = -2$	è Min ;	$\sup A = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$	è Max ;
$\inf B = 0$	non è Min ;	$\sup B = \sqrt{1 \cdot (-1)^2} = 1$	è Max ;
$\inf C = \cos\left(\frac{-1}{-1/\pi}\right) = -1$	è Min ;	$\sup C = \cos\left(\frac{-1}{-1/2\pi}\right) = 1$	è Max ;
$\inf D = -1 - 0^2 \cdot (-1) = -1$	non è Min ;	$\sup D = \frac{1}{\sqrt{2}} - 0^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$	non è Max ;
$\inf E = \lim_{k\to\infty} \arctan\frac{(-1)^2}{-1/k} = -\frac{\pi}{2}$	non è Min ;	$\sup E = \arctan\frac{(-1)^2}{1/\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3}$	è Max .

II

$\inf A = -\frac{1}{\sqrt{2}} - 1$	è Min ;	$\sup A = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$	è Max ;
$\inf B = 0$	non è Min ;	$\sup B = \sqrt{1^2 \cdot 1} = 1$	è Max ;
$\inf C = \sin\frac{1}{2/(3\pi)} = -1$	è Min ;	$\sup C = \sin\frac{1}{2/\pi} = 1$	è Max ;
$\inf D = -\frac{1}{\sqrt{2}} - 0^4 \cdot \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$	non è Min ;	$\sup D = 1 - 0^4 \cdot 1 = 1$	non è Max ;
$\inf E = \arctan\frac{1^4}{-1/\sqrt{3}} = -\frac{\pi}{3}$	è Min ;	$\sup E = \lim_{k\to\infty} \arctan\frac{1^4}{1/k} = +\frac{\pi}{2}$	non è Max .

Esercizio 31.5

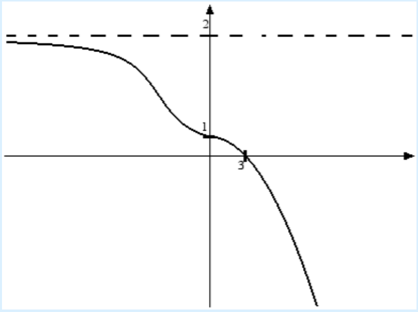
I Quello in figura è il diagramma della funzione $y = f(x)$.



Tracciare i diagrammi delle seguenti funzioni:

$$\begin{array}{lrcl} \text{❶} & g(x) & = & f\left(\dfrac{x}{3}\right), \\ \text{❷} & h(x) & = & f(x-2), \\ \text{❸} & k(x) & = & |f(x)|, \\ \text{❹} & z(x) & = & 1-f(|\,x\,|), \\ \text{❺} & x & = & f^{-1}(y). \end{array}$$

II Quello in figura è il diagramma della funzione $y = f(x)$.



Tracciare i diagrammi delle seguenti funzioni:

$$\begin{array}{lrcl} \text{❶} & g(x) & = & f\left(\dfrac{x}{2}\right), \\ \text{❷} & h(x) & = & f(x+3), \\ \text{❸} & k(x) & = & |f(x)|, \\ \text{❹} & z(x) & = & 1-f(|\,x\,|), \\ \text{❺} & x & = & f^{-1}(y). \end{array}$$

✍ Soluzione

Vedi figg. 31.1 a fronte e 31.2 nella pagina 158.

Esercizio 31.6

I Risolvere la disequazione $\sqrt{x+1} + \sqrt{2x+6} \;<\; 3$.

II Risolvere la disequazione $\sqrt{x+3} + \sqrt{2x+5} \;<\; 3$.

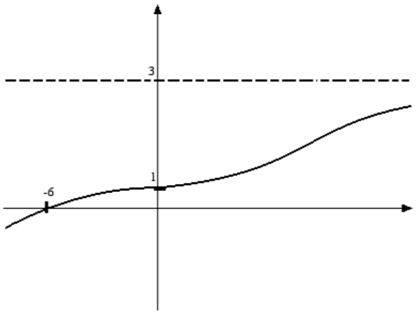
✍ Soluzione

I $-1 \leqslant x < 22 - 6\sqrt{14}$ **II** $-\dfrac{5}{2} \leqslant x < 25 - 6\sqrt{19}$

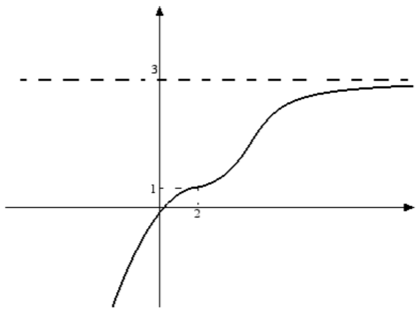
Esercizio 31.7

I Calcolare

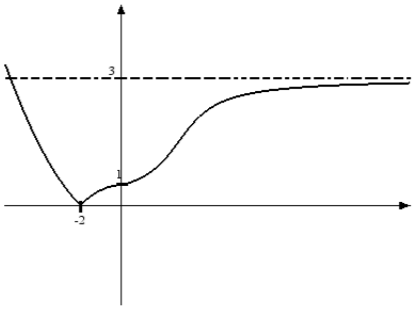
$$A = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3(2-5n^2)-n^4}{3n^5-n^4-6}, \quad B = \lim_{n\to\infty} \left(\cos\frac{1}{\sqrt{3n+1}}\right)^n, \quad C = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n}\,.$$



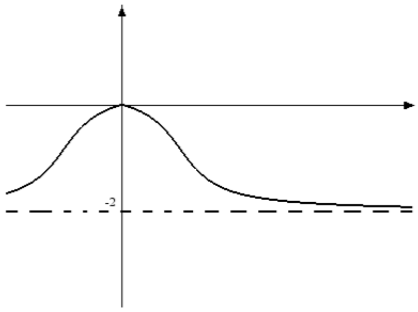
(a) ❶ $g(x)$



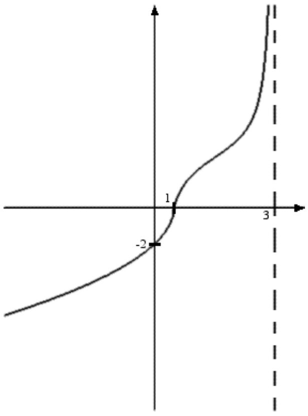
(b) ❷ $h(x)$



(c) ❸ $k(x)$



(d) ❹ $z(x)$



(e) ❺ $f^{-1}(y)$

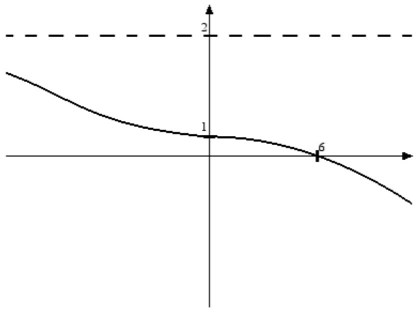
Figura 31.1. $\boxed{I}$

$\boxed{\text{II}}$ Calcolare

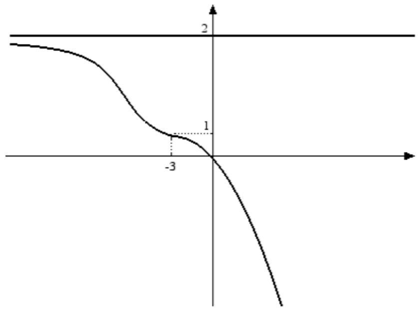
$$A = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3(5-2n^6)-n^8}{7n^9-n^8-6}, \quad B = \lim_{n\to\infty} \left(\cos\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)^{2n}, \quad C = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n-\sqrt{2n}}-\sqrt{n}\,.$$

✍ Soluzione

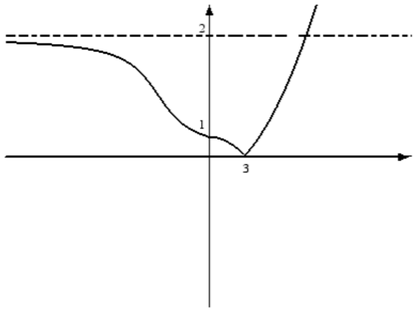
$\boxed{\text{I}}$ A) $-\dfrac{5}{3}$ B) $e^{-1/6}$ C) $\dfrac{1}{2}$ $\boxed{\text{II}}$ A) $-\dfrac{2}{7}$ B) e^{-1} C) $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$



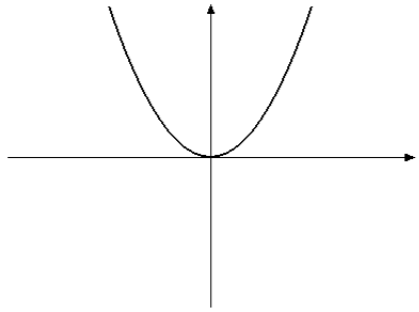
(a) ❶ $g(x)$



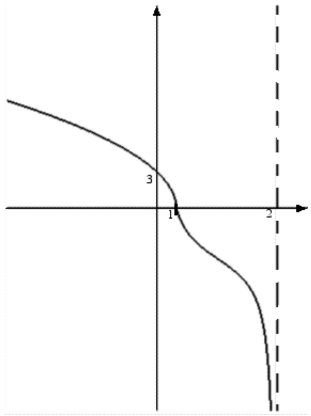
(b) ❷ $h(x)$



(c) ❸ $k(x)$



(d) ❹ $z(x)$



(e) ❺ $f^{-1}(y)$

Figura 31.2. $\boxed{II}$

TEMA 32

Prova scritta del 15 febbraio 2005

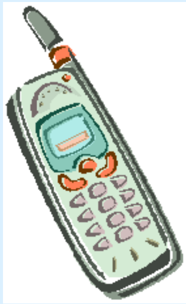
Esercizio 32.1

Una società di telefonia mobile propone i seguenti contratti:

Formula A: costo fisso iniziale di 20 € , con il quale si hanno 2 ore di telefonate prepagate, e 0,50 € per ogni minuto di utilizzo successivo;

Formula B: costo fisso iniziale di 26 € , con il quale si hanno 90 minuti di telefonate prepagate, e 0,30 € per ogni minuto di utilizzo successivo.

A partire da quanti minuti di utilizzo la formula ***B*** è più conveniente della formula ***A***?



✍ Soluzione

Se poniamo sull'asse delle ascisse il tempo in minuti e sull'asse delle ordinate il costo in euro abbiamo la seguente situazione:

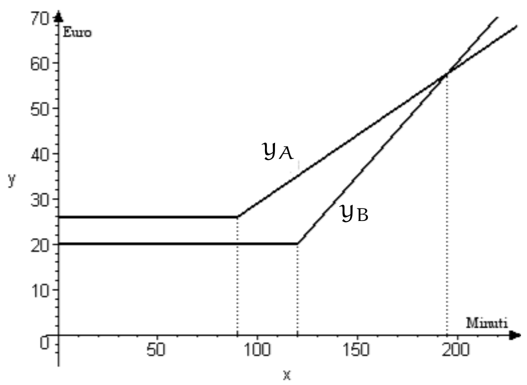


Figura 32.1. y_A *formula A;* y_B *formula B*

dove le due formule sono descritte dalle due curve

$$y_A = \begin{cases} 20 & 0 \leqslant x \leqslant 120 \\ 0.5x - 40 & x \geqslant 120 \end{cases} \qquad y_B = \begin{cases} 26 & 0 \leqslant x \leqslant 90 \\ 0.3x - 1 & x \geqslant 90 \end{cases}$$

$$20 + \frac{(x-120)\ \cdot\ 1}{2} = 26 + \frac{(x-90)\ \cdot\ 3}{10} \qquad \Rightarrow \qquad x = 195\ .$$

Poiché $y_a = y_B$ per $x = 195$ minuti, a partire dal 196-esimo minuto la formula **B** diviene più conveniente della formula **A**.

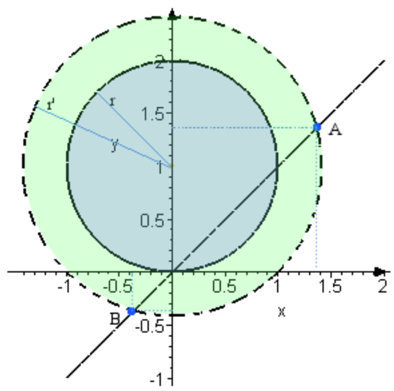
Esercizio 32.2

Nel piano dotato di un riferimento cartesiano ortogonale Oxy, sia γ la circonferenza di equazione

$$x^2 + y^2 - 2y = 0 .$$

Determinare i punti P della bisettrice del I e del III quadrante per i quali è soddisfatta la seguente condizione: *le due rette passanti per* P *e tangenti a* γ *sono fra loro perpendicolari.*

✍ Soluzione



Il luogo dei punti che vedono un cerchio γ di raggio r sotto un angolo retto è la circonferenza γ' con lo stesso centro del cerchio γ e raggio $r' = r\sqrt{2}$. La circonferenza γ ha centro in (0,1) e raggio $r = 1$ pertanto γ' ha equazione

$$(x-0)^2 + (y-1)^2 = 2$$

Di questi punti consideriamo poi solo quelli che appartengono alla bisettrice del I e del III quadrante, ossia

$$\begin{cases} x^2 + (y-1)^2 = 2 \\ y = x \end{cases} \quad \Rightarrow \quad A = \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}, \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right), \quad B = \left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}, \frac{1-\sqrt{3}}{2}\right).$$

Esercizio 32.3

Determinare, se esiste, il termine indipendente da y nello sviluppo del binomio $\left(x^2y^3 - \dfrac{4}{y^5}\right)^8$.

✍ Soluzione

Dalla formula di Newton

$$\left(x^2y^3 - \frac{4}{y^5}\right)^8 = \sum_{k=0}^{8}\binom{8}{k}(x^2y^3)^k\,(-4)^{8-k}\,y^{-5(8-k)} = \sum_{k=0}^{8}\binom{8}{k}(-4)^{8-k}\,x^{2k}\,y^{3k-5(8-k)}$$

deduciamo che il termine indipendente da y si ottiene quando $3k - 5(8-k) = 0$ cioè per $k = 5$ ed è

$$\binom{8}{5}\cdot(-4)^{8-5}\cdot x^{2\,\cdot\,5} = \frac{8!}{5!(8-5)!}(-4)^3\cdot x^{10} = 56\cdot(-64)\cdot x^{10} = -3\,584\,x^{10} .$$

Esercizio 32.4

Dopo aver determinato il dominio della funzione

$$f(x) = \sqrt[4]{x^4 + 3x^3}$$

si determinino le equazioni degli eventuali asintoti al suo diagramma.

✍ Soluzione

- Dominio: $x^4 + 3x^3 \geqslant 0 \qquad \Rightarrow \qquad x \leqslant -3 \lor x \geqslant 0$
- Ricerca eventuali asintoti
  - asintoti verticali: $\quad$ f è continua e in particolare
$$\lim_{x\to -3} \sqrt[4]{x^4+3x^3} = f(-3) = 0$$
$$\lim_{x\to 0} \sqrt[4]{x^4+3x^3} = f(0) = 0$$
    pertanto non esistono asintoti verticali ;
  - asintoti orizzontali:
$$\lim_{x\to -\infty} \sqrt[4]{x^4+3x^3} = \infty$$
$$\lim_{x\to \infty} \sqrt[4]{x^4+3x^3} = \infty$$
    pertanto non esistono asintoti orizzontali ;
  - asintoti obliqui:
$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt[4]{x^4+3x^3}}{x} &= \lim_{x\to-\infty} \frac{-x\sqrt[4]{1+\frac{3}{x}}}{x} &&= -1 &&=: m_1 \\
\lim_{x\to-\infty} \sqrt[4]{x^4+3x^3}+x &= \lim_{x\to-\infty} -\frac{\left(1+\frac{3}{x}\right)^{1/4}-1}{\frac{3}{x}}\,3 &&= -\frac{3}{4} &&\overset{(G)}{=:} q_1 \\
\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[4]{x^4+3x^3}}{x} &= \lim_{x\to-\infty} \frac{x\sqrt[4]{1+\frac{3}{x}}}{x} &&= 1 &&=: m_2 \\
\lim_{x\to\infty} \sqrt[4]{x^4+3x^3}-x &= \lim_{x\to-\infty} \frac{\left(1+\frac{3}{x}\right)^{1/4}-1}{\frac{3}{x}}\,3 &&= \frac{3}{4} &&\overset{(G)}{=:} q_2
\end{aligned}$$
    pertanto
    $y = -x - \frac{3}{4}$ è asintoto obliquo per $x \to -\infty$ e $y = x + \frac{3}{4}$ è asintoto obliquo per $x \to \infty$.

Esercizio 32.5

Studiare la funzione f così definita: $f(x) = \dfrac{1}{x^2-3x}$.

✍ Soluzione

- Insieme di definizione: $\quad x \neq 0$ e $x \neq 3$.
- Limiti agli estremi dell'insieme di definizione:
$$\lim_{x\to\mp\infty} \frac{1}{x^2-3x} = 0^+ \qquad \lim_{x\to 0^\mp} \frac{1}{x^2-3x} = \pm\infty \qquad \lim_{x\to 3^\mp} \frac{1}{x^2-3x} = \mp\infty$$
- Equazioni degli eventuali asintoti:
  - $x = 0$ ed $x = 3$ sono asintoti verticali;
  - $y = 0$ è asintoto orizzontale per $x \to \pm\infty$.
- Derivata prima: $f'(x) = -\dfrac{2x-3}{(x^2-3x)^2}$

- Eventuali estremanti:
  - $f'(x) < 0$ per $\dfrac{3}{2} < x < 3$ e per $x > 3$;
  - $f'(x) = 0$ per $x = \dfrac{3}{2}$;
  - $f'(x) > 0$ per $x < 0$ e per $0 < x < \dfrac{3}{2}$.

  Pertanto
  - f è decrescente per $\dfrac{3}{2} < x < 3$ e per $x > 3$;
  - f è crescente per $x < 0$ e per $0 < x < \dfrac{3}{2}$.
  - $x = \dfrac{3}{2}$ è punto di massimo relativo. Ovviamente $f(3/2) < 0$. $(f(3/2) = -4/9)$.

x	$-\infty$		0		$3/2$		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\Vert$	$+$		$-$	$\Vert$	$-$	
$f(x)$			$+\infty$				$+\infty$		
		$\nearrow$						$\searrow$	
	0^+				$-4/9$				0^+
				$\nearrow$		$\searrow$			
			$-\infty$				$-\infty$		

- Derivata seconda: $f''(x) = 6\,\dfrac{x^2 - 3x + 3}{x^3\,(x-3)^3}$
- Verso della concavità:
  - $f''(x) < 0$ per $0 < x < 3$;
  - $f''(x) > 0$ per $x < 0$ e per $x > 3$.

  Pertanto
  - f è concava per $0 < x < 3$;
  - f è convessa per $x < 0$ e per $x > 3$.
  - non ci sono punti di flesso.
- Diagramma qualitativo di $f(x)$: vedi fig. 32.2

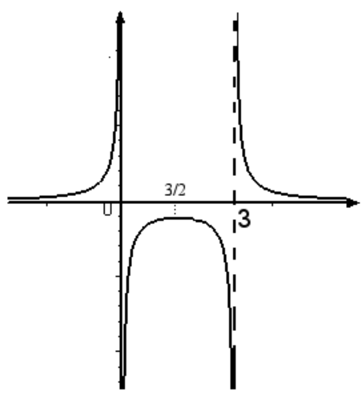


Figura 32.2. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 3x}$

Esercizio 32.6

Sia f la funzione di cui all'esercizio 5 nella pagina 161. Individuare una retta verticale rispetto alla quale il diagramma f sia simmetrico, dimostrando esplicitamente la sussistenza di tale simmetria (cioè verificando che esiste un numero α tale che la funzione $g(x) = f(x - \alpha)$ sia una funzione pari).

✍ Soluzione

La figura 32.2 a fronte suggerisce la simmetria del diagramma di f rispetto alla retta $x = \frac{3}{2}$. In effetti la funzione g così definita:

$$g(x) = f\left(x + \frac{3}{2}\right) = \frac{1}{x^2 - \frac{9}{4}}$$

è pari, per cui $\alpha = -\frac{3}{2}$.

Esercizio 32.7

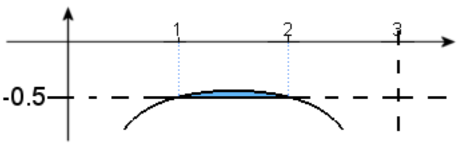
Sia f la funzione di cui all'esercizio 5 nella pagina 161. Dopo aver rappresentato graficamente la regione di piano S così definita

$$S := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; -\frac{1}{2} \leqslant y \leqslant f(x) < 0 \right\},$$

determinarne l'area.

✍ Soluzione

❦ Regione S:



$$f(x) = -\frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x \in \{1, 2\}.$$

❦ Sull'intervallo $(0, 3)$ si ha

$$\int \frac{1}{x^2 - 3x}\, dx = -\int \frac{1}{3\,x}\, dx + \int \frac{1}{3\,(x-3)}\, dx = \frac{1}{3} \ln \frac{|x-3|}{x} + k,\ k \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Dunque Area } S = \int_1^2 \left(f(x) + \frac{1}{2}\right) dx = \int_1^2 \left(\frac{1}{x^2 - 3x} + \frac{1}{2}\right) dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \log \frac{3}{4}.$$

TEMA 33

Seconda prova pre-esame a.a. 2004/05
5 aprile 2005

Esercizio 33.1

Determinare le equazioni degli asintoti al diagramma della funzione $f(x) = \dfrac{x+5}{x}\sqrt{x^2+3x}$.

✍ Soluzione

Insieme di definizione: $\begin{cases} x \neq 0 \\ x^2 + 3x \geqslant 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x \leqslant 3 \ \vee \ x > 0;$

Limiti:

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} \quad & f(x) && = && -\infty, \\
\lim_{x\to-\infty} \quad & \frac{f(x)}{x} && = && -1 =: m_1, \\
\lim_{x\to-\infty} \quad & f(x) + x && \overset{t:=1/x}{=\!=\!=} && \lim_{t\to 0} -\frac{(1+5t)\sqrt{1+3t}-1}{t} = \\
& && = && \lim_{t\to 0} -\frac{[1+(13t+55t^2+75t^3)]^{1/2}-1}{13t+55t^2+75t^3} \cdot \frac{13t+55t^2+75t^3}{t} \overset{(G)}{=\!=} -\frac{1}{2}\cdot 13 =: q_1; \\
\lim_{x\to-3^-} \quad & f(x) && = && f(-3) = 0; \\
\lim_{x\to 0^+} \quad & f(x) && = && +\infty; \\
\lim_{x\to+\infty} \quad & f(x) && = && +\infty, \\
\lim_{x\to+\infty} \quad & \frac{f(x)}{x} && = && 1 =: m_2, \\
\lim_{x\to-\infty} \quad & f(x) - x && \overset{t:=1/x}{=\!=\!=} && \lim_{t\to 0} \frac{(1+5t)\sqrt{1+3t}-1}{t} = \\
& && = && \lim_{t\to 0} \frac{[1+(13t+55t^2+75t^3)]^{1/2}-1}{13t+55t^2+75t^3} \cdot \frac{13t+55t^2+75t^3}{t} \overset{(G)}{=\!=} \frac{1}{2}\cdot 13 =: q_2.
\end{aligned}
$$

Pertanto:

- ❦ $x = 0$ è asintoto verticale ,
- ❦ $y = -x - 13/2$ è asintoto obliquo per $x \to -\infty$,

- $y = x + 13/2$ è asintoto obliquo per $x \to +\infty$.

Esercizio 33.2

Stabilire quante soluzioni ha l'equazione $\sqrt[3]{x} = x + \dfrac{2}{\sqrt{27}}$.

Soluzione

Ponendo $t := \sqrt[3]{x}$, il problema equivale a cercare il numero di intersezioni delle curve

$$\begin{cases} f(t) := t - t^3 \\ g(t) := \dfrac{2}{\sqrt{27}} \end{cases}$$

Infatti, a ogni valore di x corrisponde uno e un solo valore di t e viceversa.
A tal fine facciamo un breve studio della funzione $f(t)$:

- Segno di $f(t)$:

t	$-\infty$		-1		0		$+1$		$+\infty$
$f(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

- Limiti: $\lim_{t \to -\infty} f(t) = +\infty$, $\lim_{t \to +\infty} f(t) = -\infty$.

- Crescenza e decrescenza di $f(t)$:

t	$-\infty$		$-1/\sqrt{3}$		$1/\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(t)$		$-$		$+$		$-$	
$f(t)$	$+\infty$	$\searrow$	$-2/\sqrt{27}$	$\nearrow$	$2/\sqrt{27}$	$\searrow$	$-\infty$

Pertanto le due curve si intersecano in due punti (vedi fig. 33.1).

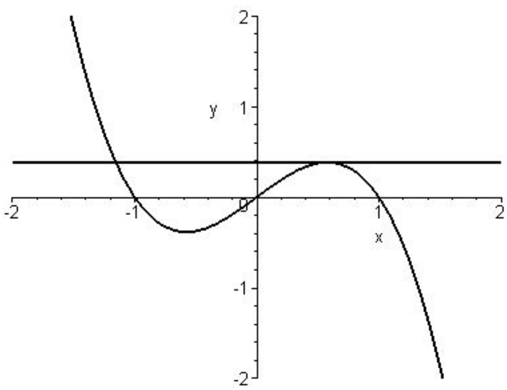


Figura 33.1. $f(t) = t - t^3$ *e* $g(t) = \dfrac{2}{\sqrt{27}}$

Esercizio 33.3

Studiare la funzione f così definita: $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x-1}}$.

✍ Soluzione

❦ Insieme di definizione: $(1, +\infty)$.

❦ Limiti agli estremi dell'insieme di definizione:

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

❦ Equazioni degli eventuali asintoti:

- ❧ $x = 1$ è asintoto verticale,
- ❧ $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ dunque non c'è asintoto obliquo.

❦ Derivata prima: $f'(x) = \dfrac{\sqrt{x-1} - x\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}}{x-1} = \dfrac{x-2}{2\ (x-1)^{3/2}}$

❦ Eventuali estremanti: $x \ = \ 2$ punto di minimo assoluto e $f(2) = 2$.

x	1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(2) = 2$	$\nearrow$	$+\infty$

❦ Derivata seconda: $f''(x) = \dfrac{2 - \dfrac{x}{2}}{2\ (x-1)^{5/2}} = \dfrac{1 - \dfrac{x}{4}}{(x-1)^{5/2}}$

❦ Verso della concavità ed eventuali punti di flesso:

- ❧ $f''(x) \ = \ 0$ per $x \ = \ 4$,
- ❧ $f''(x) \ > \ 0$ per $1 \ < \ x \ < \ 4$,
- ❧ $f''(x) \ < \ 0$ per $x \ > \ 4$.

Perciò f è

- ❧ convessa su $(1, 4]$,
- ❧ concava su $[4, +\infty)$,
- ❧ dunque $x \ = \ 4$ è punto di flesso discendente.

❦ Diagramma qualitativo di f: vedi fig. 33.2 nella pagina successiva

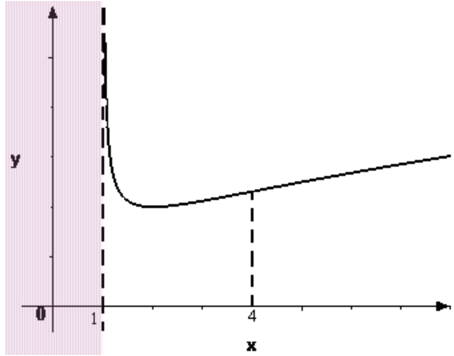


Figura 33.2. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x-1}}$

Esercizio 33.4

Utilizzando i risultati ottenuti all'esercizio 3 nella pagina precedente,

❶ tracciare un diagramma qualitativo della funzione $g(x) = \dfrac{x}{\sqrt{|x|-1}}$;

❷ precisare quindi, al variare del parametro reale α, il numero delle soluzioni dell'equazione $g(x) = \alpha$.

✍ Soluzione

Osserviamo che

$$g(x) \;=\; \begin{cases} f(x) & \text{per} \quad x > 1 \\ -f(-x) & \text{per} \quad x < -1 \end{cases}$$

Pertanto la funzione è DISPARI e

❶ diagramma qualitativo della funzione $g(x)$: vedi fig. 33.3

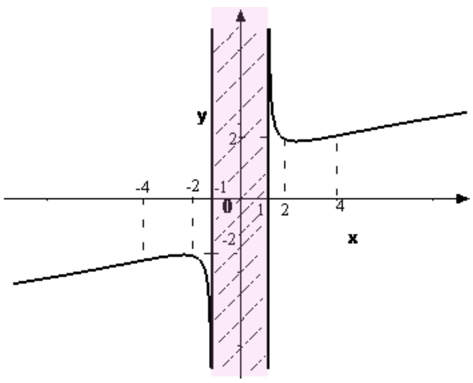


Figura 33.3. $g(x) = \dfrac{x}{\sqrt{|x|-1}}$

❷ numero di soluzioni dell'equazione $g(x) = \alpha$:

- per $|\alpha| < 2$ nessuna soluzione,
- per $\alpha = \pm 2$ una soluzione,
- per $|\alpha| > 2$ due soluzioni.

Esercizio 33.5

Determinare una primitiva su $\mathbb{R}$ della funzione $f(x) = e^x \sin x$.
Calcolare quindi la media integrale di f sull'intervallo $[0, \pi]$.

✍ Soluzione

Integriamo due volte per parti*

$$\int e^x \sin x \, dx \overset{PP1}{=\!=} e^x \sin x - \int e^x \cos x \, dx \overset{PP2}{=\!=} e^x \sin x - e^x \cos x + \int e^x \sin x \, dx$$

quindi

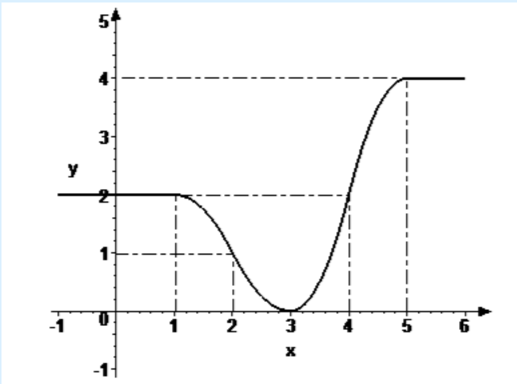
$$G(x) := \int e^x \sin x \, dx = \frac{e^x (\sin x - \cos x)}{2} + k, \qquad k \in \mathbb{R}.$$

$$I := \int_0^{\pi} e^x \sin x \, dx = G(\pi) - G(0) = \frac{e^{\pi} + 1}{2}.$$

La media integrale è pertanto $m := \dfrac{I}{\pi - 0} = \dfrac{e^{\pi}+1}{2\pi}$.

Esercizio 33.6

Sia $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile a tratti il cui diagramma è qualitativamente quello indicato in figura a lato.



① Tracciare un diagramma plausibile della sua derivata f'.

② Stabilire quindi, motivando la risposta, se l'equazione $f'(x) = 2$ ammette soluzioni.

✍ Soluzione

① Diagramma plausibile di f': vedi figura 33.4

---

*$\int h(x) g'(x) \, dx = h(x) g(x) - \int h'(x) g(x) \, dx$

$$PP1: \quad \begin{array}{lcl} h(x) = \sin x & \rightsquigarrow & h'(x) = \cos x \\ g(x) = \int g'(x) \, dx = e^x & \leftsquigarrow & g'(x) = e^x \end{array}$$

$$PP2: \quad \begin{array}{lcl} h(x) = \cos x & \rightsquigarrow & h'(x) = -\sin x \\ g(x) = \int g'(x) \, dx = e^x & \leftsquigarrow & g'(x) = e^x \end{array}$$

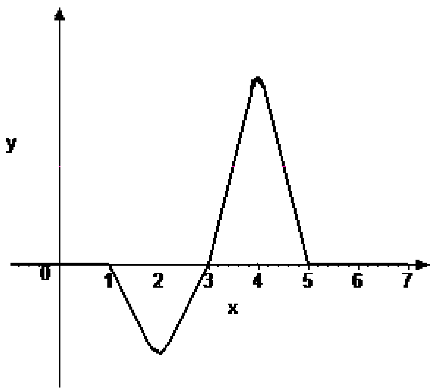


Figura 33.4. $f'(x)$

② Soluzioni di $f'(x) = 2$:
possiamo analizzare direttamente il grafico di f, oppure applicare il teorema di Lagrange.

1 modo $x = 4$ è punto di flesso per f, pertanto è di massimo (assoluto) per la funzione f'. Ci chiediamo ora se $f'(4)$ è maggiore o minore di 2. Poiché f sale di 4 con pendenza media < 2 vicino a 3 e a 5, allora $f'(4) > 2$ e $f'(x) = 2$ ammette 2 soluzioni.

2 modo Applichiamo il teorema di Lagrange† separatamente in [3,4] e in [4,5]:

- in $(3, 4)$ esiste c_1 tale che $f'(c_1) = \dfrac{f(4) - f(3)}{4 - 3} = 2$
- in $(4, 5)$ esiste c_2 tale che $f'(c_2) = \dfrac{f(5) - f(4)}{5 - 4} = 2$

†Sia $f(x) : [a, b] \to \mathbb{R}$. Se
- f è continua in $[a, b]$
- f è derivabile in (a, b)

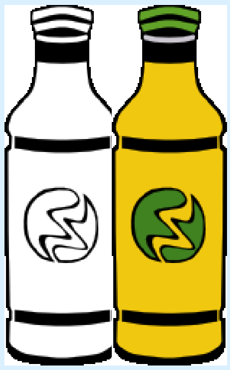
allora esiste $c \in (a, b)$ tale che $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

TEMA 34

Prova scritta del 12 aprile 2005

Esercizio 34.1

Due bottiglie uguali sono piene di una miscela di acqua e vino. Il rapporto tra il volume dell'acqua e quello del vino è 2:1 per una bottiglia e 4:1 per l'altra. Se versiamo il contenuto di entrambe le bottiglie in una sola bottiglia di capacità doppia, quale sarà il rapporto tra i volumi di acqua e vino in questa bottiglia?



✍ Soluzione

Su $(2+1)\cdot(4+1) = 15$ parti di liquido, in una bottiglia ve ne sono 10 di acqua e nell'altra 12. Allora, su 30 parti in totale, 22 sono di acqua e 8 di vino, per cui il rapporto è di $11 : 4$.

Esercizio 34.2

Risolvere la disequazione $\quad \log_4(\sqrt{x+1} - x^{1/3}) < 0.$

✍ Soluzione

① Condizioni d'esistenza:

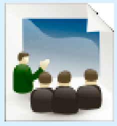
$$
\begin{aligned}
\sqrt{x+1} - \sqrt[3]{x} > 0 \quad & \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \sqrt[3]{x} < 0 \\ x+1 \geqslant 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} \sqrt[3]{x} \geqslant 0 \\ (x+1)^3 > \sqrt[3]{x^2} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow \quad -1 \leqslant x < 0 \quad \vee \quad \begin{cases} x \geqslant 0 \\ x^3 + 2x^2 + 3x + 1 > 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow \quad x \geqslant -1
\end{aligned}
$$

② Risoluzione (ricordando che $1+\sqrt[3]{x}\geqslant 0$):

$$\begin{aligned}\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{x}<1 \quad &\Rightarrow \quad x+1<(1+\sqrt[3]{x})^2 \;\Rightarrow x+1<1+2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}\;\Rightarrow\\ &\Rightarrow \quad x-2\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x^2}<0 \overset{t:=\sqrt[3]{x}}{\Longrightarrow} t\,(t^2-t-2)<0\;\Rightarrow\\ &\Rightarrow \quad t\,(t-2)\;(t+1)<0\;\Rightarrow 0<t<2\;\Rightarrow\\ &\Rightarrow \quad 0<x<8\end{aligned}$$

Esercizio 34.3

Una commissione di concorso è costituita da 5 membri, due dei quali devono essere professori di Fisica, due di Chimica e uno di Matematica. I professori di Fisica disponibili sono 10, quelli di Chimica 8 e quelli di Matematica 6.



① Se non vi sono altri vincoli, quante diverse commissioni si possono formare?

② Se due fra i professori di Fisica sono sposati fra loro e un professore di Matematica è loro figlio, e se non è ammessa la contemporanea presenza in commissione di commissari legati da relazioni di parentela e/o di affinità, a quante si riducono le possibili commissioni? (quelle appena descritte sono le uniche relazioni di parentela e/o di affinità sussistenti fra i possibili commissari).

✍ Soluzione

① $$\binom{10}{2}\cdot\binom{8}{2}\cdot 6 \quad = \quad 45\cdot 28\cdot 6 \quad = \quad 7\,560$$

② Le commissioni che non sono accettabili sono:

$$\binom{8}{2}\cdot 6 \;+\; 2\cdot 8\cdot\binom{8}{2} \quad = \quad 28\cdot 22 \quad = \quad 616$$

Pertanto restano

$$7560 \;-\; 616 \quad = \quad 6\,944 \text{ commissioni possibili.}$$

Esercizio 34.4

Utilizzando esclusivamente la definizione di derivata (cioè calcolando direttamente il limite del rapporto incrementale relativo al generico punto x), si determini la derivata della funzione $f(x)=\sqrt{3+x^2}$.

✍ Soluzione

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{3+(x+h)^2}-\sqrt{3+x^2}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{3+(x+h)^2-(3+x^2)}{h\cdot\left(\sqrt{3+(x+h)^2}+\sqrt{3+x^2}\right)} =\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{2xh+h^2}{h\cdot\left(\sqrt{3+(x+h)^2}+\sqrt{3+x^2}\right)} = \lim_{h\to 0}\frac{2x+h}{\sqrt{3+(x+h)^2}+\sqrt{3+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{3+x^2}}\end{aligned}$$

Esercizio 34.5

Studiare la funzione $f(x)$ così definita: $f(x)=\dfrac{(x^2-1)^2}{x^3}$.

✍ Soluzione

Può essere utile osservare che

$$f(x) = x - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^3}\,. \qquad (\star)$$

- Insieme di definizione ed eventuali simmetrie: $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$; f è DISPARI.
- Limiti agli estremi dell'insieme di definizione:
$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty \qquad\qquad \lim_{x\to 0^\pm} f(x) = \pm\infty$$
- Equazioni degli eventuali asintoti:
  - $x = 0$ è asintoto verticale,
  - non ci sono asintoti orizzontali,
  - eventuali asintoti obliqui:
$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 =: m \qquad\qquad \lim_{x\to\pm\infty} f(x) - x = 0 =: q$$
  quindi $y = x$ è asintoto obliquo per $x \to \pm\infty$ (avvalendosi dell'espressione $(\star)$ il risultato è immediato).
- Derivata prima: $f'(x) = 1 + \dfrac{2}{x^2} - \dfrac{3}{x^4} = \dfrac{(x^2-1)\cdot(x^2+3)}{x^4}$
- Eventuali estremanti:
  - $f'(x) < 0$ per $-1 < x < 0$ e per $0 < x < 1$;
  - $f'(x) = 0$ per $x = \pm 1$;
  - $f'(x) > 0$ per $x < -1$ e per $x > 1$.

  Pertanto
  - f è decrescente per $-1 < x < 0$ e per $0 < x < 1$;
  - f è crescente per $x < -1$ e per $x > 1$.
  - $x = -1$ è punto di massimo relativo,
  - $x = 1$ è punto di minimo relativo.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$-$	$\Vert$	$-$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(-1) = 0$	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	$f(1) = 0$	$\nearrow$	$+\infty$

- Derivata seconda: $f''(x) = -\dfrac{4}{x^3} + \dfrac{12}{x^5} = -4\dfrac{x^2-3}{x^5}$
- Verso della concavità ed eventuali punti di flesso:
  - $f''(x) < 0$ per $-\sqrt{3} < x < 0$ e per $0 < x < \sqrt{3}$;
  - $f''(x) > 0$ per $x < -\sqrt{3}$ e per $x > \sqrt{3}$.

  Pertanto
  - f è concava per $-\sqrt{3} < x < 0$ e per $0 < x < \sqrt{3}$;
  - f è convessa per $x < -\sqrt{3}$ e per $x > \sqrt{3}$.
  - $x = \pm\sqrt{3}$ sono punti di flesso.

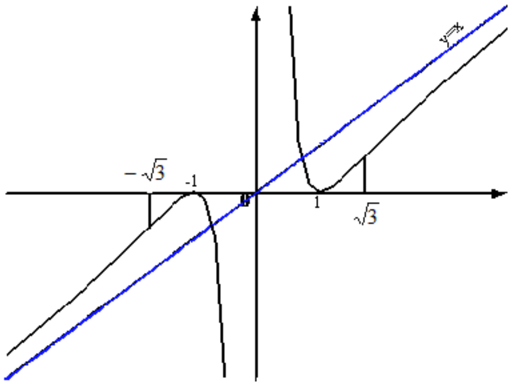


Figura 34.1. $f(x) = \dfrac{(x^2-1)^2}{x^3}$

❦ Diagramma qualitativo di f: vedi fig. 34.1.

Esercizio 34.6

Sia $f(x)$ la funzione di cui all'esercizio precedente. Al variare del parametro reale α, si precisi il numero delle soluzioni dell'equazione $f(x) = x + \alpha$.

✍ Soluzione

Cominciamo col determinare quando la retta $g(x) = x + \alpha$ è tangente alla curva. Ricordando che la derivata prima fornisce il coefficiente angolare della retta tangente, ci chiediamo quando $f'(x) = 1$:

$$f'(x) = 1 + \frac{2}{x^2} - \frac{3}{x^4} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2}{x^2} = \frac{3}{x^4} \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$$

Ora cerchiamo le soluzioni di

$$f\left(\pm\sqrt{\frac{3}{2}}\right) = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} + \alpha \qquad \Leftrightarrow \qquad \alpha = \mp\frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}\ .$$

In conclusione abbiamo:

1 soluzione per $|\alpha| > \dfrac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}$,

2 soluzioni per $\alpha = \pm\dfrac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}$ e per $\alpha = 0$,

3 soluzioni per $-\dfrac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} < \alpha < 0$ e per $0 < \alpha < \dfrac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}$.

Esercizio 34.7

Calcolare

$$\int_0^{\pi/4} \frac{x}{\cos^2 x}\, dx\ .$$

✍ Soluzione

Ricordiamo che

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\frac{d\ \tan x}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

quindi integrando per parti*

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/4} \frac{x}{\cos^2 x}\,dx &\overset{(P.P.)}{=\!=\!=} \left[\, x\ \tan x\,\right]_0^{\pi/4} - \int_0^{\pi/4} \tan x\ dx\ = \\ &= \left[\, x\ \tan x + \log|\cos x|\ \right]_0^{\pi/4} = \\ &= \frac{\pi}{4} + \log\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\end{aligned}$$

---

* $\int h(x)\,g'(x)\,dx = h(x)\,g(x) - \int h'(x)\,g(x)\,dx$

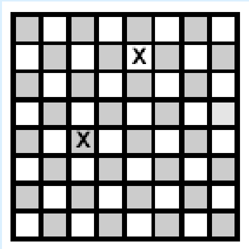
$$\begin{array}{lcl} h(x) = x & \rightsquigarrow & h'(x) = 1 \\ g(x) = \int g'(x)\,dx = \tan x & \leftsquigarrow & g'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} \end{array}$$

TEMA 35

Prova scritta del 28 giugno 2005

Esercizio 35.1

Su una scacchiera tradizionale 8×8, in quanti modi si può scegliere una coppia di caselle, una bianca e una nera, in modo che tali caselle non giacciano né sulla stessa riga né sulla stessa colonna?



✍ Soluzione

Possiamo scegliere una qualunque casella bianca (risp. nera) fra 32. Tale scelta fatta, possiamo scegliere fra 32-8 caselle nere (risp. bianche) compatibili. Pertanto $32 \cdot (32-8) = 32 \cdot 24 = 768$.

Esercizio 35.2

Nel piano dotato di un riferimento cartesiano ortogonale Oxy, si considerino la circonferenza γ di equazione $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$ e la retta di equazione $y = 3x$. Individuare, determinandone le coordinate, i punti P appartenenti alla retta r che godono della seguente proprietà: condotte da P le tangenti a γ e detti T e S i due punti di tangenza, il triangolo PST è equilatero.

✍ Soluzione

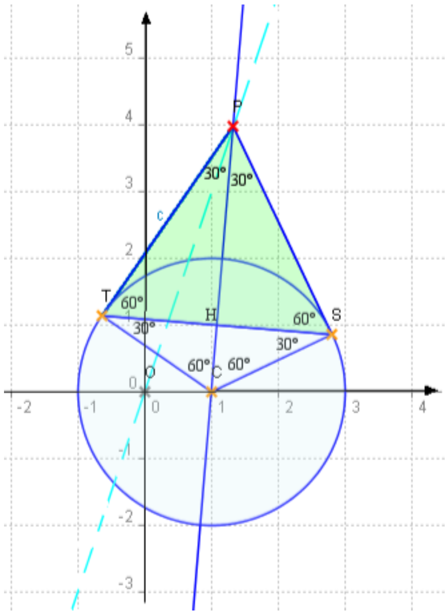
La circonferenza γ ha centro in $C = (1, 0)$ e raggio $r = 2$. Dalle figg. 35.1 nella pagina successiva, in cui sono indicate le due situazioni possibili con le misure degli angoli dedotte dai dati del problema, otteniamo che

$$\frac{\overline{PT}}{\overline{TC}} = \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3} \qquad \Rightarrow \qquad \overline{PT} = r\sqrt{3} = \sqrt{12}$$

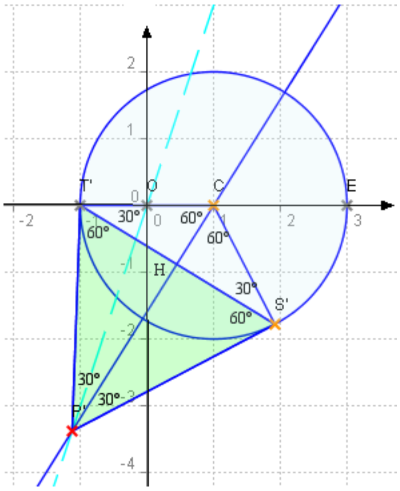
Imponiamo che il quadrato della distanza di $P = (x_P, 3x_P)$ dal centro C sia $\overline{PC}^2 = \overline{PT}^2 + \overline{TC}^2 = 4r^2 = 16$ e otteniamo

$$(x_P - 1)^2 + (3x_P - 0)^2 = 16 \qquad \Rightarrow \qquad (x_P)_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{151}}{10} .$$

Le ordinate dei punti sono il triplo delle ascisse.



(a) γ, P, T ed S



(b) γ, P$'$, T$'$ ed S$'$

Figura 35.1. *Esercizio 2 nella pagina precedente*

Esercizio 35.3

Risolvere la disequazione

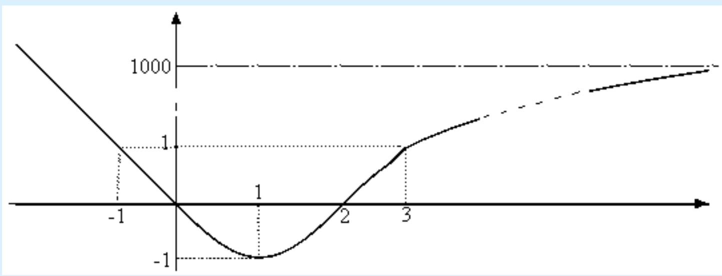
$$2^{(4^x)} < 4^{(2^x)}.$$

✍ Soluzione

$$2^{4^x} < 4^{2^x} \quad\Leftrightarrow\quad 2^{2^{2x}} < 2^{2\,\cdot\,2^x} \quad\Leftrightarrow\quad 2^{2x} < 2\cdot 2^x \quad\Leftrightarrow\quad 2^{2x} < 2^{x+1} \quad\Leftrightarrow\quad 2x < x+1 \quad\Leftrightarrow\quad x < 1.$$

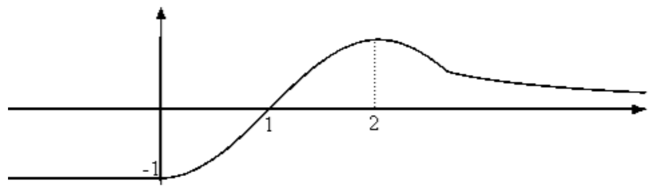
Esercizio 35.4

Quello mostrato in figura è il diagramma della funzione derivabile $y = f(x)$. Tracciare un diagramma plausibile per ciascuna delle funzioni $y' = f'(x)$ e $g(x) = \log_{10}|f(x)|$, precisando il dominio di quest'ultima.

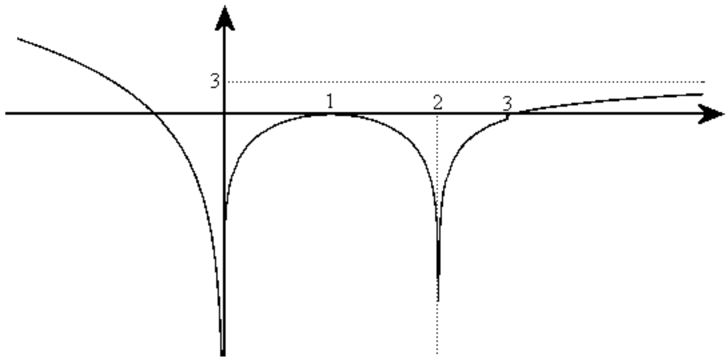


✍ Soluzione

Vedi fig. 35.2 a fronte.



(a) $y' = f'(x)$



(b) $g(x) = \log_{10} |f(x)|$; dominio $x \neq 0, x \neq 2$

Figura 35.2. *Eserrcizio 4 a fronte*

Esercizio 35.5

Studiare la funzione $f(x)$ così definita: $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - x}$.

✍ Soluzione

- Insieme di definizione: $x \in \mathbb{R}$
- Limiti agli estremi dell'insieme di definizione: $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$
- Equazioni degli eventuali asintoti:
  non esistono né asintoti verticali né asintoti orizzontali;
  poiché $\lim_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$ non esistono nemmeno asintoti obliqui.
- Derivata prima: $f'(x) = \dfrac{1}{3} \dfrac{2x - 1}{(x^2 - x)^{2/3}}$
  La derivata prima è definita solo per $x \neq 0$ e $x \neq 1$, in tali punti ne studiamo il limite:
  $\lim_{x \to 0^\pm} f'(x) = \lim_{x \to 1^\pm} f'(x) = \infty$
- Eventuali estremanti:
  - $f'(x) > 0$ per $x > \dfrac{1}{2}$, $x \neq 1$,
  - $f'(x) < 0$ per $x < \dfrac{1}{2}, x \neq 0$,
  - $f'(x) = 0$ per $x = \dfrac{1}{2}$;

  pertanto
  - f è crescente per $x > \dfrac{1}{2}$, $x \neq 1$,
  - f è decrescente per $x < \dfrac{1}{2}, x \neq 0$,
  - f ha un estremante in $x = \dfrac{1}{2}$ (minimo assoluto),

❧ il diagramma di f ha tangente verticale per $x = 0$ e per $x = 1$.

❦ Derivata seconda: $f''(x) = -\frac{2}{9}\frac{x^2 - x + 1}{(x\,(x-1))^{5/3}}$

❦ Verso della concavità ed eventuali punti di flesso:

❧ $f''(x) > 0$ per $0 < x < 1$,

❧ $f''(x) < 0$ per $x < 0 \;\vee\; x > 1$,

❧ $f''(x) = 0$ per nessun valore di x;

pertanto

❧ f è convessa per $0 < x < 1$,

❧ f è concava per $x < 0$ e per $x > 1$,

❧ f non ha flessi.

❦ Diagramma qualitativo di $f(x)$: vedi fig. 35.3.

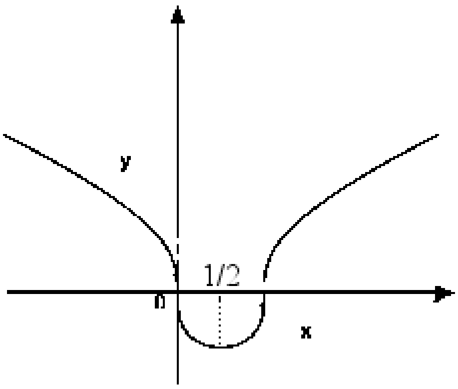


Figura 35.3. $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - x}$

Esercizio 35.6

Valendosi dello studio di cui all'esercizio 5 nella pagina precedente, tracciare un diagramma plausibile della funzione $g(x) = \sqrt{x^2 - x}$.

✍ Soluzione

Vedi fig. 35.4 nella pagina successiva: la funzione g è definita per $x \in (-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$ e ha due asintoti obliqui:

❦ $y = -x + \frac{1}{2}$ è asintoto per $x \to -\infty$;

❦ $y = x - \frac{1}{2}$ è asintoto per $x \to +\infty$.

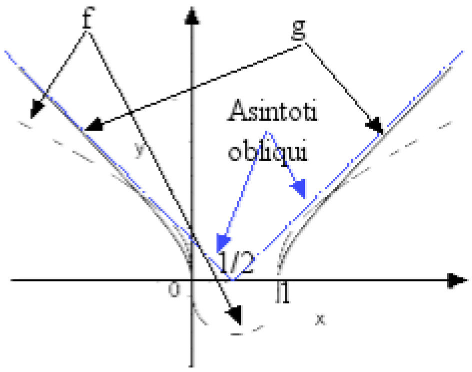
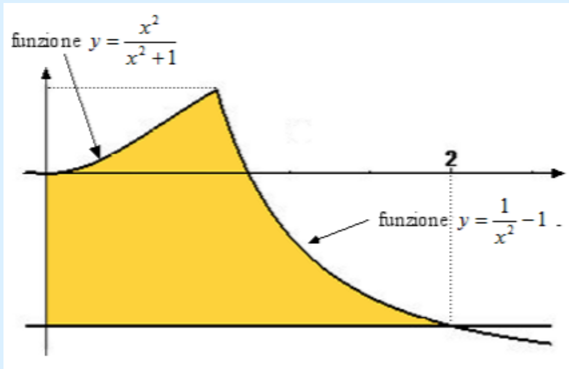


Figura 35.4. $g(x) = \sqrt{x^2 - x}$

Esercizio 35.7

Determinare l'area della regione di piano colorata in figura.



✍ Soluzione

❦ Calcoliamo innanzitutto il punto di intersezione delle due curve nell'intervallo $[0, 2]$:

$$\frac{x^2}{x^2+1} = \frac{1}{x^2} - 1 \qquad \overset{x\in[0,2]}{\Longleftrightarrow} \qquad x_m = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}.$$

❦ Osserviamo che

$$\left(\frac{1}{x^2} - 1\right)\bigg|_2 = -\frac{3}{4}.$$

❦ L'area cercata è pari a $A + B$ (vedi fig. 35.5 nella pagina seguente);

$$\begin{aligned}
A &= \int_0^{x_m}\left(\frac{x^2}{x^2+1} + \frac{3}{4}\right) dx = \int_0^{x_m}\left(-\frac{1}{x^2+1} + \frac{7}{4}\right) dx = \left(\frac{7}{4}x - \arctan x\right)\bigg|_0^{x_m} = \frac{7}{4\sqrt[4]{2}} - \arctan\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\,,\\
B &= \int_{x_m}^{2}\left(\frac{1}{x^2} - 1 + \frac{3}{4}\right) dx = \int_{x_m}^{2}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{4}\right) dx = \left(-\frac{1}{4}x - \frac{1}{x}\right)\bigg|_{x_m}^{2} = -1 + \sqrt{2} + \frac{1}{4\sqrt[4]{2}}\,.
\end{aligned}$$

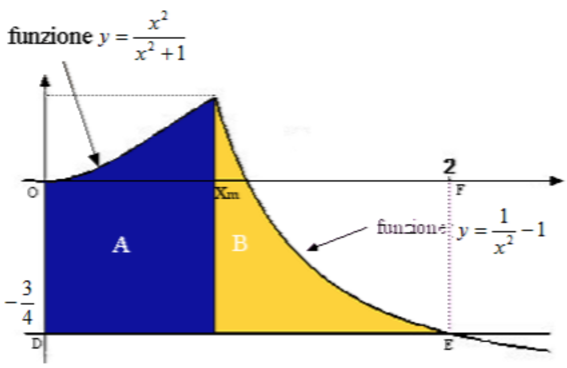


Figura 35.5. *Area*

TEMA 36

Prova scritta del 14 luglio 2005

Esercizio 36.1

Due palline (sferiche) di mercurio con superficie di *2 mm²* ciascuna si uniscono a formare un'unica pallina (sferica). Qual è la superficie della nuova pallina?
(Può essere utile ricordare che la superficie di una sfera è il quadruplo dell'area di un cerchio massimo.)

✍ Soluzione

Il volume di una sfera è proporzionale al cubo del raggio, la superficie al quadrato. Allora, se il volume raddoppia, il raggio viene moltiplicato per $\sqrt[3]{2}$ e quindi la superficie per $\sqrt[3]{2^2}$. Pertanto la superficie della nuova pallina è $2^{5/3}$.

Esercizio 36.2

Determinare il coefficiente del termine di grado 0 (in x) nello sviluppo del binomio

$$\left(x\,\sqrt{2x} - \frac{3}{x^4} \right)^{11} .$$

✍ Soluzione

Lo sviluppo è

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{11}\left[\binom{11}{k}\cdot\left(x\sqrt{2x}\right)^k\cdot\left(-\frac{3}{x^4}\right)^{11-k}\right] &= \sum_{k=0}^{11}\left[\binom{11}{k}\cdot(\sqrt{2})^k\cdot(-3)^{11-k}\cdot\left(x\sqrt{x}\right)^k\cdot\left(\frac{1}{x^4}\right)^{11-k}\right] = \\
&= \sum_{k=0}^{11}\left[\binom{11}{k}\cdot(\sqrt{2})^k\cdot(-3)^{11-k}\cdot(x)^{3k/2}\cdot(x)^{4(k-11)}\right] .
\end{aligned}$$

$$\frac{3}{2}k + 4(k-11) = 0 \;\Leftrightarrow\; k = 8 ,$$

per cui il coefficiente cercato è $2^4 \cdot (-3)^3 \cdot \binom{11}{8} = 16 \cdot (-27) \cdot 165 = -71\,280$.

Esercizio 36.3

Risolvere la disequazione $\sqrt{1-\log_3 x} < \log_9 x$.

✍ Soluzione

Ricordando che $\log_{a^k} b = \frac{1}{k}\log_a b$, la disequazione si riscrive come

$$\sqrt{1-2\log_9 x} < \log_9 x\ .$$

Perché abbia senso deve essere

$$\begin{cases} x>0 \\ 1-2\log_9 x \geqslant 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x>0 \\ \log_9 x \leqslant \frac{1}{2} \end{cases} \iff 0<x\leqslant 3\ .$$

Non è certamente soddisfatta se $\log_9 x \leqslant 0$, quindi deve essere

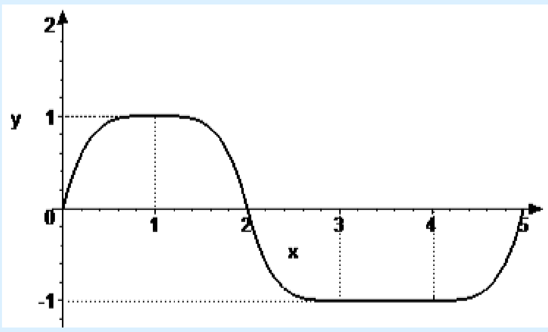
$$x>1\ .$$

Per $0<\log_9 x \leqslant \dfrac{1}{2}$ (cioè $1<x\leqslant 3$) diventa

$$\begin{aligned}
(\log_9 x)^2 + 2\log_9 x - 1 > 0 &\xrightarrow{t:=\log_9 x} t^2+2t-1>0 &&\Longrightarrow \\
&\Longrightarrow t<-1-\sqrt{2} \ \vee\ t>-1+\sqrt{2} &&\Longrightarrow \\
&\Longrightarrow \log_9 x < -1-\sqrt{2} \ \vee\ \log_9 x > -1+\sqrt{2} &&\xrightarrow{\text{CE: } 0<\log_9 x\leqslant 1/2} \\
&\Longrightarrow -1+\sqrt{2} < \log_9 x \leqslant 1/2 &&\Longrightarrow \\
&\Longrightarrow 9^{-1+\sqrt{2}} < x \leqslant 3
\end{aligned}$$

Esercizio 36.4

Quello mostrato in figura è il diagramma della funzione derivabile $y=f(x)$ definita sull'intervallo aperto $(0,5)$.

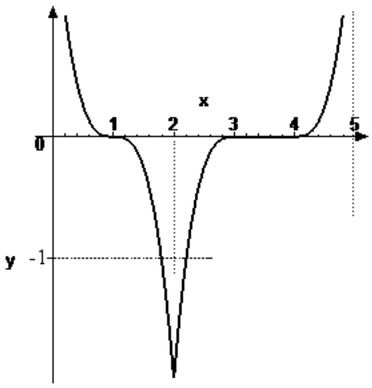


1. Tracciare un diagramma plausibile per ciascuna delle funzioni
   $y'=f'(x)$, $g(x)=\sqrt[3]{f(x)}$,
   $h(x)=\log_{10}|f(x)|$,
   precisando il dominio di quest'ultima.
2. Stabilire se l'equazione $f'(x)=-1$ ammette soluzioni.

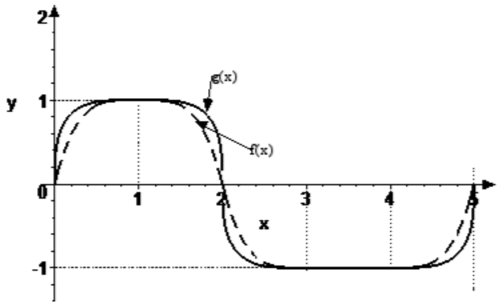
N.B. Tracciare il diagramma di g sulla stessa coppia di assi su cui è fornito quello di f, onde evidenziarne le differenze.

✍ Soluzione

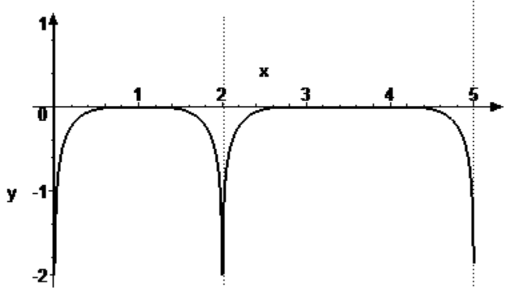
1. Vedi fig. 36.1 nella pagina successiva.



(a) $y' = f'(x)$



(b) $g(x) = f(x)^{1/3}$



(c) $h(x) = \log_{10} f(x)$

Figura 36.1. *Esercizio 4 nella pagina precedente*

2. Soluzioni di $f'(x) = -1$:
possiamo analizzare direttamente il grafico di f oppure applicare il teorema di Lagrange.

1 modo $x = 2$ è punto di flesso per f cioè $f''(2) = 0$, pertanto è di minimo (assoluto) per la funzione f'. Ci chiediamo ora se $f'(2)$ è maggiore o minore di -1. Poiché f scende di 1 con pendenza media > -1 vicino a 1 e vicino a 3 allora deve essere $f'(2) < -1$ e dunque $f'(x) = -1$ ammette 2 soluzioni.

2 modo Applichiamo il teorema di Lagrange* separatamente in [1,2] e in [2,3]:

- in $(1, 2)$ esiste c_1 tale che $f'(c_1) = \dfrac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = -1$
- in $(2, 3)$ esiste c_2 tale che $f'(c_2) = \dfrac{f(3) - f(2)}{3 - 2} = -1$

Esercizio 36.5

Studiare la funzione f così definita: $f(x) = \ln\left(e^x + e^{2x}\right)$ (il logaritmo è inteso in base "e").

✍ Soluzione

Può essere utile osservare che

$$f(x) = \ln\left(e^x + e^{2x}\right) = \left\langle \begin{array}{lcl} \ln\left[e^x(1 + e^x)\right] & = & x + \ln(1 + e^x) \\ \ln\left[e^{2x}(e^{-x} + 1)\right] & = & 2x + \ln(1 + e^{-x}) \end{array} \right. \qquad (\star)$$

*Sia $f(x) : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Se

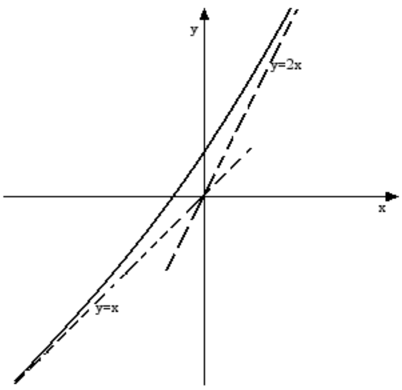
- f è continua in $[a, b]$
- f è derivabile in (a, b)

allora esiste $c \in (a, b)$ tale che $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

- Insieme di definizione: $x \in \mathbb{R}$.
- Limiti agli estremi dell'insieme di definizione: $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$.
- Equazioni degli eventuali asintoti: non esistono né asintoti verticali né asintoti orizzontali; poiché $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x+\ln(1+e^x)}{x} = 1$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x) - x = \lim_{x\to-\infty} \ln(1+e^x) = 0$

  la retta $y = x$ è asintoto obliquo per $x \to -\infty$;
  poiché $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x+\ln(1+e^{-x})}{x} = 2$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) - 2x = \lim_{x\to+\infty} \ln(1+e^{-x}) = 0$

  la retta $y = 2x$ è asintoto obliquo per $x \to +\infty$.
  Questi risultati erano evidenti semplicemente osservando la formulazione alternativa della funzione ($\star$).
- Derivata prima: $f'(x) = \frac{e^x + 2e^{2x}}{e^x + e^{2x}} = 1 + \frac{e^x}{1+e^x}$.
- Eventuali estremanti: $f'(x) > 0 \ \forall\ x$ pertanto f è sempre strettamente crescente e non esistono estremanti.
- Derivata seconda: $f''(x) = \frac{e^{3x}}{(e^x + e^{2x})^2} = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$.
- Verso della concavità ed eventuali punti di flesso: $f''(x) > 0 \ \forall x$ pertanto f è sempre convessa.
- Diagramma qualitativo di f



Esercizio 36.6

Sia $\mathbb{S}$ il sottoinsieme di $\mathbb{R}$ così definito:

$$\mathbb{S} := [-1, 0) \cup (1, 2)\ .$$

Determinare estremo inferiore ed estremo superiore, specificando se siano anche rispettivamente minimo e massimo, di ciascuno dei seguenti insiemi:

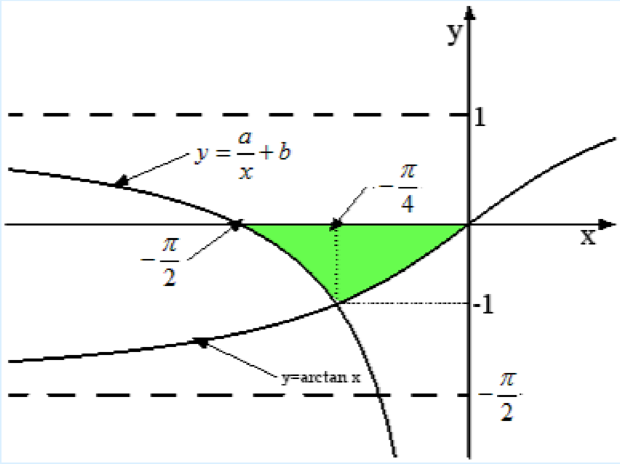
$$\begin{aligned} A &:= \{\, x \log_{10} |\, y| \quad | \quad x, y \in \mathbb{S} \,\} \\ B &:= \{\, \sin(xy) \quad | \quad x, y \in \mathbb{S} \,\} \\ C &:= \{\, \cos(xy) \quad | \quad x, y \in \mathbb{S} \,\} \\ D &:= \left\{\, e^{-x} + (y - {}^3\!/\!_2)^2 \;\middle|\; x, y \in \mathbb{S} \,\right\} \end{aligned}$$

✍ Soluzione

$\inf A = -\infty$	È minimo? No		$\sup A = +\infty$	È massimo? No	
$\inf B = -1$	È minimo? Sì	$(x = -1, y = \pi/2)$	$\sup B = 1$	È massimo? Sì	$(x = y = \sqrt{\pi/2})$
$\inf C = -1$	È minimo? Sì	$(x = y = \sqrt{\pi})$	$\sup C = 1$	È massimo? No	
$\inf D = e^{-2}$	È minimo? No		$\sup D = e + 25/4$	È massimo? Sì	$(x = y = -1)$

Esercizio 36.7

Valendosi dei dati indicati in figura, determinare i valori dei parametri reali a e b corrispondenti al ramo di iperbole tracciato e calcolare l'area $\mathcal{A}$ della regione colorata.



✍ Soluzione

➤ Calcolo dei parametri:

$$\begin{cases} 0 = \dfrac{a}{-\pi/2} + b \\ -1 = \dfrac{a}{-\pi/4} + b \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{\pi}{2} \\ b = 1 \end{cases}$$

➤ Area:

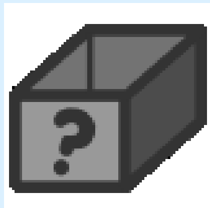
$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= -\left[\int_{-\pi/2}^{-\pi/4}\left(\frac{a}{x}+b\right)\,dx + \int_{-\pi/4}^{0} \arctan x\,dx\right] = \\
&= -\left(a\log|x| + bx\right)\Big|_{-\pi/2}^{-\pi/4} - \left(x\arctan x - \frac{1}{2}\log\left(1+x^2\right)\right)\Big|_{-\pi/4}^{0} = \\
&= \left(a\log|x| - bx\right)\Big|_{\pi/4}^{\pi/2} + \left(x\arctan x - \frac{1}{2}\log\left(1+x^2\right)\right)\Big|_{0}^{\pi/4} = \\
&= a\log\frac{\pi}{2} - b\frac{\pi}{2} - a\log\frac{\pi}{4} + b\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\arctan\left(-\frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2}\log\left(1+\left(-\frac{\pi}{4}\right)^2\right) = \\
&= \frac{\pi}{2}\log\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\log\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{\pi^2}{16}\right) = \\
&= \frac{\pi}{2}\log 2 - \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{\pi^2}{16}\right).
\end{aligned}$$

TEMA 37

Prova scritta del 15 settembre 2005

Esercizio 37.1

Una scatola contiene 100 palle colorate. Di queste, 28 sono rosse, 20 verdi, 12 gialle, 20 blu, 10 bianche e 10 nere. Qual è il minimo numero di palle che è necessario estrarre per essere sicuri a priori di averne almeno 15 dello stesso colore?



✍ Soluzione

Il massimo numero di palle fra cui NON ve ne sono 15 dello stesso colore è

$$14 + 14 + 12 + 14 + 10 + 10 = 74 \ .$$

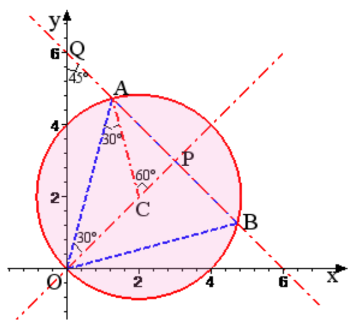
Allora il minimo numero di palle che è necessario estrarre per essere sicuri a priori di averne almeno 15 dello stesso colore è 75 .

Esercizio 37.2

Nel piano dotato di un riferimento cartesiano ortogonale Oxy, si consideri la circonferenza γ passante per l'origine degli assi con centro nel punto $(2, 2)$. Sia T il triangolo equilatero inscritto in γ avente un vertice nell'origine. Determinare le coordinate degli altri due vertici di T.

✍ Soluzione

Si osservi la figura



Chiaramente $\overline{OP} = \frac{3}{2}\,\overline{OC} = \frac{3}{2} \cdot 2\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$. Allora $\overline{OQ} = \sqrt{2}\,\overline{OP} = \sqrt{2} \cdot 3 \cdot \sqrt{2} = 6$, per cui la retta passante per Q e A ha equazione $y = -x + 6$.

La circonferenza ha equazione $(x-2)^2+(y-2)^2 = \overline{OC}^2 = (2\sqrt{2})^2$ cioè $x^2+y^2-4x-4y=0$; intersecandola con la retta si ottiene $2x^2-12x+12=0$ da cui $x_{A,B} = 3 \pm \sqrt{3}$. Allora le coordinate dei punti cercati sono:

$$A \equiv (3-\sqrt{3}, 3+\sqrt{3}) \qquad B \equiv (3+\sqrt{3}, 3-\sqrt{3})\ .$$

Esercizio 37.3

Risolvere la disequazione $\log_{x^2-2x} 8 < 3$ (si ricordi che, per definizione, la base di un logaritmo deve essere un numero positivo).

✍ Soluzione

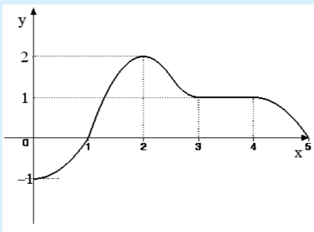
Poiché $\log_2 8 = 3$ si deve risolvere $\log_{x^2-2x} 8 < \log_2 8$. Da 2>1 segue che la disequazione è soddisfatta quando $x^2-2x>2$ oppure quando $0<x^2-2x<1$

$$x^2-2x>2 \;\Downarrow\; x \in (-\infty, 1-\sqrt{3}) \cup (1+\sqrt{3}, +\infty) \qquad 0<x^2-2x<1 \;\Downarrow\; x \in (1-\sqrt{2}, 0) \cup (2, 1+\sqrt{2})$$

In definitiva $x \in (-\infty, 1-\sqrt{3}) \cup (1-\sqrt{2}, 0) \cup (2, 1+\sqrt{2}) \cup (1+\sqrt{3}, +\infty)$.

Esercizio 37.4

Quello mostrato in figura è il diagramma della funzione derivabile $y = f(x)$ sull'intervallo chiuso [0,5]. Tracciare un diagramma plausibile per ciascuna delle funzioni
$y' = f'(x)$, $g(x) = \big(f(x)\big)^2$ e $h(x) = \int_1^x f(t)\,dt$ (cioè h è la primitiva di f su [0,5] che in 1 vale 0).
N.B. Tracciare il diagramma di g sulla stessa coppia di assi su cui è fornito quello di f, onde evidenziarne le differenze.



✍ Soluzione

Vedi fig. 37.1 a fronte.

Esercizio 37.5

Studiare la funzione f così definita: $f(x) = \dfrac{\log x}{\log x - 2}$ (il logaritmo è inteso in base "e").

✍ Soluzione

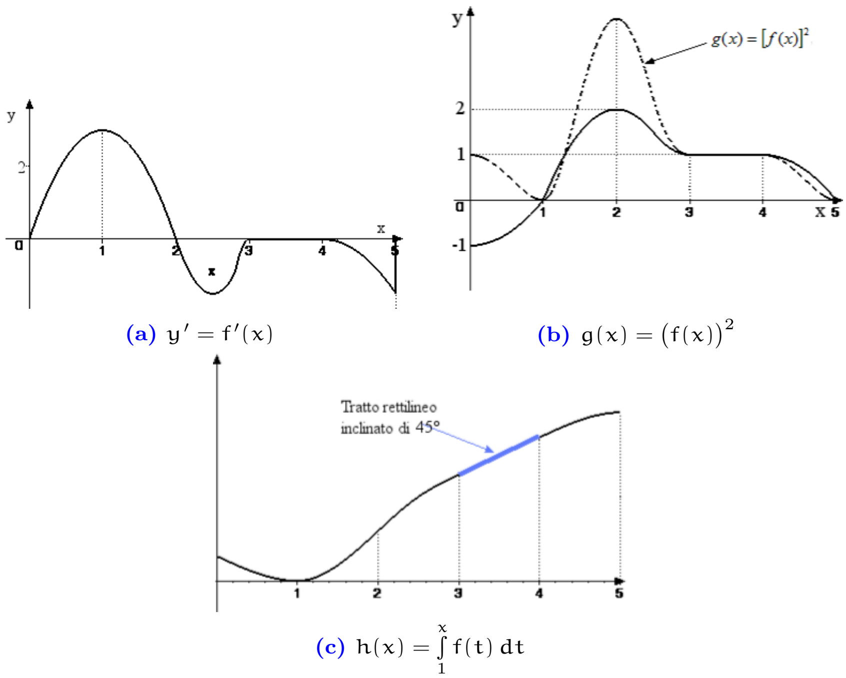
- Insieme di definizione:

$$\begin{cases} x>0 \\ \log x \neq 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>0 \\ x \neq e^2 \end{cases} \Rightarrow (0, e^2) \cup (e^2, +\infty)$$

- Limiti agli estremi dell'insieme di definizione:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1^- \qquad \lim_{x\to (e^2)^\mp} f(x) = \mp\infty \qquad \lim_{x\to +\infty} f(x) = 1^+$$

- Equazioni degli eventuali asintoti:
  - asintoto orizzontale: $y = 1$ per $x \to \mp\infty$,



(a) $y' = f'(x)$ (b) $g(x) = (f(x))^2$

(c) $h(x) = \int_1^x f(t)\,dt$

Figura 37.1. *Esercizio 4 a fronte*

- asintoto verticale: $x = e^2$.

- Derivata prima: $f'(x) = -\dfrac{2}{(\log x - 2)^2 x}$ e $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = -\infty$.
- Eventuali estremanti: non ci sono estremanti poiché $f'(x) \neq 0$ per ogni x nell'insieme di definizione.
- Derivata seconda: $f''(x) = 2\dfrac{\log x}{(\log x - 2)^3 x^2}$.
- Verso della concavità ed eventuali punti di flesso:

  $f''(x) > 0$ per $x \in (0,1) \cup (e^2, +\infty)$,

  $f''(x) < 0$ per $x \in (1, e^2)$,

  $f''(x) = 0$ per $x = 1$. Perciò f è

  - convessa su $(0,1]$ e su $(e^2, +\infty)$,
  - concava su $[1, e^2)$,
  - dunque $x = 1$ è punto di flesso.
- Diagramma qualitativo di f: vedi fig. 37.2 nella pagina successiva.

Esercizio 37.6

Dei due limiti seguenti, uno esiste e l'altro non esiste. Individuare quello che esiste e calcolarlo e precisare i motivi della non esistenza dell'altro.

$$A = \lim_{n\to+\infty} \exp\left(\sqrt{n}\cos(n\pi) + n\right) \qquad B = \lim_{n\to+\infty} \exp\left(n\cos(n\pi) + \sqrt{n}\right)$$

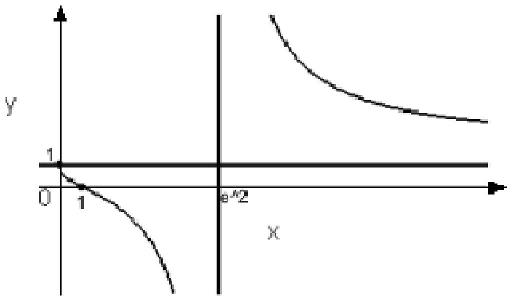


Figura 37.2. $f(x) = \dfrac{\log x}{\log x - 2}$

✍ Soluzione

Si ha $\cos(n\pi) = (-1)^n$ per cui:

$$\begin{aligned} A &= \lim_{n\to+\infty} \exp\left(\sqrt{n}\,\cos(n\pi) + n\right) = \lim_{n\to+\infty} \exp\left(\sqrt{n}\,(-1)^n + n\right) = \\ &= \lim_{n\to+\infty} \exp\left(\sqrt{n}((-1)^n + \sqrt{n})\right) = +\infty \end{aligned}$$

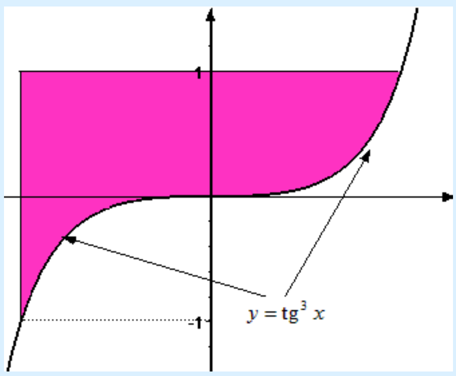
Il limite B non esiste . Infatti si consideri la successione:

$$a_n := \exp\left(n\,\cos(n\pi) + \sqrt{n}\right) = \exp\left(n\,(-1)^n + \sqrt{n}\right) = n\left((-1)^n + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \;;$$

i termini di posto pari di $\{a_n\}$ tendono e $+\infty$ e quelli di posto dispari tendono a $-\infty$. Allora i termini di posto pari di $\exp(a_n)$ tendono a $+\infty$ e quelli di posto dispari a 0, per cui B non esiste.

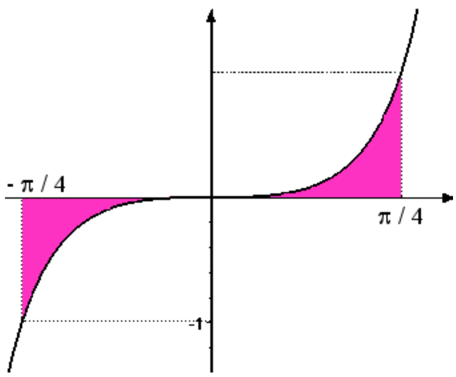
Esercizio 37.7

Calcolare l'area della regione colorata in figura.



✍ Soluzione

Si ha $\tan^3 x = \pm 1$ per $x = \pm\dfrac{\pi}{4}$. Inoltre è ovvio che, essendo $x \mapsto \tan^3 x$ una funzione dispari, le due regioni colorate nella figura accanto hanno la stessa area. Allora l'area cercata vale $2 \cdot 1 \cdot \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2}$.

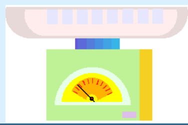


TEMA 38

Prova scritta del 15 novembre 2005

Esercizio 38.1

Quattro giorni fa avevo *20 kg* di una certa miscela; la percentuale di acqua in quella miscela era il 99%. Oggi parte dell'acqua è evaporata e ora la percentuale di acqua presente è scesa al 98%. Quanto pesa ora la mia miscela?



✍ Soluzione

La componente "non-acqua" della miscela quattro giorni fa pesava l'1% del totale: se oggi pesa il 2%, significa che il peso totale si è dimezzato. Dunque il peso oggi è 10 kg.
In formule, detto x il peso odierno in kg, si deve avere

$$0,2 + \frac{98}{100}x = x \qquad \text{da cui } x = 10.$$

Esercizio 38.2

Nel piano dotato di un riferimento cartesiano ortogonale Oxy, si determini l'equazione della parabola avente per asse l'asse delle ordinate, avente il fuoco nel punto $(0, 1)$ e tangente la retta di equazione $y = x$.

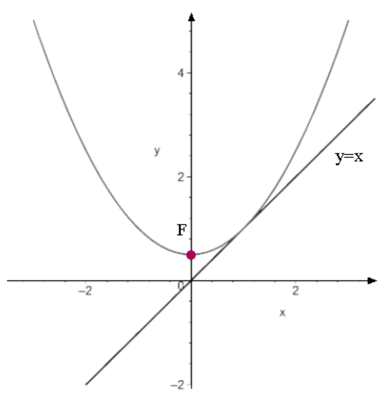
✍ Soluzione

La parabola è del tipo $y = ax^2 + bx + c$ ed ha fuoco $F = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{1}{4a} - \frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$:

$$\begin{cases} -\dfrac{b}{2a} = 0 \\ \dfrac{1}{4a} - \dfrac{b^2 - 4ac}{4a} = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} b = 0 \\ c = 1 - \dfrac{1}{4a} \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$y = ax^2 + 1 - \frac{1}{4a}.$$



Imponendo la tangenza a $y = x$, da

$$\begin{cases} ax^2 + 1 - \dfrac{1}{4a} = x \\ 2ax = 1 \end{cases}$$

si ottiene $a = 1/2$. Dunque la parabola cercata ha equazione

$$y = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\ .$$

Esercizio 38.3

Si sa che in una famiglia vi sono 6 figli, ma non se ne conosce il sesso. Qual è la probabilità che siano 3 maschi e 3 femmine?

✍ Soluzione

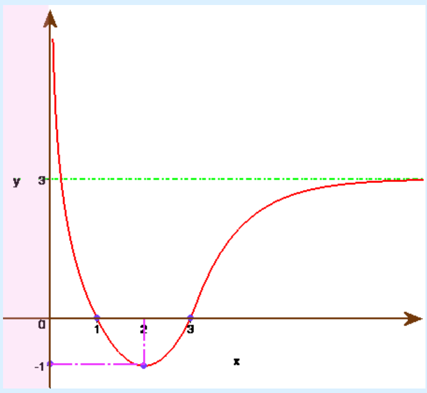
Allineiamo i sei figli e consideriamo solo il sesso: gli allineamenti possibili sono $2^6 = 64$. Gli allineamenti in cui i maschi (e dunque le femmine) sono esattamente 3 sono pari alle combinazioni di 6 elementi di classe 3 (cioè tutti i gruppi che si possono formare con 3 dei 6 oggetti, considerando diversi due gruppi quando differiscono tra loro per almeno un elemento) $\binom{6}{3} = 20$. Dunque

$$p = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}} = \frac{20}{64} = \frac{5}{16}\ .$$

Esercizio 38.4

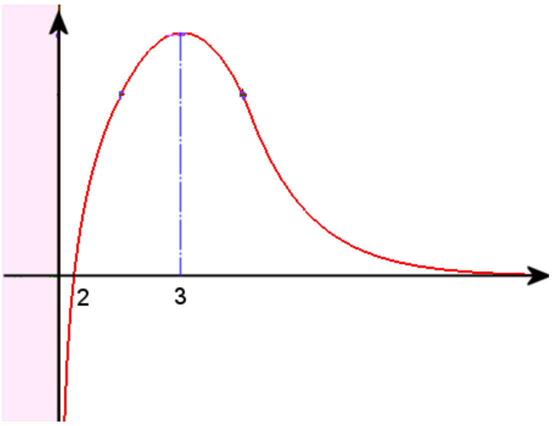
Quello mostrato in figura è il diagramma della funzione derivabile $y = f(x)$ definita sull'intervallo aperto $(0, +\infty)$. Tracciare un diagramma plausibile per ciascuna delle funzioni

- ❦ $y' = f'(x)$,
- ❦ $g(x) = \left| f\big(|x|\big) \right|$,
- ❦ $h(y) = \left(f\big|_{[2,+\infty)} \right)^{-1}(y)$.

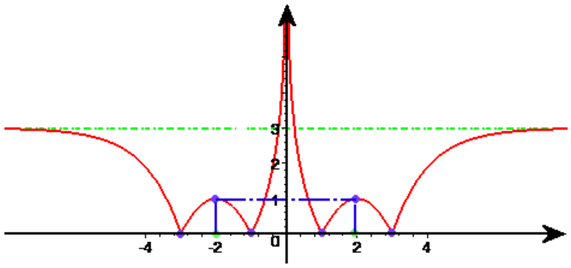


✍ Soluzione

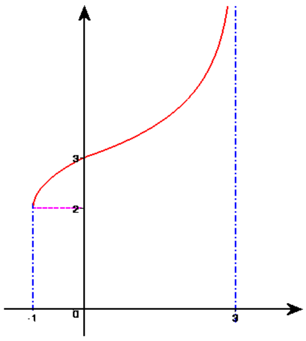
Vedi fig. 38.1 a fronte.



(a) $y' = f'(x)$



(b) $g(x) = \left|f\left(|x|\right)\right|$



(c) $h(y) = \left(f\big|_{[2,+\infty)}\right)^{-1}(y)$

Figura 38.1. *Esercizio 4 a fronte*

Esercizio 38.5

Studiare la funzione f così definita: $f(x) = \left|\ln\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2}\right)\right|$ (il logaritmo è inteso in base "e").

✍ Soluzione

- Insieme di definizione: $\begin{cases} x \geqslant 0 \\ \sqrt{x} \neq 0 \\ \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2} > 0 \end{cases}$ dunque $x \in (0, 4)$.

- Può essere utile osservare che si ha

$$f(x) = \begin{cases} \ln\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 1/2\right) & \text{se } 0 < x \leqslant \frac{4}{9} \\ -\ln\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 1/2\right) & \text{se } \frac{4}{9} < x < 4. \end{cases} \qquad \text{e ovviamente} \quad f(x) \geqslant 0.$$

- $f(x) = 0$ se e solo se $x = 4/9$.

- Limiti agli estremi dell'insieme di definizione ed equazioni degli eventuali asintoti:

$$\lim_{x\to 0^+} \left|\ln\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 1/2\right)\right| = \lim_{x\to 4^-} \left|\ln\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 1/2\right)\right| = +\infty$$

quindi $x = 0$ e $x = 4$ sono asintoti verticali.

- Derivata prima (dove esiste):

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x(2-\sqrt{x})} & \text{se } 0 < x < \frac{4}{9} \\ +\frac{1}{x(2-\sqrt{x})} & \text{se } \frac{4}{9} < x < 4 \end{cases}$$

e

$$\left[\lim_{x\to \frac{4}{9}^-} f'(x) = -\frac{27}{16}\right] \qquad \neq \qquad \left[\lim_{x\to \frac{4}{9}^+} f'(x) = \frac{27}{16}\right].$$

- Eventuali punti estremanti: $x = \frac{4}{9}$ punto di minimo assoluto (punto angoloso).

- Derivata seconda (dove esiste):

$$f''(x) = \begin{cases} -\frac{3\sqrt{x}-4}{2x^2(2-\sqrt{x})^2} & \text{se } 0 < x < \frac{4}{9} \\ +\frac{3\sqrt{x}-4}{2x^2(2-\sqrt{x})^2} & \text{se } \frac{4}{9} < x < 4 \end{cases}$$

- Verso della concavità ed eventuali punti di flesso:
  - f è convessa su $(0, 4/9]$ e su $[16/9, 4)$,
  - f è concava su $[4/9, 16/9]$,
  - $x = 16/9$ è punto di flesso.

- Diagramma qualitativo di f: vedi fig. 38.2 nella pagina successiva.

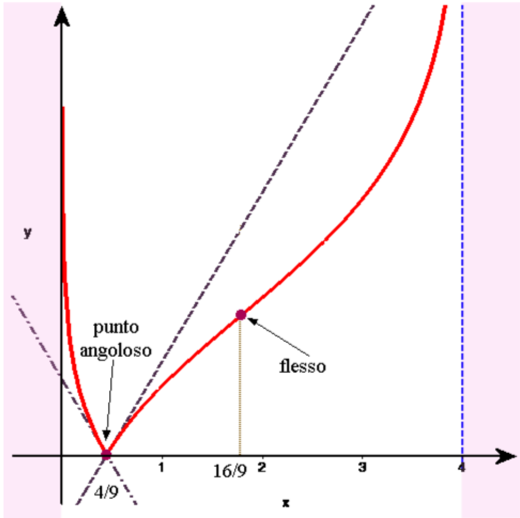


Figura 38.2. $f(x) = \left|\ln\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2}\right)\right|$

Esercizio 38.6

Calcolare i due limiti seguenti.

$$A = \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{3}{n}\right)^{4n} \qquad B = \lim_{n\to+\infty} n^3 \left(\tan\frac{3}{n} - \sin\frac{3}{n}\right)$$

✍ Soluzione

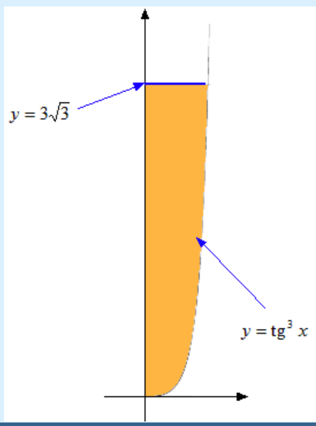
$$A = \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{3}{n}\right)^{4n} = \lim_{n\to+\infty} \left(\left(1 + \frac{3}{n}\right)^{n}\right)^{4} \stackrel{(C)}{=} e^{12}$$

$$B = \lim_{n\to+\infty} n^3 \left(\tan\frac{3}{n} - \sin\frac{3}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} n^3 \frac{\sin\left(\frac{3}{n}\right)}{\cos\left(\frac{3}{n}\right)} \left(1 - \frac{1}{\cos\left(\frac{3}{n}\right)}\right) =$$

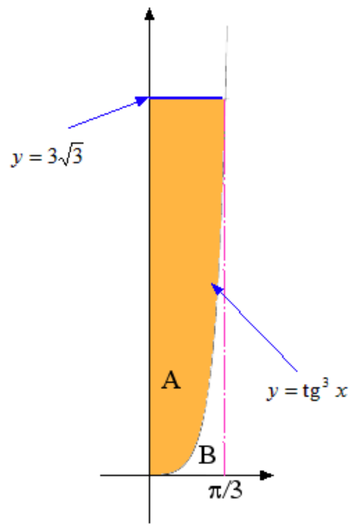
$$= \lim_{n\to+\infty} n^3 \frac{\sin\left(\frac{3}{n}\right)}{\cos^2\left(\frac{3}{n}\right)} \left(\cos\left(\frac{3}{n}\right) - 1\right) = \lim_{n\to+\infty} n^3 \frac{\left(\frac{3}{n}\right)^3}{\cos^2\left(\frac{3}{n}\right)} \frac{\sin\left(\frac{3}{n}\right)}{\left(\frac{3}{n}\right)} \frac{\cos\left(\frac{3}{n}\right) - 1}{\left(\frac{3}{n}\right)^2} \stackrel{(A)(B)}{=} \frac{27}{2}\,.$$

Esercizio 38.7

Calcolare l'area della regione colorata in figura.



✍ Soluzione



- Per $0 < x < \frac{\pi}{2}$ si ha $\tan^3 x = 3\sqrt{3} = 3^{3/2} \Leftrightarrow \tan x = \sqrt{3} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3}$.
- Dalla figura vediamo che l'area $\mathcal{A}$ cercata è data da $\mathcal{A} = \left[\left(\frac{\pi}{3} - 0\right) \cdot 3\sqrt{3}\right] - \mathcal{B}$.
- Ora $\mathcal{B} = G(\pi/3) - G(0)$ dove, per $x \in (0, \pi/2)$,

$$
\begin{aligned}
G(x) := \int \tan^3 x \, dx &= \int \frac{\sin x(1-\cos^2 x)}{\cos^3 x}\, dx \overset{\left(\substack{t:=\cos x>0 \\ -\sin x\,dx = dt}\right)}{=\!=} \\
&= -\int \left(\frac{1}{t^3} - \frac{1}{t}\right) dt = \\
&= \log t + \frac{1}{2t^2} + k = \\
&= \ln(\cos x) + \frac{1}{2\cos^2 x} + k, \qquad k \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

Pertanto

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \left[\left(\frac{\pi}{3} - 0\right) \cdot 3\sqrt{3}\right] - \mathcal{B} = \\
&= \sqrt{3}\,\pi - \left(\ln\left(\cos\frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{2\cos^2\frac{\pi}{3}} - \ln(\cos 0) - \frac{1}{2\cos^2 0}\right) = \\
&= \sqrt{3}\,\pi + \ln 2 - \frac{3}{2}\,.
\end{aligned}
$$

TEMA 39

Prima prova in itinere a.a. 2005/06
15 dicembre 2005

Esercizio 39.1

In una nazione, in cui l'inflazione è costante ed è del 3% annuo, un certo prodotto è stato immesso sul mercato il 15/12/2003 allo stesso prezzo presso tutti i rivenditori. Il prezzo è stato successivamente liberalizzato. Ieri in quella nazione è stata promulgata una legge che obbliga i rivenditori a fornire quel prodotto, a partire da oggi, tutti allo stesso prezzo, allineato con l'inflazione (calcolata a partire dal 15/12/2003). Un rivenditore al 15/12/2004 aveva aumentato il prezzo di quel prodotto del 4% (rispetto al 15/12/2003) e oggi lo ha messo in vendita ad un prezzo aumentato del 2% rispetto ad un anno fa. Di quale percentuale del prezzo proposto oggi e in quale senso va alterato questo prezzo perchè la legge sia rispettata?

✍ Soluzione

Detto 1 il prezzo all'inizio, la variazione α soddisfa l'uguaglianza

$$\left(1+\frac{4}{100}\right)\left(1+\frac{2}{100}\right)+\alpha=\left(1+\frac{3}{100}\right)^2$$

da cui $\alpha = \dfrac{103^2}{102 \cdot 104} = \dfrac{0,01}{100}$.
Da $\alpha = x \cdot \dfrac{100^2+600+8}{100^2}$ segue $x = \dfrac{1}{10\,608}$, dunque il prezzo va aumentato del $\dfrac{1}{106,08}\%$.

Esercizio 39.2

Nel piano dotato di un riferimento cartesiano ortogonale Oxy, si consideri la circonferenza γ di equazione $x^2+y^2-4x-2y+4=0$. Fra i due triangoli rettangoli di area massima inscritti in γ con l'ipotenusa parallela alla bisettrice del II e IV quadrante, si consideri quello il cui vertice corrispondente all'angolo retto è più vicino all'origine. Si determinino le coordinate di tale vertice.

✍ Soluzione

La circonferenza γ ha centro in $C=(2,1)$ e raggio $r=1$. L'ipotenusa dei due triangoli rettangoli è diametrale e appartiene alla retta $y=-x+3$. Fra tutti i triangoli retti aventi tale ipotenusa,

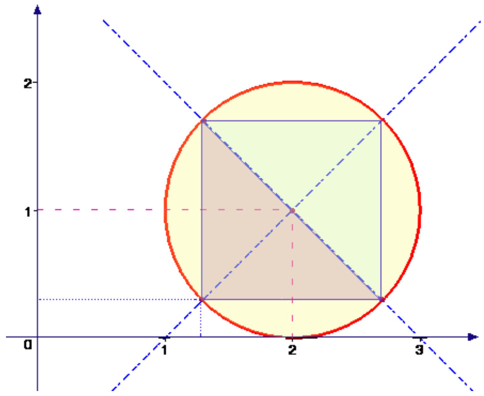


Figura 39.1. $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0$

quelli di area massima sono ovviamente quelli isosceli, per cui i loro vertici corrispondenti agli angoli retti stanno sulla parallela alla bisettrice del I e III quadrante passante per C, dunque sulla retta di equazione $y = x - 1$. Intersecando tale retta con la circonferenza, si ottiene che le ascisse dei due vertici sono le soluzioni dell'equazione $2x^2 - 8x + 7 = 0$:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0 \\ y = x - 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad 2x^2 - 8x + 7 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{4 \pm \sqrt{2}}{2}.$$

Il vertice cercato è allora $\left(2 - \frac{1}{\sqrt{2}}, 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Esercizio 39.3

Sia P un poligono convesso di 18 lati. Quanti sono i triangoli i cui vertici sono vertici di P? Fra questi triangoli, quanti non hanno lati in comune con P (in altre parole: quanti hanno per lati soltanto diagonali di P)?

✍ Soluzione

❦ I triangoli sono tanti quante le terne ordinate di vertici di P, dunque

$$\binom{18}{3} = \frac{18 \cdot 17 \cdot 16}{6} = 816.$$

❦ Per ogni lato fissato del poligono, i triangoli che hanno solo quel lato in comune col poligono sono 18-4=14.

❦ I triangoli che hanno due lati in comune con il poligono sono invece 18 in tutto.

Dunque i triangoli che non hanno lati in comune con il poligono sono $816 - 18 \cdot (18 - 4) - 18 = 546$.

Esercizio 39.4

Sia $\mathcal{S}$ il sottoinsieme di $\mathbb{R}$ così definito: $\mathcal{S} = (-2, -1) \cup (0, 1/2]$. Determinare estremo inferiore ed estremo superiore, specificando se siano anche rispettivamente minimo e massimo, di ciascuno dei seguenti insiemi:

$\mathcal{A} = \left\{ \log_{10} \left|\frac{x}{y}\right| \;\middle|\; x, y \in \mathcal{S} \right\}$, $\mathcal{B} = \{ 2^{xy} \mid x, y \in \mathcal{S} \}$,

$\mathcal{C} = \{ 2^{x/y} \mid x, y \in \mathcal{S} \}$, $\mathcal{D} = \{ \sin(x + y) \mid x, y \in \mathcal{S} \}$,

$\mathcal{E} = \{ \cos(x + y) \mid x, y \in \mathcal{S} \}$.

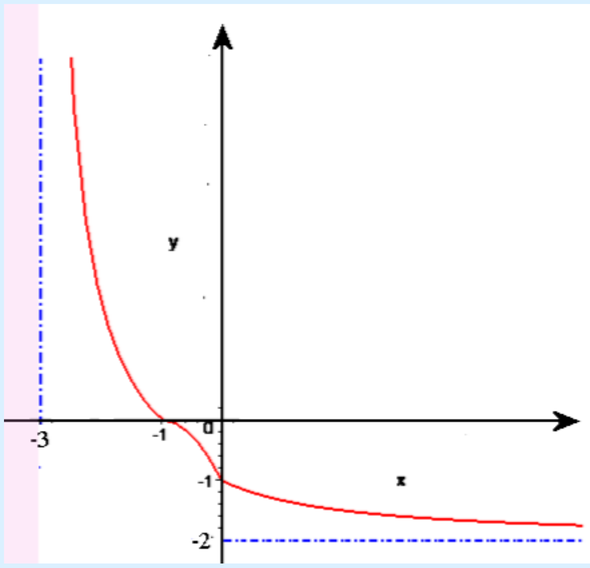
✍ Soluzione

$\operatorname{Inf} \mathcal{A} \underset{\left(\substack{y=1/2 \\ x\to 0^+}\right)}{=} -\infty$	È minimo? No	$\operatorname{Sup} \mathcal{A} \underset{\left(\substack{x=1/2 \\ y\to 0^+}\right)}{=} +\infty$	È massimo? No
$\operatorname{Inf} \mathcal{B} \underset{\left(\substack{y=1/2 \\ x\to -2^+}\right)}{=} 1/2$	È minimo? No	$\operatorname{Sup} \mathcal{B} \underset{(x,y\to -2^+)}{=} 2^4 = 16$	È massimo? No
$\operatorname{Inf} \mathcal{C} \underset{\left(\substack{x=-3/2 \\ y\to 0^+}\right)}{=} 0$	È minimo? No	$\operatorname{Sup} \mathcal{C} \underset{\left(\substack{x=1/2 \\ y\to 0^+}\right)}{=} +\infty$	È massimo? No
$\operatorname{Inf} \mathcal{D} \underset{\left(\substack{x=-\pi/2-1/4 \\ y=1/4}\right)}{=} -1$	È minimo? Si	$\operatorname{Sup} \mathcal{D} \underset{(x=y=1/2)}{=} \sin 1$	È massimo? Si
$\operatorname{Inf} \mathcal{E} \underset{(x=y=-\pi/2)}{=} -1$	È minimo? Si	$\operatorname{Sup} \mathcal{E} \underset{(x,y\to 0^+)}{=} 1$	È massimo? No

Esercizio 39.5

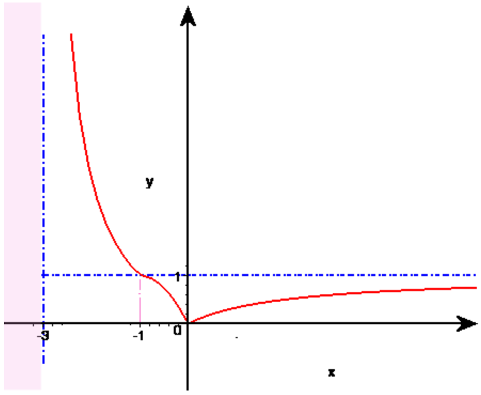
Quello in figura è il diagramma della funzione $y = f(x)$. Tracciare i diagrammi delle seguenti funzioni:

1. $g(x) = |f(x) + 1|$,
2. $h(x) = f(-|x|)$,
3. $k(x) = f\left(\frac{x}{2}\right)$,
4. $z(x) = \frac{f(x)}{2}$,
5. $x = f^{-1}(y)$.

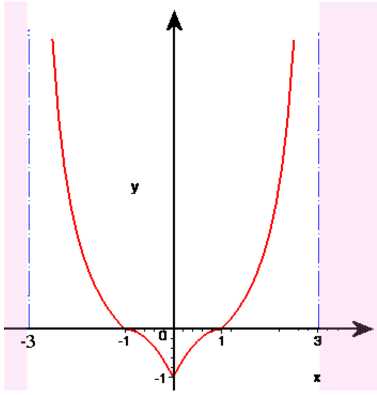


✍ Soluzione

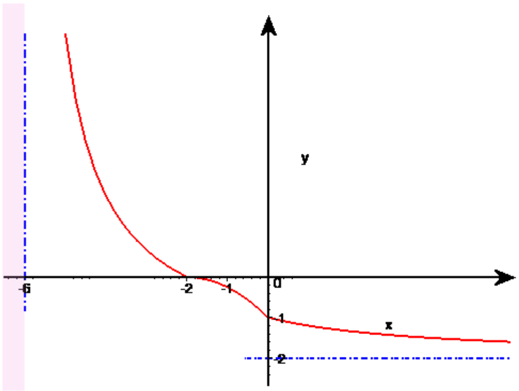
Vedi fig. 39.2 nella pagina seguente.



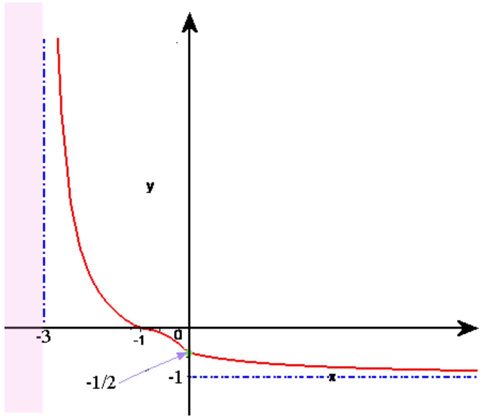
(a) $g(x) = |f(x) + 1|$



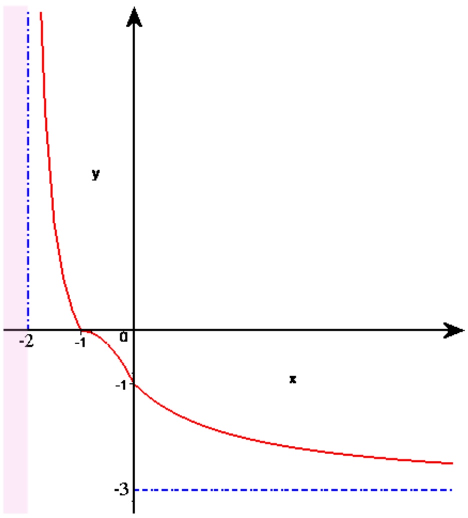
(b) $h(x) = f(-|x|)$



(c) $k(x) = f\left(\frac{x}{2}\right)$



(d) $z(x) = \frac{f(x)}{2}$



(e) $x = f^{-1}(y)$

Figura 39.2. *Esercizio 5 nella pagina precedente*

Esercizio 39.6

Risolvere le seguenti disequazioni

❶ $\dfrac{1}{x-x^2} < 1 + \dfrac{1}{x}$ ❷ $\dfrac{1}{\sqrt{x-x^2}} < \sqrt{1+\dfrac{1}{x}}$ ❸ $|x^2-1| < |x^2-7|$

✍ Soluzione

❶ C.E.: $\begin{cases} x - x^2 \neq 0 \\ x \neq 0 \end{cases}$ cioè $x \neq 0$ e $x \neq 1$.

Sol.: $\dfrac{1}{x(1-x)} - 1 - \dfrac{1}{x} > 0$ cioè $\dfrac{x^2}{x(1-x)} > 0$ quindi $x < 0 \vee x > 1$.

❷ C.E.: $\left.\begin{cases} \text{C.E. di ❶} & \Leftrightarrow x \neq 0 \wedge x \neq 1 \\ x - x^2 \geqslant 0 & \Leftrightarrow 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 + \dfrac{1}{x} \geqslant 0 & \Leftrightarrow x \leqslant -1 \vee x > 0 \end{cases}\right] \Rightarrow 0 < x < 1.$

Sol.: $\dfrac{1}{x-x^2} < 1 + \dfrac{1}{x}$ $\Rightarrow$ Equivale a ❶ ma è definita solo per $0 < x < 1$ pertanto non c'è soluzione .

❸ La distanza di x^2 da 1 deve essere minore di quella da 7, dunque deve essere $x^2 < \frac{7+1}{2}$ ossia $x^2 < 4$ da cui $-2 < x < 2$. Qualora non si sia notato questo, è comunque possibile applicare la regola generale: studiamo dapprima i segni delle espressioni che si trovano all'interno del segno di modulo e riportiamoli su uno stesso grafico:

		$-\sqrt{7}$	-1	$+1$	$+\sqrt{7}$
$\operatorname{sgn}(x^2-7)$	$+$	$-$	$-$	$-$	$+$
$\operatorname{sgn}(x^2-1)$	$+$	$+$	$-$	$+$	$+$
	A_1	B_1	C	B_2	A_2

Notiamo che l'asse reale risulta diviso in cinque intervalli:

$x < -\sqrt{7}$ $\quad -\sqrt{7} \leqslant x < -1$ $\quad -1 \leqslant x < 1$ $\quad 1 \leqslant x < \sqrt{7}$ $\quad x \geqslant \sqrt{7}$

in ognuno dei quali l'equazione equivale a uno dei seguenti sistemi:

$$\left.\begin{array}{ll} A_{1,2} := \begin{cases} x < -\sqrt{7} \ \vee \ x \geqslant +\sqrt{7} \\ +(x^2-1) < +(x^2-7) \end{cases} & \Rightarrow \nexists x \\ B_{1,2} := \begin{cases} -\sqrt{7} \leqslant x < -1 \ \vee \ +1 \leqslant x < +\sqrt{7} \\ +(x^2-1) < -(x^2-7) \end{cases} & \Rightarrow -2 < x < -1 \ \vee \ 1 \leqslant x < +2 \\ C := \begin{cases} -1 \leqslant x < 1 \\ -(x^2-1) < -(x^2-7) \end{cases} & \Rightarrow -1 \leqslant x < +1 \end{array}\right] \Rightarrow -2 < x < 2.$$

Esercizio 39.7

Calcolare i seguenti limiti, il secondo al variare del parametro reale α.

$$\mathfrak{A} = \lim_{n\to\infty} n^2\left(\cos^{1/5}\left(\tfrac{1}{n}\right) - 1\right) \qquad \mathfrak{B}_\alpha = \lim_{n\to\infty} \frac{n^\alpha - 2\sqrt{n}}{(\sqrt{n}-3)(2-3\sqrt{n})}.$$

✍ Soluzione

$$\mathfrak{A} = \lim_{n\to\infty} n^2 \left(\cos^{1/5}\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\left[\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right]^{1/5} - 1}{1/n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left[\cos\left(\frac{1}{n}\right) - 1 + 1\right]^{1/5} - 1}{1/n^2} =$$

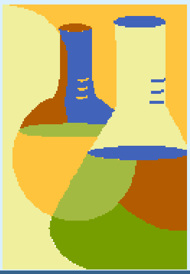
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\left[1 + \left(\cos\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right)\right]^{1/5} - 1}{\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right)} \frac{\cos\left(\frac{1}{n}\right) - 1}{1/n^2} \overset{(G)\ (B)}{=\!=\!=} \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{10}\ ;$$

$$\mathfrak{B}_\alpha = \lim_{n\to\infty} \frac{n^\alpha - 2\sqrt{n}}{(\sqrt{n} - 3)(2 - 3\sqrt{n})} = \lim_{n\to\infty} -\frac{n^\alpha - 2\sqrt{n}}{3n} = \begin{cases} -\infty & \text{se } \alpha > 1, \\ -\frac{1}{3} & \text{se } \alpha = 1, \\ 0 & \text{se } \alpha < 1. \end{cases}$$

TEMA 40

Prova scritta del 9 gennaio 2006

Esercizio 40.1



Una miscela è ottenuta mescolando tre sostanze A, B, C e C costituisce i 5/12 del totale. Aggiungendo alla miscela 5 litri della sostanza A e 1 litro della sostanza B, si otterrebbe una miscela in cui le tre sostanze sarebbero presenti in uguale misura. Quale percentuale della miscela iniziale è costituita dalla sostanza A?

✍ Soluzione

Indichiamo con C_A, C_B e C_C la percentuale della miscela iniziale T costituita rispettivamente dalle sostanze A, B e C. Sappiamo che $C_C = \frac{5}{12}$. Allora

$$\begin{cases} \dfrac{5}{12}T = \dfrac{1}{3}(T+5+1) \\ C_A T + 5 = \dfrac{1}{3}(T+5+1) \\ C_B T + 1 = \dfrac{1}{3}(T+5+1) \end{cases}$$

pertanto $C_A = \dfrac{5}{24} = \dfrac{125}{6}\%$ (ed analogamente $C_B = \frac{3}{8} = \frac{75}{2}\%$).

Esercizio 40.2

Risolvere le disequazioni

$$A)\ \frac{x-\sqrt{3x+2}}{x-3} \geqslant 0, \qquad B)\ \big||x|-6\big| > |x|.$$

✍ Soluzione

A) C.E.: $\begin{cases} 3x+2 \geqslant 0 \\ x-3 \neq 0 \end{cases}$ cioè $x \geqslant -\frac{2}{3}$ e $x \neq 3$.

Sol.: Studiamo separatamente il segno di numeratore e denominatore:

$$x - \sqrt{3x+2} \geqslant 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} x \geqslant 0 \\ x^2 \geqslant 3x+2 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad x \geqslant \frac{3+\sqrt{17}}{2}.$$

	$-2/3$	3	$\frac{3+\sqrt{17}}{2}$
$\operatorname{sgn}(x - \sqrt{3x+2} \geqslant 0)$	-	-	+
$\operatorname{sgn}(x-3>0)$	-	+	+
	⊕	⊝	⊕

Pertanto la soluzione è $\left[-\frac{2}{3}, 3\right) \vee \left[\frac{3+\sqrt{17}}{2}, +\infty\right)$.

B) Occorre e basta che la distanza di $|x|$ da 6 sia maggiore di quella da 0, per cui la disequazione è risolta da $|x| < 3$, dunque $-3 < x < 3$.

Qualora non si sia notato questo, è comunque possibile applicare la regola generale: studiamo dapprima i segni delle espressioni che si trovano all'interno del segno di modulo e riportiamoli su uno stesso grafico:

		-6	0	$+6$
$\operatorname{sgn}(\lvert x\rvert - 6)$	$+$	$-$	$-$	$+$
$\operatorname{sgn}(x)$	$-$	$-$	$+$	$+$
	A	B	C	D

Notiamo che l'asse reale risulta diviso in quattro intervalli:

$$x < -6 \qquad -6 \leqslant x < 0 \qquad 0 \leqslant x < 6 \qquad x \geqslant 6$$

in ognuno dei quali l'equazione equivale a uno dei seguenti sistemi:

$$\left.\begin{array}{lll}
A := \begin{cases} x < -6 \\ +((-x)-6) > (-x) \end{cases} & \Rightarrow & -6 > 0 \\
B := \begin{cases} -6 \leqslant x < 0 \\ -((-x)-6) > (-x) \end{cases} & \Rightarrow & x > -3 \\
C := \begin{cases} 0 \leqslant x < 6 \\ -((+x)-6) > (+x) \end{cases} & \Rightarrow & x < +3 \\
D := \begin{cases} x \geqslant 6 \\ +((+x)-6) > (+x) \end{cases} & \Rightarrow & -6 > 0
\end{array}\right] \Rightarrow \qquad -3 < x < 3.$$

Esercizio 40.3

Determinare le equazioni degli asintoti al diagramma della funzione

$$f(x) = \sqrt{x^2+3x}\, e^{1/x}.$$

✍ Soluzione

C.E.: deve essere $\begin{cases} x^2+3x \geqslant 0 \\ x \neq 0 \end{cases}$ dunque f è definita per $x \leqslant -3 \vee x > 0$.

$$\left.\begin{aligned}
&\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \\
&\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = -1 \\
&\lim_{x\to-\infty} f(x)+x \overset{(x<0)}{=\!=} \lim_{x\to-\infty} -\sqrt{1+\frac{3}{x}}\,\frac{e^{1/x}-1}{1/x} + x\left(-\sqrt{1+\frac{3}{x}}+1\right) \overset{(F)}{=\!=} -\frac{5}{2}
\end{aligned}\right]$$

$y = -x - 5/2$ è asintoto obliquo per $x \to -\infty$;

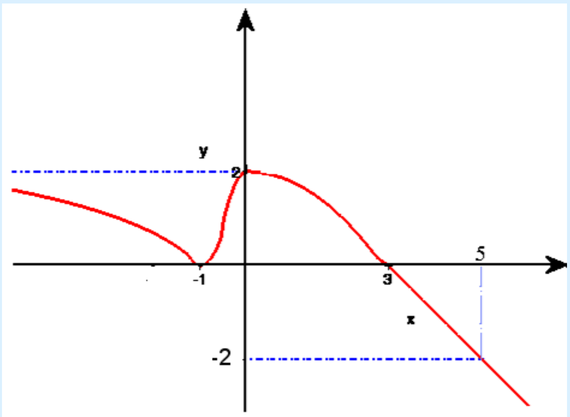
$\lim_{x\to0^+} f(x) = +\infty$ $\quad x = 0$ è asintoto verticale;

$$\left.\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \\
&\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 \\
&\lim_{x\to+\infty} f(x)-x \overset{(x>0)}{=\!=} \lim_{x\to+\infty} \sqrt{1+\frac{3}{x}}\,\frac{e^{1/x}-1}{1/x} + x\left(\sqrt{1+\frac{3}{x}}-1\right) \overset{(F)}{=\!=} \frac{5}{2}
\end{aligned}\right]$$

$y = x + 5/2$ è asintoto obliquo per $x \to +\infty$;

Esercizio 40.4

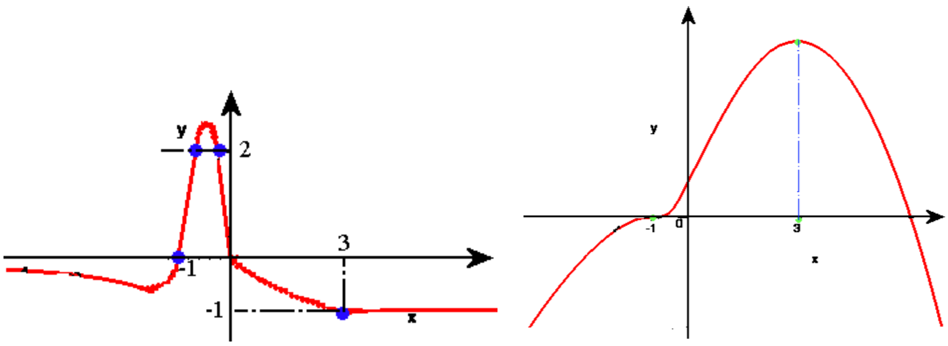
Quello mostrato in figura è il diagramma della funzione derivabile $y = f(x)$ definita su tutto $\mathbb{R}$ (si noti che, per $x \geqslant 3$, tale diagramma è una semiretta).



- ❦ Tracciare un diagramma plausibile per ciascuna delle funzioni $y' = f'(x)$ e $g(x) = \int_{-1}^{x} f(t)\,dt$ (cioè g è la primitiva di f su $\mathbb{R}$ che in -1 vale 0);
- ❦ stabilire quindi il numero delle soluzioni dell'equazione $f'(x) = 2$;
- ❦ determinare infine $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x^2}$.

✍ Soluzione

- ❦ Vedi figg. 40.1.



(a) $y' = f'(x)$ (b) $g(x) = \int_{-1}^{x} f(t)\,dt$

Figura 40.1.

- Da $2 = f(0) - f(-1) = \int_{-1}^{0} f'(x)\,dx$, dal fatto che f' è continua con $f'(-1) = f'(0) = 0$ e dal teorema del valor medio (o di Lagrange[*]) segue che $\max f'(x) > 2$. Allora $f'(x) = 2$ ha due soluzioni.
- Per $x > 3$ si ha $g(x) = \int_{-1}^{3} f(t)\,dt + \int_{3}^{x} f(t)\,dt$. Per $t \geqslant 3$ si ha $f(t) = 3 - t$, quindi $g(x) = \int_{-1}^{3} f(t)\,dt - 9 + \frac{9}{2} + 3x - \frac{x^2}{2}$ per cui $\frac{g(x)}{x^2} \to -\frac{1}{2}$ per $x \to +\infty$.

Esercizio 40.5

Mostrare che la funzione $g(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ assume su $\mathbb{R}$ valore minimo e valore massimo e determinare tali valori.

✍ Soluzione

- g è contina su $\mathbb{R}$;
- g è positiva in $(0, +\infty)$, negativa in $(-\infty, 0)$ e $g(x) = 0$ se e solo se $x = 0$;
- $\lim_{x \to \pm\infty} g(x) = 0^{\pm}$;

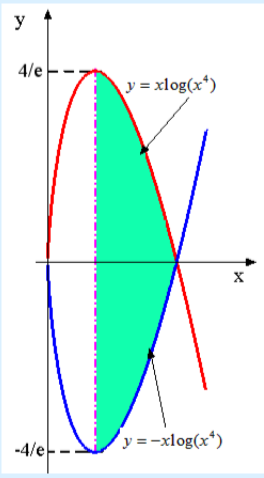
allora g assume sia minimo che massimo.

- g è derivabile con $g'(x) = \dfrac{(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$ quindi
  - $g'(x) = 0$ se e solo se $x = \pm 1$;
  - g è decrescente su $(-\infty, -1]$ e su $[+1, +\infty)$,
  - g è crescente su $[-1, +1]$;

  allora
  - $x = -1$ è punto di minimo assoluto e $g(-1) = -\frac{1}{2}$,
  - $x = +1$ è punto di massimo assoluto e $g(+1) = +\frac{1}{2}$.

Esercizio 40.6

Calcolare l'area della regione colorata in figura (i logaritmi sono intesi in base "e").

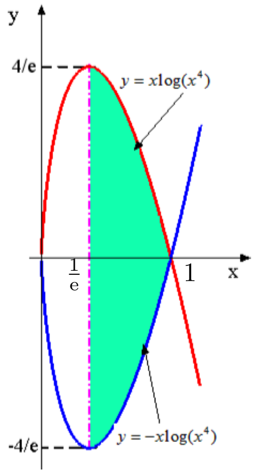


---

[*] Sia $f(x) : [a, b] \to \mathbb{R}$. Se
- f è continua in $[a, b]$
- f è derivabile in (a, b)

allora esiste $c \in (a, b)$ tale che $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$

✍ Soluzione



Nel punto $(x_0, x_0 \ln(x_0^4) = {}^4\!/e)$ la funzione $x \ln(x^4)$ ha un massimo.

Da $\frac{d}{dx}(4x \ln x) = 4(\ln x + 1) = 0$ se e solo se $x = {}^1\!/e$, si ha $4x \ln x = {}^4\!/e$ se e solo se $x = {}^1\!/e$.

Inoltre $x \ln(x^4) = 0$ se e solo se $x = 1$.

Stante la simmetria $x \log x^4 = -(-x \log x^4)$, l'area richiesta è, integrando per parti†

$$2 \cdot \int_{1/e}^{1} -4x \ln x \, dx = -4 \cdot \int_{1/e}^{1} 2x \ln x \, dx \overset{\text{P.P.}}{=\!=} -4 \left(\left[x^2 \ln x\right]_{x=1/e}^{x=1} - \int_{1/e}^{1} x \, dx \right) =$$

$$= -4 \left(\frac{1}{e^2} - \left[\frac{x^2}{2}\right]_{x=1/e}^{x=1} \right) = 2 - \frac{6}{e^2} \, .$$

Esercizio 40.7

Utilizzando i risultati ottenuti nel quesito 5 a fronte, studiare la funzione f così definita:

$$f(x) = \tan\left(\frac{\pi x}{x^2 + 1}\right) .$$

Stabilire quindi se l'equazione $f(x) = 4x$ ammette almeno 5 soluzioni distinte giustificando la risposta.

✍ Soluzione

Osserviamo che si ha $f(x) = \tan(\pi \cdot g(x))$ dove $g(x)$ è definita al quesito 5 nella pagina precedente e ricordiamo che $-\frac{1}{2} \leqslant g(x) \leqslant +\frac{1}{2}$.

- Insieme di definizione: deve essere $-\frac{\pi}{2} < \pi \cdot g(x) < \frac{\pi}{2}$ quindi $x \neq \pm 1$.
- f è DISPARI e $\operatorname{sgn}(f(x)) = \operatorname{sgn}(x)$.
- Limiti agli estremi dell'insieme di definizione ed equazioni degli eventuali asintoti:

  $$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0^{\pm}, \qquad \lim_{x \to \pm 1} f(x) = \pm\infty$$

  quindi $y = 0$ è asintoto orizzontale e $x = \pm 1$ sono asintoti verticali.
- Derivata prima: $f'(x) = \dfrac{\pi \cdot g'(x)}{\cos^2(\pi \cdot g(x))}$.
- Eventuali punti estremanti: osserviamo che $\operatorname{sgn}(f'(x)) = \operatorname{sgn}(g'(x))$ quindi f è

† $\int h(x) g'(x) \, dx = h(x) g(x) - \int h'(x) g(x) \, dx$

$$\begin{array}{lcl} h(x) = \ln x & \rightsquigarrow & h'(x) = {}^1\!/x \\ g(x) = \int g'(x) \, dx = 2x & \leftsquigarrow & g'(x) = x^2 \end{array}$$

- ❧ decrescente su $(-\infty, -1)$ e su $(+1, +\infty)$,
- ❧ crescente su $(-1, +1)$,
- ❧ non ci sono estremanti.

❦ Diagramma qualitativo di f: vedi fig. 40.2.

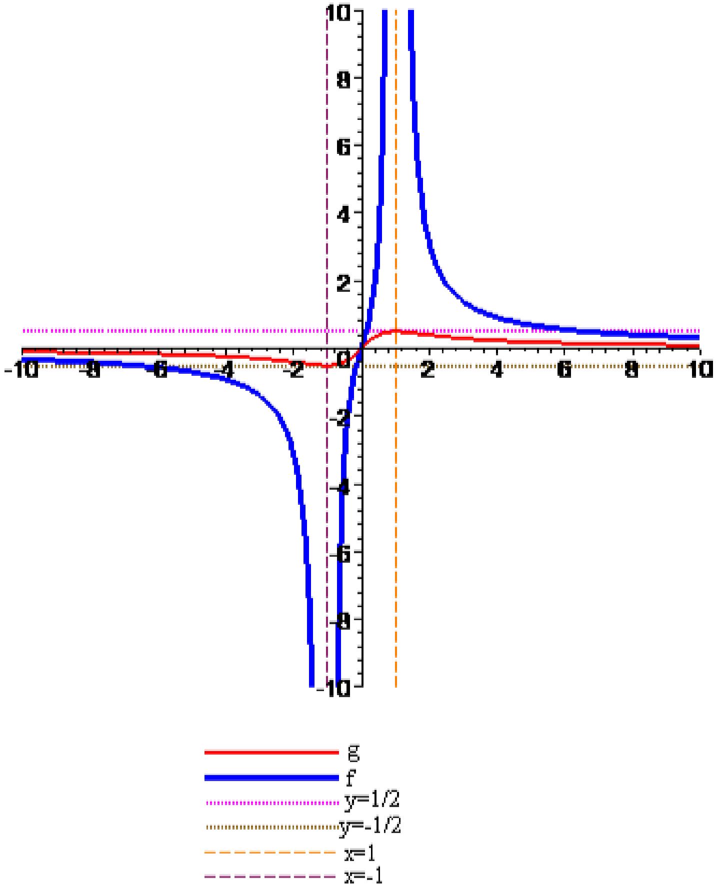
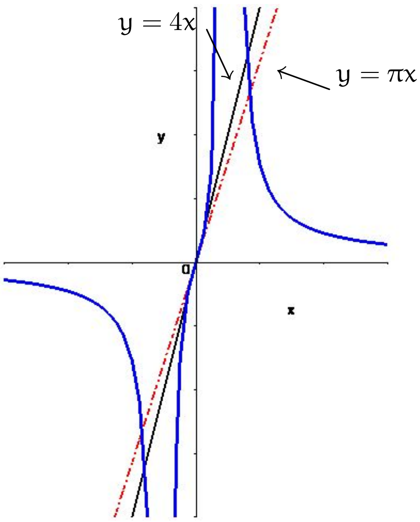
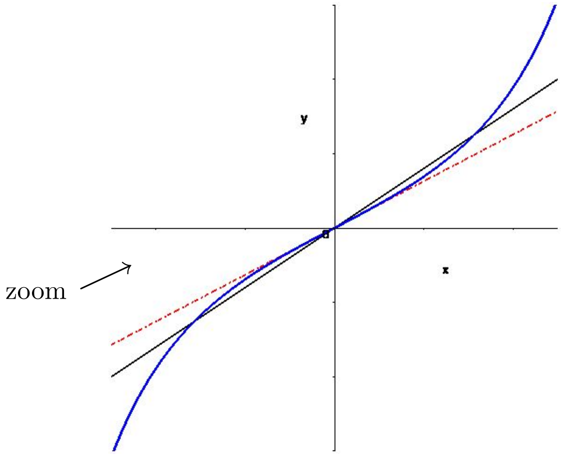


Figura 40.2. $f(x) = \tan\left(\dfrac{\pi x}{x^2+1}\right)$

❦ f è dispari quindi abbiamo evidentemente o 3 o 5 intersezioni: ❶ una intersezione si ha nell'intervallo $(-\infty, -1)$ e dunque per simmetria una nell'intervallo $(+1, +\infty)$; ❷ una intersezione in $(0, 0)$; ❸ controlliamo se in $(0, +1)$ (e dunque automaticamente anche in $(-1, 0)$) c'è un'altra intersezione: $f'(0) = \pi < 4$ quindi la situazione reciproca dei diagrammi $y = f(x)$ e $y = 4x$ è la seguente


$y = 4x$
$y = \pi x$
y
0
x


y
0
x
zoom

TEMA 41

Prova scritta del 21 febbraio 2006

Esercizio 41.1

L'altro ieri ho acquistato alcune azioni. Ieri quelle azioni si sono svalutate del 2%, ma oggi, in seguito a una rivalutazione, quelle azioni valgono esattamente lo stesso importo che l'altro ieri avevo speso per acquistarle. Di quale percentuale si sono rivalutate oggi rispetto a ieri?

✍ Soluzione

Da $\quad \left(1-\frac{2}{100}\right)+\frac{x}{100}\cdot\left(1-\frac{2}{100}\right)=1 \quad$ segue $\quad x=\dfrac{100}{49} \quad$ cioè si sono rivalutate del $\frac{100}{49}\%$.

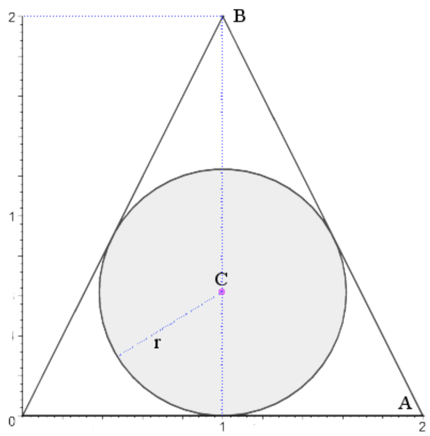
Esercizio 41.2

Dotato il piano di un riferimento cartesiano ortogonale Oxy, si scriva l'equazione della circonferenza inscritta nel triangolo di vertici (0,0), (2,0) e (1,2).

✍ Soluzione

Il triangolo è isoscele e ha per asse di simmetria la retta di equazione $x = 1$: su di essa deve cadere il centro della circonferenza. Tale circonferenza deve inoltre passare per il punto $(1, 0)$. La sua equazione sarà dunque $x^2+y^2-2x+by+1 = 0$ con b da determinarsi, $b < 0$ (il centro ha ordinata positiva). Imponendo, ad esempio, la tangenza alla retta di equazione $y = 2x$ (su cui giace uno dei lati), si ottiene che l'equazione $5x^2-2(1-b)x+1 = 0$ deve avere una sola soluzione (doppia). Questo accade se e solo se $b^2 - 2b - 4 = 0$ cioè (ricordando che deve essere $b > 0$) $b = 1-\sqrt{5}$. Pertanto l'equazione della circonferenza è

$$x^2 + y^2 - 2x + (1 - \sqrt{5})y + 1 = 0 \; .$$



Esercizio 41.3

Studiare la funzione f così definita: $f(x) = (\ln x)^3$ dove il logaritmo è inteso in base "e". Determinare quindi il numero delle soluzioni dell'equazione $f(x) = 2(x-1)$ e il numero delle soluzioni dell'equazione $f(x) = \frac{8}{9}(x-1)$.

✍ Soluzione

- Studio della funzione:
  - Insieme di definizione: $x > 0$.
  - Limiti agli estremi dell'insieme di definizione ed equazioni degli eventuali asintoti:
  $$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$
  quindi $x = 0$ è asintoto verticale e non ci sono asintoti né orizzontali né obliqui.
  - Derivata prima: $f'(x) = 3\dfrac{\ln^2 x}{x}$.
  - Eventuali punti estremanti:
    - $f'(x) = 0$ se e solo se $x = 1$,
    - f è non decrescente per $x > 0$,

    pertanto non vi sono estremanti.
  - Derivata seconda: $f''(x) = 3\dfrac{\ln x}{x^2}(2 - \ln x)$.
  - Verso della concavità:
    - $f''(x) = 0$ se e solo se $x = 1$ o $x = e^2$,
    - f è convessa per $1 < x \leqslant e^2$,
    - f è concava per $0 < x \leqslant 1$ e per $x \geqslant e^2$.

    pertanto $x = 1$ e $x = e^2$ sono punti di flesso ($x = 1$ ha tangente orizzontale).
  - Diagramma qualitativo di f: vedi fig. 41.1

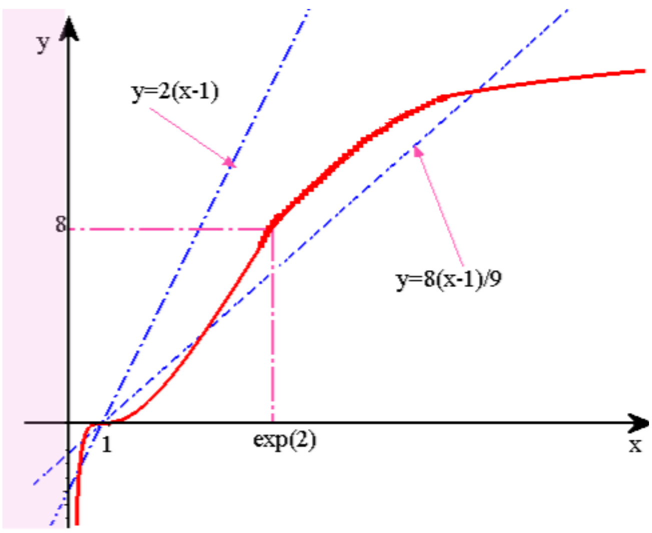


Figura 41.1. $f(x) = (\log x)^3$

- Numero delle soluzioni dell'equazione $f(x) = 2(x-1)$: ci sono evidentemente almeno due soluzioni distinte, una per $x \in (0,1)$ e una per $x = 1$; controlliamo se ce ne sono altre per $x > 1$. Poiché $2 > \dfrac{12}{e^2} = f'(e^2) = \max\limits_{x>1}\{\, f'(x)\,\}$, l'equazione ha esattamente 2 soluzioni distinte.

- Numero delle soluzioni dell'equazione $f(x) = \dfrac{8(x-1)}{9}$: analogamente al punto precedente, ci sono sicuramente almeno due soluzioni distinte, controlliamo se ce ne sono altre per $x > 1$. Poiché $\left.\dfrac{8(x-1)}{9}\right|_{x=e^2} < 8 = f(e^2)$ (infatti è $e^2 < 10$), l'equazione ha esattamente 4 soluzioni distinte.

Esercizio 41.4

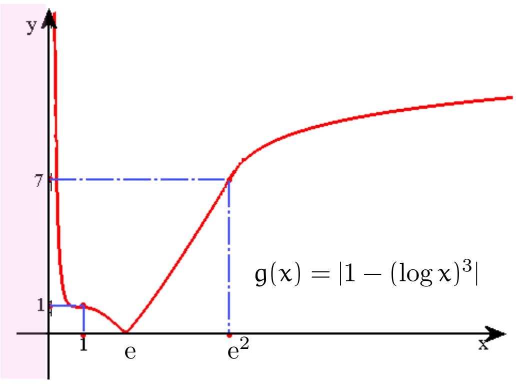
22 ragazzi, dei quali 5 sono italiani e 4 brasiliani, vogliono ripartirsi in due squadre da 11 giocatori ciascuna per giocare una partita di calcio. Tra di essi, solo due sono disposti a giocare in porta e non sono nè italiani nè brasiliani, mentre tutti gli altri possono ricoprire qualunque altro ruolo. I 5 ragazzi italiani desiderano giocare tutti nella stessa squadra e così pure i 4 ragazzi brasiliani; italiani e brasiliani possono, ma non devono necessariamente, giocare nella stessa squadra. Se si vogliono accogliere tutte le richieste, in quanti diversi modi possono essere formate le due squadre?

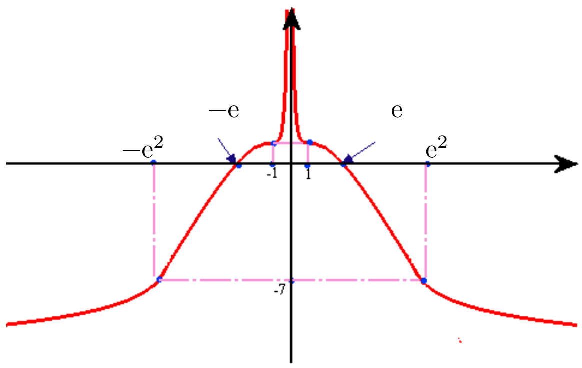
✍ Soluzione

Se brasiliani e italiani giocano insieme si hanno $(20-9) \cdot 2 = 22$ possibilità.
Se brasiliani e italiani giocano in squadre diverse si hanno $\binom{20-9}{5} \cdot 2 = 462 \cdot 2 = 924$ possibilità.
In totale 22+924= 946 possibilità.

Esercizio 41.5

Valendosi dei risultati ottenuti rispondendo al quesito 3 a fronte, tracciare i diagrammi delle funzioni
$$g(x) = |1-(\log x)^3| \qquad \text{e} \qquad h(x) = 1-(\log|x|)^3.$$





$h(x) = 1-(\log|x|)^3$

Esercizio 41.6

Determinare le equazioni degli asintoti al diagramma della funzione $f(x) = xe^{(x-1)/(x+3)}$.

✍ Soluzione

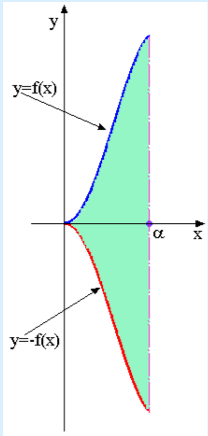
C.E. $x \neq -3$

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{x\to -3^-} f(x) = -\infty\\ &\lim_{x\to -3^+} f(x) = 0^+\end{aligned}\right] \Rightarrow \quad x = -3 \text{ è asintoto verticale}$$

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty\\ &\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = e\\ &\lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - e\cdot x) = \lim_{x\to\pm\infty} xe\left(e^{-\frac{x-1}{x+3}} - 1\right) =\\ &\qquad = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{e^{-\frac{4}{(x+3)}}-1}{-\frac{4}{(x+3)}}\right)\frac{-4xe}{x+3} \overset{(F)}{=\!=} -4e\end{aligned}\right] \Rightarrow \begin{aligned}&y = e(x-4)\\ &\text{è asintoto obliquo}\\ &\text{per } x \to \pm\infty\end{aligned}$$

Esercizio 41.7

Sia $f(x) = 2x\sin x + x^2\cos x$.



Determinare α in modo che l'area della regione colorata in figura valga $\pi^2/2$ (il segmento che passa per il punto $(\alpha, 0)$ e delimita la regione è verticale).

✍ Soluzione

Per $x \in \mathbb{R}$, integrando per parti* si ha

$$\int f(x)\,dx = \int x^2\cos x\,dx + \int 2x\sin x\,dx \overset{\text{P.P.}}{=\!=} x^2\sin x - \int 2x\sin x\,dx + \int 2x\sin x\,dx =$$
$$= x^2\sin x + k, \qquad k\in\mathbb{R}.$$

$f(x)$ è sicuramente positiva se $0 < x \leqslant \frac{\pi}{2}$. Vediamo se la soluzione del problema sta in $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$. Se $\alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$, l'area cercata vale $2\int_0^\alpha 2x\sin x + x^2\cos x\,dx = 2\alpha^2\sin\alpha$. Si ha $\alpha^2\sin\alpha = \frac{\pi}{4}$ con $0<\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$ se e solo se $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

---

*$\int h(x)g'(x)\,dx = h(x)g(x) - \int h'(x)g(x)\,dx$

$$\begin{array}{lcl} h(x) = x^2 & \rightsquigarrow & h'(x) = 2x\\ g(x) = \int g'(x)\,dx = \sin x & \leftsquigarrow & g'(x) = \cos x\end{array}$$

TEMA 42

Seconda prova pre-esame a.a. 2005/06
21 marzo 2006

Esercizio 42.1

Determinare le equazioni degli asintoti al diagramma della funzione

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 5e^{3/x}}.$$

✍ Soluzione

❦ La funzione è definita per $\begin{cases} x^2 + 5 \geqslant 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow x \neq 0.$

❦ Osserviamo che $\sqrt{x^2+5} = \sqrt{1+\frac{5}{x^2}} \cdot |x| = \begin{cases} -x\sqrt{1+\frac{5}{x^2}} & \text{per } x < 0 \\ +x\sqrt{1+\frac{5}{x^2}} & \text{per } x > 0 \end{cases}$ pertanto

$$\left.\begin{aligned}
&\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \\
&\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = -1 \\
&\lim_{x\to-\infty} f(x) + x = \lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+5e^{3/x}} - \sqrt{x^2+5} + \sqrt{x^2+5} + x = \\
&\qquad = \lim_{x\to-\infty} \frac{3}{x}\sqrt{x^2+5}\,\frac{\left(e^{3/x}-1\right)}{3/x} - \frac{5}{x}\,\frac{\sqrt{1+\frac{5}{x^2}}-1}{5/x^2} \overset{(F)(G)}{=\!=\!=} -3
\end{aligned}\right]\quad \begin{aligned} &y = -x-3 \\ &\text{è asintoto obliquo per} \\ &x \to -\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0^+ \\
&\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty \qquad \Rightarrow \qquad x = 0 \text{ è asintoto verticale}
\end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \\
&\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 \\
&\lim_{x\to+\infty} f(x) - x = \lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+5e^{3/x}} - \sqrt{x^2+5} + \sqrt{x^2+5} - x = \\
&\qquad = \lim_{x\to-\infty} \frac{3}{x}\sqrt{x^2+5}\,\frac{\left(e^{3/x}-1\right)}{3/x} + \frac{5}{x}\,\frac{\sqrt{1+\frac{5}{x^2}}-1}{5/x^2} \overset{(F)(G)}{=\!=\!=} +3
\end{aligned}\right]\quad \begin{aligned} &y = x+3 \\ &\text{è asintoto obliquo per} \\ &x \to +\infty \end{aligned}$$

Esercizio 42.2

Stabilire quante soluzioni ha l'equazione $x^5 - 13x + 13 = 0$.

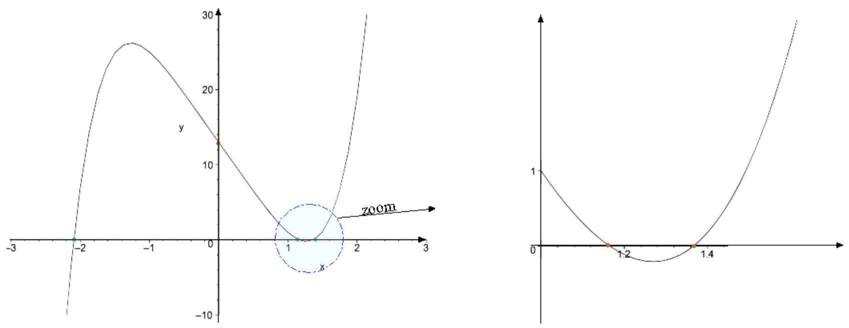
✍ Soluzione

Poniamo $g(x) = x^5 - 13x + 13$: tale funzione può avere al massimo 5 zeri (cioè 5 soluzioni distinte di $g(x) = 0$) poiché è un polinomio di quinto grado. Studiamone l'andamento:

- g è definita e continua su $\mathbb{R}$;
- $\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = \pm\infty$;
- $g'(x) = 5x^4 - 13$ quindi g è
  - crescente su $\left(-\infty, -\sqrt[4]{\frac{13}{5}}\right)$ e su $\left(+\sqrt[4]{\frac{13}{5}}, +\infty\right)$;
  - decrescente su $\left(-\sqrt[4]{\frac{13}{5}}, +\sqrt[4]{\frac{13}{5}}\right)$;
  - $x = -\sqrt[4]{\frac{13}{5}}$ è punto di massimo assoluto;
  - $x = +\sqrt[4]{\frac{13}{5}}$ è punto di minimo assoluto:

		$-\sqrt[4]{\frac{13}{5}}$		$+\sqrt[4]{\frac{13}{5}}$	
g'	$+$		$-$		$+$
g	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

- poiché $g\left(-\sqrt[4]{\frac{13}{5}}\right) > 0$, $g\left(+\sqrt[4]{\frac{13}{5}}\right) < 0$ e $g(0) = +13$, g ha l'andamento seguente:



Pertanto l'equazione $g(x) = 0$ ha 3 soluzioni distinte :
una in $(-\infty, -\sqrt[4]{\frac{13}{5}})$, una in $(0, +\sqrt[4]{\frac{13}{5}})$ ed infine una in $(+\sqrt[4]{\frac{13}{5}}, +\infty)$.

Esercizio 42.3

Studiare la funzione f così definita: $f(x) = x^4 \ln x$ (il logaritmo è inteso in base "e").

✍ Soluzione

- Insieme di definizione: $x > 0$.

- Limiti agli estremi dell'insieme di definizione:
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0^-, \qquad \lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty,$$
Da $f(1) = 0$ possiamo già dedurre che c'è almeno un punto di minimo assoluto fra 0 e 1.

- Equazioni degli eventuali asintoti: $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ dunque nessun asintoto.

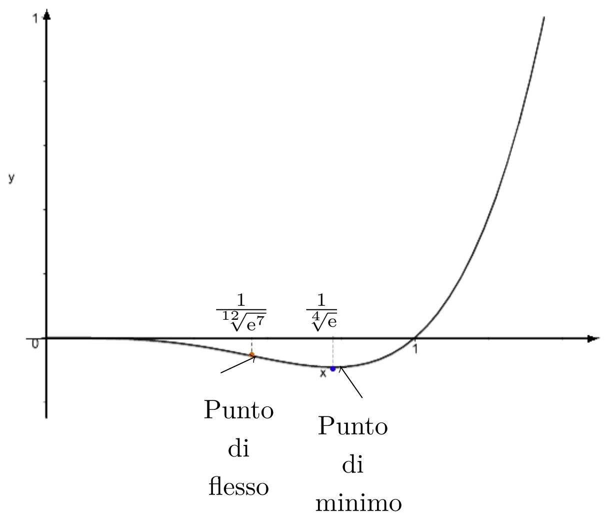
- Derivata prima: $f'(x) = (4\ln(x) + 1)x^3$ $\forall x > 0$ e $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = 0$.

- Eventuali estremanti: f è
  - crescente su $\left(\frac{1}{\sqrt[4]{e}}, +\infty\right)$;
  - decrescente su $\left(0, \frac{1}{\sqrt[4]{e}}\right)$;
  - $x = \frac{1}{\sqrt[4]{e}}$ è punto di minimo e $f\left(\frac{1}{\sqrt[4]{e}}\right) = -\frac{1}{4e}$.

- Derivata seconda: $f''(x) = (12\ln(x) + 7)x^2$ $\forall x > 0$.

- Verso della concavità: f è
  - convessa su $\left[\frac{1}{e^{7/12}}, +\infty\right)$;
  - concava su $\left(0, \frac{1}{e^{7/12}}\right]$;
  - $x = \frac{1}{e^{7/12}}$ è punto di flesso.

- Diagramma qualitativo di f:



Esercizio 42.4

Al variare del parametro reale α, si consideri la funzione reale di variabile reale

$$g_\alpha(x) = |x - \alpha|\ x\ \log(x + 2)$$

(il logaritmo è inteso in base "e"). Dopo aver determinato il dominio D comune a tutte le funzioni g_α, si stabilisca, al variare di α, in quali punti di D la funzione g_α è derivabile.

✍ Soluzione

- $D := (-2, +\infty)$.

❦ Sia $x \in D$, allora

$$\begin{cases} \text{se } \alpha \leqslant -2, & g_\alpha(x) = (x-\alpha)\ x\ \log(x+2); \\ \text{se } \alpha > -2, & g_\alpha(x) = \begin{cases} -(x-\alpha)\ x\ \log(x+2) & \text{se } -2 < x < \alpha, \\ (x-\alpha)\ x\ \log(x+2) & \text{se } x \geqslant \alpha. \end{cases} \end{cases}$$

❦ Come prodotto di funzioni derivabili, g_α è derivabile in ogni punto di D in cui $x-\alpha \neq 0$, dunque

- ❧ g_α è derivabile in ogni punto di D se $\alpha \leqslant -2$;
- ❧ sia $\alpha > -2$; il rapporto incrementale di g_α in $x = \alpha$ vale $\frac{g_\alpha(x)}{x-\alpha}$, per cui ammette limite finito per $x \to \alpha$ se e solo se $\lim_{x\to\alpha} x\ln(x+2) = 0$, il che implica $\alpha = 0$ o $\alpha = -1$. Concludendo, g_{-1} e g_0 sono derivabili in D, mentre se $\alpha > -2$, $\alpha \neq 0$ e $\alpha \neq -1$, g_α non è derivabile in α e solo in α.

Esercizio 42.5

Sia g la funzione reale di variabile reale così definita

$$g(x) = \begin{cases} x^4 \ln|x| & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

(il logaritmo è inteso in base "e"). Rappresentare graficamente la regione di piano

$$\mathcal{G} := \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; g(x) \leqslant y \leqslant -g(x) \right\}$$

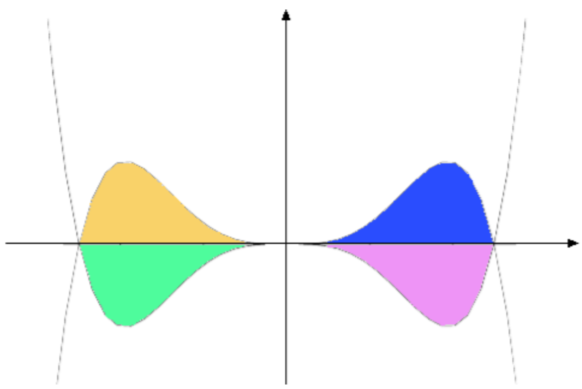
e determinarne l'area (può essere utile tenere presente i risultati ottenuti per la funzione f di cui all'esercizio 3 nella pagina 218).

✍ Soluzione

Osserviamo che

$$g(x) = \begin{cases} x^4 \ln x, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ x^4 \ln(-x), & x < 0. \end{cases}$$

e che $g(x) = 0$ se e solo se $x = 0$ oppure $x = 1$, quindi $\mathcal{G}$ ha grafico



Per motivi di simmetria, integrando per parti*, l'area cercata vale:

$$\text{Area} = 4\left|\int_0^1 x^4 \ln x \, dx\right| = -4\left(\int_0^1 x^4 \ln x\, dx\right) \overset{\text{P.P.}}{=\!=}$$
$$= -4\left(\left[\frac{x^5}{5}\ln x\right]_{x\to 0}^{x=1} - \frac{1}{5}\int_0^1 x^4\, dx\right) = -4\left(0 - \left[\frac{x^5}{25}\right]_{x=0}^{x=1}\right) = \frac{4}{25}\,.$$

$^*\int h(x)k'(x)\,dx = h(x)k(x) - \int h'(x)k(x)\,dx$

$$\begin{array}{lcl} h(x) = \ln x & \rightsquigarrow & h'(x) = \frac{1}{x} \\ k(x) = \int k'(x)\,dx = \frac{x^5}{5} & \leftsquigarrow & k'(x) = x^4 \end{array}$$

Esercizio 42.6

Stabilire, giustificando la risposta, se l'integrale $\int_{-\pi}^{\pi} e^x \sqrt[3]{\sin x}\, dx$ è negativo, nullo o positivo.
N.B. Non si chiede di calcolare l'integrale!

✍ Soluzione

La funzione $x \mapsto \sqrt[3]{\sin x}$ è dispari, negativa su $(-\pi, 0)$ e positiva su $(0, +\pi)$ da cui

$$\int_{-\pi}^{0} \sqrt[3]{\sin x}\, dx = -\int_{0}^{+\pi} \sqrt[3]{\sin x}\, dx\,.$$

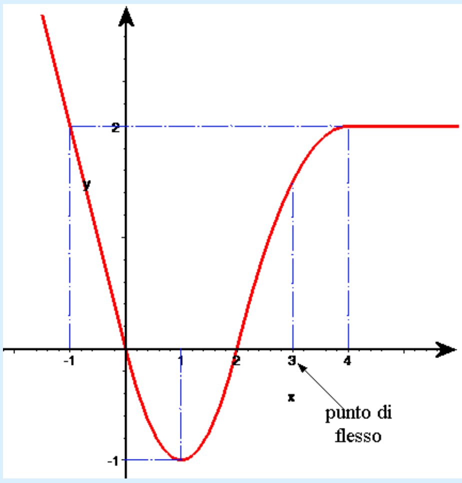
D'altra parte si ha $e^x < 1$ per $x \in (-\pi, 0)$ e $e^x > 1$ per $x \in (0, +\pi)$. Dunque si ha:

$$\underbrace{\int_{-\pi}^{0} \sqrt[3]{\sin x}\, dx}_{-B} < \underbrace{\int_{-\pi}^{0} e^x \sqrt[3]{\sin x}\, dx}_{A} < 0 < \underbrace{\int_{0}^{+\pi} \sqrt[3]{\sin x}\, dx}_{B} < \underbrace{\int_{0}^{+\pi} e^x \sqrt[3]{\sin x}}_{C}$$

Allora si ha $\int_{-\pi}^{\pi} e^x \sqrt[3]{\sin x}\, dx = C + A > C - B > 0$.

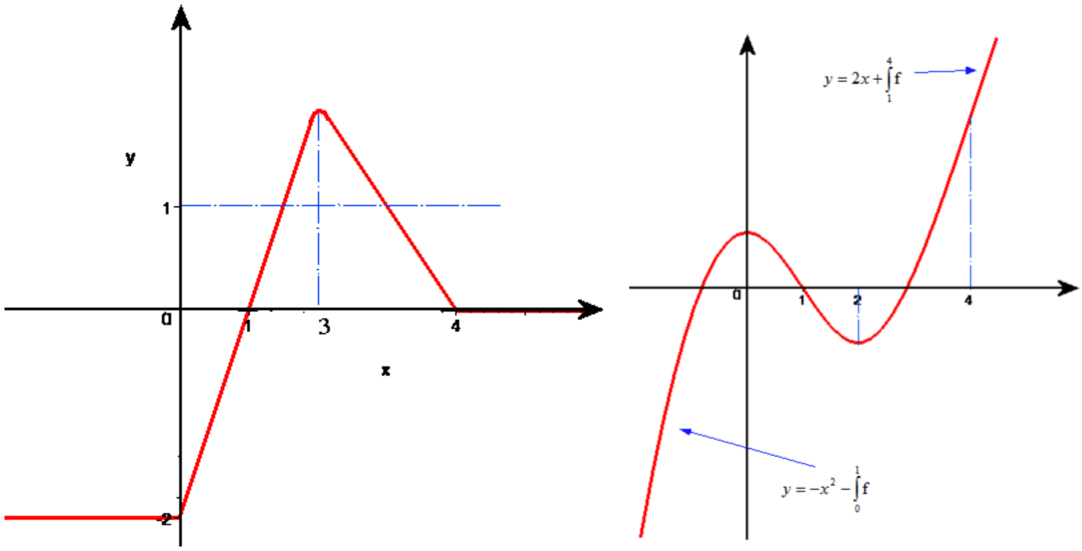
Esercizio 42.7

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile il cui diagramma è qualitativamente quello indicato in figura (si noti che sia per $x \leqslant 0$ sia per $x \geqslant 4$ il diagramma di f è una semiretta). Tracciare un diagramma plausibile per ciascuna delle funzioni $y' = f'(x)$ e $g(x) = \int_1^x f(t)\, dt$ (cioè g è la primitiva di f su $\mathbb{R}$ che in 1 vale 0). Stabilire quindi il numero delle soluzioni dell'equazione $f'(x) = 1$.



✍ Soluzione

$f'(x) = 1$ ha due soluzioni, in quanto deve essere $f'(3) = \max_{1\leqslant x \leqslant 4} f'(x) > 1$. Infatti, detta r la retta passante per i punti $(1, f(1))$ e $(4, f(4))$, r ha coefficiente angolare 1 e il diagramma di f sta sotto a r in un intorno destro di 1 e sopra r in un intorno sinistro di 4.



(a) $y' = f'(x)$ **(b)** $g(x) = \int_1^x f(t)\,dt$

Figura 42.1. *Esercizio 7 nella pagina precedente*

TEMA 43

Prova scritta del 3 aprile 2006

Esercizio 43.1

In un campeggio due amici A e B preparano un fuoco per cuocere i loro alimenti, usando 15 pezzi di legno uguali, 8 portati da A e 7 da B. Un terzo amico C chiede di poter utilizzare lo stesso fuoco per cucinare e vuole ricompensare gli amici con 3 euro. Qual è il modo equo di ripartire la somma fra A e B ?

✍ Soluzione

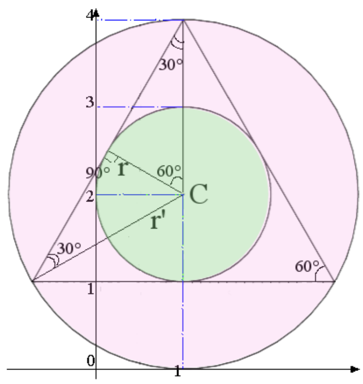
Ogni amico deve concorrere al fuoco con 5 pezzi di legno. I pezzi che avrebbe dovuto portare C sono stati portati 3 da A e 2 da B. Dunque ad A spettano $1,80$ euro e a B $1,20$ euro.

Esercizio 43.2

Dotato il piano di un riferimento cartesiano ortogonale Oxy, si determini il luogo dei punti che sono vertici di qualche triangolo equilatero circoscritto alla circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0$.

✍ Soluzione

Dalla figura è chiaro che i vertici di qualunque triangolo equilatero circoscritto stanno su una circonferenza concentrica a quella data. La circonferenza data ha centro in $C = (1, 2)$ e raggio $r = 1$. Il luogo cercato è pertanto la circonferenza di centro $C' = C$ e raggio $r' = 2r = 2$ cioè la circonferenza d'equazione $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$. Viceversa ogni punto di tale circonferenza è vertice di qualche triangolo circoscritto.



Esercizio 43.3

Risolvere la disequazione $\dfrac{1}{\sqrt{x+1}-5} > \sqrt{x+1}-1$.

✍ Soluzione

❦ C.E.: deve essere $\begin{cases} x+1 \geqslant 0 \\ \sqrt{x+1}-5 \neq 0 \end{cases}$ cioè $x \geqslant -1$ e $x \neq 24$.

❦ Sol.: $\dfrac{1}{\sqrt{x+1}-5} > \sqrt{x+1}-1 \Rightarrow \dfrac{1-(\sqrt{x+1}-1)\cdot(\sqrt{x+1}-5)}{\sqrt{x+1}-5} > 0$

$\Rightarrow \dfrac{1-(x+1-6\sqrt{x+1}+5)}{\sqrt{x+1}-5} > 0 \Rightarrow \dfrac{-x+6\sqrt{x+1}-5)}{\sqrt{x+1}-5} > 0.$

Studiamo separatamente il segno di numeratore e denominatore in $[-1, 24) \cup (24, +\infty)$:

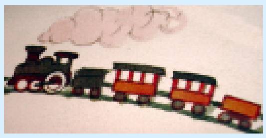
$$\text{Numeratore } > 0 \iff \sqrt{x+1} > \frac{x+5}{6} \iff 36\cdot(x+1) > x^2+10x+25 \iff$$
$$\iff -1 \leqslant x < 13-6\sqrt{5} \ \cup\ x > 13+\sqrt{5},$$
$$\text{Denominatore } > 0 \iff x > 24.$$

	-1 … $13-6\sqrt{5}$	$13-6\sqrt{5}$ … 24	24 … $13+6\sqrt{5}$	$13+6\sqrt{5}$ …
Numeratore >0	$-$	$+$	$+$	$-$
Denominatore >0	$-$	$-$	$+$	$+$
	$\oplus$	$\ominus$	$\oplus$	$\ominus$

Pertanto la soluzione è $x \in \left[-1, 13-6\sqrt{5}\right) \cup \left(24, 13+6\sqrt{5}\right)$.

Esercizio 43.4

Utilizzando 7 vagoni $V_1, V_2, ..., V_7$, tutti diversi tra loro, si deve formare un treno merci, la cui locomotiva deve stare in testa. Per ragioni tecniche, i vagoni V_1, V_2 e V_3 devono essere disposti in modo tale che tra V_2 e la locomotiva ci sia sempre V_1 o V_3, ma non entrambi. I tre vagoni e la locomotiva possono (ma non devono necessariamente) essere distanziati fra loro da altri vagoni. In quanti diversi modi possono essere allineati i vagoni a partire dalla locomotiva?



✍ Soluzione

Gli allineamenti possibili sono 7!: allora ognuno dei 3! allineamenti dei tre vagoni V_1, V_2 e V_3 è presente in $\frac{7!}{3!} = 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4 = 840$ allineamenti. Per questi tre vagoni, solo gli allineamenti V_1, V_2, V_3 e V_3, V_2 e V_1 sono accettabili. Si hanno dunque $2\cdot\frac{7!}{3!} = 1\,680$ allineamenti accettabili.

Esercizio 43.5

Calcolare

$$A = \lim_{x\to+\infty} \tan\left(\pi x\sqrt{\frac{x-5}{16x^3+3}}\right) \qquad \text{e} \qquad B = \lim_{x\to-\infty} \sin\left(\frac{\pi}{x}\sqrt{\frac{x^5+2}{36x^3-4}}\right).$$

✍ Soluzione

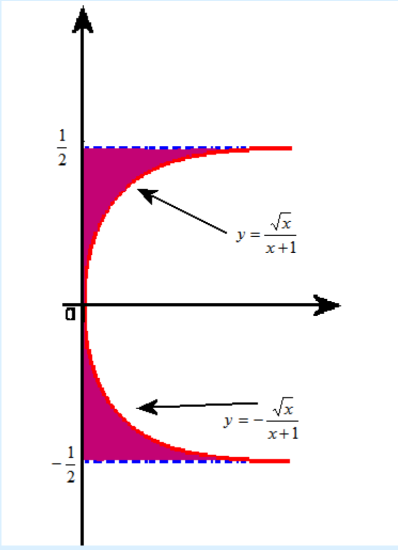
Si ricordi che $\sqrt{t^2} = |t| = \begin{cases} t & \text{per } t \geqslant 0 \\ -t & \text{per } t < 0 \end{cases}$ pertanto:

$$A = \lim_{x\to+\infty} \tan\left(\pi x\sqrt{\frac{x-5}{16x^3+3}}\right) = \lim_{x\to+\infty} \tan\left(\pi\frac{x}{4|x|}\sqrt{\frac{1-\frac{5}{x}}{1+\frac{3}{16x^3}}}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1,$$

$$B = \lim_{x\to-\infty} \sin\left(\frac{\pi}{x}\sqrt{\frac{x^5+2}{36x^3-4}}\right) = \lim_{x\to-\infty} \sin\left(\frac{\pi}{x}\,\frac{|x|}{6}\sqrt{\frac{1+\frac{2}{x^5}}{1-\frac{4}{36x^3}}}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}.$$

Esercizio 43.6

Calcolare l'area della regione colorata in figura.



✍ Soluzione

Si ha $\pm\frac{\sqrt{x}}{x+1} = \pm\frac{1}{2}$ se e solo se $x = 1$. Allora l'area cercata, per motivi di simmetria, è uguale a

$$2\left(1\cdot\frac{1}{2} - \int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{x+1}\,dx\right) .$$

Per $x \in [0,+\infty)$ si ha

$$\int \frac{\sqrt{x}}{x+1}\,dx \overset{\overbrace{2t\,dt=dx}^{t:=\sqrt{x}}}{=\!=\!=} 2\int \frac{t^2}{t^2+1}\,dt = 2\int \frac{t^2+1-1}{t^2+1}\,dt = 2t-2\arctan t+k = 2\sqrt{x}-2\arctan\sqrt{x}+k, \qquad k\in\mathbb{R}.$$

Dunque l'area vale

$$2\left(\frac{1}{2} - 2\left[\sqrt{x}-\arctan\sqrt{x}\right]_{x=0}^{x=1}\right) = \pi - 3 .$$

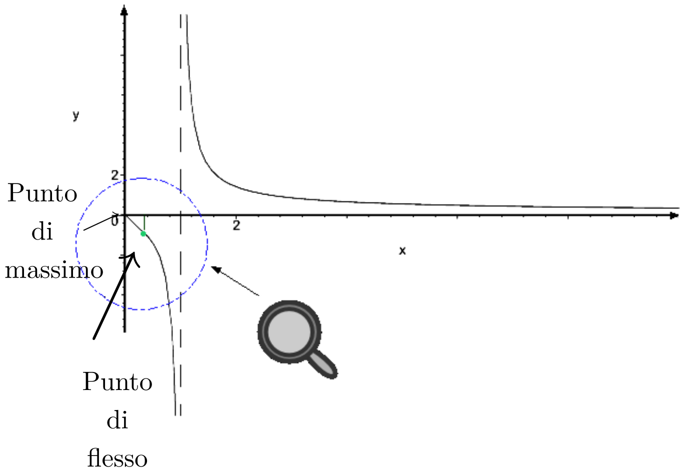
Esercizio 43.7

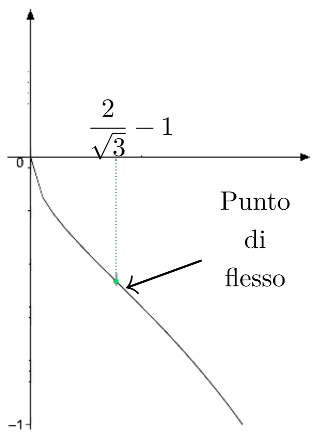
Studiare la funzione f così definita: $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x-1}$.

✍ Soluzione

- Insieme di definizione: $\begin{cases} x \geqslant 0 \\ x-1 \neq 0 \end{cases}$ cioè $[0,1) \cup (1,+\infty)$.
- f è negativa in $[0,1)$, positiva in $(1,+\infty)$.
- Limiti agli estremi dell'insieme di definizione ed equazioni degli eventuali asintoti:
$$\lim_{x\to0^+} \frac{\sqrt{x}}{x-1} = 0 \qquad \lim_{x\to1^-} \frac{\sqrt{x}}{x-1} = -\infty \qquad \lim_{x\to1^+} \frac{\sqrt{x}}{x-1} = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x-1} = 0^+$$
Pertanto $x = 1$ è asintoto verticale e $y = 0$ è asintoto orizzontale.

- Derivata prima ed eventuali punti estremanti: $f'(x) = -\dfrac{x+1}{2\sqrt{x}\,(x-1)^2}$ e $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = -\infty$.
  Poiché $f'(x) < 0$ per ogni x in $[0,1) \cup (1,+\infty)$, f è decrescente su $[0,1)$ e su $(1,+\infty)$ e non esistono altri punti estremanti oltre a $x = 0$ (punto di massimo).
- Derivata seconda: $f''(x) = \dfrac{3x^2+6x-1}{4x^{3/2}\,(x-1)^3}$.
- Verso della concavità: f è
  - convessa su $\left[0, \dfrac{-3+2\sqrt{3}}{3}\right)$ e su $(1,+\infty)$,
  - concava su $\left[\dfrac{-3+2\sqrt{3}}{3}, 1\right)$,
  - $x = \dfrac{-3+2\sqrt{3}}{3} = \dfrac{2}{\sqrt{3}} - 1$ è punto di flesso.
- Diagramma qualitativo di f:





TEMA 44

Prova scritta del 30 giugno 2006

Esercizio 44.1

In una famiglia, costituita da due genitori e da alcuni figli, l'età media è 18 anni. Senza il padre, che ha 38 anni, l'età media scende a 14 anni. Quanti sono i figli in quella famiglia?

✍ Soluzione

Siano P l'età del padre, M l'età della madre, F l'età dei figli ed n il numero di figli. Allora

$$\begin{cases} \dfrac{P+M+nF}{n+2} = 18 \\ \dfrac{M+nF}{n+1} = 14 \\ P = 38 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad n = 4\,.$$

Esercizio 44.2

Dotato il piano di un riferimento cartesiano ortogonale Oxy, al variare della coppia di parametri reali (α, β) si considerino gli insiemi

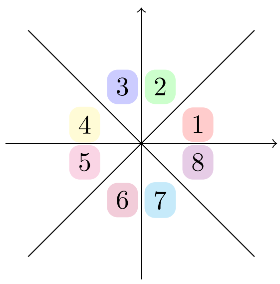
$$\begin{aligned} A_{(\alpha,\beta)} &= \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad \middle| \quad \max\{\, |x-\alpha|, |y-\beta| \,\} \leqslant 2 \right\}, \\ B_{(\alpha,\beta)} &= \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad \middle| \quad |x-\alpha| + |y-\beta| \leqslant 2 \right\}, \\ C &= \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad \middle| \quad x^2+y^2-4x \leqslant 0 \right\}. \end{aligned}$$

1. Si dia una rappresentazione grafica di $A_{(0,0)}$, $B_{(0,0)}$ e C.
2. Si determini quindi la coppia (α_0, β_0) tale che $A_{(\alpha_0,\beta_0)} \subset C \subset B_{(\alpha_0,\beta_0)}$.

✍ Soluzione

1. Osserviamo che

   a) $A_{(0,0)} = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad | \quad \max\{\, |x|, |y| \,\} \leqslant 2 \}$,



1. $0 < y < x \quad \Rightarrow \quad \max\{|y|, |x|\} = x;$
2. $0 < x < y \quad \Rightarrow \quad \max\{|y|, |x|\} = y;$
3. $x < 0 < y \ \wedge \ 0 < -x < y \quad \Rightarrow \quad \max\{|y|, |x|\} = y;$
4. $x < 0 < y \ \wedge \ 0 < y < -x \quad \Rightarrow \quad \max\{|y|, |x|\} = |x|;$
5. $x < y < 0 \quad \Rightarrow \quad \max\{|y|, |x|\} = |x|;$
6. $y < x < 0 \quad \Rightarrow \quad \max\{|y|, |x|\} = |y|;$
7. $y < 0 < x \ \wedge \ 0 < x < -y \quad \Rightarrow \quad \max\{|y|, |x|\} = |y|;$
8. $y < 0 < x \ \wedge \ 0 < -y < x \quad \Rightarrow \quad \max\{|y|, |x|\} = x;$

b) $B_{(0,0)} = \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad | \quad |x| + |y| \leqslant 2 \,\},$

$$\underbrace{|x| + |y| \leqslant 2}$$
$$\Downarrow$$
$$\overbrace{\begin{cases} x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \\ x + y \leqslant 2 \end{cases} \vee \begin{cases} x < 0 \\ y \geqslant 0 \\ -x + y \leqslant 2 \end{cases} \vee \begin{cases} x < 0 \\ y < 0 \\ -x - y \leqslant 2 \end{cases} \vee \begin{cases} x \geqslant 0 \\ y < 0 \\ x - y \leqslant 2 \end{cases}}$$
$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow \qquad\qquad \Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$
$$\begin{cases} x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \\ y \leqslant 2 - x \end{cases} \vee \begin{cases} x < 0 \\ y \geqslant 0 \\ y \leqslant 2 + x \end{cases} \vee \begin{cases} x < 0 \\ y < 0 \\ y \geqslant -2 - x \end{cases} \vee \begin{cases} x \geqslant 0 \\ y < 0 \\ y \geqslant x - 2 \end{cases}$$

c) $C = \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad | \quad (x-2)^2 + (y-0)^2 \leqslant 2 \,\}.$

da cui i grafici in figura 44.1 a fronte.

2. Perché sia $B_{(\alpha,\beta)} \subset C \subset A_{(\alpha,\beta)}$ dobbiamo far coincidere i centri dei tre insiemi operando una traslazione, pertanto deve essere $\alpha = 2$ e $\beta = 0$.

Esercizio 44.3

Risolvere la disequazione $\log_{10}(x + 3) > \log_{100}(x^2 + 2x)$.

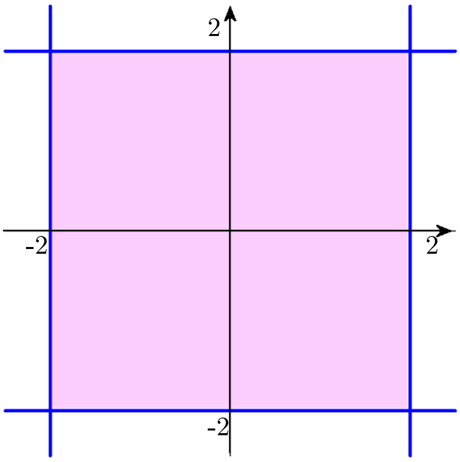
✍ Soluzione

❦ Perché la disequazione abbia senso deve essere

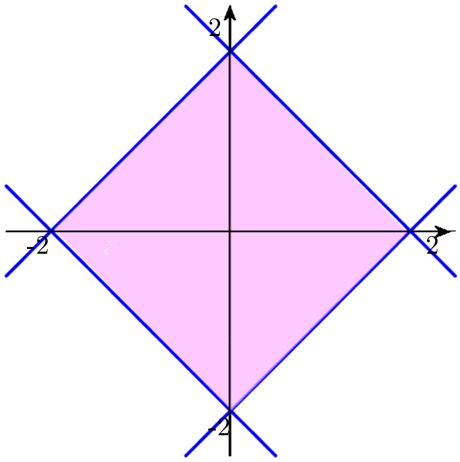
$$\begin{cases} x + 3 > 0 \\ x^2 + 2x > 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x \in (-3, -2) \cup (0, +\infty).$$

❦ Ricordando che se $b > 0$ allora $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$ con $c > 0$ e $c \neq 1$ (regola del cambiamento di base), abbiamo

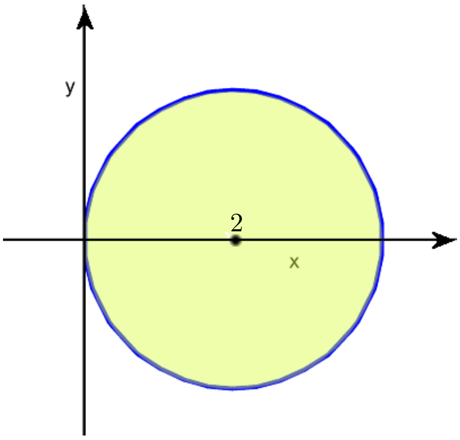
$$\log_{100} t = \log_{10^2} t = \frac{\log_{10} t}{\log_{10} 10^2} = \frac{\log_{10} t}{2}.$$



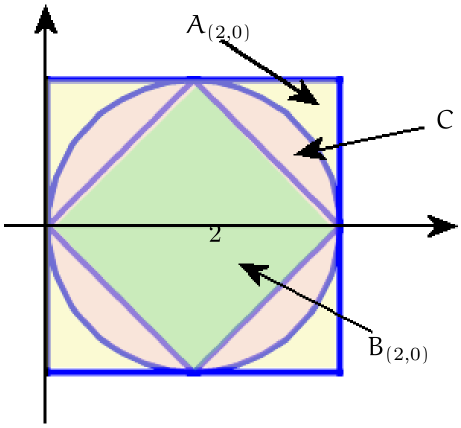
(a) $A_{(0,0)} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \max\{|x|,|y|\} \leqslant 2\}$



(b) $B_{(0,0)} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ||x| + |y| \leqslant 2\}$



(c) $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 - 4x \leqslant 0\}$



(d) Perché sia $B_{(\alpha,\beta)} \subset C \subset A_{(\alpha,\beta)}$ deve essere $\alpha = 2$ e $\beta = 0$

Figura 44.1. *Esercizio 2 nella pagina 227*

Segue che la disequazione è equivalente a

$$\begin{aligned} 2\log_{10}(x+3) > \log_{10}(x^2+2x) \quad &\Leftrightarrow \quad \log_{10}(x+3)^2 > \log_{10}(x^2+2x) \quad \stackrel{10>1}{\Longleftrightarrow} \\ &\Leftrightarrow \quad (x+3)^2 > (x^2+2x) \quad \Leftrightarrow \quad x > -9/4. \end{aligned}$$

Pertanto la disequazione è verificata per ogni $x \in \left(-\frac{9}{4}, -2\right) \cup (0, +\infty)$.

Esercizio 44.4

Quanti sottoinsiemi (non ordinati) dell'insieme $\{1, 2, ..., 11, 12\}$ sono tali che la somma del più piccolo e del più grande dei loro elementi sia 13?

✍ Soluzione

I sottoinsiemi ammissibili sono quelli per i quali il più piccolo e il più grande degli elementi costituiscono una delle seguenti 6 coppie:

$\{1, 12\}$ $\{2, 11\}$ $\{3, 10\}$ $\{4, 9\}$ $\{5, 8\}$ $\{6, 7\}$

Ciascuno di questi "genera" tanti sottoinsiemi quanti sono i possibili insiemi estraibili con gli elementi strettamente compresi fra gli estremi della coppia. Dunque la prima coppia ne genera 2^{10}, la seconda

2^8, e così via fino all'ultima che genera solo se stessa (2^0). Il numero cercato è dunque

$$\sum_{k=0}^{5} 2^{2k} = \frac{4^6 - 1}{4 - 1} = 1\,365.$$

Esercizio 44.5

Al variare del parametro reale α, determinare il numero delle soluzioni dell'equazione

$$x^2 = \sqrt[4]{x} + \alpha.$$

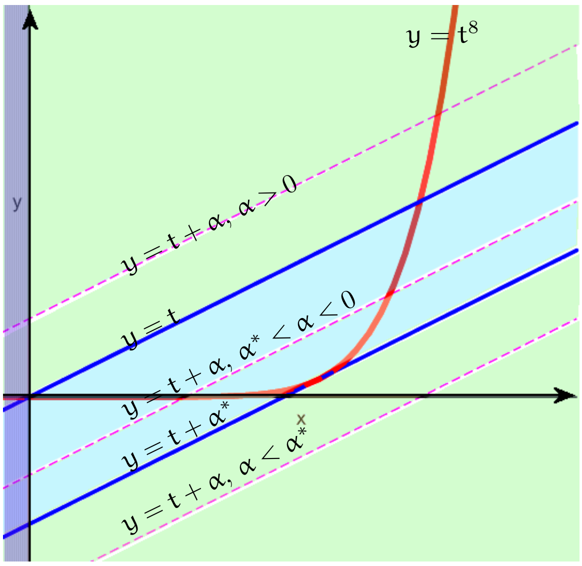
N.B. Si chiede di determinare solo quante sono le soluzioni, non di trovarle!

✍ Soluzione

Perché l'equazione abbia senso deve essere $x \geqslant 0$. Poniamo $t^4 := x$ con $t \geqslant 0$. Il numero delle soluzioni dell'equazione assegnata è allora pari al numero di intersezioni fra la funzione $y = t^8$ e la retta $y = t + \alpha$.

Dal grafico delle due funzioni è evidente che esiste uno ed un solo α^* tale che

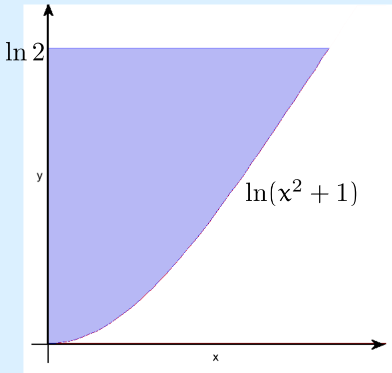
- se $\alpha < \alpha^*$ non esiste alcuna intersezione,
- se $\alpha = \alpha^* < 0$ esiste una ed una sola intersezione,
- se $\alpha^* < \alpha \leqslant 0$ esistono due intersezioni,
- se $\alpha > 0$ esiste una ed una sola intersezione.



Non resta che calcolare il valore di α^*: esso corrisponde al termine noto della retta tangente, di coefficiente angolare pari a 1, al diagramma della funzione $y = t^8$. Il coefficiente angolare di tutte le rette tangenti al diagramma della funzione $y = t^8$ nel punto di ascissa $t = t_0$ è pari a $8t_0^7$, pertanto il punto in cui la retta tangente al diagramma della funzione $y = t^8$ ha coefficiente angolare pari a 1 è il punto di ascissa $t = \frac{1}{\sqrt[7]{8}}$. La retta tangente ha allora equazione $y = t + q$ dove q è pari a $\left(\frac{1}{\sqrt[7]{8}}\right)^8 - \frac{1}{\sqrt[7]{8}}$.
Pertanto $\alpha^* = q = \left(\frac{1}{\sqrt[7]{8}}\right)^8 - \frac{1}{\sqrt[7]{8}}$.

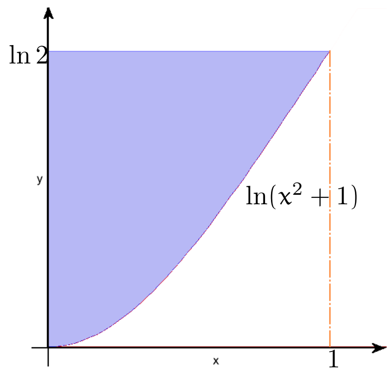
Esercizio 44.6

Calcolare l'area della regione colorata in figura.
(Il logaritmo è inteso in base "e".)



✍ Soluzione

Per $x > 0$, si ha
$\ln(1+x^2) = \ln 2$ se e solo se $x = 1$.
L'area cercata è allora
$A = 1 \cdot \ln 2 - \int_0^1 \ln(1+x^2)\,dx$. Integrando per parti* si ha



$$\int_0^1 \ln(1+x^2)\,dx \overset{\text{P.P.}}{=\!=} \left[x\ln(1+x^2)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{2x^2}{1+x^2}\,dx =$$
$$= \left[x\ln(1+x^2)\right]_0^1 - \int_0^1 \left[2 - \frac{2}{1+x^2}\right]dx =$$
$$= \ln 2 - 2 + [2\arctan x]_0^1 =$$
$$= \ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2}$$

Allora l'area cercata vale $2 - \frac{\pi}{2}$.

Esercizio 44.7

Studiare la funzione f così definita: $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x}$.

✍ Soluzione

- Insieme di definizione: deve essere $x^2 - 3x \geqslant 0$ da cui $x \leqslant 0 \cup x \geqslant 3$.
- f è continua e non negativa.
- Si può scrivere $f(x) = \sqrt{x^2-3x} = |x|\sqrt{1-\frac{3}{x}} = |x| + \dfrac{\sqrt{1-\frac{3}{x}}-1}{\frac{1}{|x|}} = |x| + g(x)$ dove g è tale che, per il limite notevola (G), $\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = \mp\frac{3}{2}$.
- Limiti agli estremi dell'insieme di definizione:

$$f(0) = f(3) = 0,$$
$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} |x|\sqrt{1-\frac{3}{x}} = +\infty,$$

*$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$

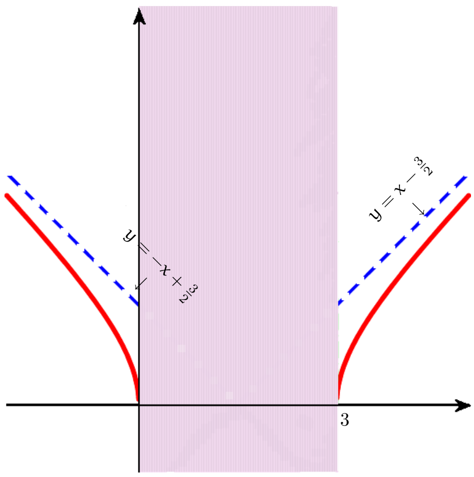
$$\begin{array}{lcl} f(x) = \ln(1+x^2) & \rightsquigarrow & f'(x) = \frac{2x}{1+x^2} \\ g(x) = \int g'(x)\,dx = x & \leftsquigarrow & g'(x) = 1 \end{array}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{|x|}{x}\sqrt{1-\frac{3}{x}}=\pm1,$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}f(x)\mp x=\lim_{x\to\pm\infty}\pm x\left[\sqrt{1-\frac{3}{x}}-1\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\mp3\left[\frac{\left(1-\frac{3}{x}\right)^{1/2}-1}{-\frac{3}{x}}\right]\overset{[G]}{=}\mp\frac{3}{2}$$

- Equazioni degli eventuali asintoti:
  - non ci sono asintoti orizzontali,
  - non ci sono asintoti verticali,
  - le rette $y=\pm x\mp\frac{3}{2}$ sono asintoti obliqui per $x\to\pm\infty$.
- Derivata prima ed eventuali punti estremanti: $f'(x)=\dfrac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x}}$.

  Pertanto f è
  - crescente $(f'(x)>0)$ per $x\geqslant 3$,
  - decrescente $(f'(x)<0)$ per $x\leqslant 0$,
  - non ci sono estremanti,
  - $x=0$ e $x=3$ sono punti di minimo assoluto a tangente verticale.
- Derivata seconda: $f''(x)=-\dfrac{9}{4\sqrt{(x^2-3x)^3}}$.
- Verso della concavità:f è
  - concava $(f''(x)<0)$ per ogni $x\in$ C.E.,
  - non ci sono punti di flesso.
- Diagramma qualitativo:



TEMA 45

Prova scritta del 18 luglio 2006

Esercizio 45.1

L'anno scorso in una enoteca le bottiglie di vino bianco erano 90 in più di quelle di vino rosso. Quest'anno il numero delle bottiglie è cresciuto complessivamente del 10%: quelle di vino bianco sono il 5% in più, quelle di vino rosso sono il 20% in più. Quante bottiglie vi sono complessivamente quest'anno in quella enoteca?

✍ Soluzione

Detto r il numero di bottiglie di vino rosso presenti nell'enoteca lo scorso anno, abbiamo la relazione seguente:

$$(r + (90 + r))\frac{100 + 10}{100} = (90 + r)\frac{100 + 5}{100} + r\frac{100 + 20}{100} \qquad \Rightarrow \qquad r = 90.$$

L'anno scorso quindi l'enoteca aveva 90 bottiglie di vino rosso e 180 bottiglie di vino bianco per un totale di 270 bottiglie. Quest'anno le bottiglie sono complessivamente il 10% in più ossia 297 bottiglie.

Esercizio 45.2

Dotato il piano di un riferimento cartesiano ortogonale Oxy, al variare della coppia di parametri reali (α, β) si considerino gli insiemi

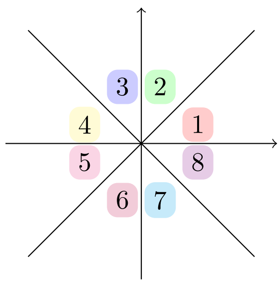
$$\begin{aligned} A_{(\alpha,\beta)} &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \max\{ |x - \alpha|, |y - \beta| \} \leqslant 1 \right\}, \\ B_{(\alpha,\beta)} &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; |x - \alpha| + |y - \beta| \leqslant 2 \right\}, \\ C &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + y^2 - 2\sqrt{2}\, y \leqslant 0 \right\}. \end{aligned}$$

1. Si dia una rappresentazione grafica di $A_{(0,0)}$, $B_{(0,0)}$ e C.
2. Si determini quindi la coppia (α_0, β_0) tale che $A_{(\alpha_0,\beta_0)} \subset C \subset B_{(\alpha_0,\beta_0)}$.

✍ Soluzione

1. Osserviamo che

   a) $A_{(0,0)} = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad | \quad \max\{ |x|, |y| \} \leqslant 1 \}$,



1 $0 < y < x \quad \Rightarrow \quad \max\{|y|, |x|\} = x;$

2 $0 < x < y \quad \Rightarrow \quad \max\{|y|, |x|\} = y;$

3 $x < 0 < y \;\wedge\; 0 < -x < y \quad \Rightarrow \quad \max\{|y|, |x|\} = y;$

4 $x < 0 < y \;\wedge\; 0 < y < -x \quad \Rightarrow \quad \max\{|y|, |x|\} = |x|;$

5 $x < y < 0 \quad \Rightarrow \quad \max\{|y|, |x|\} = |x|;$

6 $y < x < 0 \quad \Rightarrow \quad \max\{|y|, |x|\} = |y|;$

7 $y < 0 < x \;\wedge\; 0 < x < -y \quad \Rightarrow \quad \max\{|y|, |x|\} = |y|;$

8 $y < 0 < x \;\wedge\; 0 < -y < x \quad \Rightarrow \quad \max\{|y|, |x|\} = x;$

b) $B_{(0,0)} = \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad | \quad |x| + |y| \leqslant 2 \,\}$,

$$\underbrace{|x| + |y| \leqslant 2}$$
$$\Downarrow$$
$$\overbrace{\begin{cases} x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \\ x + y \leqslant 2 \end{cases} \vee \begin{cases} x < 0 \\ y \geqslant 0 \\ -x + y \leqslant 2 \end{cases} \vee \begin{cases} x < 0 \\ y < 0 \\ -x - y \leqslant 2 \end{cases} \vee \begin{cases} x \geqslant 0 \\ y < 0 \\ x - y \leqslant 2 \end{cases}}$$
$$\Downarrow$$
$$\begin{cases} x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \\ y \leqslant 2 - x \end{cases} \vee \begin{cases} x < 0 \\ y \geqslant 0 \\ y \leqslant 2 + x \end{cases} \vee \begin{cases} x < 0 \\ y < 0 \\ y \geqslant -2 - x \end{cases} \vee \begin{cases} x \geqslant 0 \\ y < 0 \\ y \geqslant x - 2 \end{cases}$$

c) $C = \left\{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \middle| \quad (x - 0)^2 + (y - \sqrt{2})^2 \leqslant \sqrt{2} \,\right\}$.

da cui i grafici in figura 45.1 nella pagina successiva.

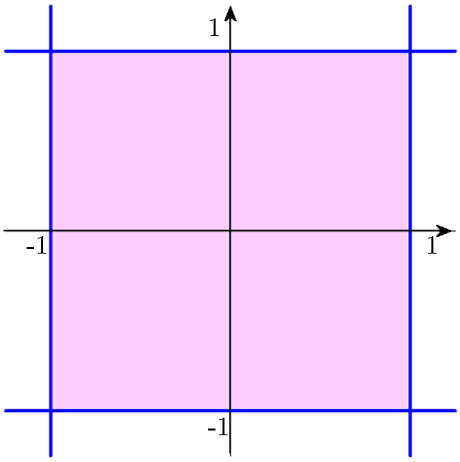
2. Perché sia $A_{(\alpha,\beta)} \subset C \subset B_{(\alpha,\beta)}$ dobbiamo far coincidere i centri dei tre insiemi operando una traslazione, pertanto deve essere $\alpha = 0$ e $\beta = \sqrt{2}$.

Esercizio 45.3

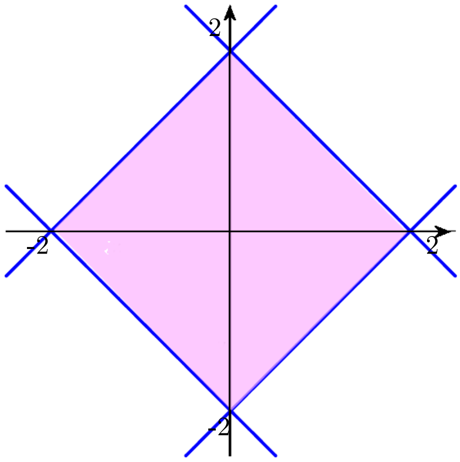
Il numero 275 ha tre cifre distinte: se vengono scritte nell'ordine inverso, si ottiene il numero 572 che è più grande di quello originario. Quanti numeri interi positivi di tre cifre (significative) a due a due distinte (incluso 275) hanno questa proprietà?

✍ Soluzione

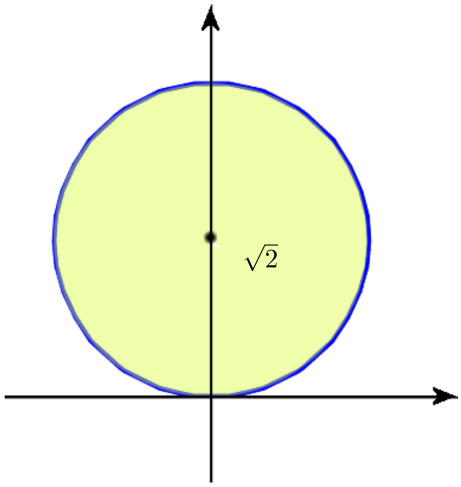
Consideriamo prima i numeri di tre cifre distinte tutte diverse da 0: sono tanti quante le disposizioni semplici di 9 oggetti di classe 3, dunque $9 \cdot 8 \cdot 7$ ed esattamente la metà di questi (uno su due) sono accettabili, dunque $9 \cdot 4 \cdot 7 = 252$. Se una delle cifre è 0, per la richiesta che le cifre siano significative, 0 piò stare solo nella posizione centrale: si hanno dunque, ragionando come sopra, esattamente $\frac{9 \cdot 8}{2} = 36$ numeri accettabili di questo tipo, per un totale di 288.



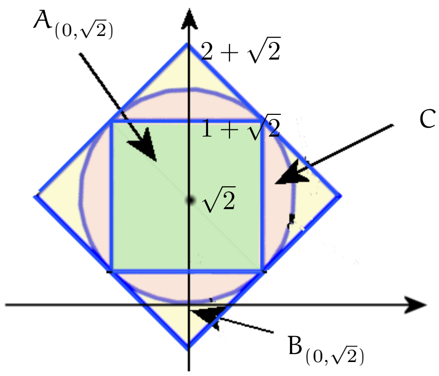
(a) $A_{(0,0)} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \max\{|x|,|y|\} \leqslant 1\}$



(b) $B_{(0,0)} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | |x| + |y| \leqslant 2\}$



(c) $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 - 2\sqrt{2}y \leqslant 0\}$



(d) Perché sia $A_{(\alpha,\beta)} \subset C \subset B_{(\alpha,\beta)}$ deve essere $\alpha = 0$ e $\beta = \sqrt{2}$

Figura 45.1. *Esercizio 2 nella pagina 233*

Esercizio 45.4

Calcolare

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{(\tan x - 1)^2}{1 - \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}.$$

✍ Soluzione

Si ricordi che $\tan(x+\alpha) = \dfrac{\tan x + \tan \alpha}{1 - \tan x \cdot \tan \alpha}$. Allora

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{(\tan x - 1)^2}{1 - \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)} \overset{t:=x-\frac{\pi}{4}}{=\!=\!=} \lim_{t \to 0} \frac{\left(\tan\left(t + \frac{\pi}{4}\right) - 1\right)^2}{1 - \cos t} = \lim_{t \to 0} \frac{\left(\frac{1+\tan t}{1-\tan t} - 1\right)^2}{1 - \cos t} =$$

(vogliamo ricondurci ai limiti fondamentali (A) e (B))

$$= \lim_{t \to 0} \frac{1}{(1-\tan t)^2} \, 4 \, \frac{\tan^2 t}{t^2} \, \frac{t^2}{1 - \cos t} =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{1}{(1-\tan t)^2} \, 4 \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 \frac{1}{\cos^2 t} \, \frac{t^2}{1 - \cos t} \overset{(A)(B)}{=\!=\!=} 8$$

Esercizio 45.5

Determinare l'equazione della retta tangente al diagramma della funzione $f(x) = (\tan x)^{\tan x}$ nel punto di ascissa $\frac{\pi}{4}$.

✍ Soluzione

L'equazione della retta tangente alla funzione $y = f(x)$ nel punto di ascissa x_0 è:

$$y = mx + q \qquad \text{con} \qquad \begin{cases} m = f'(x_0) \\ q = f(x_0) - mx_0 \end{cases}$$

ossia

$$y = f'(x_0)x + (f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0)\,.$$

Ricordando che $(f(x))^{g(x)} = e^{g(x)\,\cdot\,\ln(f(x))}$ e che pertanto

$$\frac{d}{dx}(f(x))^{g(x)} = e^{g(x)\cdot\ln(f(x))}\cdot\left[g'(x)\ln(f(x)) + g(x)\cdot\frac{f'(x)}{f(x)}\right] = (f(x))^{g(x)}\cdot\left[g'(x)\ln(f(x)) + g(x)\cdot\frac{f'(x)}{f(x)}\right],$$

calcoliamo m e q con $x_0 = \frac{\pi}{4}$:

$$f'(x) = (\tan x)^{\tan x} \cdot \left[\frac{\ln(\tan x)}{\cos^2 x} + \tan x \frac{1}{\tan x}\frac{1}{\cos^2 x}\right] = (\tan x)^{\tan x} \cdot \frac{1 + \ln(\tan x)}{\cos^2 x},$$

da cui

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \cdot \frac{1+0}{1/2} = 2, \qquad \text{e} \quad f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\tan\frac{\pi}{4}\right)^{\tan\frac{\pi}{4}} = 1$$

e dunque

$$q = f(x_0) - mx_0 = 1 - \frac{\pi}{2}.$$

Pertnato l'equazione della retta è

$$y = 2x + 1 - \frac{\pi}{2}\,.$$

Esercizio 45.6

Determinare una primitiva della funzione $f(x) = \dfrac{\log x}{x^3}$ sull'intervallo $(0, +\infty)$.

Calcolare quindi $I = \displaystyle\int_1^e f(x)\,dx\,.$

✍ Soluzione

Integrando per parti*

$$G(x) = \int \frac{\log x}{x^3}\,dx = -\frac{\ln x}{2x^2} + \int \frac{1}{2x^3}\,dx = -\frac{\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2} + k, \quad k \in \mathbb{R};$$

$$I = G(e) - G(1) = -\frac{3}{4e^2} + \frac{1}{4}.$$

* $\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$

$$f(x) = \ln x \quad \rightsquigarrow \quad f'(x) = \frac{1}{x}$$
$$g(x) = \int g'(x)\,dx = -\frac{1}{2x^2} \quad \leftsquigarrow \quad g'(x) = x^{-3}$$

Esercizio 45.7

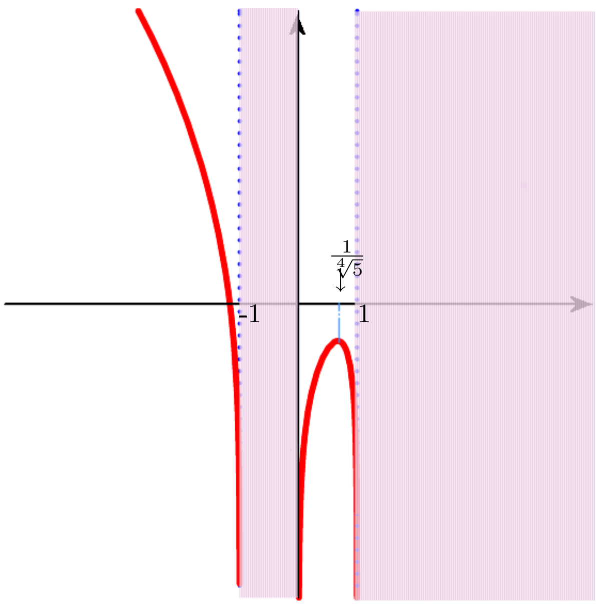
Studiare la funzione f così definita: $f(x) = \ln(x - x^5)$, dove il logaritmo è inteso in base "e".

✍ Soluzione

- Insieme di definizione: deve essere $(x - x^5) > 0$ pertanto $x \in (-\infty, -1) \cup (0, 1)$.
- Limiti agli estremi dell'insieme di definizione:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \ln\left(x^5\left(\frac{1}{x^4} - 1\right)\right) = +\infty$$
$$\lim_{x\to-1^-} f(x) = \lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to1^-} f(x) = -\infty$$

- Equazioni degli eventuali asintoti:
  - $x = -1$, $x = 0$ e $x = 1$ sono asintoti verticali,
  - non ci sono asintoti orizzontali,
  - $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ pertanto non ci sono asintoti obliqui.
- Derivata prima ed eventuali punti estremanti: $y' = \dfrac{1 - 5x^4}{x(1 - x^4)}$
  - f è crescente ($y' > 0 \Leftrightarrow x^4 < 1/5$) per $0 < x < 5^{-1/4}$
  - f è decrescente ($y' < 0 \Leftrightarrow x^4 > 1/5$) per $x < -1$ e per $5^{-1/4} < x < 1$.
  - $x = x_M = 5^{-1/4}$ è un estremante ($y' = 0 \Leftrightarrow x^4 = 1/5$); più precisamente è un punto di massimo relativo e si ha $f(x_M) < 0$.
- Derivata seconda: $y'' = -\dfrac{5x^8 + 10x^4 + 1}{(x - x^5)^2}$
- Verso della concavità:
  - f è concava ($y'' < 0$) su tutto l'insieme di definizione,
  - non ci sono punti di flesso.
- Diagramma qualitativo:

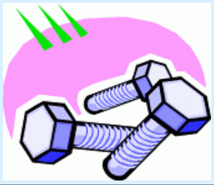


TEMA 46

Prova scritta del 19 settembre 2006

Esercizio 46.1

Un macchinario produce bulloni. Un bullone è ritenuto difettoso quando ha peso oppure dimensioni sbagliate rispetto al progetto. Il controllo di qualità mette in evidenza che il 7% dei bulloni prodotti ha almeno il peso sbagliato e che il 5% ha almeno le dimensioni sbagliate. Nell'ipotesi che esattamente metà dei bulloni difettosi abbiano sia peso sia dimensioni sbagliate, qual è la percentuale di bulloni difettosi che produce quel macchinario?



✍ Soluzione

Sommando la percentuale dei bulloni con peso sbagliato a quello dei bulloni con dimensione sbagliata, metà dei bulloni difettosi vengono contati due volte. Dunque i bulloni difettosi sono i $\frac{2}{3}(5+7)\% = 8\%$.

Esercizio 46.2

Dotato il piano di un riferimento cartesiano ortogonale Oxy, si considerino gli insiemi

$$\begin{aligned} A &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \middle| \quad \max\{ \, |x-2|, |y-3| \,\} \leqslant 1 \right\}, \\ B &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \middle| \quad |x-2| + |y-3| \leqslant 1 \right\}, \end{aligned}$$

e, al variare della terna di parametri reali (α, β, γ), l'insieme

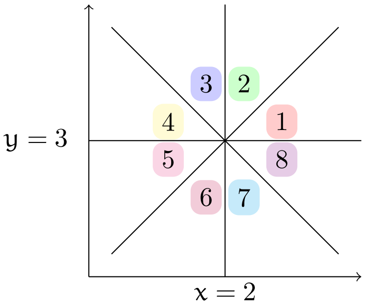
$$C_{(\alpha,\beta,\gamma)} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \middle| \quad x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma \leqslant 0 \right\}.$$

1. Si dia una rappresentazione grafica di A e B.
2. Si determini quindi la terna $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$ tale che $A \supset C_{(\alpha_0,\beta_0,\gamma_0)} \supset B$.

✍ Soluzione

1. Osserviamo che

   a) $A = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad | \quad \max\{ \, |x-2|, |y-3| \,\} \leqslant 1 \}$,



1. $0 < y-3 < x-2 \quad \Rightarrow \quad \max\{|y-3|, |x-2|\} = x-2;$

2. $0 < x-2 < y-3 \quad \Rightarrow \quad \max\{|y-3|, |x-2|\} = y-3;$

3. $x-2 < 0 < y-3 \ \wedge \ 0 < -x+2 < y-3 \quad \Rightarrow$ $\max\{|y-3|, |x-2|\} = y-3;$

4. $x-2 < 0 < y-3 \ \wedge \ 0 < y-3 < -x+2 \quad \Rightarrow$ $\max\{|y-3|, |x-2|\} = |x-2|;$

5. $x-2 < y-3 < 0 \quad \Rightarrow \quad \max\{|y-3|, |x-2|\} =$ $|x-2|;$

6. $y-3 < x-2 < 0 \quad \Rightarrow \quad \max\{|y-3|, |x-2|\} =$ $|y-3|;$

7. $y-3 < 0 < x-2 \ \wedge \ 0 < x-2 < -y+3 \quad \Rightarrow$ $\max\{|y-3|, |x-2|\} = |y-3|;$

8. $y-3 < 0 < x-2 \ \wedge \ 0 < -y+3 < x-2 \quad \Rightarrow$ $\max\{|y-3|, |x-2|\} = x-2;$

b) $B = \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad | \quad |x-2| + |y-3| \leqslant 1 \,\},$

$$\underbrace{|x-2| + |y-3| \leqslant 1}$$
$$\Downarrow$$
$$\begin{cases} x-2 \geqslant 0 \\ y-3 \geqslant 0 \\ x-2+y-3 \leqslant 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x-2 < 0 \\ y-3 \geqslant 0 \\ -x+2+y-3 \leqslant 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x-2 < 0 \\ y-3 < 0 \\ -x+2-y+3 \leqslant 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x-2 \geqslant 0 \\ y-3 < 0 \\ x-2-y+3 \leqslant 1 \end{cases}$$
$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow \qquad\qquad \Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$
$$\begin{cases} x \geqslant 2 \\ y \geqslant 3 \\ y \leqslant 6-x \end{cases} \vee \begin{cases} x < 2 \\ y \geqslant 3 \\ y \leqslant 2+x \end{cases} \vee \begin{cases} x < 2 \\ y < 3 \\ y \geqslant 4-x \end{cases} \vee \begin{cases} x \geqslant 2 \\ y < 3 \\ y \geqslant x \end{cases}$$

c) C è un cerchio di centro $(-\alpha/2, -\beta/2)$ e raggio $\sqrt{(\alpha/2)^2 + (\beta/2)^2 - \gamma}$,

da cui i grafici in figura 45.1 nella pagina 235.

2. Perché sia $B \subset C_{(\alpha,\beta,\gamma)} \subset A$ dobbiamo far coincidere i centri dei tre insiemi operando una traslazione, pertanto deve essere $\alpha = -4$, $\beta = -6$ e $\gamma = 12$.

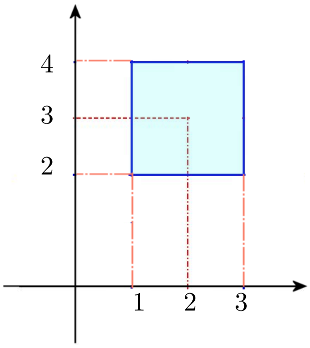
Esercizio 46.3

Si determini il coefficiente del termine indipendente da a e da b nello sviluppo dei binomi

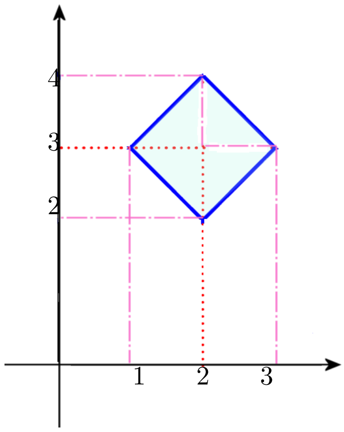
$$\text{A)}\left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right)^{14} \qquad\qquad \text{B)}\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)^{99}.$$

✍ Soluzione

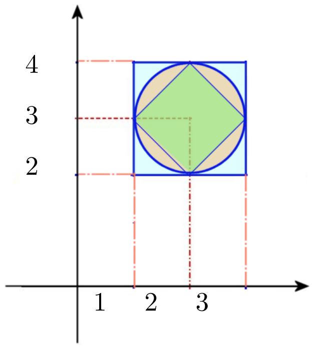
$$\left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right)^{14} = \sum_{k=0}^{14} \left[\binom{14}{k} \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^{k} \cdot \left(-\frac{b}{a}\right)^{14-k} \right] =$$



(a) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, \max\{|x-2|, |y-3|\} \leqslant 1\}$



(b) $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, |x-2| + |y-3| \leqslant 1\}$



(c) $C_{(-4,-6,12)} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 - 4x - 6y + 12 \leqslant 0\}$.

Figura 46.1. *Esercizio 2 nella pagina 239*

$$= \sum_{k=0}^{14} \left[\binom{14}{k} \cdot (-)^{14-k} \cdot a^{k-(14-k)} \cdot b^{-k+(14-k)} \right] =$$

$$= \sum_{k=0}^{14} \left[\binom{14}{k} \cdot (-)^{14-k} \cdot a^{2k-14} \cdot b^{14-2k} \right]$$

$2k - 14 = 0 \Leftrightarrow k = 14$ per cui il termine cercato è $\binom{14}{7}(-)^7 = -3\,432$;

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)^{99} = \sum_{k=0}^{99} \left[\binom{99}{k} \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^k \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^{99-k} \right]$$

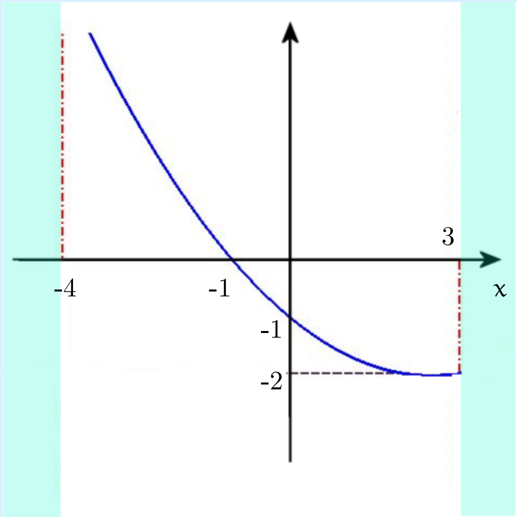
$$= \sum_{k=0}^{99} \left[\binom{99}{k} \cdot a^{k-(99-k)} \cdot b^{-k+(99-k)} \right] =$$

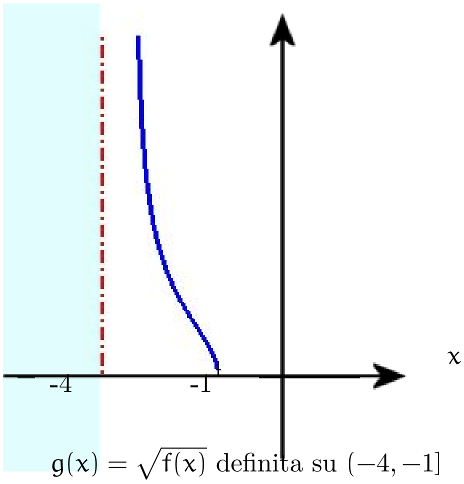
$$= \sum_{k=0}^{99} \left[\binom{99}{k} \cdot a^{2k-99} \cdot b^{99-2k} \right]$$

$2k - 99 = 0$ non ha soluzione in $\mathbb{N}$ per cui non esiste alcun termine indipendente da a e da b.

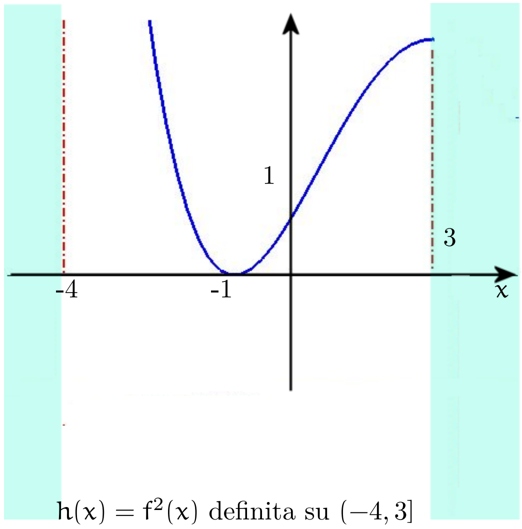
Esercizio 46.4

Quello in figura è il diagramma della funzione $y = f(x)$ definita sull'intervallo $(-4, 3]$. Tracciare, evidenziandone i rispettivi insiemi di definizione, i diagrammi delle seguenti funzioni:
$g(x) = \sqrt{f(x)}$,
$h(x) = f^2(x)$,
$x = f^{-1}(y)$.

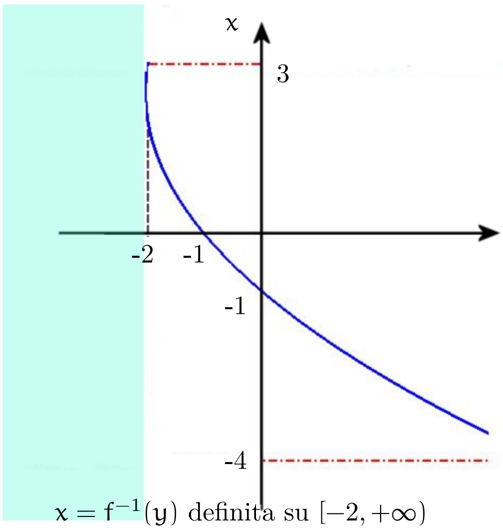




$g(x) = \sqrt{f(x)}$ definita su $(-4, -1]$



$h(x) = f^2(x)$ definita su $(-4, 3]$



$x = f^{-1}(y)$ definita su $[-2, +\infty)$

Esercizio 46.5

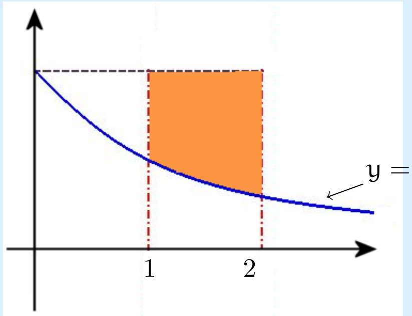
Calcolare, se esiste, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\left(3+\frac{1}{n}\right)^{2n}}{9^n}$.

✍ Soluzione

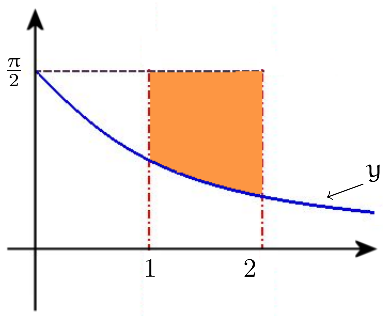
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\left(3+\frac{1}{n}\right)^{2n}}{9^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\left[3\left(1+\frac{1}{3n}\right)\right]^{2n}}{9^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{9^n\left[\left(1+\frac{1}{3n}\right)^{3n}\right]^{2/3}}{9^n} \overset{(C)}{=} e^{2/3}.$$

Esercizio 46.6

Calcolare l'area della regione tratteggiata in figura.



✍ Soluzione



Poiché $\displaystyle\lim_{x\to0^+} \arctan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$, l'area cercata è

$$\frac{\pi}{2}\cdot(2-1) - \int_1^2 \arctan\frac{1}{x}\,dx\,.$$

Integrando per parti*per $x > 0$ si ha

$$\int \arctan\frac{1}{x}\,dx \overset{\text{P.P.}}{=} x\arctan\frac{1}{x} - \int \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)\cdot x\,dx =$$

$$= x\arctan\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+\frac{1}{x^2}}\,dx = x\arctan\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + k, \quad k\in\mathbb{R}.$$

Dunque l'area cercata vale

$$\frac{\pi}{2}\cdot(2-1) - \left[x\arctan\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_{x=1}^{x=2} = \frac{\pi}{2}\cdot(2-1) - 2\arctan\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln 5 + \arctan 1 + \frac{1}{2}\ln 2 =$$

$$= \frac{3}{4}\pi - 2\arctan\frac{1}{2} + \ln\sqrt{\frac{2}{5}}.$$

Esercizio 46.7

Studiare la funzione f così definita: $f(x) = x + \sqrt{1-x^2}$.

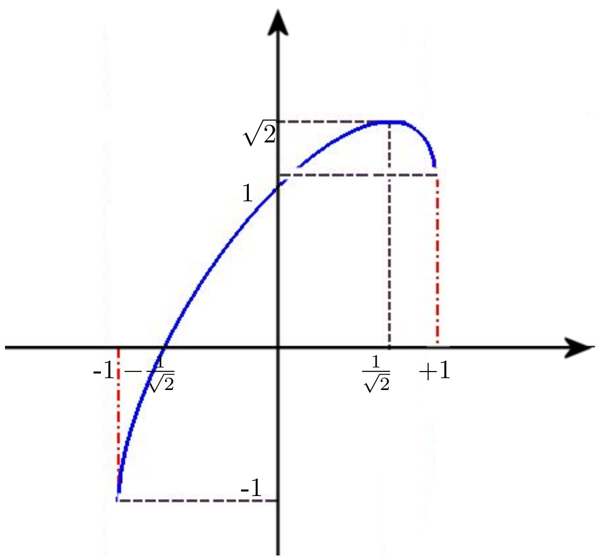
---

*$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$

$$\begin{array}{lcl} f(x) = \arctan\frac{1}{x} & \rightsquigarrow & f'(x) = \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\ \frac{1}{-x^2} \\ g(x) = \int g'(x)\,dx = x & \leftsquigarrow & g'(x) = 1 \end{array}$$

✍ Soluzione

- Insieme di definizione: deve essere $(1-x^2) \geqslant 0$ pertanto $x \in [-1, 1]$.
- Limiti agli estremi dell'insieme di definizione: f è continua dunque
$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = f(-1) = -1 \qquad \lim_{x \to 1^-} f(x) = f(1) = 1$$
- Equazioni degli eventuali asintoti: non ci sono asintoti.
- Derivata prima: $\begin{cases} y' = 1 - \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} & \text{definita su } (-1,1), \\ \lim\limits_{x \to \pm 1} f'(x) = \mp\infty; \end{cases}$
- eventuali punti estremanti:
  - f è crescente $(y' > 0 \Leftrightarrow x < \sqrt{1-x^2})$ per $x \in [-1, \frac{1}{\sqrt{2}})$,
  - f è decrescente $(y' < 0 \Leftrightarrow x > \sqrt{1-x^2})$ per $x \in (\frac{1}{\sqrt{2}}, 1]$,
  - $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ è un estremante $(y' = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{1-x^2})$; in particolare è un punto di massimo assoluto avendosi $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}$,
  - $x = -1$ è un punto di minimo assoluto,
  - $x = +1$ è un punto di minimo relativo.
- Derivata seconda: $y'' = -\dfrac{1}{(1-x^2)^{3/2}}$
- Verso della concavità: f è concava $(y'' < 0)$ su tutto l'insieme di definizione.
- Diagramma qualitativo:



TEMA 47

Prova scritta del 13 novembre 2006

Esercizio 47.1

Per quali interi positivi n la rappresentazione decimale del numero n^{300} non ha più di 100 cifre?

✍ Soluzione

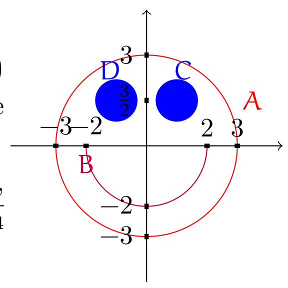
In rappresentazione decimale il più grande numero a 100 cifre è $\overbrace{999\ldots9}^{100} = 10^{100} - 1$. Cerchiamo allora gli $n \in \mathbb{R}$ tali che $n^{300} < 10^{100}$ cioè $n < 10^{1/3}$. Poiché $2 < 10^{1/3} < 3$, gli unici interi positivi che soddisfano tale condizione sono $n = 1$ e $n = 2$.

Esercizio 47.2

Nel piano, dotato di un riferimento cartesiano ortogonale Oxy, si dia una rappresentazione grafica dei seguenti insiemi (utilizzando per tutti un'unica coppia di assi)

$$\mathcal{A} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + y^2 = 9 \right\}$$
$$\mathcal{B} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y + \sqrt{4 - x^2} = 0 \right\}$$
$$\mathcal{C} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 4x^2 + 4y^2 - 8x - 12y + 11 \leqslant 0 \right\}$$
$$\mathcal{D} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 4x^2 + 4y^2 + 8x - 12y + 11 \leqslant 0 \right\}$$

✍ Soluzione



A è la circonferenza di centro $(0, 0)$ e raggio 3.
B è la semicirconferenza data dall'intersezione della circonferenza di centro $(0, 0)$ e raggio 2 con il semipiano delle ordinate negative (infatti l'equazione di tale circonferenza è $x^2 + y^2 = 4$ da cui $y = \pm\sqrt{4 - x^2}$).
C e D sono i cerchi di centro rispettivamente $(+1, {}^{3}\!/_{2})$ e $(-1, {}^{3}\!/_{2})$ e raggio ${}^{1}\!/\sqrt{2}$, che risultano entrambi interni ad A in quanto si ha $\sqrt{{}^{13}\!/_{4}} + {}^{1}\!/\sqrt{2} < 3$ (dove $\sqrt{{}^{13}\!/_{4}}$ è la distanza dei centri C e D dal centro di A)

Esercizio 47.3

Al termine di un incontro diplomatico, 20 rappresentanti di altrettante nazioni si sono stretti vicendevolmente la mano, fatta eccezione per 4 di loro che hanno evitato di incontrarsi fra loro, intrattenendo ciascuno relazioni diplomatiche soltanto con gli altri 16. Quante strette di mano sono state date in totale?

✍ Soluzione

Le strette di mano fra n persone sono tante quante le coppie non ordinate formabili con quelle n persone, dunque $\binom{n}{2}$. Il numero cercato è allora

$$\binom{20}{2} - \binom{4}{2} = \frac{20 \cdot 19}{2} - \frac{4 \cdot 3}{2} = \frac{380 - 12}{2} = 184.$$

Un altro modo di risoluzione è il seguente: ordiniamo l'insieme dei diplomatici da 1 a 20 lasciando ai 4 di loro che hanno evitato di incontrarsi fra loro le ultime posizioni. Il primo diplomatico stringe la mano ad altri 19 diplomatici, il secondo diplomatico ha già stretto la mano al primo diplomatico pertanto stringe la mano ad altri 18 diplomatici e così via fino al sedicesimo diplomatico che stringe la mano ad altri 4 diplomatici. Questi ultimi 4 diplomatici hanno già stretto la mano a tutti i sedici precedenti e fra loro non se la stringono pertanto in totale ci sono state

$$19 + 18 + \cdots + 4 = \sum_{i=4}^{19} i = \sum_{i=1}^{19} i - \sum_{i=1}^{3} i = \frac{19 \cdot 20}{2} - \frac{3 \cdot 4}{2} = 184 \text{ strette di mano.}$$

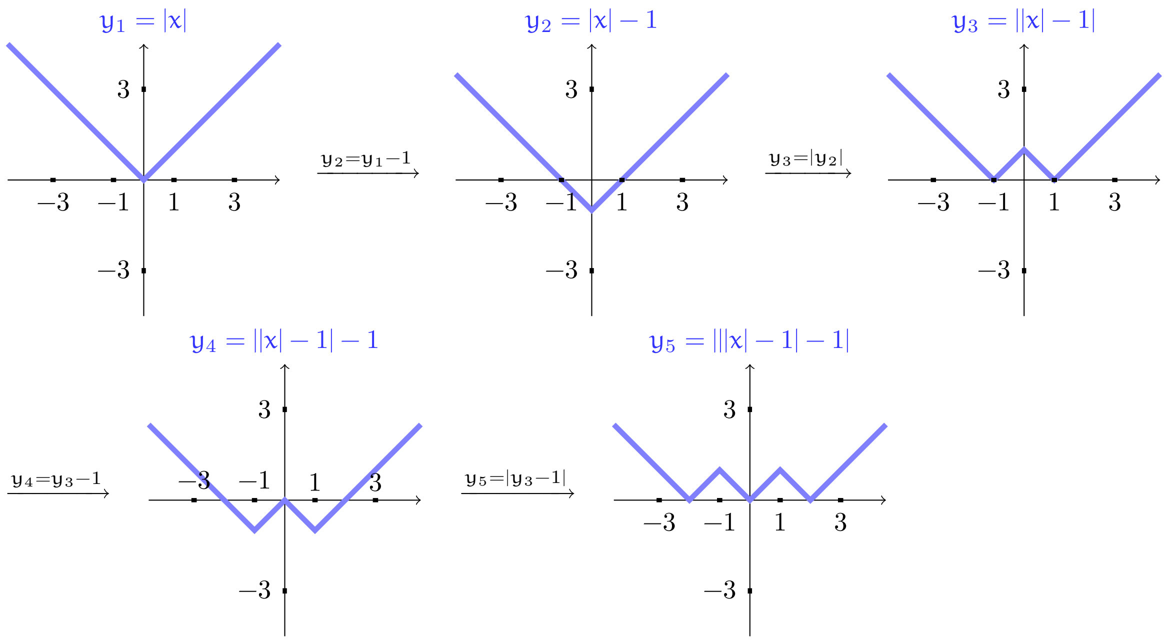
Esercizio 47.4

Risolvere la disequazione $\Big| \big| |x| - 1 \big| - 1 \Big| + |x| < 1.$
(Può essere conveniente ottenere la soluzione per via grafica.)

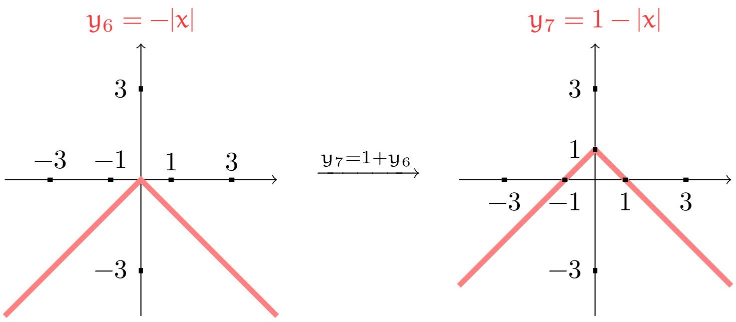
✍ Soluzione

Cerchiamo le $x \in \mathbb{R}$ tali che $\Big| \big| |x| - 1 \big| - 1 \Big| < 1 - |x|$ cioè le x per le quali il grafico della funzione $y = \Big| \big| |x| - 1 \big| - 1 \Big|$ si trova sotto il grafico della funzione $y = 1 - |x|$.

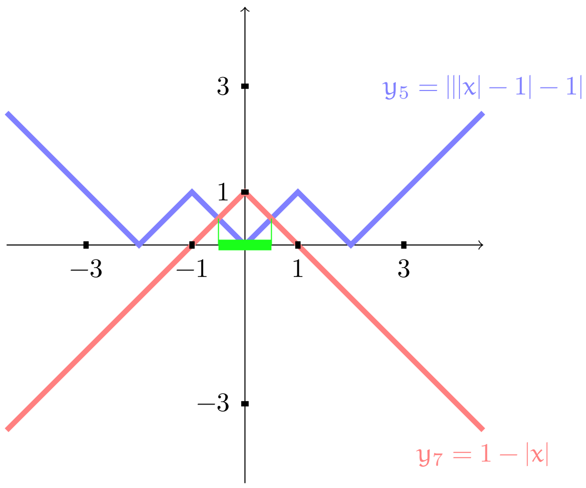
❦ Iniziamo a costruire il grafico della funzione $y = \Big| \big| |x| - 1 \big| - 1 \Big|$ passo passo:



- analogamente costruiamo il grafico della funzione $y = 1 - |x|$ passo passo:



Se ora poniamo i grafici su una stessa coppia di assi vediamo che la disequazione è soddisfatta per le $x \in (-1/2, 1/2)$.



Esercizio 47.5

Stabilire per quali valori dei parametri a e b l'equazione $(x-2)(x^2-1) = ax+b$ ammette esattamente due soluzioni distinte una delle quali sia 0.

✍ Soluzione

Si tratta di trovare gli zeri della funzione $y_1 = x^3 - 2x^2 + (-a-1)x + 2 - b$.
Affinché $x = 0$ sia una radice occorre e basta che $b = 2$ da cui $y_1 = x^3 - 2x^2 + (-a-1)x = x(x^2 - 2x - a - 1)$.
Affinché la funzione $y_2 = x^2 - 2x - (a+1)$ abbia esattamente uno zero diverso da 0 occorre e basta che $a = -2$ oppure $a = -1$.

Esercizio 47.6

Calcolare l'area della regione ombreggiata nella figura qui accanto.

✍ Soluzione

Si ha $\sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{x}+2}$ se e solo se $x = (\sqrt{2}-1)^2$.
L'area cercata è dunque data da

$$A = \int_0^{(\sqrt{2}-1)^2} g(x)\,dx - \int_0^{(\sqrt{2}-1)^2} f(x)\,dx = \int_0^{(\sqrt{2}-1)^2} \frac{1-x-2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}\,dx\,.$$

Per $x > 0$, posto $t := \sqrt{x}$ da cui $2t^2\,dt = dx$, si ha

$$\begin{aligned} A =& \int_0^{(\sqrt{2}-1)} 2\frac{t}{2+t} - 2t^2\,dt = 2\int_0^{(\sqrt{2}-1)} \frac{t+2-2}{2+t} - t^2\,dt = \\ =& 2\int_0^{(\sqrt{2}-1)} 1 - 2\frac{1}{2+t} - t^2\,dt = 2\left[t - 2\ln(2+t) - \frac{t^3}{3}\right]_0^{(\sqrt{2}-1)} = \\ =& 2(\sqrt{2}-1) - 4\ln(2+(\sqrt{2}-1)) - 2\frac{(\sqrt{2}-1)^3}{3} + 4\ln 2. \end{aligned}$$

Esercizio 47.7

Studiare la funzione f così definita: $f(x) = x + 2\sqrt{1-e^x}$.

✍ Soluzione

- Insieme di definizione : deve essere $1 - e^x \geqslant 0$ da cui $x \leqslant 0$.
- Limiti agli estremi di tale insieme:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0$$

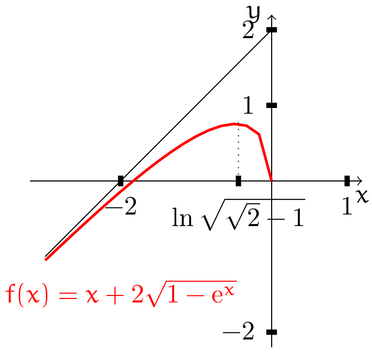
- Equazione degli eventuali asintoti: poiché $f(x) - x \xrightarrow[x\to-\infty]{} 2$, la retta di equazione $y = x + 2$ è asintoto per $x \to -\infty$.
- Derivata prima, suo insieme di definizione e suoi limiti agli estremi di tale insieme:

$$f'(x) = 1 - \frac{e^x}{\sqrt{1-e^x}} \text{ definita per } x < 0; \qquad \lim_{x\to-\infty} f'(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to 0^-} f'(x) = -\infty.$$

- Eventuali punti estremanti:

  $x = 0$ è punto di *minimo relativo forte*.

  Da $f'(x) = 0$ se e solo se $x = \ln\sqrt{2} - 1$ con $f'(x) < 0$ per $x \to -\infty$ e per $x \to 0^-$, segue che $x = \ln\sqrt{2} - 1$ è punto di *massimo assoluto*.
- Derivata seconda: $f''(x) = -\frac{e^x}{2}\,\frac{2-e^x}{(1-e^x)^{3/2}}$.
- Verso della concavità: essendo $f''(x) < 0$ per $x < 0$, f è concava su $(-\infty, 0]$.
- Diagramma qualitativo:



TEMA 48

Prima prova in itinere a.a. 2006/07
18 dicembre 2006

Esercizio 48.1

Il consumo medio di un'auto dopo i primi 6 000 chilometri di un viaggio è stato di 8,5 litri di benzina ogni 100 chilometri. Dopo ulteriori 1 000 chilometri, il consumo medio dei primi 7 000 chilometri è sceso a 8,2 litri di benzina ogni 100 chilometri. Qual è stato il consumo medio negli ultimi 1 000 chilometri?

✍ Soluzione

Con una media di 8,5 litri ogni 100 chilometri, per percorrere i primi 6 000 chilometri si sono consumati $8,5 \cdot 60 = 510$ litri di benzina.
Con una media di 8,2 litri ogni 100 chilometri, per percorrere i 7 000 chilometri (i 6 000 precedenti più ulteriori 1 000 chilometri) si sono consumati $8,2 \cdot 70 = 574$ litri di benzina.
Pertanto per percorrere gli ultimi 1 000 chilometri si sono consumati $574 - 510 = 64$ litri di benzina, per un consumo medio di 6,4 litri ogni 100 chilometri.

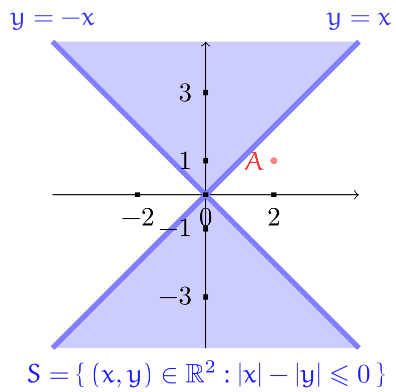
Esercizio 48.2

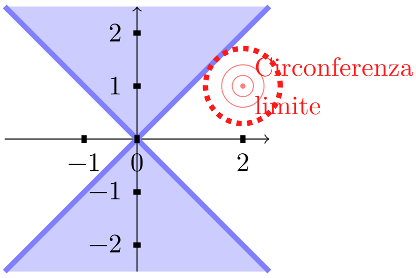
Nel piano dotato di un riferimento cartesiano ortogonale Oxy, si dia una rappresentazione grafica dell'insieme $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| - |y| \leqslant 0\}$ e del punto $A \equiv (2, 1)$.
Si determinino quindi le equazioni delle circonferenze con centro in A che non hanno punti in comune con S.
Si scriva infine l'equazione della parabola con asse orizzontale (cioè parallelo all'asse "x") e vertice in A che ha uno e un solo punto in comune con S.

✍ Soluzione

La rappresentazione grafica dell'insieme S è immediata. Tuttavia, se non vi sembra proprio così evidente, potete osservare che

$$\underbrace{|x|-|y|\leqslant 0}$$
$$\Downarrow$$
$$\begin{cases} x\geqslant 0\\ y\geqslant 0\\ x-y\leqslant 0\end{cases} \vee \begin{cases} x<0\\ y\geqslant 0\\ -x-y\leqslant 0\end{cases} \vee \begin{cases} x<0\\ y<0\\ -x+y\leqslant 0\end{cases} \vee \begin{cases} x\geqslant 0\\ y<0\\ x+y\leqslant 0\end{cases}$$
$$\Downarrow \qquad \Downarrow \qquad \Downarrow \qquad \Downarrow$$
$$\begin{cases} x\geqslant 0\\ y\geqslant 0\\ y\geqslant x\end{cases} \vee \begin{cases} x<0\\ y\geqslant 0\\ y\geqslant -x\end{cases} \vee \begin{cases} x<0\\ y<0\\ y\leqslant x\end{cases} \vee \begin{cases} x\geqslant 0\\ y<0\\ y\leqslant -x\end{cases}$$





Le circonferenze di centro A hanno equazione

$$(x-2)^2+(y-1)^2=r^2.$$

Affinché non abbiano punti in comune con l'insieme S, il raggio r deve essere minore della distanza di A dalla retta $y=x$. Sapendo che la distanza di un punto $A\equiv(x_A,y_A)$ da una retta di equazione $y=mx+q$ è pari a

$$d(A,y=mx+q)=\frac{|mx_A-y_A+q|}{\sqrt{1+m^2}},$$

deve essere $r<\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Le parabole con asse orizzontale hanno equazione $x=ay^2+by+c$ e il vertice si trova in $V\equiv\left(-\frac{b^2-4ac}{4a},-\frac{b}{2a}\right)$. Affinché A sia vertice dobbiamo imporre

$$\begin{cases} -\dfrac{b^2-4ac}{4a}=2\\ -\dfrac{b}{2a}=1.\end{cases}$$

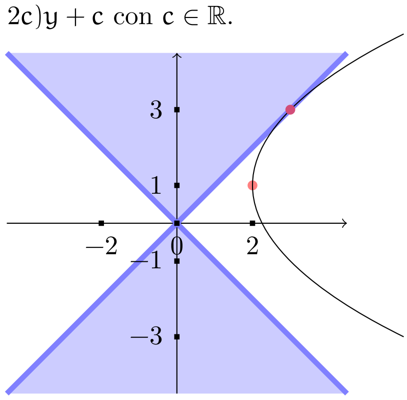
Pertanto le parabole cercate hanno equazione $x=(c-2)y^2+(4-2c)y+c$ con $c\in\mathbb{R}$.

Imponendo che abbiano uno ed un solo punto di intersezione con l'insieme S, il seguente sistema deve avere una ed una sola soluzione:

$$\begin{cases} x=(c-2)y^2+(4-2c)y+c\\ y=x\end{cases}$$

cioè l'equazione $(c-2)x^2+(3-2c)x+c=0$ deve avere due soluzioni coincidenti da cui $c=\frac{9}{4}$ e dunque

$x=\frac{1}{4}y^2-\frac{1}{2}y+\frac{9}{4}$.



Esercizio 48.3

20 persone hanno richiesto ciascuna un biglietto per assistere ad un concerto: sono disponibili solo 10 biglietti e l'assegnazione viene fatta per estrazione a sorte. La stessa situazione con le stesse persone si presenta qualche tempo dopo per un secondo concerto. Qual è la probabilità che esattamente 5 persone fra quelle che hanno fatto richiesta assistano ad entrambi i concerti?

✍ Soluzione

A prima estrazione avvenuta, i possibili esiti (equiprobabili) per la seconda sono $\binom{20}{10}$.

Gli esiti favorevoli (anch'essi equiprobabili) sono quelli in cui ad ogni cinquina dei 10 estratti nella prima è associata una cinquina dei 10 non estratti, dunque $\binom{10}{5}^2$. Si ha dunque

$$\frac{\binom{10}{5}^2}{\binom{20}{10}} = \frac{\frac{10!}{5!(10-5)!} \cdot \frac{10!}{5!(10-5)!}}{\frac{20!}{10!(20-10)!}} = \frac{(10!)^4}{(5!)^4\, 20!} = \frac{15\,876}{46\,189}$$

Esercizio 48.4

Sia $\mathcal{S}$ il sottoinsieme di $\mathbb{R}$ così definito: $\mathcal{S} = [-2,-1) \cup (1,3)$. Determinare estremo inferiore ed estremo superiore, specificando se siano anche rispettivamente minimo e massimo, di ciascuno dei seguenti insiemi:

$\mathcal{A} = \left\{ x^3 + \log_2^2 |y-1| \;\middle|\; x, y \in \mathcal{S} \right\}$, $\mathcal{B} = \{ x^3 + \log_2 |y-1| \mid x, y \in \mathcal{S} \}$,
$\mathcal{C} = \{ \sin(x+y) \mid x, y \in \mathcal{S} \}$, $\mathcal{D} = \{ \cos(x+y) \mid x, y \in \mathcal{S} \}$.

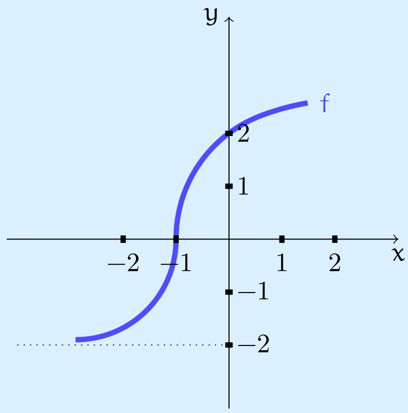
✍ Soluzione

$\operatorname{Inf} \mathcal{A} \underset{\binom{x=-2}{y=2}}{=} -8$	È minimo? Si	$\operatorname{Sup} \mathcal{A} \underset{\binom{x=2}{y\to 1^+}}{=} +\infty$	È massimo? No
$\operatorname{Inf} \mathcal{B} \underset{\binom{x=-2}{y\to 1^+}}{=} -\infty$	È minimo? No	$\operatorname{Sup} \mathcal{B} \underset{\binom{x\to 3^-}{y=-2}}{=} = 27 + \log_2 3$	È massimo? No
$\operatorname{Inf} \mathcal{C} \underset{\binom{x=3\pi/4}{y=3\pi/4}}{=} = \sin \frac{3}{2}\pi = -1$	È minimo? Si	$\operatorname{Sup} \mathcal{C} \underset{\binom{x=1.1+\pi/2}{y=-1.1}}{=} = \sin \frac{\pi}{2} = 1$	È massimo? Si
$\operatorname{Inf} \mathcal{D} \underset{\binom{x=\pi/2}{y=\pi/2}}{=} = \cos(\pi) = -1$	È minimo? Si	$\operatorname{Sup} \mathcal{D} \underset{\binom{x=2}{y=-2}}{=} \cos(0) = 1$	È massimo? Si

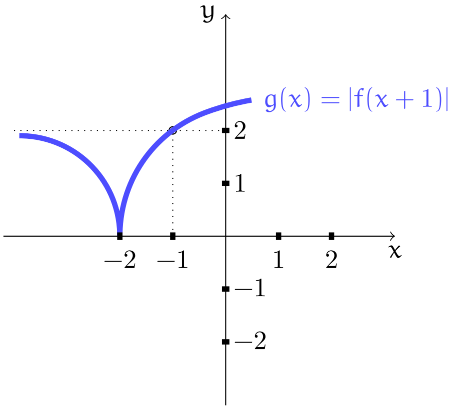
Esercizio 48.5

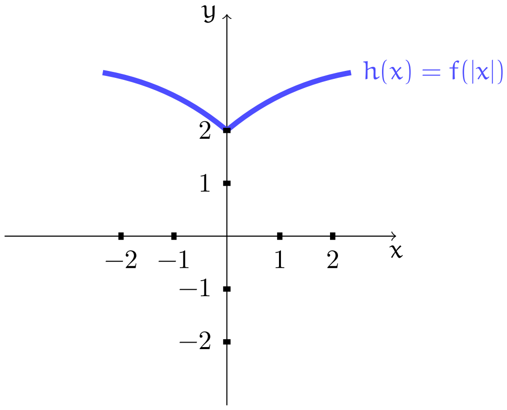
Quello in figura è il diagramma della funzione $y = f(x)$. Tracciare i diagrammi delle seguenti funzioni:

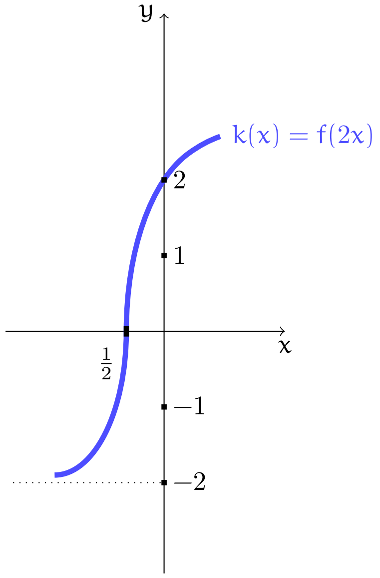
1. $g(x) = |f(x+1)|$,
2. $h(x) = f(|x|)$,
3. $k(x) = f(2x)$,
4. $z(x) = f(x) + 2$,
5. $x = f^{-1}(y)$.

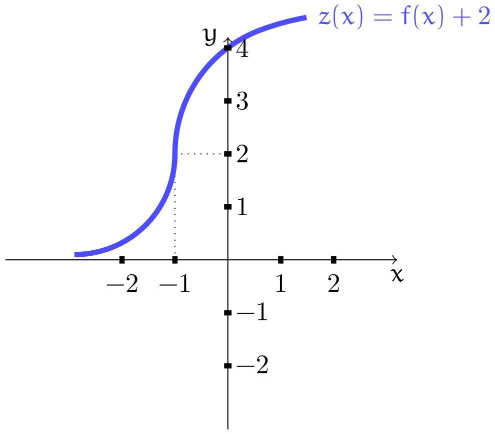


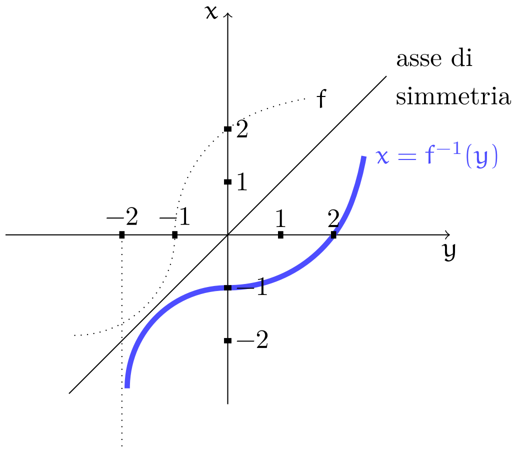
✍ Soluzione











Esercizio 48.6

Risolvere la disequazione

$$\sqrt{100^x - 1} + 10 < 10^x.$$

✍ Soluzione

La disequazione è del tipo $A(x) > \sqrt{B(x)}$.

$$10^x - 10 > \sqrt{100^x - 1} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 100^x - 1 \geqslant 0 \\ 10^x - 10 > 0 \\ (10^x - 10)^2 > 100^x - 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \geqslant 0 \\ x > 1 \\ 10^{2x} + 100 - 2\ 10^{x+1} > 10^{2x} - 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x > 1 \\ 10^x < \dfrac{101}{20} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x > 1 \\ x < \log_{10} \dfrac{101}{20} \end{cases}$$

Poiché $\log_{10} \frac{101}{20} < 1$ la disequazione non ammette soluzioni.

Esercizio 48.7

Soltanto due dei seguenti limiti esistono. Individuarli, calcolarli e precisare la ragione della non esistenza del limite rimanente.

$$\mathfrak{A} = \lim_{n\to\infty} n^4(1-n^5)^{1/5} + n^5,$$

$$\mathfrak{B} = \lim_{n\to\infty} n^2 \cos\left(\frac{2}{n}\right) - \cos\left(n^2\pi + \frac{1}{n}\right) - n^2,$$

$$\mathfrak{C} = \lim_{n\to\infty} n^2 \sin\left(\frac{2}{n}\right) - \cos\left(n^2\pi + \frac{1}{n}\right) - n^2.$$

✍ Soluzione

$$\mathfrak{A} = \lim_{n\to\infty} n^4(1-n^5)^{1/5} + n^5 = \lim_{n\to\infty} \frac{\left[1 + \left(-\frac{1}{n^5}\right)\right]^{1/5} - 1}{\left(-\frac{1}{n^5}\right)} \overset{(G)}{=} \frac{1}{5}\ ;$$

$$\mathfrak{B} = \lim_{n\to\infty} n^2 \cos\left(\frac{2}{n}\right) - \cos\left(n^2\pi + \frac{1}{n}\right) - n^2 =$$

$$= \lim_{n\to\infty} -n^2\left[1 - \cos\left(\frac{2}{n}\right)\right] - \left[\cos(n^2\pi)\cos\left(\frac{1}{n}\right) - \sin(n^2\pi)\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \underbrace{-n^2\left(\frac{2}{n}\right)^2}_{\downarrow\ 4} \underbrace{\frac{\left[1 - \cos\left(\frac{2}{n}\right)\right]}{\left(\frac{2}{n}\right)^2}}_{\downarrow\ 1/2} - \underbrace{\left[(-)^n \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right]}_{\substack{\downarrow \\ +1 \text{ se } n \text{ è pari} \\ -1 \text{ se } n \text{ è dispari}}} \Rightarrow \nexists\ ;$$

$$\mathfrak{C} = \lim_{n\to\infty} n^2 \sin\left(\frac{2}{n}\right) - \cos\left(n^2\pi + \frac{1}{n}\right) - n^2 =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n^2 \sin\left(\frac{2}{n}\right) - n^2 - \left[\cos(n^2\pi)\cos\left(\frac{1}{n}\right) - \sin(n^2\pi)\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \underbrace{n^2\left(\frac{2}{n}\right)\frac{\sin\left(\frac{2}{n}\right)}{\left(\frac{2}{n}\right)} - n^2}_{\downarrow\ -\infty} - \underbrace{\left[(-)^n \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right]}_{\substack{\downarrow \\ +1 \text{ se } n \text{ è pari} \\ -1 \text{ se } n \text{ è dispari}}} = -\infty\ .$$

TEMA 49

Prova scritta del 9 gennaio 2007

Esercizio 49.1

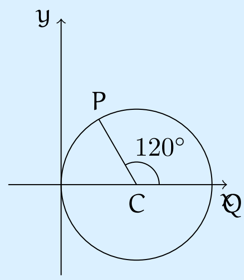
Due persone A e B vogliono misurare in passi la distanza fra le loro abitazioni. Il passo di A è di 72 centimetri, quello di B è più lungo del 25%. Per effettuare la misurazione, A deve fare 90 passi in più di B. Quanto distano le due abitazioni?

✍ Soluzione

Il passo di B è lungo $(1+25\%)72$ cm $= \frac{125}{100}72$ cm $= 90$ cm. Sia x il numero di passi di B. Abbiamo Distanza $= (x+90)72$ cm $= x\ 90$ cm da cui $x = 360$. Pertanto le due abitazioni distano 32 400 cm $=$ 324 m .

Esercizio 49.2

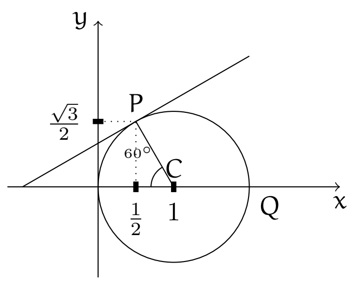
Nel piano, dotato di un riferimento cartesiano ortogonale Oxy, la figura rappresenta una circonferenza di centro C cui appartengono l'origine degli assi e i punti $Q \equiv (2,0)$ e P. L'angolo al centro (convesso) PCQ misura 120 gradi. Determinare l'equazione della retta tangente alla circonferenza nel punto P.



✍ Soluzione

Le coordinate di C sono $(1,0)$. Per cui quelle di P sono $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. La retta PC ha coefficiente angolare $m = -\sqrt{3}$, pertanto le rette ortogonali alla retta PC hanno coefficiente angolare $m^{\perp} = -\frac{1}{m} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Imponendo il passaggio per P ricaviamo l'equazione della retta cercata

$$y = \frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}}.$$



Esercizio 49.3

20 persone hanno richiesto ciascuna un biglietto per assistere ad un concerto: sono disponibili solo 9 biglietti e l'assegnazione viene fatta per estrazione a sorte. La stessa situazione con le stesse persone si presenta qualche tempo dopo per un secondo concerto. Qual è la probabilità che nessuna persona, fra quelle che hanno fatto richiesta, assista ad entrambi i concerti?

✍ Soluzione

Una volta effettuata la prima estrazione, vi sono $\binom{20}{9}$ possibili esiti nella seconda. Fra questi, solo $\binom{11}{9}$ sono quelli che vedono estratte solo persone non estratte alla prima. Dunque la probabilità è

$$\frac{\binom{11}{9}}{\binom{20}{9}} = \frac{11!}{9!(11-9)!} \cdot \frac{9!(20-9)!}{20!} = \frac{11!}{9!2} \cdot \frac{9!11!}{20!} = \frac{(11!)^2}{20!2} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \dots 4 \cdot 3}{20 \cdot 19 \cdot 18 \dots 13 \cdot 12} = \frac{11}{33\,592}$$

Esercizio 49.4

Calcolare i seguenti limiti.

$$\mathfrak{A} = \lim_{x \to -3} \frac{x^{1/3} + 3^{1/3}}{x + 3} \qquad \mathfrak{B} = \lim_{x \to 0} \frac{x^3}{\tan x - \sin x}$$

✍ Soluzione

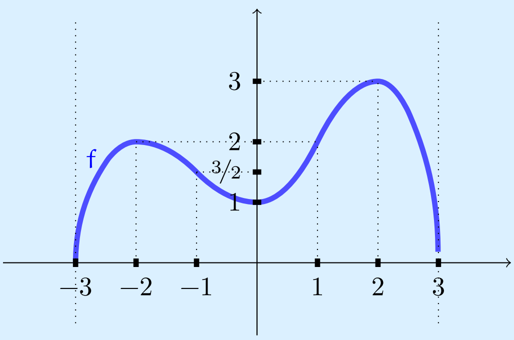
Si ha $a + b = (a^{1/3} + b^{1/3})(a^{2/3} - (ab)^{1/3} + b^{2/3})$ pertanto

$$\mathfrak{A} = \lim_{x \to -3} \frac{\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{3}}{x + 3} = \lim_{x \to -3} \frac{\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{3}}{\left(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{3}\right)\left(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{3x}\sqrt[3]{9}\right)} = \frac{1}{3\sqrt[3]{9}}$$

$$\mathfrak{B} = \lim_{x \to 0} \frac{x^3}{\tan x - \sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} \frac{x^2}{(1 - \cos x)} \cos x \overset{(A)(B)}{=\!=} 2.$$

Esercizio 49.5

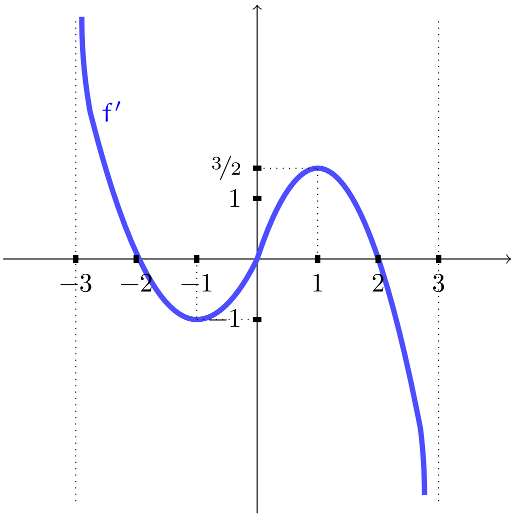
Quello in figura è il diagramma della funzione f derivabile sull'intervallo $(-3, 3)$. Tracciare un diagramma plausibile della funzione f' e precisare, fornendo adeguata motivazione, quante soluzioni ha l'equazione $f'(x) = 1$.



✍ Soluzione

Osserviamo che

- $(-2, 2)$ e $(2, 3)$ sono punti di massimo per f (e dunque $f'(-2) = f'(2) = 0$),
- $(0, 1)$ è punto di minimo per f (e dunque $f'(0) = 0$),
- $(-1, \frac{1}{2})$ e $(1, 2)$ sono punti di flesso per f (rispettivamente discendente e ascendente e dunque f' ha rispettivamente un punto di minimo e un punto di massimo).



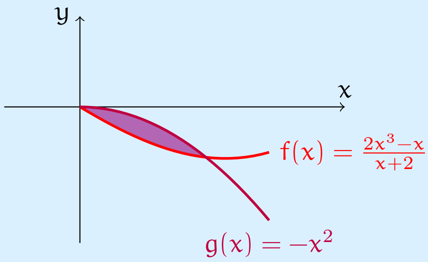
Ne deduciamo che

- $\lim\limits_{x \to -3^+} f'(x) = +\infty$,
- $f(2) - f(0) = 2$,
- esistono punti dell'intervallo $(0, 2)$ in cui f' è minore di 1

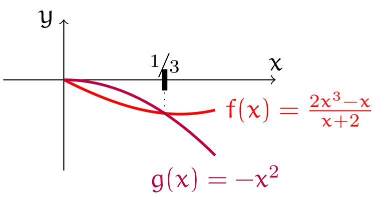
per cui, nel punto $x = 1$ (di massimo locale per f'), f' deve essere > 1. Pertanto si ha $f'(x) = 1$ per 3 valori distinti di x.

Esercizio 49.6

Calcolare l'area della regione ombreggiata nella figura qui accanto.



✍ Soluzione



Si ha $f(x) = g(x)$ se e solo se $x = -1$ o $x = 0$ o $x = \frac{1}{3}$ e questo è il punto che ci interessa. L'area cercata è dunque data da

$$\text{Area} = \int_0^{\frac{1}{3}} g(x) - f(x)\, dx\,.$$

Si ha $\frac{2x^3-x}{x+2} = 2x^2 - 4x + 7 - \frac{14}{x+2}$ dunque

$$\text{Area} = \int_0^{\frac{1}{3}} -3x^2 - 4x + 7 - \frac{14}{x+2}\, dx = \left[-x^3 + 2x^2 - 7x + 14 \ln(x+2)\right]_0^{\frac{1}{3}} = -\frac{58}{27} + 14 \ln \frac{7}{6}.$$

Esercizio 49.7

Studiare la funzione f così definita: $f(x) = \ln\left(3 - \frac{1}{x}\right)$, dove il logaritmo è inteso in base "e".

✍ Soluzione

- Insieme di definizione : deve essere $\begin{cases} x \neq 0 \\ 3 - \frac{1}{x} > 0 \end{cases}$ da cui $x \in (-\infty, 0) \cup (1/3, +\infty)$.

❦ Limiti agli estremi di tale insieme:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ln 3, \qquad \lim_{x\to 0^-} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to 1/3^+} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \ln 3.$$

❦ Equazione degli eventuali asintoti:

$y = \ln 3$ è asintoto orizzontale per $x \to \pm\infty$, $x = 0$ e $x = \frac{1}{3}$ sono asintoti verticali.

❦ Derivata prima: $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x^2}}{3 - \dfrac{1}{x}} = \dfrac{1}{x(3x-1)}$.

❦ Eventuali punti estremanti:

poiché $f'(x) > 0$ per ogni x nell'insieme di definizione di f, non ci sono estremanti.

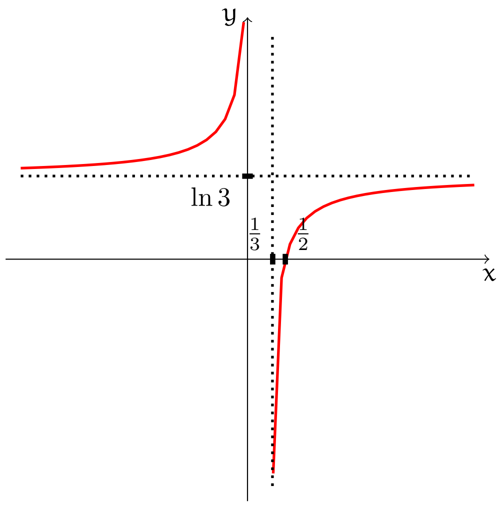
❦ Derivata seconda: $f''(x) = -\dfrac{6x-1}{x^2(3x-1)^2}$.

❦ Verso della concavità:

essendo $f''(x) > 0$ per $x < 0$ e $f''(x) < 0$ per $x > \frac{1}{3}$,

f è convessa su $(-\infty, 0)$ e concava su $(\frac{1}{3}, +\infty)$.

❦ Diagramma qualitativo:



TEMA 50

Prova scritta del 16 febbraio 2007

Esercizio 50.1

In una botte vi sono 30 litri di vino. Oggi ne prelevo 6 litri e li sostituisco con altrettanti litri di acqua. Della miscela così ottenuta, domani preleverò ancora 6 litri e li sostituirò con altrettanti litri di acqua. Dopodomani ripeterò l'operazione: dopo averlo fatto, quanti litri di acqua saranno presenti nella botte?

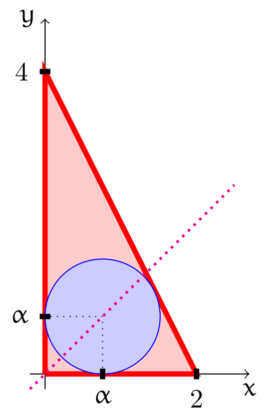
✍ Soluzione

Questa sera vi saranno 6 litri di acqua. Domani sera ve ne saranno $6 - \frac{6}{5} + 6 = 12 - \frac{6}{5}$, pari a $\frac{1}{5}$ del totale. Dopodomani sera ve ne saranno $18 - \frac{1}{5}\left(12 - \frac{6}{5}\right) = 12 - \frac{84}{25} = 14,64$ litri.

Esercizio 50.2

Nel piano, dotato di un riferimento cartesiano ortogonale Oxy, si scriva l'equazione della circonferenza inscritta nel triangolo di vertici $(0,0)$, $(2,0)$ e $(0,4)$.

✍ Soluzione



L'incentro (centro della circonferenza inscritta) coincide con l'incontro delle bisettrici, deve quindi cadere sulla bisettrice del I°e III°quadrante. Siano (α, α) le sue coordinate. Ovviamente $\alpha \in (0,2)$. Occorre stabilire per quale α la circonferenza di equazione $(x-\alpha)^2 + (y-\alpha)^2 = \alpha^2$ è tangente la retta contenente l'ipotenusa, cioè la retta per $(2,0)$ e $(0,4)$. Tale retta ha equazione $y = 4-2x$. Il sistema fornisce l'equazione $5x^2 + 2(\alpha-8)x + \alpha^2 - 8\alpha + 16 = 0$ che ha soluzioni coincidenti se e solo se $4\alpha^2 - 24\alpha + 16 = 0$, cioè $\alpha = 3 \pm \sqrt{5}$. Chiaramente per noi $\alpha = 3 - \sqrt{5}$:

$$(x-3+\sqrt{5})^2 + (y-3+\sqrt{5})^2 = 14 - 2\sqrt{5}.$$

Esercizio 50.3

Risolvere la disequazione $\dfrac{\sqrt{x^2-9}}{x} < \dfrac{1}{x^2}$.

✍ Soluzione

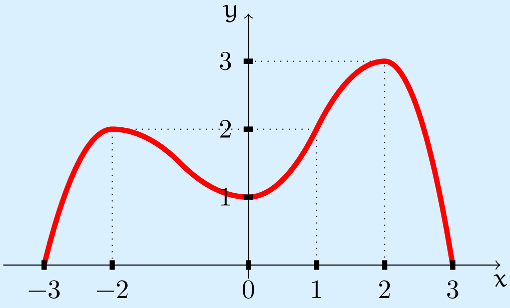
- CE: deve essere $\begin{cases} x^2-9 \geqslant 0 \\ x \neq 0 \end{cases}$. Occorre pertanto lavorare per $|x| \geqslant 3$.
- Risoluzione:
  - se $x \leqslant -3$ la disequazione è ovviamente soddisfatta;
  - se $x \geqslant 3$ la disequazione è equivalente a $x^2(x^2-9) < 1$, risolta da $0 \leqslant x^2 < \sqrt{\frac{9+\sqrt{85}}{2}}$, dunque, nel nostro caso, $3 \leqslant x < \sqrt{\frac{9+\sqrt{85}}{2}}$.

In definitiva $x \in (-\infty, -3] \cup \left[2, \sqrt{\frac{9+\sqrt{85}}{2}}\right)$.

Esercizio 50.4

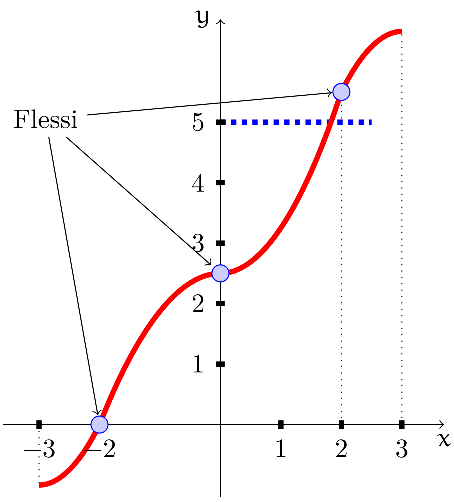
Quello in figura è il diagramma della funzione f continua sull'intervallo $(-3, 3)$.

- Tracciare un diagramma plausibile della funzione $F(x) = \int_{-2}^{x} f(t)\,dt$ evidenziandone in particolare gli eventuali punti di flesso.
- Precisare quindi, fornendo adeguata motivazione, quante soluzioni ha l'equazione $F(x) = 5$.



✍ Soluzione

- F è continua;
- $f(x) > 0$ pertanto F è crescente e $\begin{cases} F(x) < 0 & \text{per } x < -2, \\ F(x) = 0 & \text{per } x = -2, \\ F(x) > 0 & \text{per } x > -2, \end{cases}$
- f è crescente per $x \in [-3, -2) \cup (0, 2)$ e decrescente per $x \in (-2, 0) \cup (2, 3)$ pertanto F è convessa su $[-3, -2)$ e su $(0, 2)$, concava su $(-2, 0)$ e su $(2, 3)$;
- $x = -2$ e $x = 2$ sono punti di massimo e $x = 0$ è punto di minimo per f pertanto sono punti di flesso per F;



È ovvio che $F(2) > 4 + 1 = 5$ dunque l'equazione $F(x) = 5$ ha esattamente una soluzione.

Esercizio 50.5

Sono assegnati un insieme A di 12 elementi e un suo sottoinsieme S costituito da 5 elementi. Quanti sono i sottoinsiemi di A formati da 5 elementi la cui intersezione con S abbia al più 2 elementi?

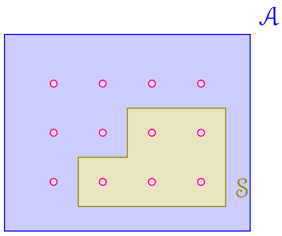
✍ Soluzione

Quelli che hanno intersezione VUOTA con $\mathcal{A}$ sono in numero di

$$\binom{12-5}{5} = \binom{7}{5}.$$

Quelli la cui intersezione con $\mathcal{A}$ è costituita ESATTAMENTE DA UN ELEMENTO sono in numero di

$$5\binom{12-5}{5-1} = 5\binom{7}{4}.$$



Quelli la cui intersezione con $\mathcal{A}$ è costituita ESATTAMENTE DA DUE ELEMENTI sono in numero di

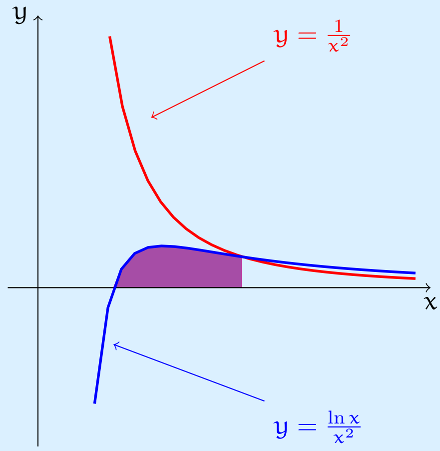
$$\binom{5}{2}\binom{12-5}{5-2} = \binom{5}{2}\binom{7}{3}.$$

In totale

$$\binom{7}{5} + 5\binom{7}{4} + \binom{5}{2}\binom{7}{3} = \frac{7!}{5!\,(7-5)!} + 5\frac{7!}{4!\,(7-4)!} + \frac{5!}{2!\,(5-2)!}\frac{7!}{3!\,(7-3)!} =$$
$$= 21 + 5 \cdot 35 + 10 \cdot 35 = 546.$$

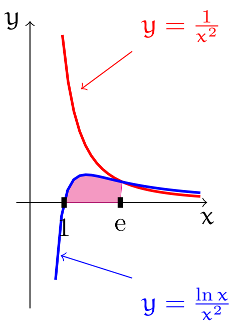
Esercizio 50.6

Calcolare l'area della regione piana ombreggiata in figura.



✍ Soluzione

$$y = \frac{\ln x}{x^2} = 0 \qquad \text{se e solo se } x = 1,$$
$$y = \frac{\ln x}{x^2} = \frac{1}{x^2} \qquad \text{se e solo se } x = e.$$



Pertanto

$$\text{Area} = \int_1^e \frac{\ln x}{x^2}\,dx = \left[-\frac{\ln x}{x}\right]_1^e + \int_1^e \frac{1}{x^2}\,dx = \left[-\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}\right]_1^e = 1 - \frac{2}{e}.$$

Esercizio 50.7

Studiare la funzione f così definita: $f(x) = \dfrac{\ln^2 x}{x^2}$, dove il logaritmo è inteso in base “e”.

✍ Soluzione

- Insieme di definizione : deve essere $\begin{cases} x \neq 0 \\ x > 0 \end{cases}$ da cui $x \in (0, +\infty)$.
- Limiti agli estremi di tale insieme:

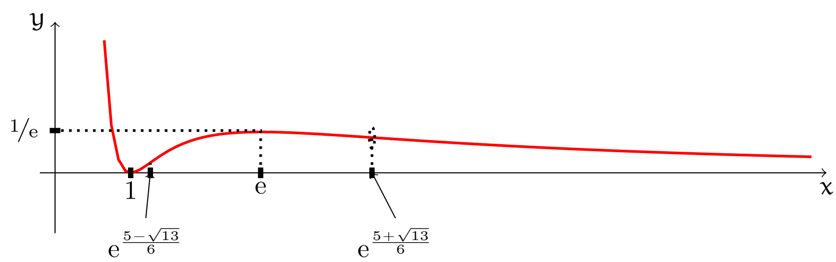
$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0^+.$$

- Equazione degli eventuali asintoti:

  $y = 0$ è asintoto orizzontale per $x \to +\infty$, $x = 0$ è asintoto verticale.
- Derivata prima: $f'(x) = 2\dfrac{\ln x(1 - \ln x)}{x^3}$.
- Eventuali punti estremanti:

  f è crescente su $(1, e)$, decrescente su $(0, 1)$ e su $(e, +\infty)$.
- Derivata seconda: $f''(x) = 2\dfrac{3\ln^2 x - 5\ln x + 1}{x^4}$.
- Verso della concavità:

  f è convessa su $\left(0, \exp\frac{5-\sqrt{13}}{6}\right)$ e su $\left(\exp\frac{5+\sqrt{13}}{6}, +\infty\right)$, concava su $\left(\exp\frac{5-\sqrt{13}}{6}, \exp\frac{5+\sqrt{13}}{6}\right)$.
- Diagramma qualitativo:



TEMA 51

Seconda prova scritta pre-esame a.a. 2006/07

27 marzo 2007

Esercizio 51.1

Determinare le equazioni degli asintoti al diagramma della funzione $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2 - 3x}}$.

Soluzione

- CE: deve essere $\begin{cases} \sqrt{x^2-3x} \neq 0 \\ x^2 - 3x \geqslant 0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ f è definita su $(-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$.

- Limiti:

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \\ &\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = -1 =: m_1 \\ &\lim_{x\to-\infty} f(x) - m_1 x = \lim_{x\to-\infty} f(x) + x = \\ &= \lim_{x\to-\infty} x\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-\frac{3}{x}}}\right) = \\ &= \lim_{x\to-\infty} -\frac{3}{\sqrt{1-\frac{3}{x}}} \, \frac{\sqrt{1-\frac{3}{x}}-1}{-\frac{3}{x}} = \\ &\overset{(G)}{=\!=} -{}^3\!/_2 =: q_1 \end{aligned}\right]$$

la retta di equazione $y = -x - 3/2$ è asintoto obliquo per $x \to -\infty$

$$\lim_{x\to0^-} f(x) = 0$$

$$\lim_{x\to3^+} f(x) = +\infty$$

la retta di equazione $x = 3$ è asintoto verticale

$$\left.\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \\
&\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +1 =: m_2 \\
\lim_{x\to+\infty} f(x) - m_2 x &= \lim_{x\to-\infty} f(x) - x = \\
&= \lim_{x\to-\infty} -x\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-\frac{3}{x}}}\right) = \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{3}{\sqrt{1-\frac{3}{x}}}\,\frac{\sqrt{1-\frac{3}{x}}-1}{-\frac{3}{x}} = \\
&\overset{(G)}{=\!=} 3/2 =: q_2
\end{aligned}\right]$$

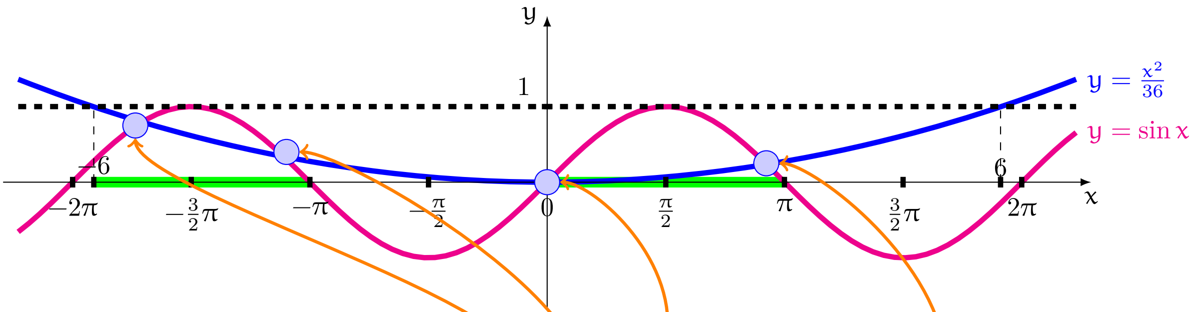
la retta di equazione $y = x + 3/2$ è asintoto obliquo per $x \to +\infty$

Esercizio 51.2

Stabilire quante soluzioni ha l'equazione $x^2 - 36\sin x = 0$.

✍ Soluzione

Il numero di soluzioni dell'equazione assegnata è pari al numero di intersezioni fra il diagramma della funzione di equazione $f(x) = \frac{x^2}{36} = (x/6)^2$ e il diagramma della funzione di equazione $g(x) = \sin x$. Queste due funzioni sono definite e continue su $\mathbb{R}$ e si ha $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty]$ e $g : \mathbb{R} \to [-1, +1]$, pertanto le due curve si possono intersecare solo per i valori di x tali che $f(x)$ e $g(x) \in [0, +1]$. Poiché $f(x) \in [0, +1]$ se e solo se $x \in [-6, 6]$ e poiché per $x \in [-6, 6]$ la funzione $g(x) \in [0, +1]$ se e solo se $x \in [-6, -\pi] \cup [0, \pi]$, le uniche soluzioni (se esistono) devono essere cercate per $x \in [-6, -\pi] \cup [0, \pi]$. Da ovvie considerazioni otteniamo la seguente figura



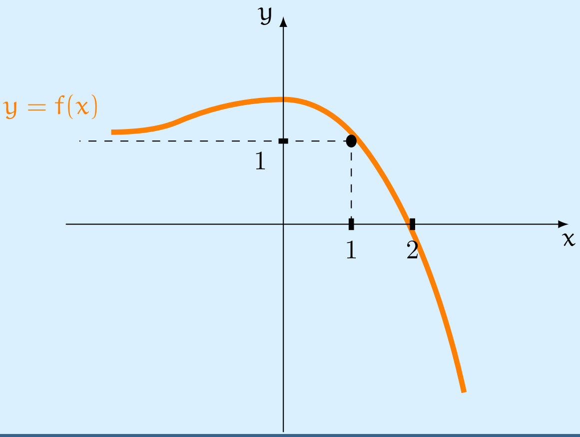
Segue che ci sono 4 soluzioni:

- una nell'intervallo $(-6, -\frac{3}{2}\pi)$,
- una nell'intervallo $(-\frac{3}{2}\pi, -\pi)$,
- $x = 0$,
- una nell'intervallo $(\frac{\pi}{2}, \pi)$.

Esercizio 51.3

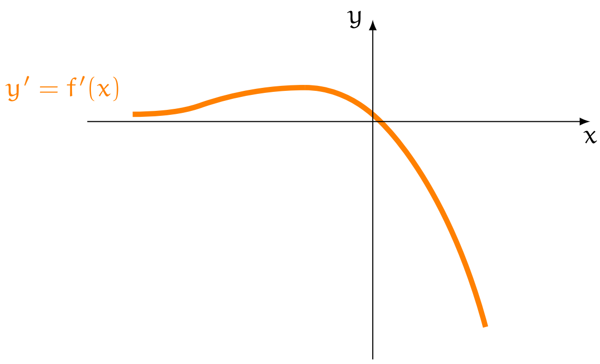
Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile il cui diagramma è qualitativamente quello indicato in figura. Tracciare un diagramma plausibile per ciascuna delle funzioni $y' = f'(x)$ e $g(x) = \int_1^x f(t)\,dt$ (cioè g è la primitiva di f su $\mathbb{R}$ che in 1 vale 0). Stabilire quindi il numero delle soluzioni

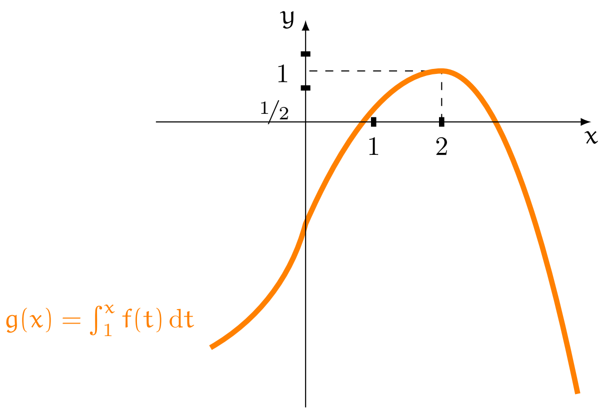
1. dell'equazione $g(x) = -10$,
2. dell'equazione $g(x) = 1/2$,
3. dell'equazione $g(x) = 1$.



✍ Soluzione

- f è strettamente crescente per $x < 0$, strettamente decrescente per $x > 0$ e in $x = 0$ presenta un punto di massimo assoluto pertanto $f'(x) > 0$ per $x < 0$, $f'(x) < 0$ per $x > 0$ e $f'(0) = 0$;
- $y = 1$ è asintoto orizzontale per x che tende a $-\infty$ pertanto f' tende a 0 per x che tende a $-\infty$;
- f è concava per $x < \alpha < 0$, convessa per $x > \alpha$ e $x = \alpha < 0$ è un punto di flesso pertanto f' è crescente per $x < \alpha$, decrescente per $x > \alpha$ e $x = \alpha$ è punto di massimo assoluto.





- g è continua;
- $f(x) > 0$ per $x < 2$ e $f(x) < 0$ per $x > 2$ pertanto
  - g è strettamente crescente per $x < 2$, strettamente decrescente per $x > 2$,
  - $\begin{cases} g(x) < 0 & \text{per } x < 1, \\ g(x) = 0 & \text{per } x = 1, \\ g(x) > 0 & \text{per } 1 < x < 2, \\ g(x) \gtreqless 0 & \text{per } x > 2, \end{cases}$
  - g tende a $-\infty$ per $x \to \pm\infty$;
- f è crescente per $x < 0$ e decrescente per $x > 0$ pertanto g è convessa per $x < 0$ e concava per $x > 0$;
- $x = 2$ è punto di massimo e $x = 0$ è punto di flesso per g;

Intersezioni con le rette di equazione $y = -10$, $y = 1/2$ e $y = 1$:

1. essendo $g(2) > 0$, l'equazione $g(x) = -10$ ha allora 2 soluzioni;
2. chiaramente (essendo f concava su $[1, 2]$) si ha $\frac{1}{2} < \int_1^2 f < 1$, per cui $g(x) = \frac{1}{2}$ ha ancora due soluzioni,
3. mentre $g(x) = 1$ non ha soluzioni.

Esercizio 51.4

Dimostrare, facendo esclusivamente ricorso alla definizione di derivata (limite dei rapporti incrementali), che la derivata della funzione $f(x) = x^x$ è (per $x > 0$) $f'(x) = x^x(1 + \ln x)$.

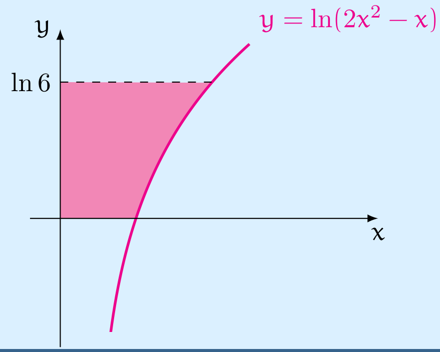
✍ Soluzione

Poiché $x^x = e^{x \ln x}$ abbiamo

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{(x+h)\ln(x+h)} - e^{x\ln x}}{h} = \\
&= \lim_{h\to 0} e^{x\ln x} \frac{e^{x(\ln(x+h)-\ln x)+h\ln(x+h)} - 1}{h} = \\
&= x^x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{e^{x\ln(1+h/x)+h\ln(x+h)} - 1}{h} = \\
&= x^x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{e^{x\ln(1+h/x)+h\ln(x+h)} - 1}{(x\ln(1+h/x) + h\ln(x+h))} \cdot \frac{(x\ln(1+h/x) + h\ln(x+h))}{h} = \\
&= x^x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{e^{x\ln(1+h/x)+h\ln(x+h)} - 1}{(x\ln(1+h/x) + h\ln(x+h))} \cdot \left(\frac{\ln(1+h/x)}{h/x} + \ln(x+h)\right) \overset{(F)(E)}{=\!=} x^x(1 + \ln x)
\end{aligned}
$$

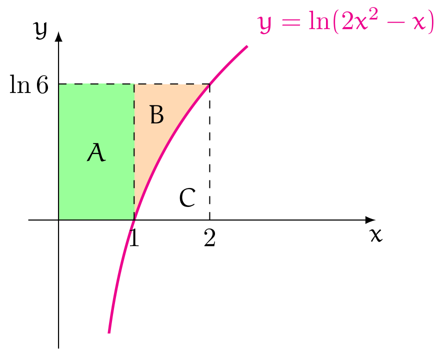
Esercizio 51.5

Calcolare l'area della regione piana colorata in figura (i logaritmi sono intesi in base "e").



✍ Soluzione

Per $x > 0$ si ha
$\ln(2x^2 - x) = \ln 6 \Leftrightarrow x = 2$.



L'area cercata vale allora $A + B = 2\ln 6 - C$ dove, integrando per parti*, si ha

$$C = \int_1^2 \ln(2x^2 - x)\,dx \overset{(P.P.)}{=} \left[x\ln(2x^2-x)\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{4x^2-x}{2x^2-x}\,dx =$$

$$= 2\ln 6 - \int_1^2 2 + \frac{1}{2x-1}\,dx = 2\ln 6 - \left[2x + \frac{1}{2}\ln(2z-1)\right]_1^2 = 2\ln 6 - 2 - \ln\sqrt{3}.$$

L'area vale allora $2 + \ln\sqrt{3}$.

Esercizio 51.6

Studiare la funzione f così definita: $f(x) = \dfrac{x^2}{\ln(x^2) - 1}$ (il logaritmo è inteso in base "e").

✍ Soluzione

Poiché $f(-x) = f(x)$ la funzione è pari: studiamo solo per $x \geqslant 0$.

- Insieme di definizione : deve essere $\begin{cases} \ln(x^2) - 1 \neq 0 \\ x^2 > 0 \end{cases}$ da cui $x \in (0, \sqrt{e}) \cup (\sqrt{e}, +\infty)$.
- Ricordiamoci che per $x > 0$ si ha $\ln(x^2) = 2\ln(x)$.
- Limiti agli estremi di tale insieme:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0^- \qquad \lim_{x\to(\sqrt{e})^\pm} f(x) = \pm\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

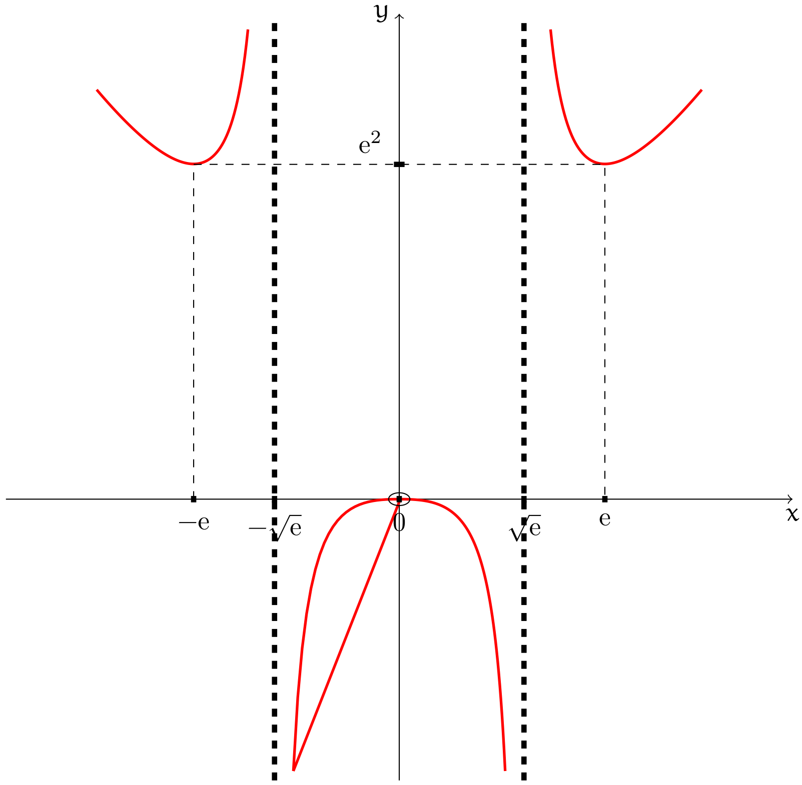
- Equazione degli eventuali asintoti:
  - $x = \sqrt{e}$ è asintoto verticale,
  - $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ per cui non c'è asintoto orizzontale,
  - $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ per cui non c'è asintoto obliquo.
- Derivata prima:

$$f'(x) = \frac{2x(2\ln x - 1) - x^2\frac{2}{x}}{(2\ln x - 1)^2} = 4\frac{x(\ln x - 1)}{(2\ln x - 1)^2}, \qquad \lim_{x\to 0^+} f'(x) = 0.$$

- Eventuali punti estremanti: $x = e$ è punto di minimo relativo.
- Derivata seconda: $f''(x) = 4\frac{(\ln x - 1 + 1)(2\ln x - 1)^2 - x(\ln x - 1)2(2\ln x - 1)\frac{2}{x}}{(2\ln x - 1)^4} = 4\frac{2\ln^2 x - 5\ln x + 4}{(2\ln x - 1)^3} \neq 0\ \forall x$.
- Verso della concavità: f è concava su $(0, \sqrt{e})$, convessa su $(\sqrt{e}, +\infty)$.
- Diagramma qualitativo:

$^*\int h(x)g'(x)\,dx = h(x)g(x) - \int h'(x)g(x)\,dx$

$$\begin{array}{lcl} h(x) = \ln(2x^2 - x) & \rightsquigarrow & h'(x) = \frac{4x-1}{2x^2-x} \\ g(x) = \int g'(x)\,dx = x & \leftsquigarrow & g'(x) = 1 \end{array}$$


y
e^2
$-e$
$-\sqrt{e}$
0
$\sqrt{e}$
e
x

TEMA 52

Prova scritta del 12 aprile 2007

Esercizio 52.1

Sono le 14:00 e sto guidando alla velocità di 90 Km/h. A questa velocità con la benzina che mi resta posso percorrere solo 80 Km, ma il distributore più vicino è distante 120 Km. La quantità di benzina che la mia auto consuma è direttamente proporzionale alla velocità dell'auto e io desidero perdere quanto meno tempo è possibile. A che ora arriverò al distributore?

✍ Soluzione

Se k è la costante di proporzionalità del consumo (litri al chilometro) rispetto alla velocità, alle 14:00 ho $k \cdot 90 \cdot 80$ litri di benzina. Quindi, detta v la massima velocità alla quale posso guidare per percorrere i 120 Km con la benzina che mi resta, abbiamo

$$k \cdot 90 \cdot 80 = k \cdot v \cdot 120$$

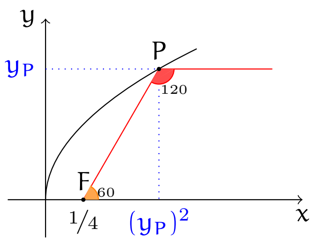
da cui v=60 Km/h. A questa velocità per percorrere 120 Km ci vogliono 2 h per cui arriverò alle 16:00.

Esercizio 52.2

Nel piano dotato di un riferimento cartesiano ortogonale Oxy, sia γ la parabola di equazione $y^2 = x$. Un raggio r uscente dal fuoco di γ incontra γ in un punto P del primo quadrante. Determinare le coordinate di P, sapendo che l'angolo che il raggio r forma con il raggio riflesso è di 120 gradi.

✍ Soluzione

La parabola è del tipo $x = ay^2 + by + c$. Le coordinate del fuoco sono $\left(\frac{1-(b^2-4ac)}{4a}, -\frac{b}{2a}\right)$. Pertanto il fuoco della parabola assegnata si trova in $F = \left(\frac{1}{4}, 0\right)$.
Il raggio riflesso è parallelo all'asse delle ascisse per cui abbiamo gli angoli come nella figura qui accanto. Indicate con (y_P^2, y_P) le coordinate del punto P, si ha



$$(y_P)^2 - \frac{1}{4} = \frac{y_P}{\sqrt{3}}$$

da cui $P = \left(\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Esercizio 52.3

Sia f la funzione reale di variabile reale definita da

$$f(x) = x \ln\left(e^2 + \frac{3}{x+1}\right)$$

dove il logaritmo è inteso in base e. Risolvere la disequazione $f(x) \geqslant 0$.

✍ Soluzione

- CE: deve essere $\begin{cases} e^2 + \frac{3}{x+1} > 0 \\ x + 1 \neq 0 \end{cases}$ ossia $\dfrac{e^2x + e^2 + 3}{x+1} > 0$ con $x \neq -1$

		$-1 - \frac{3}{e^2}$		-1	
$e^2x + e^2 + 3$	$-$		$+$		$+$
$x + 1$	$-$		$-$		$+$
	$\oplus$		$\ominus$		$\oplus$

  Occorre pertanto lavorare per $x < -1 - \frac{3}{e^2} \ \cup \ x > -1$.

- Risoluzione:
  - Se $x > -1$ allora $\ln\left(e^2 + \frac{3}{x+1}\right) > 0$, per cui solo $x > 0$ è accettabile.
  - Se $x < -1 - \frac{3}{e^2}$, $f(x) \geqslant 0$ se e solo se $\ln\left(e^2 + \frac{3}{x+1}\right) \leqslant 0$ cioè se e solo se $e^2 + \frac{3}{x+1} \leqslant 1$ da cui $x \geqslant -\frac{e^2+2}{e^2-1}$.

  In definitiva deve essere $x \in \left[-\frac{e^2+2}{e^2-1}, -1 - \frac{3}{e^2}\right) \cup [0, +\infty)$.

Esercizio 52.4

Determinare le equazioni degli asintoti al diagramma della funzione f di cui al quesito precedente.

✍ Soluzione

- Utilizzando i calcoli fatti all'esercizio precedente si ricava che $x = -1$ e $x = -1 - \frac{3}{e^2}$ sono asintoti verticali.
- Per $x \to \pm\infty$ si ha $\frac{f(x)}{x} \to 2$.

  Poiché $f(x) - 2x = x \ln\left(1 + \frac{3}{(1+x)e^2}\right) = \frac{\ln\left(1+\frac{3}{(1+x)e^2}\right)}{\frac{3}{(1+x)e^2}} \cdot \frac{3}{e^2} \cdot \frac{x}{x+1}$,

  da $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x) - 2x) \overset{(E)}{=} \frac{3}{e^2}$ segue che $y = 2x + \frac{3}{e^2}$ è l'equazione dell'asintoto obliquo.

Esercizio 52.5

Due gruppi, di sei amici ciascuno, vorrebbero sfidarsi in uno sport le cui partite si giocano fra due squadre di quattro componenti ciascuna. Ogni possibile quaterna di persone di un gruppo dovrebbe affrontare una e una sola volta ogni possibile quaterna di persone dell'altro gruppo. Quante partite dovrebbe giocare ogni singola persona?

✍ Soluzione

Una generica persona è chiamata a fare parte di $\binom{5}{3}$ squadre diverse, ognuna delle quali è chiamata ad affrontare $\binom{6}{4}$ squadre diverse. Dunque ogni persona deve giocare $\binom{5}{3} \cdot \binom{6}{4} = \binom{5}{2} \cdot \binom{6}{2} = \frac{5 \cdot 4}{2} \cdot \frac{6 \cdot 5}{2} = 150$ incontri.

Esercizio 52.6

Studiare, a meno del verso della concavità, la funzione g così definita: $g(x) = \tan\left(\dfrac{3\pi}{2+2|x|}\right)$.

✍ Soluzione

Si ha

$$g(x) = \begin{cases} \tan\left(\frac{a}{1-x}\right), & x < 0 \\ \tan\left(\frac{a}{1+x}\right), & x \geqslant 0 \end{cases} \qquad \text{con } a = \frac{3}{2}\pi.$$

Poiché $g(-x) = g(x)$ la funzione è pari, possiamo quindi studiare $g(x)$ solo su $[0, +\infty)$.

- Insieme di definizione su $[0, +\infty)$:

  $$\text{deve essere } \begin{cases} \frac{a}{1+x} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \ k \in \mathbb{N} \\ x + 1 \neq 0 \end{cases} \qquad \text{da cui } x \in (0, 2) \cup (2 + \infty).$$

- Su $[0, +\infty)$, $g(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$.

- Limiti agli estremi dell'insieme di definizione su $[0, +\infty)$:

  $$\lim_{x \to 0^+} g(x) = +\infty, \qquad \lim_{x \to 2^-} g(x) = -\infty, \qquad \lim_{x \to 2^+} g(x) = +\infty, \qquad \lim_{x \to +\infty} g(x) = 0^+.$$

- Equazione degli eventuali asintoti su $[0, +\infty)$:

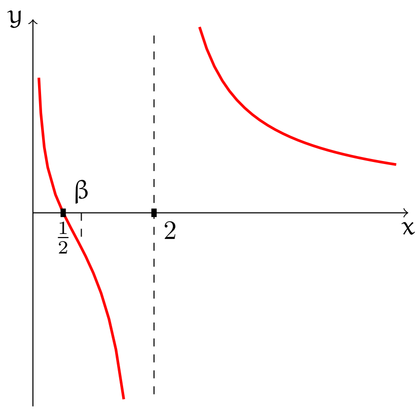
  $y = 0$ è asintoto orizzontale per $x \to +\infty$; $x = 0$ e $x = 2$ sono asintoti verticali.

- Derivata prima su $[0, +\infty)$: $g'(x) = \left(1 + \tan^2\left(\frac{a}{1+x}\right)\right) \cdot \frac{-a}{(1+x)^2}$.

- Eventuali punti estremanti su $[0, +\infty)$:

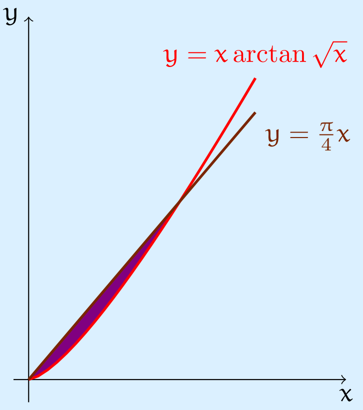
  poiché $g'(x) < 0$ per ogni x nell'insieme di definizione di g, non ci sono estremanti e la funzione è sempre decrescente.

- Diagramma qualitativo su $[0, +\infty)$:



Esercizio 52.7

Calcolare l'area della regione piana colorata in figura.



✍ Soluzione

I punti di intersezione hanno ascisse che risolvono l'equazione

$$\frac{\pi}{4}x = x\arctan\sqrt{x}$$

dunque $x = 0$ o $x = 1$.
Poiché

$$\begin{aligned}
\int x\arctan\sqrt{x}\,dx &\overset{\left(\substack{\sqrt{x}=t\\ dx=2t\,dt}\right)}{=} 2\int t^3\arctan t\,dt = \\
&\overset{\text{P.P.}}{=} 2\left(\frac{t^4}{4}\arctan t - \frac{1}{4}\int\frac{t^4-1+1}{1+t^2}\,dt\right) = \\
&= \frac{1}{2}\left(t^4\arctan t - \int t^2 - 1 + \frac{1}{1+t^2}\,dt\right) = \\
&= \frac{1}{2}\left(t^4\arctan t - \frac{t^3}{3} + t - \arctan t\right) + k = \\
&= \frac{1}{2}\left(x^2\arctan\sqrt{x} - \frac{x\sqrt{x}}{3} + \sqrt{x} - \arctan\sqrt{x}\right) + k, \qquad k \in \mathbb{R},
\end{aligned}$$

l'area cercata vale

$$\begin{aligned}
A &= \frac{\pi}{8} - \left[\frac{1}{2}\left(x^2\arctan\sqrt{x} - \frac{x\sqrt{x}}{3} + \sqrt{x} - \arctan\sqrt{x}\right)\right]_0^1 = \\
&= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{3} + 1 - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

TEMA 53

Prova scritta del 22 giugno 2007

Esercizio 53.1

Un recipiente A contiene acqua e un recipiente V contiene vino: la quantità è la stessa per i due recipienti. Una quantità q di acqua viene spostata da A in V: dalla soluzione così ottenuta in V, viene prelevata una quantità ancora uguale a q e immessa in A, ottenendo una nuova soluzione. Dopo queste operazioni è più alta la percentuale di acqua in V o la percentuale di vino in A? Giustificare la risposta.

✍ Soluzione

Le due percentuali sono uguali. Sia infatti αq $(0 < \alpha < 1)$ la quantità di vino presente nella soluzione che viene immessa in A: è esattamente la quantità di vino che alla fine si trova in A. D'altra parte, la quantità di acqua che alla fine rimane in V è proprio $q - (1 - \alpha)q = \alpha q$.
(N.B. Alla fine A e V contengono la stessa quantità di liquido.)

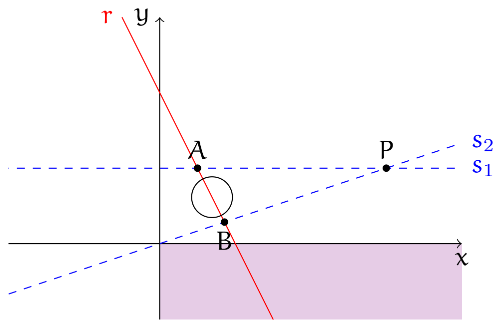
Esercizio 53.2

Nel piano dotato di un riferimento cartesiano ortogonale Oxy, si considerino la retta r di equazione $y = 2-2x$ e il punto $P \equiv (3, 1)$. Si stabilisca per quali punti Q di r esistono circonferenze γ centrate in Q con la seguente proprietà: ogni retta passante per P che interseca γ non interseca il quarto quadrante.
Fra le circonferenze γ di cui sopra, si determini quindi quella di raggio maggiore possibile.

✍ Soluzione

Le rette passanti per P che non intersecano il quarto quadrante hanno coefficiente angolare compreso fra 0 e $1/3$; esse tagliano tutte la retta r in punti del segmento $\overline{AB}$. I punti Q di questo segmento sono tutti e soli i possibili centri delle nostre circonferenze γ. Si ricava

$$r : y = 2 - 2x$$
$$s_1 : y = 1$$
$$s_2 : y = \frac{x}{3}$$
$$A \equiv \left(\frac{1}{2}, 1\right)$$
$$B \equiv \left(\frac{6}{7}, \frac{2}{7}\right)$$



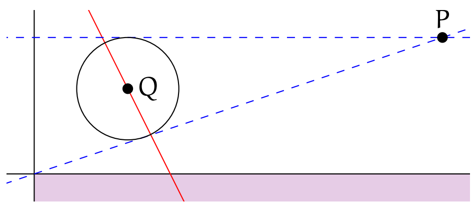
È evidente che le nostre circonferenze γ devono essere contenute nel cono individuato dalle rette s_1 e s_2: quella di raggio maggiore possibile è quella tangente ad entrambe. Occorre quindi individuare il punto $Q \equiv (\alpha, 2 - 2\alpha)$ equidistante da s_1 e s_2. Si ha

$$\operatorname{dist}(Q, s_1) = 2\alpha - 1,$$
$$\operatorname{dist}(Q, s_2) = \frac{|7\alpha - 6|}{\sqrt{10}} \overset{(???)}{=} \frac{6 - 7\alpha}{\sqrt{10}}.$$

Le due quantità coincidono per

$$\alpha = \frac{6 + \sqrt{10}}{7 + 2\sqrt{10}},$$

che porta ad un raggio pari a $\frac{5}{7+2\sqrt{10}}$.



NB La circonferenza non passa né per A né per B.

Esercizio 53.3

Risolvere la disequazione $(1 + x^{1/3}) \log_5\left(2 + \frac{1}{x}\right) < 0$.

✍ Soluzione

Si ha

x	$-\infty$		-1		$-1/2$		0		$+\infty$
$f(x) = (1 + x^{1/3})$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$g(x) = \log_5\left(2 + \frac{1}{x}\right)$		$+$	0	$-$				$+$	
$f(x) \cdot g(x)$		$-$	0	$-$				$+$	

Pertanto la disequazione è soddisfatta per $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, -\frac{1}{2})$.

Esercizio 53.4

Determinare le equazioni degli asintoti al diagramma della funzione

$$f(x) = \ln(2e^x + 3e^{1/x})$$

dove il logaritmo è inteso in base “e”.

✍ Soluzione

Deve essere $2e^x + 3e^{1/x} > 0$ dunque f è definita per $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Poiché

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ln 3$$

la retta di equazione $y = \ln 3$ è asintoto orizzontale per $x \to -\infty$.

Poiché

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = +\infty$$

la retta di equazione $x = 0$ è asintoto verticale per $x \to 0^+$. (Si noti che $\lim_{x\to0^-} f(x) = \ln 2$.)

Infine

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

Osserviamo che si può scrivere

$$f(x) = \ln\left(e^x\left(2 + 3e^{1/x-1}\right)\right) = x + \ln\left(2 + 3e^{1/x-1}\right).$$

Poiché $\lim_{x\to+\infty} e^{1/x-1} = 0$ e il logaritmo è una funzione continua, si ha allora

$$f(x) = x + \ln 2 + h(x), \qquad \text{con} \lim_{x\to+\infty} h(x) = 0,$$

pertanto la retta di equazione $y = x + \ln 2$ è asintoto obliquo per $x \to +\infty$.

Esercizio 53.5

Sette ragazze e sette ragazzi, fra i quali ci sei anche tu, desiderano giocare una partita di calcio a 7 (cioè 7 contro 7). Quante sono le possibili formazioni (diverse fra loro per almeno un giocatore) di cui puoi fare parte, nelle quali la maggioranza dei giocatori sia del tuo stesso sesso?

✍ Soluzione

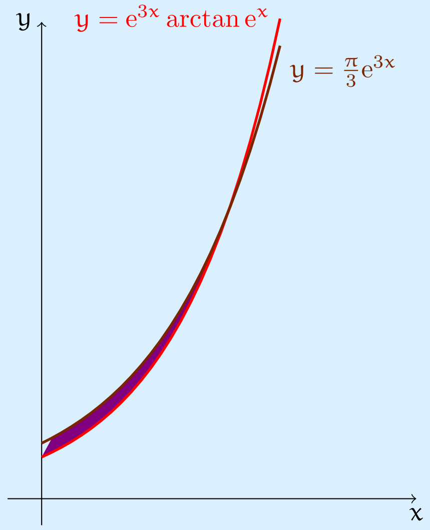
Posso giocare con altri 3,4,5 o 6 giocatori del mio stesso sesso. Le formazioni possibili sono rispettivamente in numero di:

$$\binom{6}{3} \cdot \binom{7}{3} = 20 \cdot 35 = 700$$
$$\binom{6}{4} \cdot \binom{7}{2} = 15 \cdot 21 = 315$$
$$\binom{6}{5} \cdot \binom{7}{1} = 6 \cdot 7 = 42$$
$$\binom{6}{6} \cdot \binom{7}{0} = 1 \cdot 1 = 1$$

In totale 1058 possibili formazioni.

Esercizio 53.6

Calcolare l'area della regione piana colorata in figura (la figura non è in scala).



✍ Soluzione

Il punto di intersezione ha ascissa che risolve l'equazione

$$\frac{\pi}{3}e^{3x} = e^{3x} \arctan e^x,$$

dunque $e^x = \sqrt{3}$, $x = \ln\sqrt{3}$.
Poiché

$$\begin{aligned}
\int \left(\frac{\pi}{3}e^{3x} - e^{3x}\arctan e^x\right) dx &= \int e^{2x}\left(\frac{\pi}{3} - \arctan e^x\right) e^x\, dx = \\
&\underset{\left(e^x dx = dt\right)}{\overset{e^x =: t}{=\!=}} \int t^2\left(\frac{\pi}{3} - \arctan t\right) dt = \\
&\overset{\text{P.P.}}{=} \frac{t^3}{3}\left(\frac{\pi}{3} - \arctan t\right) - \frac{1}{3}\int -\frac{t^3}{1+t^2}\, dt = \\
&= \frac{t^3}{3}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{1}{3}\arctan t\right) + \int t - \frac{t}{1+t^2}\, dt = \\
&= \frac{t^3}{3}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{1}{3}\arctan t\right) + \frac{t^2}{2} - \ln(1+t^2) + k, \\
&= \frac{e^{3x}}{3}\left(\frac{\pi}{3} - \arctan e^x\right) + \frac{e^{2x}}{6} - \frac{\ln(1+e^{2x})}{3} + k, \qquad k \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

l'area cercata vale

$$\begin{aligned}
\int_0^{\ln\sqrt{3}} \left(\frac{\pi}{3}e^{3x} - e^{3x}\arctan e^x\right) dx &= \left[\frac{e^{3x}}{3}\left(\frac{\pi}{3} - \arctan e^x\right) + \frac{e^{2x}}{6} - \frac{\ln(1+e^{2x})}{3}\right]_0^{\ln\sqrt{3}} = \\
&= ??? - \frac{\pi}{36} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\ln\sqrt{2}
\end{aligned}$$

Esercizio 53.7

Studiare (a meno del verso della concavità) la funzione g così definita:

$$g(x) = \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{8}{1+x^2}\right).$$

✍ Soluzione

Poniamo $h(x) := \frac{\pi}{4} + \frac{8}{1+x^2}$ e studiamo $g(x) = \tan(h(x))$.

- Poiché $g(-x) = g(x)$ la funzione è PARI. Studiamola pertanto solo su $[0, +\infty)$.
- Insieme di definizione: deve essere $\begin{cases} h(x) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, & k \in \mathbb{Z} \\ 1 + x^2 \neq 0. \end{cases}$

  Quando x varia in $\mathbb{R}^+$ la quantità $h(x)$ varia fra $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{\pi}{4} + 8$. In questo intervallo cadono tutti e soli i seguenti multipli dispari di $\frac{\pi}{2}$:

  $$\frac{\pi}{2}, \qquad \frac{3}{2}\pi, \qquad \frac{5}{2}\pi.$$

  Si ha

  $$\begin{aligned} h(x) &= \frac{\pi}{2} \text{ per } x = \sqrt{\frac{32}{\pi} - 1} =: \gamma, \\ h(x) &= \frac{3}{2}\pi \text{ per } x = \sqrt{\frac{32}{5\pi} - 1} =: \beta, \\ h(x) &= \frac{5}{2}\pi \text{ per } x = \sqrt{\frac{32}{9\pi} - 1} =: \alpha. \end{aligned}$$

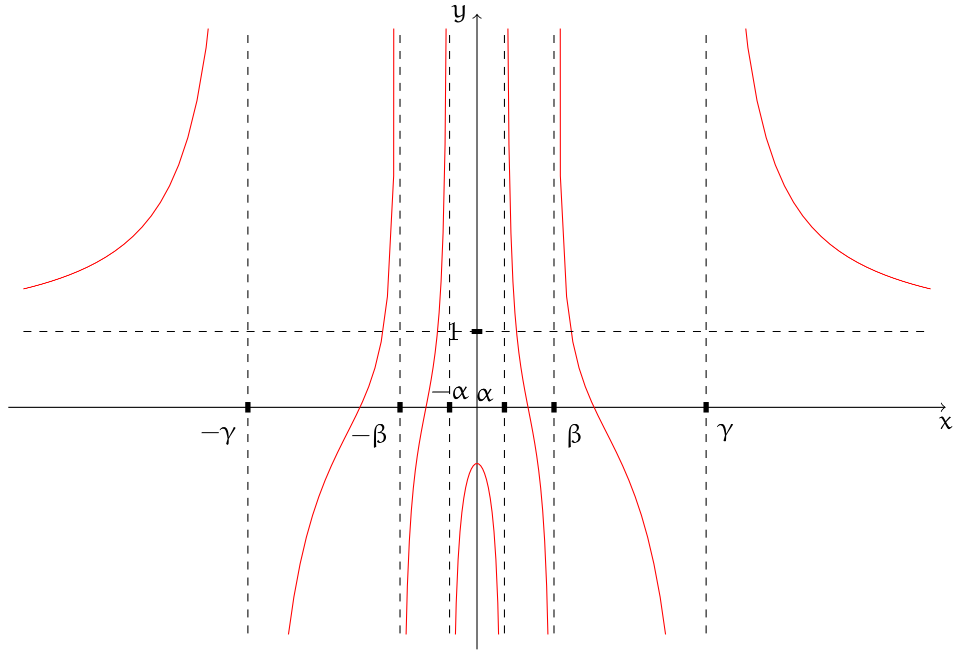
  g è pertanto definita per $x \notin \{\pm\alpha, \pm\beta, \pm\gamma\}$.
- $g(0) = \tan\left(\frac{\pi}{4} + 8\right) < 0$.
- Limiti agli estremi dell'insieme di definizione su $[0, +\infty)$:

  $$\begin{aligned} \lim_{x\to\alpha^\pm} g(x) &= \pm\,\infty, \\ \lim_{x\to\beta^\pm} g(x) &= \pm\,\infty, \\ \lim_{x\to\gamma^\pm} g(x) &= \pm\,\infty, \\ \lim_{x\to+\infty} g(x) &= 1^+. \end{aligned}$$

- Equazioni degli eventuali asintoti su $[0, +\infty)$:

  le rette di equazione $x = \alpha$, $x = \beta$ e $x = \gamma$ sono asintoti verticali,

  la retta di equazione $y = 1$ è asintoto orizzontale.
- Derivata prima su $[0, +\infty)$:
  $$g'(x) = -\frac{16x}{(1+x^2)^2}(1 + g^2(x)).$$
- Eventuali punti estremanti su $[0, +\infty)$: $g(x) = 0$ se e solo se $x = 0$ che è l'unico punto estremante (massimo relativo). Inoltre, $2\pi + \frac{\pi}{2} < g(0) < 3\pi$ per cui $g(0) < 0$.
- Diagramma qualitativo di g (a meno del verso della concavità):


y
1
−α
α
x
−γ
−β
β
γ

TEMA 54

Prova scritta del 12 luglio 2007

Esercizio 54.1

Una soluzione è composta da 8 litri di vino e 3 litri di acqua. Vengono aggiunti 2 litri di vino e alcuni litri di acqua: ora la percentuale di acqua nella soluzione è superiore del 10 % rispetto alla percentuale nella soluzione di partenza. Quanti litri di acqua sono stati aggiunti?

✍ Soluzione

Siano x i litri di acqua aggiunti. Deve essere

$$(3+x) = \left(\frac{3}{8+3} + \frac{1}{10}\right)(8+2+3+x)$$

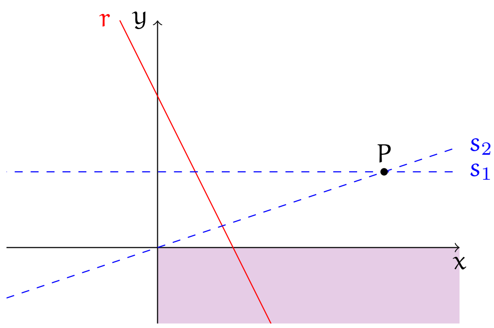
da cui $x = \frac{203}{69}$.

Esercizio 54.2

Nel piano dotato di un riferimento cartesiano ortogonale Oxy, si considerino la retta r di equazione $y = 2-2x$ e il punto $P \equiv (3,1)$. Si stabilisca per quali punti Q di r è soddisfatta la seguente condizione: esistono almeno una circonferenza γ centrata in Q e almeno una retta s passante per P tali che s interseca γ, ma non interseca il quarto quadrante.
Per ogni punto Q di cui sopra, si determini l'estremo inferiore dei raggi delle circonferenze γ relativamente alle quali la condizione è soddisfatta.

✍ Soluzione

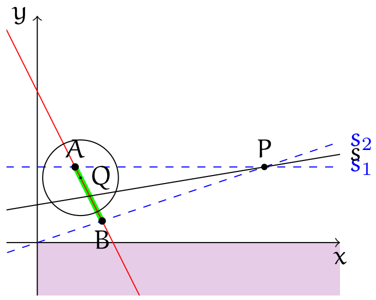
Le rette passanti per P che non intersecano il quarto quadrante sono tutte e sole quelle giacenti nel cono "acuto" centrato in P e individuato dalle rette s_1 di equazione $y = 1$ e s_2 di equazione $3y = x$.
Qualunque sia il punto Q in r, esiste una circonferenza centrata in Q che interseca il cono: dunque <u>ogni punto di r soddisfa la condizione.</u>



D'altra parte,

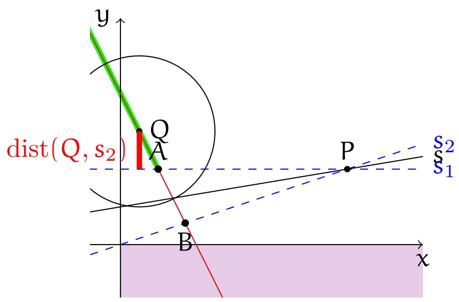
se Q appartiene al segmento chiuso individuato da $A \equiv \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ e $B \equiv \left(\frac{6}{7}, \frac{2}{7}\right)$, ogni circonferenza è accettabile, dunque

$$\inf \text{raggio}(\gamma) = 0;$$



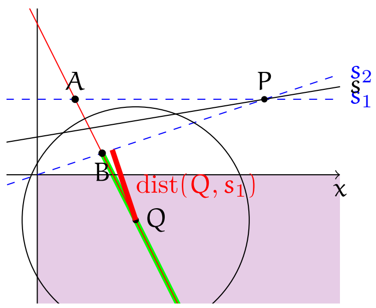
se $Q \equiv (q_1, q_2)$ sta in r a quota superiore a A (cioè $q_2 > 1$),

$$\inf \text{raggio}(\gamma) = \text{dist}(Q, s_2) = q_2 - 1;$$



se $Q \equiv (q_1, q_2)$ sta in r a quota inferiore a B (cioè $q_2 < \frac{2}{7}$ e dunque $q_1 > \frac{2}{7}$),

$$\inf \text{raggio}(\gamma) = \text{dist}(Q, s_1) = \frac{|3q_2 - q_1|}{\sqrt{10}} = $$
$$= \frac{|6 - 7q_1|}{\sqrt{10}} = \frac{7q_1 - 6}{\sqrt{10}}.$$



Esercizio 54.3

Individuare il più piccolo intero positivo n tale che lo sviluppo del binomio

$$\left(x^8 - \frac{y}{x^5}\right)^n$$

abbia un (solo) termine indipendente da x. In corrispondenza al valore di n così individuato, determinare quindi tale termine.

✍ Soluzione

Lo sviluppo è

$$\left(x^8 - \frac{y}{x^5}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} (x^8)^k (yx^{-5})^{(n-k)} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} x^{8k-5n+5k} y^{n-k}.$$

Perché non dipenda da x deve aversi $13k - 5n = 0$. Essendo 13 e 5 numeri primi, il più piccolo intero n per cui ciò può verificarsi è 13 che fornisce $k = 5$.
Avendosi $(-1)^{n-k}\binom{n}{k} = (-1)^8\binom{13}{5} = 72 \cdot 13 = 936$, il termine in questione è $936y^8$.

Esercizio 54.4

Dimostrare, <u>facendo esclusivamente ricorso alla definizione di derivata</u> (limite dei rapporti incrementali), che la derivata della funzione

$$f(x) = \sqrt{1+3x^2}$$

è

$$f'(x) = \frac{3x}{\sqrt{1+3x^2}}.$$

✍ Soluzione

Per ogni $x \in \mathbb{R}$ fissato si ha

$$\begin{aligned}
\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{\sqrt{1+3(x+h)^2}-\sqrt{1+3x^2}}{h} = \\
&= \frac{\sqrt{1+3(x+h)^2}-\sqrt{1+3x^2}}{h} \cdot \frac{\sqrt{1+3(x+h)^2}+\sqrt{1+3x^2}}{\sqrt{1+3(x+h)^2}+\sqrt{1+3x^2}} = \\
&= \frac{1+3(x+h)^2-1-3x^2}{h(\sqrt{1+3(x+h)^2}+\sqrt{1+3x^2})} = \\
&= 3\frac{h+2x}{\sqrt{1+3(x+h)^2}+\sqrt{1+3x^2}}
\end{aligned}$$

pertanto

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} 3\frac{h+2x}{\sqrt{1+3(x+h)^2}+\sqrt{1+3x^2}} = 3\frac{x}{\sqrt{1+3x^2}}.$$

Esercizio 54.5

Quante soluzioni ha l'equazione $x^2 + x - \arctan x = 0$? Giustificare adeguatamente la risposta.

✍ Soluzione

Sia $g(x) = x^2 + x - \arctan x$. Il problema equivale a trovare il numero di intersezioni della funzione g con l'asse delle ascisse.
La funzione g è definita continua e derivabile su tutto $\mathbb{R}$ e si ha

$$\lim_{x\to\pm\infty} = +\infty.$$

Da

$$g'(x) = 2x + 1 - \frac{1}{1+x^2} = \frac{x(2x^2+x+2)}{1+x^2}$$

segue la seguente tavola delle variazioni

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Pertanto $x = 0$ è punto di minimo assoluto forte per g. Poiché si ha $g(0) = 0$, $x = 0$ è l'unica soluzione dell'equazione proposta.

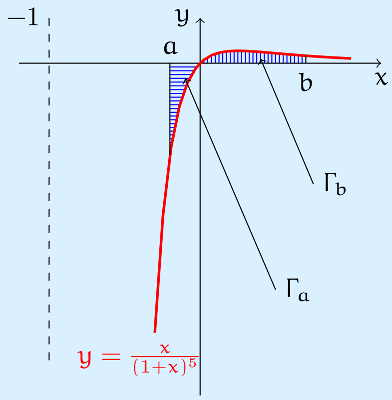
Esercizio 54.6

Al variare di a in $(-1, 0)$ si consideri la regione Γ_a individuata in figura dal tratteggio orizzontale e se ne calcoli l'area (in funzione di a).
Analogamente, al variare di b in $(0, +\infty)$ si consideri la regione Γ_b individuata in figura dal tratteggio verticale e se ne calcoli l'area (in funzione di b).

1. È vero che per ogni $a \in (-1, 0)$ esiste $b \in (0, +\infty)$ tale che l'area di Γ_a sia uguale all'area di Γ_b?

2. È vero che per ogni $b \in (0, +\infty)$ esiste $a \in (-1, 0)$ tale che l'area di Γ_a sia uguale all'area di Γ_b?

Giustificare adeguatamente le risposte.



✍ Soluzione

Su $(-1, +\infty)$ si ha

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{(1+x)^5}\,dx &= \int \frac{1}{(1+x)^4}\,dx - \int \frac{1}{(1+x)^5}\,dx = \\ &= \frac{1}{4(1+x)^4} - \frac{1}{3(1+x)^3} + k, \quad k \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Allora si ha

$$\begin{aligned}\text{Area}(\Gamma_a) &= -\int_a^0 \frac{x}{(1+x)^5}\,dx = \\ &= \left[\frac{1}{4(1+x)^4} - \frac{1}{3(1+x)^3}\right]_a^0 = \\ &= \frac{1}{12} + \frac{1}{4(1+a)^4} - \frac{1}{3(1+a)^3}.\end{aligned}$$

Al variare di $a \in (-1, 0)$, l'Area(Γ_a) è una funzione continua che vale 0 in 0 e tende a $+\infty$ per $a \to -1$: è monotona decrescente per cui manda $(-1, 0)$ su $(0, +\infty)$.

Analogamente si ha

$$\begin{aligned}\text{Area}(\Gamma_b) &= \int_0^{+\infty} \frac{x}{(1+x)^5}\,dx = \\ &= \left[\frac{1}{4(1+x)^4} - \frac{1}{3(1+x)^3}\right]_0^{+\infty} =\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{12} + \frac{1}{4(1+b)^4} - \frac{1}{3(1+b)^3}.$$

Al variare di $b \in (0, +\infty)$, l'Area(Γ_b) è una funzione continua che vale 0 in 0 e tende a $\frac{1}{12}$ per $b \to +\infty$: è monotona crescente per cui manda $(0, +\infty)$ su $(0, \frac{1}{12})$.

Allora la risposta alla prima domanda è NO mentre la risposta alla seconda domanda è SI per il teorema dei valori intermedi.

Esercizio 54.7

Studiare la funzione f così definita:

$$f(x) = \sqrt{|e^x - e|}.$$

Soluzione

- Insieme di definizione: $\mathbb{R}$.
- Limiti agli estremi dell'insieme di definizione:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \sqrt{e}, \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty.$$

- Equazioni degli eventuali asintoti:

  $y = \sqrt{e}$ è asintoto orizzontale per $x \to -\infty$,

  non ci sono né asintoti verticali né asintoti obliqui.

- Derivata prima (dove esiste):

$$f'(x) = \frac{e^x}{2\sqrt{|e^x - e|}} \operatorname{sgn} |e^x - e| = \frac{e^x}{2\sqrt{|e^x - e|}} \operatorname{sgn}(x-1) \quad \text{per } x \neq 1$$

  e

$$\left[\lim_{x \to 1^-} f'(x) = -\infty\right] \neq \left[\lim_{x \to 1^+} f'(x) = +\infty\right].$$

- Eventuali punti estremanti: $x = 1$ è punto di minimo assoluto (punto di cuspide).
- Derivata seconda (dove esiste):

$$f''(x) = \frac{1}{2} \frac{e^x - \sqrt{|e^x - e|} - e^x f'(x)}{|e^x - e|^{3/2}} \operatorname{sgn}(x-1) = \frac{e^x(e^x - 2e)}{4\,|e^x - e|^{3/2}} \quad \text{per } x \neq 1$$

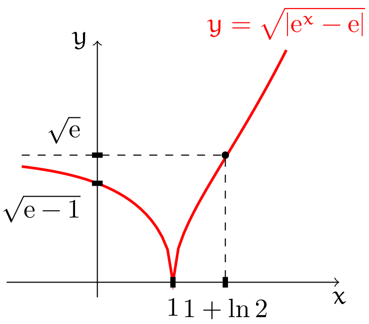
- Verso della concavità:

  f è concava separatamente su $(-\infty, 1]$ e su $[1, 1 + \ln 2]$,

  convessa su $[1 + \ln 2, +\infty)$,

  $x = 1 + \ln 2$ è punto di flesso e $f(1 + \ln 2) = \sqrt{e}$.

- Diagramma qualitativo di f:



TEMA 55

Prova scritta del 20 settembre 2007

Esercizio 55.1

Da una cassaforte sono state rubate alcune collane (almeno due9 di diamanti), tutte con lo stesso numero di diamanti (almeno due per collana) che non è noto. Tutti i diamanti che le componevano vengono ritrovati: il loro numero complessivo è compreso fra 200 e 300. L'investigatore che indaga sul furto, semplicemente contando il numero dei diamanti trovati, è in grado di risalire con certezza al numero delle collane rubate. Quante collane sono state rubate dalla cassaforte?

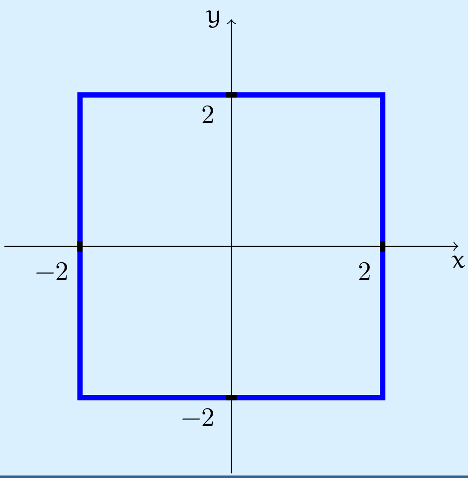
✍ Soluzione

Siano $c \geqslant 2$ il numero delle collane, $d \geqslant 2$ il numero dei diamanti per collana. Poiché l'investigatore non ha dubbi (è un dato del problema), il numero totale di diamanti cd deve potersi esprimere in un solo modo come prodotto ordinato di due interi positivi entrambi diversi da 1. Ciò accade se e solo se i due interi sono uguali ad uno stesso numero primo. L'unico primo il cui quadrato è compreso tra 200 e 300 è 17. In formule

$$\begin{cases} c, d \in \mathbb{N} \\ c, d \geqslant 2 \\ 200 \leqslant cd \leqslant 300 \\ c = d \text{ numero primo} \end{cases}$$

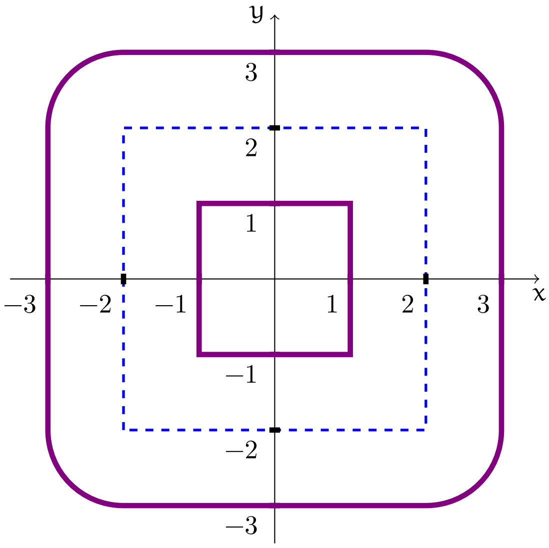
Esercizio 55.2

Nel piano dotato di un riferimento cartesiano ortogonale Oxy, si consideri il quadrato Ω in figura. Si rappresenti graficamente nella stessa figura il luogo Γ dei punti del piano che distano esattamente 1 dal bordo di Ω. Si fornisca quindi una espressione analitica del bordo di Γ (ad esempio, un'espressione analitica del bordo di Ω è $\partial\Omega = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = \pm 2, |y| \leqslant 2 \} \cup \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leqslant 2, y = \pm 2 \}$).



✍ Soluzione

In tratteggio $\partial\Omega$, in linea continua Γ.



$$\begin{aligned}\Gamma = &\left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x = \pm 1, |y| \leqslant 1 \right\} \cup \\ &\cup \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; |x| \leqslant 1, y = \pm 1 \right\} \cup \\ &\cup \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x = \pm 3, |y| \leqslant 3 \right\} \cup \\ &\cup \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; |x| \leqslant 3, y = \pm 3 \right\} \cup \\ &\cup \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; (x-2)^2 + (y-2)^2 = 1,\ x \geqslant 2,\ y \geqslant 2 \right\} \cup \\ &\cup \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; (x+2)^2 + (y-2)^2 = 1,\ x \leqslant -2,\ y \geqslant 2 \right\} \cup \\ &\cup \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; (x+2)^2 + (y+2)^2 = 1,\ x \leqslant -2,\ y \leqslant -2 \right\} \cup \\ &\cup \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; (x-2)^2 + (y+2)^2 = 1,\ x \geqslant 2,\ y \leqslant -2 \right\}.\end{aligned}$$

Esercizio 55.3

Risolvere la disequazione

$$\log_5\left(1 + \sqrt{x^4 - 2} - x\right) > 0.$$

✍ Soluzione

Poiché $5 > 1$, la disequazione equivale a $1 + \sqrt{x^4 - 2} - x > 1$, cioè

$$\sqrt{x^4 - 2} > x$$

(l'esistenza del logaritmo, che comporta $1 + \sqrt{x^4 - 2} - x > 0$, è automaticamente assicurata dalla più forte condizione imposta).
Per l'esistenza della radice deve essere $|x| \geqslant \sqrt[4]{2}$.

- ❦ Se $x \leqslant -\sqrt[4]{2}$, la disequazione è automaticamente soddisfatta.
- ❦ Per $x \geqslant \sqrt[4]{2}$, quadrando i due membri si ottiene $x^4 - x^2 - 2 > 0$, dunque $x^2 > 2$, cioè (per noi) $x > \sqrt{2}$.

La disequazione è dunque risolta per

$$x \in (-\infty, -\sqrt[4]{2}] \cup (\sqrt{2}, +\infty).$$

Esercizio 55.4

Dimostrare, facendo esclusivamente ricorso alla definizione di derivata (limite dei rapporti incrementali), che la derivata della funzione $f(x) = \tan(x^2)$ è $f'(x) = 2x(1 + \tan^2(x^2))$.

✍ Soluzione

Per ogni x fissato e $h \neq 0$ si ha

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\tan((x+h)^2) - \tan(x^2)}{h} =: \star$$

Ricordando che

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha\ -\ \tan\beta}{1\ +\ \tan\alpha\tan\beta},$$

posto $\alpha=(x+h)^2$ e $\beta=x^2$, si ha

$$\begin{aligned}
\star &= \frac{\tan\alpha\ -\ \tan\beta}{h}=\frac{(1\ +\ \tan\alpha\tan\beta)\ \tan(\alpha-\beta)}{h}=\\
&=\frac{(1+\tan((x+h)^2)\tan(x^2))\tan((x+h)^2-x^2)}{h}=\\
&=(1+\tan((x+h)^2)\tan(x^2))\frac{\tan(h^2+2xh)}{h}=\\
&=(1+\tan((x+h)^2)\tan(x^2))\frac{\tan(h^2+2xh)}{h^2+2xh}\frac{h^2+2xh}{h}=\\
&=(1+\tan((x+h)^2)\tan(x^2))\frac{\tan(h^2+2xh)}{h^2+2xh}(h+2x)=\\
&=(1+\tan((x+h)^2)\tan(x^2))\frac{\sin(h^2+2xh)}{h^2+2xh}\frac{1}{\cos(h^2+2xh)}(h+2x)=
\end{aligned}$$

Pertanto

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to0}\star &= \lim_{h\to0}\left((1+\tan((x+h)^2)\tan(x^2))\frac{\sin(h^2+2xh)}{h^2+2xh}\frac{1}{\cos(h^2+2xh)}(h+2x)\right)=\\
&\overset{(A)}{=}(1+\tan^2(x^2))\ \cdot\ 1\ \cdot\ 1\ \cdot\ 2x.
\end{aligned}$$

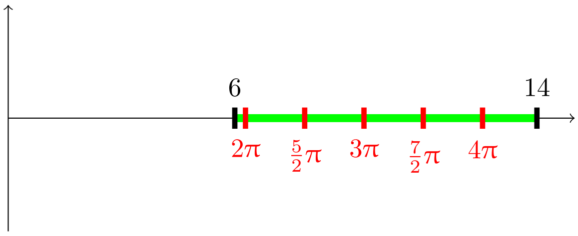
Esercizio 55.5

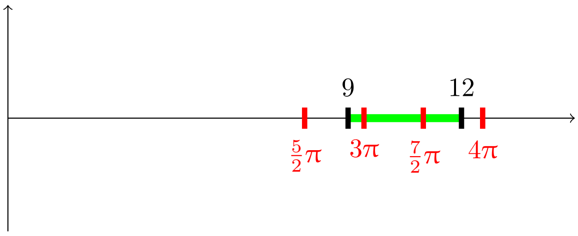
Determinare estremo inferiore ed estremo superiore, specificando se siano anche rispettivamente minimo e massimo, di ciascuno dei seguenti insiemi:

$$\mathcal{A}:=\{\sin x+\cos y\mid x,y\in(6,14)\}\qquad \mathcal{B}:=\{\sin x+\cos y\mid x,y\in(9,12)\}.$$

✍ Soluzione

Osserviamo innanzitutto che l'intervallo $(6,14)$ contiene un intervallo di ampiezza 2π (periodo di $\sin t$ e $\cos t$)





$\inf\mathcal{A}=\sin(\frac{7}{2}\pi)+\cos(3\pi)=-2$	È minimo	$\sup\mathcal{A}=\sin(\frac{5}{2}\pi)+\cos(2\pi)=2$	È massimo
$\inf\mathcal{B}=\sin(\frac{7}{2}\pi)+\cos(3\pi)=-2$	È minimo	$\sup\mathcal{B}=\sin 9+\cos 12$	Non è massimo

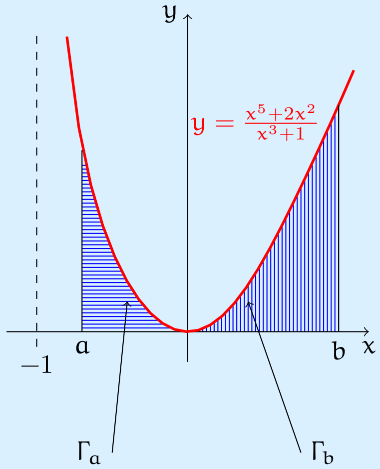
Esercizio 55.6

Al variare di a in $(-1, 0)$ si consideri la regione Γ_a individuata in figura dal tratteggio orizzontale e se ne calcoli l'area (in funzione di a).
Analogamente, al variare di b in $(0, +\infty)$ si consideri la regione Γ_b individuata in figura dal tratteggio verticale e se ne calcoli l'area (in funzione di b).

1. È vero che per ogni $a \in (-1, 0)$ esiste un $b \in (0, +\infty)$ tale che l'area di Γ_a sia uguale all'area di Γ_b?

2. È vero che per ogni $b \in (0, +\infty)$ esiste un $a \in (-1, 0)$ tale che l'area di Γ_b sia uguale all'area di Γ_a?

Giustificare adeguatamente le risposte.



Soluzione

Per $x > -1$ si ha

$$\begin{aligned}\int \frac{x^5 + 2x^2}{x^3 + 1}\,dx &= \int x^2\,dx + \int \frac{x^2}{x^3+1}\,dx = \\ &= \frac{x^3}{3} + \frac{\ln(x^3+1)}{3} + k, \qquad k \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Posto $g(x) = \frac{x^5+2x^2}{x^3+1}$, si ha allora

$$\begin{aligned}\text{Area } (\Gamma_a) &= \int_a^0 g(x)\,dx = -\frac{a^3}{3} - \frac{\ln(a^3+1)}{3} \\ \text{Area } (\Gamma_b) &= \int_0^b g(x)\,dx = \frac{b^3}{3} + \frac{\ln(b^3+1)}{3}\end{aligned}$$

Poiché

$$\lim_{a \to -1^+} \text{Area } (\Gamma_a) = +\infty,$$

$$\lim_{b \to +\infty} \text{Area } (\Gamma_b) = +\infty,$$

la risposta ad entrambe le domande è SI: poiché si ha $\text{Area}(\Gamma_0) = 0$ ed entrambe le aree sono funzioni continue delle rispettive variabili, entrambe assumono tutti i valori compresi nell'intervallo $(0, +\infty)$ (cf. proprietà dei valori intermedi) al variare delle variabili nei rispettivi domini.

Esercizio 55.7

Studiare la funzione f così definita:

$$f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 1}.$$

✍ Soluzione

- Insieme di definizione: $\mathbb{R}$.
- Limiti agli estremi dell'insieme di definizione:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty,$$

- Equazioni degli eventuali asintoti:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 1, \qquad \lim_{x \to \pm\infty} f(x) - x = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\left(1 + \frac{-1}{x^3}\right)^{1/3} - 1}{\frac{-1}{x^3}} \left(\frac{-1}{x^2}\right) \overset{(G)}{=} 0$$

  $y = x$ è asintoto obliquo per $x \to \pm\infty$.

- Derivata prima (dove esiste):

$$f'(x) = \frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^3-1)^2}} \qquad \text{per } x \neq 1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to 1^\pm} f'(x) = +\infty.$$

- Eventuali punti estremanti: $x = 1$ è punto di flesso a tangente verticale e $f(1) = 0$.
- Derivata seconda (dove esiste):

$$f''(x) = -\frac{2x}{\sqrt[3]{(x^3-1)^5}} \qquad \text{per } x \neq 1.$$

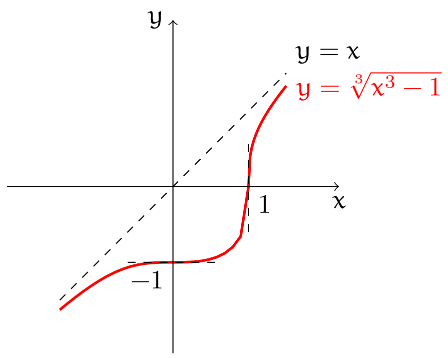
- Verso della concavità:

  f è concava separatamente su $(-\infty, 0]$ e su $[1, +\infty]$,

  convessa su $[0, +1]$,

  $x = 0$ è punto di flesso a tangente orizzontale e $f(0) = -1$.

- Diagramma qualitativo di f:



Parte III.

Esercizi aggiuntivi

APPENDICE A

Disequazioni

Risolvere in $\mathbb{R}$ le seguenti disequazioni (per ciascuna disequazione, le soluzioni sono indicate a fianco).

1 $\dfrac{1}{x+2} - \dfrac{1}{x-2} < 1 + \dfrac{1}{4-x^2}$ . . . . $(-\infty,-2) \cup (-1,1) \cup (+2,+\infty)$

2 $x|x| < 1$ . . . . $(-\infty,1)$

3 $x^2 - 4|x| - 5 > 0$ . . . . $(-\infty,-5) \cup (5,+\infty)$

4 $|4-x^2| - |3-x| > x$ . . . . $\left(-\infty,-\sqrt{7}\right) \cup (-1,1) \cup \left(+\sqrt{7},+\infty\right)$

5 $|x+2| < 1 + |x-1|$ . . . . $(-\infty,0)$

6 $\sqrt{2x+1} > x$ . . . . $\left[-\dfrac{1}{2}, 1+\sqrt{2}\right)$

7 $\sqrt{x+2} < x$ . . . . $(2,+\infty)$

8 $\sqrt{x^2-5x+4} < x-1$ . . . . $[4,+\infty)$

9 $\sqrt{\dfrac{x^2+8|x|-9}{x^2-1}} \geqslant x-3$ . . . . $\left(-\infty, \dfrac{5+\sqrt{17}}{2}\right] \setminus \{-1,1\}$

10 $\sqrt{4x^2+3x-1} \geqslant 2x-3$ . . . . $(-\infty,-1] \cup [1/4,+\infty)$

11 $\dfrac{\sqrt{1-9x^2}+2x}{3x-2} > 0$ . . . . $\left[-\frac{1}{3}, -\frac{1}{\sqrt{13}}\right)$

12 $\sqrt{x+1} + \sqrt{x-2} \geqslant 3$ . . . . $[3,+\infty)$

13 $\dfrac{\sqrt{2x-5}}{3} \leqslant \dfrac{3}{\sqrt{2x-5}}$ . . . . $(5/2, 7]$

14 $\sqrt{4+|1-x^2|} < x + \sqrt{5}$ . . . . $(0,+\infty)$

15 $\dfrac{\sqrt{x}+1}{3-x-\sqrt{x}} < 0$ . . . . $\left(\frac{7-\sqrt{13}}{2}, +\infty\right)$

16 $\sqrt{\dfrac{x^2-1}{x+2}} < \sqrt{x}$ .... $[1,+\infty)$

17 $\sin x > \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ .... $\left(\dfrac{\pi}{3}+2k\pi, \dfrac{2\pi}{3}+2k\pi\right)$ $k \in \mathbb{Z}$

18 $\dfrac{1-2\sin x}{1-2\cos x} \leqslant 0$ .... $\left(-\dfrac{\pi}{3}+2k\pi, \dfrac{\pi}{6}+2k\pi\right] \cap \left(\dfrac{\pi}{3}+2k\pi, \dfrac{5\pi}{6}+2k\pi\right]$ $k \in \mathbb{Z}$

19 $\dfrac{\sin x}{\sqrt{2\sin x - 1}} \geqslant 1$ .... $\left(\dfrac{\pi}{6}+2k\pi, \dfrac{5\pi}{6}+2k\pi\right)$ $k \in \mathbb{Z}$

20 $\dfrac{\tan^2 x - \sqrt{3}\tan x}{\tan^2 x - 1} < 1$ .... $\left(-\dfrac{\pi}{4}+k\pi, \dfrac{\pi}{6}+k\pi\right) \cup \left(\dfrac{\pi}{4}+k\pi, \dfrac{\pi}{2}+k\pi\right)$ $k \in \mathbb{Z}$

21 $\dfrac{e^{2x}-e^x}{2e^{2x}-5e^x+2} > -1$ .... $\left(-\infty, \ln\left(1-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)\right) \cup \left(-\ln 2, \ln\left(1+\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)\right) \cup (\ln 2, +\infty)$

22 $\dfrac{\ln(x-2)}{\sqrt{1-\ln(x-2)}} < 2$ .... $\left(2, e^{2(\sqrt{2}-1)}+2\right)$

23 $\dfrac{(2/3)^{x-1}-1}{\sqrt{2}-\sqrt[3]{2^{x-1}}} < 0$ .... $\left(1, \dfrac{5}{2}\right)$

24 $\dfrac{e^x+e^{\sqrt{x}}+2}{e^{2x}-e} \geqslant 0$ .... $\left(\dfrac{1}{2}, +\infty\right)$

25 $(1/3)^{\sqrt{x^2-x-2}} < (1/3)^{x+1}$ .... $(-\infty,-1)$

26 $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x^2-1} > 9$ .... $\emptyset$

27 $3^{x+2} \leqslant 3^{\sqrt{x^2+x-2}}$ .... $(-\infty,-2]$

28 $x-1 < \sqrt{x+4}$ .... $[-4, \dfrac{3+\sqrt{21}}{2})$

29 $\log_5(x-7) > 2$ .... $(32;+\infty)$

30 $\log_{2/3}(x^2-1) > 2$ .... $\left(\dfrac{-\sqrt{13}}{3}, -1\right) \cup \left(1, \dfrac{\sqrt{13}}{3}\right)$

31 $\log_{1/2}\sqrt{x} < \log_{1/2}|x-1|$ .... $\left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}, \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right) \setminus \{1\}$

32 $3^{2-x} + 2 \cdot 3^x < 19$ .... $(-\frac{\ln 2}{\ln 3}, 2)$

33 $(2^{\sqrt{x}} - 2^x)(\ln^2 x - 4) \leqslant 0$ .... $(0, e^{-2}] \cup [1, e^2]$

34 $\log_2 \dfrac{x+\sqrt{x^2+9}}{2x} > 1$ .... $\left(0, \frac{3}{2\sqrt{2}}\right)$

35 $\log_{1/4}\sqrt{6+x-x^2} < \log_{1/4}(x-1)$ .... $(1, 5/2)$

36 $\ln x - \dfrac{2}{\ln x} + 1 \geqslant 0$ .... $\left[\frac{1}{e^2}, 1\right) \cup [e, +\infty)$

37 $\log_{1/2}(7^{2x} - 7^x + 1) > 0$ .... $(-\infty, 0)$

38 $\log_2 \frac{|x|-1}{2-|x+3|} \leqslant 2$ . . . . $\left(-\frac{21}{5},-1\right) \cup (-1,1)$

39 $\frac{1}{2}\ln x + \frac{1}{2}\ln(1-x) < \ln 2 + \frac{1}{2}\ln 5$ . . . . $(1,5)$

40 $\binom{x}{2} < \binom{x-1}{1}$ . . . . $(-\infty,2)$

41 $\binom{x}{3} > 2\binom{x-1}{2}$ . . . . $(6,+\infty)$

APPENDICE B

Limiti

Limiti di successioni

Calcolare in $\mathbb{R}$, se esistono, i seguenti limiti di successioni (per ciascun limite, le soluzioni sono indicate a fianco).

1 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n-2n^2}{3n^2+\sqrt{n}}$ . . . . $-\,{}^{2}/_{3}$;

2 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{n^2+1}{n-2n^3+3}\right)$ . . . . $-\,{}^{1}/_{2}$

3 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(n^{1/3}-n^{1/2}\right)$ . . . . $-\infty$;

4 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n^{1/3}+n^{1/6}}{1+n^{1/2}}$ 0;

5 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n\log\frac{n+1}{n^2+2}$ . . . . $-\infty$;

6 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n\log\frac{n^2+2}{n+1}$ . . . . $+\infty$;

7 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n^3+n^2}{e^{n/2}}$ 0;

8 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n!-e^n}{n^{10}+\log n}$ . . . . $+\infty$;

9 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (\sqrt{n})^{1/n}$ 1;

10 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (\sqrt{n\log n})^{1/n}$ 1;

11 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n\log\frac{n+1}{n+2}$ . . . . -1;

12 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}\cdot\log\left(1+\frac{3}{n}\right)$ 0;

13 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n^2\left(1-\cos\frac{3}{n}\right)$ . . . . ${}^{9}/_{2}$;

14 $\lim_{n\to+\infty} n\left(3^{\frac{n+1}{n^2+1}}-1\right)$ . . . . . . log 3;

15 $\lim_{n\to+\infty} \frac{\cos(n\pi)}{n}$ 0

16 $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ 0

17 $\lim_{n\to+\infty} \ln(n+1)-\ln n$ 0

18 $\lim_{n\to+\infty} n^{1/n}$ 1

19 $\lim_{n\to+\infty} \frac{n+(-)^n n}{n+1}$ . . . . . . $\nexists$

20 $\lim_{n\to\infty} \frac{n^3-2006n^2-1}{500n^2+2007n+2008}$ . . . . . . $+\infty$

21 $\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+3n-5}{n^2+74n-1}$ 2

22 $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{3n}\right)^{2n}$ . . . . . . $e^{2/3}$

23 $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}-n+n^2}{2n^2-n^{3/2}+1}$ . . . . . . $\frac{1}{2}$

24 $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n-3^n}{1+3^n}$ . . . . . . -1

25 $\lim_{n\to\infty} 10^{12}n-\frac{n^2}{10^{21}}$ . . . . . . $-\infty$

26 $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+n}-n$ . . . . . . $\frac{1}{2}$

27 $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n+n^2}{3^n+n^3}$ 0

28 $\lim_{n\to\infty} \frac{n\ln n}{(n+1)(n+2)}$ 0

29 $\lim_{n\to\infty} \frac{1+\ln n}{\sqrt{n}-\ln n}$ 0

30 $\lim_{n\to\infty} (-1)^n\frac{n}{n^2+1}$ 0

31 $\lim_{n\to\infty} (-1)^n\frac{n^2+1}{n+1}$ . . . . . . $\nexists$

32 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n+3^n}$ 3

33 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2n}{3n^2+1}}$ 1

34 $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2(3^n-3^{-n})}{4^n+n^2}$ 0

35 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^6+\ln n+3^n}{2^n+n^4+\log^5 n}$ .... $+\infty$

36 $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n+3}{n+1}\right)^n$ .... e^2

37 $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n-1}{n}\right)^{n^2}$ 0

38 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n^2+1)^n}{n^{2n}}$ 1

39 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln(n+1)}{\ln n}$ 1

40 $\lim\limits_{n\to\infty} n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ 1

41 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln(5n^7+4n^3)}{4n^5+2n^2+1}$ .... $\dfrac{7}{5}$

42 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln(2^n+3^n)}{n}$ .... $\ln 3$

43 $\lim\limits_{n\to\infty} \sin\dfrac{1}{n}$ 0

44 $\lim\limits_{n\to\infty} n\sin\dfrac{1}{n}$ 1

45 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n}\sin\dfrac{1}{n}$ 0

46 $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\sin\dfrac{1}{n}$ .... $+\infty$

47 $\lim\limits_{n\to\infty} n\sin\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ .... $+\infty$

48 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin\frac{3}{n}}{\sin\frac{5}{n}}$ .... $\dfrac{3}{5}$

49 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin\frac{3}{n}}{\tan\frac{5}{n}}$ .... $\dfrac{3}{5}$

50 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1-\cos\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}$ 0

51 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1-\cos\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}}$ .... $\dfrac{1}{2}$

52 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a},\ a>1$ .... 1^+

53 $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ .... e

54 $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n$ .... $\dfrac{1}{e}$

55 $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{a}{n}\right)^n,\ a\in\mathbb{R}$ .... e^a

56 $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$ . . . . $+\infty$

57 $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n}$ . . . . 1^+

58 $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2^n}{2^{n^2}}$ 0

59 $\lim_{n\to\infty} \frac{n^n+3^n}{4^{n\ln n}}$ 0

60 $\lim_{n\to\infty} n\sin\left(\frac{n^2(n+1)+2}{n}\pi\right)$ 2π

61 $\lim_{n\to\infty} n\sin\left(\frac{n^2(n-1)-3}{n}\pi\right)$ . . . . -3π

62 $\lim_{n\to\infty} ne^{1/n}+2e^{-n}\sin e^n - n$ 3

63 $\lim_{n\to\infty} \frac{e^{\sin(1/n)}-1}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$ 1

64 $\lim_{n\to\infty} (\ln n)\sin\left(\frac{1}{\ln(n^2)}\right)$ . . . . $\frac{1}{2}$

65 $\lim_{n\to\infty} \frac{\tan\left(\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}}}$ 1

66 $\lim_{n\to\infty} n\frac{\log\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}$ . . . . $-\frac{1}{2}$

67 $\lim_{n\to\infty} \cos^n\left(\frac{1}{n}\right)$ 0

68 $\lim_{n\to\infty} \left(e^{1/n}+10^{1/n}\right)^n$ 0

Limiti di funzioni

Calcolare in $\mathbb{R}$, se esistono, i seguenti limiti di funzioni (per ciascun limite, le soluzioni sono indicate a fianco).

1 $\lim_{x\to-1} \frac{\sqrt[3]{x}+1}{x+1}$ . . . . $\frac{1}{3}$

2 $\lim_{x\to0} \frac{\sin^4 x}{(1-\cos x)^2}$ 4

3 $\lim_{x\to0} \frac{1-\cos(2x)}{\sin^2(3x)}$ . . . . $\frac{2}{9}$

4 $\lim_{x\to0} \frac{3x+\tan x}{\sin x+\tan^2 x}$ 4

5 $\lim_{x\to0} \frac{x^3}{\tan x-\sin x}$ 2

6 $\lim_{x\to0^+} \ln x-\ln\sin(2x)$ . . . . $-\ln 2$

7 $\lim_{x \to 0^+} e^{\frac{\ln^2 x - 2}{\ln x - 2}}$ .... 0^+

8 $\lim_{x \to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$ .... $\frac{1}{e}$

9 $\lim_{x \to 0^+} x^{\frac{1}{\ln(3x)}}$ .... e

10 $\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{e^x}{\sqrt{x^2 - x}} \right)^{\frac{1}{1-x}}$ .... $\frac{1}{e}$

11 $\lim_{x \to 0^\pm} 1/3 \frac{\ln(1 + e^{2x})}{x}$ .... $\pm\infty$

12 $\lim_{x \to +\infty} 1/3 \frac{\ln(1 + 2x)}{x}$ 0

13 $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^4 e^{3x}}{e^{7x}}$ 0

14 $\lim_{x \to 0^\pm} \frac{|4x - 1| - |-1 + \sin(x)|}{x}$ .... -3

15 $\lim_{x \to 0^\pm} \frac{\ln(1 + \sin(|x|))}{\sin(\ln(1 - x))}$ .... ∓ 1

16 $\lim_{x \to 0} \frac{x^3 - \sin(x^3)}{x^6}$ 0

17 $\lim_{x \to 0^\pm} \frac{e^{4x^2 - 1}}{x}$ .... $\pm\infty$

18 $\lim_{x \to 0^\pm} \frac{|2x - 3| - |3 + x|}{x}$ .... -3

19 $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + |\sin(x)|)}{\sin(\ln(1 - |x|))}$ .... -1

APPENDICE C

Studi di funzione

Esercizio C.1

Studiare (insieme di definizione, limiti agli estremi dell'insieme di definizione, eventuali asintoti, punti di massimo o di minimo, verso della concavità, segno) la funzione f definita da

$$f(x) = \log \frac{\sqrt[3]{x}}{3x-1}$$

e disegnarne un grafico qualitativo.

✍ Soluzione

- Dominio: $x < 0 \ \cup \ x > \frac{1}{3}$
- Limiti agli estremi del dominio e ricerca di eventuali asintoti:

$$\lim_{x\to-\infty} \ln\left(\frac{\sqrt[3]{x}}{3x-1}\right) = -\infty \qquad \text{Non esiste asintoto orizzontale per } x \to -\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} \ln\left(\frac{\sqrt[3]{x}}{3x-1}\right) x^{-1} = 0 \qquad \text{Non esiste asintoto obliquo per } x \to -\infty$$

$$\lim_{x\to0^-} \ln\left(\frac{\sqrt[3]{x}}{3x-1}\right) = -\infty \qquad x = 0 \text{ è asintoto verticale}$$

$$\lim_{x\to\frac{1}{3}^+} \ln\left(\frac{\sqrt[3]{x}}{3x-1}\right) = +\infty \qquad x = \frac{1}{3} \text{ è asintoto verticale}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{\sqrt[3]{x}}{3x-1}\right) = -\infty \qquad \text{Non esiste asintoto orizzontale per } x \to +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{\sqrt[3]{x}}{3x-1}\right) x^{-1} = 0 \qquad \text{Non esiste asintoto obliquo per } x \to +\infty$$

- Determinazione di eventuali estremanti: $f'(x) = -1/3\,\frac{6x+1}{(3x-1)x}$

  f crescente ($f' >$) per $x < -1/6$

  f decrescente ($f' < 0$) per $-1/6 < x < 0$ e per $x > 1/3$

  $x = -1/6$ è punto di massimo relativo

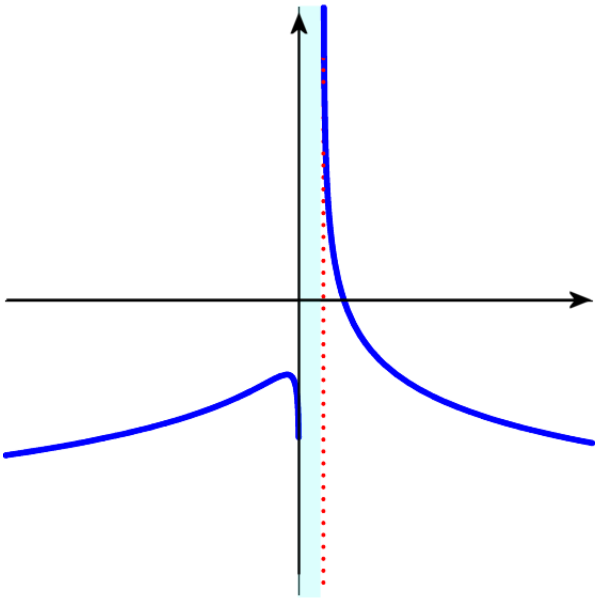
- Verso della concavità: $f''(x) = 1/3\,\frac{18x^2+6x-1}{(3x-1)^2x^2}$

  f convessa ($f'' > 0$) per $x < -\frac{1+\sqrt{3}}{6} \vee x > 1/3$

f concava ($f'' < 0$) per $-\frac{1+\sqrt{3}}{6} < x < 0$

$x = -\frac{1+\sqrt{3}}{6}$ è punto di flesso

❦ Diagramma qualitativo:



Esercizio C.2

Studiare (insieme di definizione, limiti agli estremi dell'insieme di definizione, eventuali asintoti, punti di massimo o di minimo, verso della concavità, segno) la funzione f definita da $f(x) = 2x + 3(e^x - 2)^{\frac{2}{3}}$ e disegnarne un grafico qualitativo.

✍ Soluzione

❦ Dominio: $\mathbb{R}$

❦ Limiti agli estremi del dominio e ricerca di eventuali asintoti:

$\lim_{x\to\pm\infty} 2\,x + 3\,\sqrt[3]{e^{2\,x} - 4\,e^x + 4} = \pm\infty$ quindi non esistono né asintoti orizzontali né verticali.

Inoltre poiché $\lim_{x\to+\infty} \frac{2\,x+3\,\sqrt[3]{e^{2\,x}-4\,e^x+4}}{x} = +\infty$ non esiste asintoto obliquo per $x \to +\infty$.

Infine $\lim_{x\to-\infty} \frac{2\,x+3\,\sqrt[3]{e^{2\,x}-4\,e^x+4}}{x} = 2 =: m$ e $\lim_{x\to-\infty} 3\,\sqrt[3]{e^{2\,x} - 4\,e^x + 4} = 3\,\sqrt[3]{4} =: q$ perciò esiste asintoto obliquo per $x \to -\infty$ ed ha equazione $y = 2x + 3\,\sqrt[3]{4}$.

❦ Determinazione di eventuali estremanti: $f'(x) = 2 + \frac{2\,e^{2\,x}-4\,e^x}{(e^{2\,x}-4\,e^x+4)^{2/3}}$

f' non è definita in $x = \ln 2$ e $\lim_{x\to(\log 2)^{\mp}} = \mp\infty$

$f' > 0$ per $x < 0\ \vee\ x > \ln 2 \to$ la funzione è crescente

$f' < 0$ per $0 < x < \ln 2 \to$ la funzione è decrescente

Allora $x = 0$ è un punto di massimo

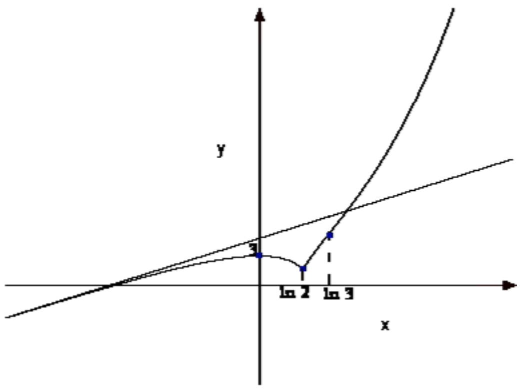
❦ Verso della concavità: $f''(x) = 4/3\,\frac{(e^x-3)e^x}{\left((e^x-2)^2\right)^{2/3}}$

$f'' > 0$ per $x > \ln 3 \to$ la funzione è convessa

$f'' < 0$ per $x < \ln 2\ \vee\ \ln 2 < x < \ln 3 \to$ la funzione è concava

Allora $x = \ln 3$ è un punto di flesso

- Diagramma qualitativo



Esercizio C.3

Studiare (insieme di definizione, limiti agli estremi dell'insieme di definizione, eventuali asintoti, punti di massimo o di minimo, verso della concavità, segno) la funzione f definita da $f(x) = \left| x - \frac{x}{\log x} \right|$ e disegnarne un grafico qualitativo.

✍ Soluzione

- Dominio: $x > 0,\ x \neq 1$

- Limiti agli estremi del dominio e ricerca di eventuali asintoti:

  $\lim_{x \to 0^+} \left| x - \frac{x}{\ln(x)} \right| = 0, \quad \lim_{x \to 1^\pm} \left| x - \frac{x}{\ln(x)} \right| = \infty$ quindi $x = 1$ è asintoto verticale

  $\lim_{x \to \infty} \left| x - \frac{x}{\ln(x)} \right| = \infty$ quindi non esiste asintoto orizzontale

  $\lim_{x \to \infty} \left| x - \frac{x}{\ln(x)} \right| x^{-1} = 1, \quad \lim_{x \to \infty} \left| x - \frac{x}{\ln(x)} \right| - x = \infty$ quindi non esiste asintoto obliquo

- Determinazione di eventuali estremanti:

  Osserviamo dapprima che $f(x) = \begin{cases} x - \dfrac{x}{\log x} & \text{per } 1 < x < e \\ \dfrac{x}{\log x} - x & \text{per } x < 1 \ \vee \ x \geqslant e \end{cases}$

  pertanto $f'(x) = \begin{cases} \dfrac{\log^2 x - \log x + 1}{\log^2 x} & \text{per } 1 < x < e \\ -\dfrac{\log^2 x - \log x + 1}{\log^2 x} & \text{per } x < 1 \ \vee \ x > e \end{cases}$

  f' non è definita in $x = e$ e $\lim_{x \to (e)^\mp} = \mp 1$

  $f' > 0$ per $0 < x < 1 \ \vee \ x > e \to$ la funzione è crescente

  $f' < 0$ per $1 < x < e \to$ la funzione è decrescente

  Allora non esistono estremanti

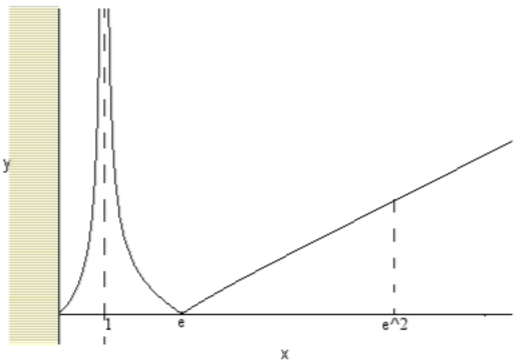
- Verso della concavità: $f''(x) = \begin{cases} \dfrac{\log x - 2}{x \log^3 x} & \text{per } 1 < x < e \\ -\dfrac{\log x - 2}{x \log^3 x} & \text{per } x < 1 \ \vee \ x > e \end{cases}$

  $f'' > 0$ per $0 < x < 1 \ \vee \ 1 < x < e \ \vee \ x > e^2 \to$ la funzione è convessa

  $f'' < 0$ per $e < x < e^2 \to$ la funzione è concava

  Allora $x = e^2$ è un punto di flesso

- Diagramma qualitativo



Esercizio C.4

Studiare la funzione f definita da $f(x) = 1 - (\log x)^3$ e disegnarne un grafico qualitativo. Disegnare poi il grafico delle funzioni g ed h definite rispettivamente da

$$g(x) = \left|1 - (\log x)^3\right| \qquad e \qquad h(x) = \left|1 - (\log |x|)^3\right| \; .$$

Soluzione

- Dominio: $x > 0$
- Limiti agli estremi del dominio e ricerca di eventuali asintoti:

  $\lim_{x\to 0^+} 1 - (\ln(x))^3 = \infty$ quindi $x = 0$ è asintoto verticale

  $\lim_{x\to\infty} 1 - (\ln(x))^3 = -\infty$ quindi non esiste asintoto orizzontale

  $\lim_{x\to\infty} \frac{1-(\ln(x))^3}{x} = 0$ quindi non esiste asintoto obliquo

- Determinazione di eventuali estremanti: $f'(x) = -3\,\frac{(\ln(x))^2}{x}$

  $f' > 0$ per nessun valore di x

  $f' < 0$ per $0 < x < 1 \;\vee\; x > 1 \to$ la funzione è decrescente

  $f' = 0$ per $x = 1 \to x = 1$ è un punto di flesso discendente a tangente orizzontale

- Verso della concavità: $f''(x) = 3\,\frac{\ln(x)(-2+\ln(x))}{x^2}$

  $f'' > 0$ per $0 < x < 1 \;\vee\; x > e^2 \to$ la funzione è convessa

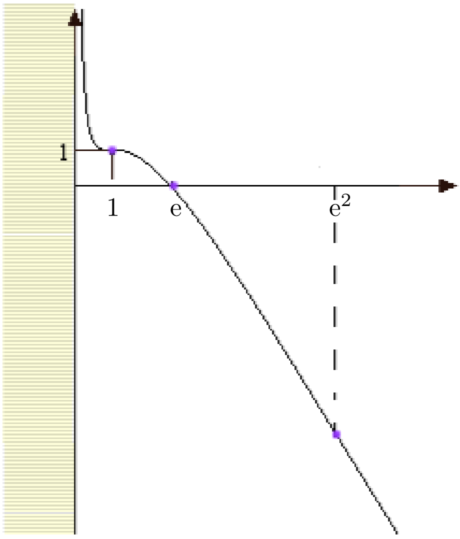
  $f'' < 0$ per $1 < x < e^2 \to$ la funzione è concava

  Allora $x = e^2$ è un punto di flesso

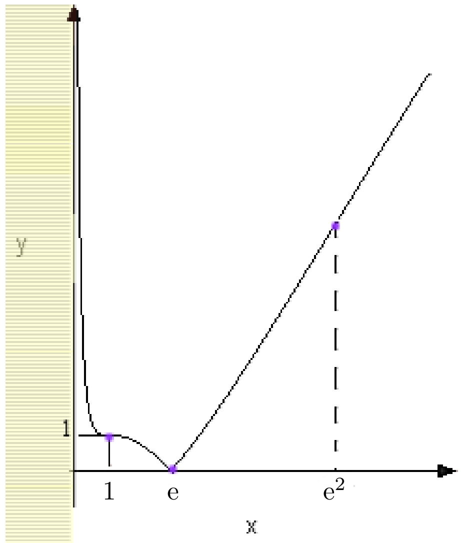
- Diagramma qualitativo: vedi fig. C.1a nella pagina successiva.

Esercizio C.5

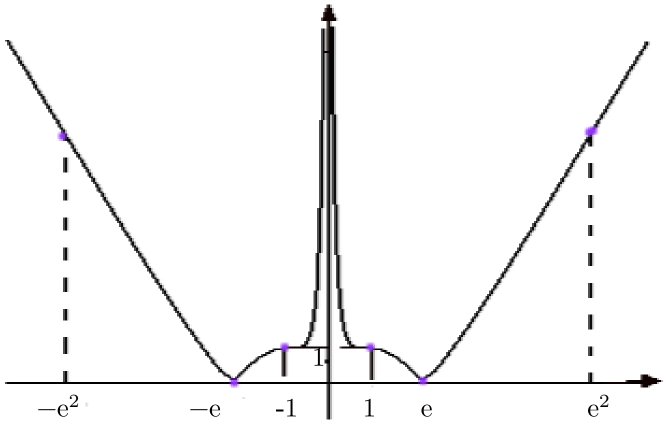
Stabilire se la funzione f definita da $f(x) = e^{\frac{1}{x}} + \frac{\sin x}{x}$ ammette asintoti e, in caso affermativo, determinarne l'equazione.



(a) $f(x) = 1 - (\log x)^3$



(b) $g(x) = |1 - (\log x)^3|$



(c) $h(x) = |1 - (\log |x|)^3|$

Figura C.1. *Esercizio 4 nella pagina precedente*

✍ Soluzione

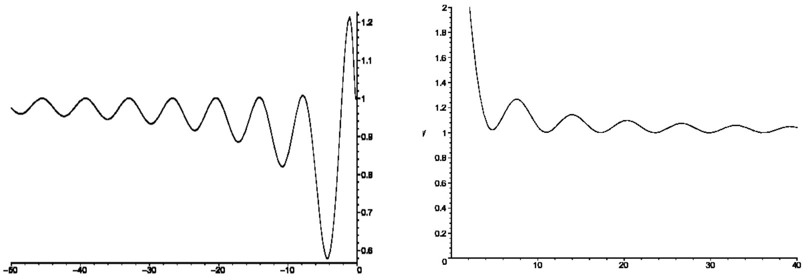
- Dominio: $x \neq 0$
- Limiti agli estremi del dominio e ricerca di eventuali asintoti:

$$\lim_{x\to\pm\infty} e^{1/x} + \frac{\sin(x)}{x} = 1 \qquad \to \qquad y = 1 \text{ è asintoto orizzontale}$$

$$\lim_{x\to 0^-} e^{1/x} + \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0^+} e^{1/x} + \frac{\sin(x)}{x} = \infty$$

- Diagramma qualitativo: vedi figg. C.2 nella pagina seguente.



(a) x<0 **(b)** x>0

Figura C.2. $f(x) = e^{\frac{1}{x}} + \dfrac{\sin x}{x}$

Esercizio C.6

Stabilire se la funzione f definita da $f(x) = xe^{\frac{x-1}{x+3}}$ ammette asintoti e, in caso affermativo, determinarne l'equazione.

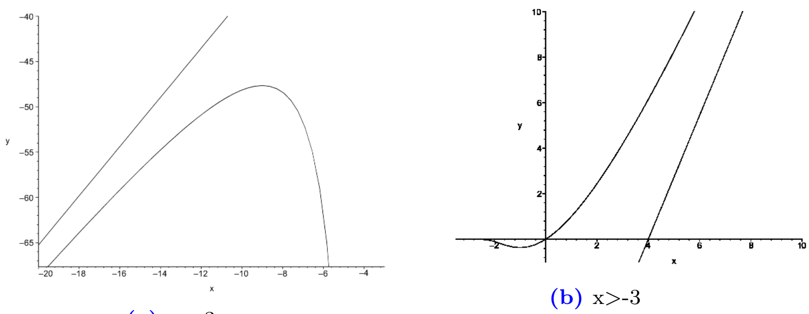
✍ Soluzione

- Dominio: $x \neq -3$
- Limiti agli estremi del dominio e ricerca di eventuali asintoti:

  $\lim_{x\to -3^+} xe^{\frac{x-1}{x+3}} = 0,\ \lim_{x\to -3^-} xe^{\frac{x-1}{x+3}} = -\infty,\ \lim_{x\to\pm\infty} xe^{\frac{x-1}{x+3}} = \pm\infty,$

  $m := \lim_{x\to\pm\infty} f(x)/x = \lim_{x\to\pm\infty} e^{\frac{x-1}{x+3}} = e,\ q := \lim_{x\to\pm\infty} f(x) - mx = \lim_{x\to\pm\infty} xe^{\frac{x-1}{x+3}} - ex = -4\,e.$

  Asintoto obliquo per $x \to \pm\infty$: $y = ex - 4\,e$
- Diagramma qualitativo: vedi figg. C.3.



(a) x<-3 **(b)** x>-3

Figura C.3. $f(x) = xe^{\frac{x-1}{x+3}}$

Esercizio C.7

Stabilire se la funzione f definita da $f(x) = \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x}$ ammette asintoti e, in caso affermativo, determinarne l'equazione.

✍ Soluzione

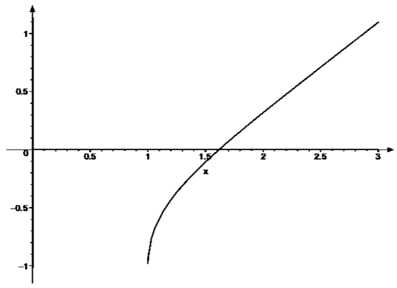
- Dominio: $x \geqslant 0$

- Limiti agli estremi del dominio e ricerca di eventuali asintoti:

  $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ Non esiste asintoto orizzontale

  $m := \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x}}{x} = 1$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) - mx = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x} - x = -\infty$ Non esiste asintoto obliquo per $x \to +\infty$

- Diagramma qualitativo



Esercizio C.8

Stabilire se la funzione f definita da $f(x) = \log(|x+1| + e^x)$ ammette asintoti e, in caso affermativo, determinarne l'equazione.

✍ Soluzione

- Dominio: $\mathbb{R}$

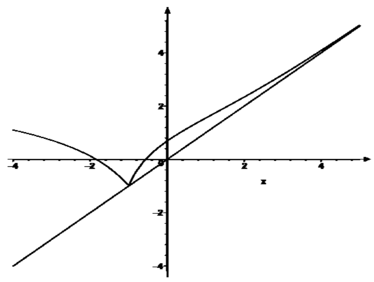
- Limiti agli estremi del dominio e ricerca di eventuali asintoti:

  $\lim_{x\to\pm\infty} \ln(e^x + |x+1|) = \pm\infty$ Non esiste asintoto orizzontale

  $m := \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(e^x+|x+1|)}{x} = 1$, $q := \lim_{x\to+\infty} f(x) - mx = \lim_{x\to+\infty} \ln(e^x + |x+1|) - x = 0$
  Asintoto obliquo per $x \to +\infty$: $y = x$

  $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\ln(e^x+|x+1|)}{x} = 0$ Non esiste asintoto obliquo per $x \to -\infty$

- Diagramma qualitativo



Esercizio C.9

Stabilire dove è derivabile la funzione f definita da $f(x) = x\,|x^2 - 4x|$

✍ Soluzione

- Dominio: $\mathbb{R}$

- Studio della derivabilità.

$$f(x) := x|x^2 - 4x| = \begin{cases} x(x^2 - 4x) & \text{per } x < 0 \ \vee \ x > 4 \\ x(4x - x^2) & \text{per } 0 < x < 4 \end{cases}$$

$$f'(x) := \begin{cases} 3x^2 - 8x & \text{per } x < 0 \ \vee \ x > 4 \\ 8x - 3x^2 & \text{per } 0 < x < 4 \end{cases}$$

La funzione è continua e sicuramente derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{0, 4\}$. Analizziamo separatamente i due punti:
$$\lim_{x \to 0^\pm} f'(x) = 0^\pm \quad \to \quad f'(0) = 0$$
$$\lim_{x \to 4^\pm} f'(x) = \pm 16 \quad \to \quad f \text{ non è derivabile in } x = 4$$

- Diagramma qualitativo: vedi fig. C.4.

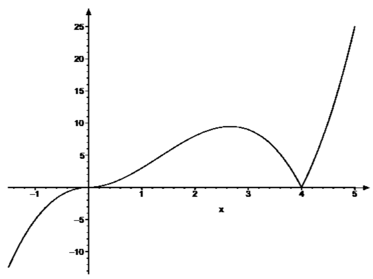


Figura C.4. $f(x) = x|x^2 - 4x|$

Esercizio C.10

Stabilire dove è derivabile la funzione f definita da $f(x) = |(x^2 - 4x + 3)\log(x^2)|$.

✍ Soluzione

- Dominio: $x \neq 0$

- Studio della derivabilità.

$$f(x) := |(x^2 - 4x + 3)\log(x^2)| = \begin{cases} (x^2 - 4x + 3)\log(x^2) & \text{per } x < -1 \ \vee \ x > 3 \\ -(x^2 - 4x + 3)\log(x^2) & \text{per } -1 < x < 0 \ \vee \ 0 < x < 3 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} (2x - 4)\log(x^2) + 2\dfrac{(x^2 - 4x + 3)}{x} & \text{per } x < -1 \ \vee \ x > 3 \\ -(2x - 4)\log(x^2) - 2\dfrac{(x^2 - 4x + 3)}{x} & \text{per } -1 < x < 0 \ \vee \ 0 < x < 3 \end{cases}$$

La funzione è continua (dove è definita) e sicuramente derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 3\}$. Analizziamo separatamente i due punti $\{-1, 3\}$:
$$\lim_{x \to -1^\pm} f'(x) = \pm 16 \quad \to \quad f \text{ non è derivabile in } x = -1$$
$$\lim_{x \to 3^\pm} f'(x) = \pm 2\log 9 \quad \to \quad f \text{ non è derivabile in } x = 3$$

- Diagramma qualitativo: vedi fig. C.5 nella pagina successiva.

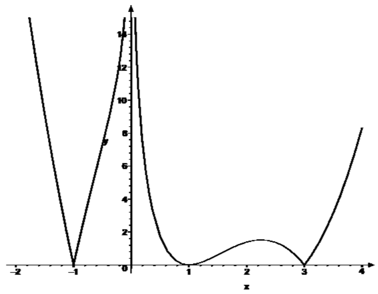


Figura C.5. $f(x) = |(x^2 - 4x + 3)\log(x^2)|$

Esercizio C.11

Si deve costruire un serbatoio di acciaio inossidabile della capacità di $54\pi\,m^3$, a forma cilindrica e con coperchio. Come dovranno essere il raggio di base e l'altezza affinché sia minima la quantità di acciaio consumato (lo spessore dell'acciaio è trascurabile)?

✍ Soluzione

Detta x la misura (in m) del raggio di base e h quella dell'altezza, sarà $\pi x^2 h = 54\pi$ ossia $h = \frac{54}{x^2}$. La superficie totale del serbatoio sarà allora:

$$S = 2\pi x\, h\, +\, 2(\pi x^2) = 2\pi x \frac{54}{x^2} + 2(\pi x^2) = \frac{108\pi}{x} + 2\pi x^2 \qquad (\text{con } x > 0)$$

Affinché sia minima la quantità di acciaio consumata occorre che sia minima l'area della superficie totale; determiniamo dunque i minimi relativi della funzione $S(x)$:

$$\begin{array}{lll} S'(x) = -\frac{108\pi}{x^2} + 4\pi x & & \\ S'(x) = 0 & \text{per} & x = 3 \\ S'(x) > 0 & \text{per} & x > 3 \\ S'(x) < 0 & \text{per} & x < 3 \end{array}$$

La funzione presenta un solo minimo relativo per $x = 3$ (in m); esso coincide con il minimo assoluto. Il cilindro dovrà dunque avere raggio di base di 3m e altezza 6m. L'area della superficie totale sarà in tal caso $54\pi m^2$.

Esercizio C.12

Un serbatoio, senza coperchio, a forma di parallelepipedo rettangolo a base quadrata, della capacità C, deve essere rivestito internamente di piombo (spessore trascurabile). Come dovranno essere le sue dimensioni affinché la spesa sia minima?

✍ Soluzione

Detta b la misura del lato di base e h quella dell'altezza, sarà $b^2 h = C$ ossia $h = \frac{C}{b^2}$. La superficie totale del serbatoio (senza coperchio) sarà allora:

$$S = 4bh + b^2 = 4b\frac{C}{b^2} + b^2 \qquad (\text{con } b>0)$$

Affinché sia minima la spesa occorre che sia minima l'area della superficie totale; determiniamo dunque i minimi relativi della funzione $S(b)$:

$$\begin{array}{lll} S'(b) = -\frac{4C}{b^2} + 2b & & \\ S'(b) = 0 & \text{per} & x = \sqrt[3]{2C} \\ S'(b) > 0 & \text{per} & x > \sqrt[3]{2C} \\ S'(b) < 0 & \text{per} & x < \sqrt[3]{2C} \end{array}$$

La funzione presenta un solo minimo relativo per $x = \sqrt[3]{2C}$; esso coincide con il minimo assoluto. Il serbatoio dovrà dunque avere lato di base $= \sqrt[3]{2C}$ e altezza $= \frac{\sqrt[3]{2C}}{2}$.

Esercizio C.13

Si deve rivestire internamente di piombo un serbatoio, senza coperchio, a forma di cilindro retto, della capacità C. Come dovranno essere il raggio di base e l'altezza affinché la spesa sia minima?

✍ Soluzione

Detta r (con r>0)la misura del raggio di base e h quella dell'altezza, sarà $\pi r^2 h = C$ ossia $h = \frac{C}{\pi r^2}$. La superficie totale del serbatoio sarà allora:

$$S = 2\pi r\, h + \pi r^2 = 2\pi r \frac{C}{\pi r^2} + \pi r^2 = \frac{2C}{r} + \pi r^2$$

Affinché sia minima la spesa occorre che sia minima l'area della superficie totale; determiniamo dunque i minimi relativi della funzione $S(r)$:

$$\begin{array}{lll} S'(r) = \frac{2C}{r} + \pi r^2 & & \\ S'(r) = 0 & \text{per} & r = \sqrt[3]{\frac{C}{\pi}} \\ S'(r) > 0 & \text{per} & r > \sqrt[3]{\frac{C}{\pi}} \\ S'(r) < 0 & \text{per} & r < \sqrt[3]{\frac{C}{\pi}} \end{array}$$

La funzione presenta un solo minimo relativo per $r = \sqrt[3]{\frac{C}{\pi}}$; esso coincide con il minimo assoluto. Il cilindro dovrà dunque avere raggio di base $= \sqrt[3]{\frac{C}{\pi}}$ e altezza $= \sqrt[3]{\frac{C}{\pi}}$.

Esercizio C.14

Determinare la tangente alla curva $y = \sqrt{x}$ nel punto di ascissa $a = 1$.

✍ Soluzione

L'equazione della retta tangente ad una curva d'equazione $y = f(x)$ in un suo punto A di ascissa a è data da $\frac{y-f(a)}{x-a} = f'(a)$. La retta cercata ha allora equazione

$$\frac{y - \sqrt{1}}{x - 1} = \left.\frac{1}{2\sqrt{x}}\right|_{x=1} = 1 \rightarrow y = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}$$

Esercizio C.15

Determinare il valore del parametro k in modo che la curva di equazione $y = kx^3 - x + 4$ abbia nel punto di ascissa $x = 1$ tangente orizzontale.

✍ Soluzione

La tangente è orizzontale se il suo coefficiente angolare $m \equiv y'(x_0)$ è zero. Perciò dovrà essere $y'(1) = 0$ ossia $k = 1/3$.

Esercizio C.16

Considerata la retta $y = k$, determinare per quali valori del parametro k essa interseca la curva di equazione $y = \dfrac{x^2 - x + 1}{x - 1}$ in due punti distinti.

✍ Soluzione

CE: $x \neq 1$.

$\lim\limits_{x \to \mp\infty} f(x) = \mp\infty, \ \lim\limits_{x \to 1^\mp} f(x) = \mp\infty$

$y' = \dfrac{x\,(x-2)}{(x-1)^2}$

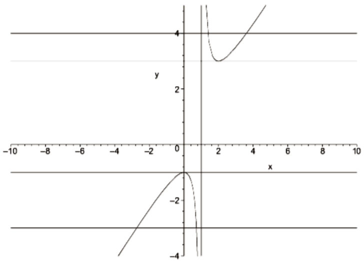
$y' = 0 \Leftrightarrow x\,(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \cup x = 2$

$y'' = 2\,(x-1)^{-3}$

$y'' = 0 \Leftrightarrow \nexists x$

$y'' > 0 \Leftrightarrow x > 1$

$y'' < 0 \Leftrightarrow x < 1$



Nel punto di massimo relativo la funzione vale $y(0) = -1$, nel punto di minimo relativo vale $y(2) = 3$, pertanto la retta $y = k$ interseca la curva in due punti distinti sse $k \leqslant -1 \cup k \geqslant 3$.

Esercizio C.17

Data la funzione $y = \dfrac{x^2 + px + q}{x^2 + 2}$ si determinino i valori di p e q in modo che la curva rappresentativa della funzione passi per il punto $P(1; 2)$ e abbia ivi tangente parallela alla retta $y - 4 = 0$.

✍ Soluzione

Il punto P appartiene alla curva se e solo se $2 = \frac{1+p+q}{3} \to p + q = 5$. La retta tangente alla curva nel punto P ha inclinazione pari a $y'(1)$, perciò

$$y' = -\frac{-4x + px^2 - 2p + 2xq}{(x^2+2)^2} \to y'(1) = \frac{4 + p - 2q}{9}$$

quindi bisogna porre $4 + p - 2q = 0$. In conclusione $p = 2$ e $q = 3$.

Esercizio C.18

Determinare l'asintoto per $x \to -\infty$ della funzione $f(x) = x\sqrt{3 + (|x-2|)^{-1}}$.

✍ Soluzione

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty, \ \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \sqrt{3}, \ \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) - \sqrt{3}x = -\frac{\sqrt{3}}{6};$

$y = \sqrt{3}x - \frac{\sqrt{3}}{6}$ è asintoto per $x \to -\infty$.

Esercizio C.19

Determinare per una curva di equazione $y = f(x)$ le tangenti che hanno pendenza m nota.

✍ Soluzione

La retta tangente ad una curva di equazione $y = f(x)$ in un suo punto A di ascissa a ha equazione $\frac{y-f(a)}{x-a} = f'(a) = m$. Conosciamo $f(x)$ ed $f'(a)$ perciò occorre calcolare a ed $f(a)$. Per determinare a si calcola $f'(a)$ e si cerca il valore di x per cui risulta $f'(x) = m$. Noto a si calcola $f(a)$ ottenendo infine l'equazione della retta tangente.

Esercizio C.20

Determinare per ogni curva le tangenti che hanno la pendenza m indicata:

- $y = x^2 - 5x$ e $m = 1$
- $y = \frac{4x}{1+x^2}$ e $m = 0$
- $y = \frac{1}{3}x^3 - 2$ e $m = 1$
- $y = \frac{1-x}{x+3}$ e $m = -1$

✍ Soluzione

Procedendo come indicato nell'esercizio precedente si ottiene:

- $f'(x) = 2x - 5 \to 2a - 5 = 1 \to a = 3 \to f(a) = -6 \to$ retta tangente: $y = x - 9$
- $f'(x) = x^2 \to a^2 = 1 \to a = \pm 1 \to f(1) = -\frac{5}{3}$ e $f(-1) = -\frac{7}{3} \to$ rette tangenti: $y = x - \frac{8}{3}$ e $y = x - \frac{4}{3}$
- $f'(x) = -4\frac{-1+x^2}{(1+x^2)^2} \to -4\,\frac{-1+a^2}{(1+a^2)^2} = 0 \to a = \pm 1 \to f(\pm 1) = \pm 2 \to$ rette tangenti: $y = \pm 2$
- $f'(x) = -4\,(x+3)^{-2} \to -4\,(a+3)^{-2} = -1 \to a = -1$e $a = -5 \to f(-1) = 1$ e $f(-5) = -3 \to$ rette tangenti: $y = -x$ e $y = -x - 5$

APPENDICE D

Integrali

Integrali indefiniti

Di fronte a un simbolo di integrale, chiediti per prima cosa: devo calcolare un integrale indefinito o definito?

1. Se è un integrale indefinito, il risultato è una famiglia di funzioni definite su uno stesso intervallo, ad esempio:
$$\int x^{10}\,dx = \frac{x^{11}}{11} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$
(dove c indica una costante arbitraria).

   Errore tipico: dimenticarsi la costante c (significa affermare che la funzione integranda ha una sola primitiva sull'intervallo in questione, mentre ne ha infinite!).

2. Se invece è un integrale definito, il risultato è un numero, ad esempio:
$$\int_0^1 x^{10}\,dx = \frac{1}{11}$$

   Errore tipico: aggiungere un $+c$ nel risultato dell'integrale definito (è come affermare: questo integrale vale un numero qualsiasi dunque tutti i calcoli fatti sono stati inutili!)

Dovendo calcolare una primitiva, ricordarsi che si sta effettuando l'operazione inversa della derivazione: occorre quindi tenere sempre presenti le regole di derivazione, senza "inventarne" di inesistenti. Ad esempio:

1. la regola di integrazione per *sostituzione* è una rilettura della regola di derivazione delle funzioni composte. Un ***errore grossolano e frequente*** è dimenticarsi questa regola e scrivere ad esempio:
$$\int \log^2 x\,dx = \xcancel{\frac{\log^3 x}{3} + c}$$
(Come se la derivata di $\frac{\log^3 x}{3}$ fosse semplicemente $\log^2 x$. Che cosa dice invece la regola di derivazione delle funzioni composte?).

2. per integrare il prodotto di due funzioni, è utile talvolta la formula di integrazione per *parti*, che è una rilettura della formula di derivazione del prodotto. Un ***errore grossolano*** è scrivere ad esempio:
$$\int x \sin x\,dx = \xcancel{-\frac{x^2 \cos x}{2} + c}$$
(Come se la derivata del prodotto $-\frac{x^2 \cos x}{2}$ fosse semplicemente il prodotto delle derivate. Che cosa dice, invece, la formula di derivazione del prodotto? E come si calcola questo integrale?).

Integrazione diretta, per scomposizione o per sotituzione: il metodo di integrazione indefinita per sostituzione si può sintetizzare nella relazione:

$$\int f(x)\,dx = \int f(g(t))g'(t)\,dt\,.$$

Accanto ad ogni integrale in un riquadro abbiamo indicato una opportuna sostituzione ed il calcolo del differenziale ad essa associato.

1. $\int 2x^3 - 3x + 1\,dx$ .... $\frac{1}{2}x(x^3 - 3x + 2) + c$
2. $\int \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}\,dx$ .... $\frac{1}{12}(8\sqrt[3]{x} + 3)x^{4/3} + c$
3. $\int \frac{1}{\sqrt{x+1}}\,dx$ .... $2\sqrt{x+1} + c$
4. $\int \sqrt{2x+1}\,dx$ .... $\frac{\sqrt{(2x+1)^3}}{3} + c$
5. $\int e^{2x+1}\,dx$ .... $\frac{e^{2x+1}}{2} + c$
6. $\int \sqrt[4]{(x-1)^3}\,dx$ .... $\frac{4}{7}(x-1)^{7/4} + c$
7. $\int \frac{x}{x+1}\,dx$ .... $x - \ln(x+1) + c$
8. $\int x\sqrt{5+x^2}\,dx$ .... $\frac{1}{3}(5+x^2)^{3/2} + c$
9. $\int \frac{e^x}{1+e^x}\,dx$ .... $\ln(1+e^x) + c$
10. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$ .... $2e^{\sqrt{x}} + c$
11. $\int \frac{e^{-1/x}}{x^2}\,dx$ .... $e^{-1/x} + c$
12. $\int xe^{x^2}\,dx$ .... $\frac{e^{x^2}}{2} + c$
13. $\int \frac{\ln^3 x}{x}\,dx$ .... $\frac{\ln^4 x}{4} + c$
14. $\int \frac{1}{x\ln^3 x}\,dx$ .... $-\frac{1}{2\ln^2 x} + c$
15. $\int x^2 e^{x^3}\,dx$ .... $\frac{e^{x^3}}{3} + c$
16. $\int \frac{1+\cos x}{x+\sin x}\,dx$ .... $\ln|x + \sin x| + c$
17. $\int \frac{x^3}{1+x^3}\,dx$ .... $\frac{\arctan(x^4)}{4} + c$
18. $\int \frac{\sin(2x)}{1+\sin^2 x}\,dx$ .... $\ln(1+\sin^2 x) + c$
19. $\int \frac{1}{x\sqrt[3]{x}}\,dx$ .... $-\frac{3}{\sqrt[3]{x}} + c$

20. $\displaystyle\int \sin^3 x \cos x \, dx$ . . . . $\dfrac{\sin^4 x}{4} + c$

21. $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x} \, dx$ . . . . $\dfrac{\ln^2 x}{2} + c$

22. $\displaystyle\int \sin(3x) \, dx$ . . . . $-\dfrac{1}{3}\cos(3x) + c$

23. $\displaystyle\int \frac{1}{\sin x \cos x} \, dx$ . . . . $\ln|\tan x| + c$

24. $\displaystyle\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \, dx$ . . . . $-2\cos\sqrt{x} + c$

25. $\displaystyle\int x(x^2+1)^2 \, dx$ . . . . $\dfrac{(x^2+1)^3}{6} + c$

26. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt[3]{x^2+3}} \, dx$ . . . . $\dfrac{3}{4}\sqrt[3]{(x^2+3)^2} + c$

27. $\displaystyle\int \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x} \, dx$ . . . . $e^{\tan x} + c$

28. $\displaystyle\int (ax+b)^n \, dx\,,\ a \neq 0, n \neq 1$ . . . . $\dfrac{1}{a}\dfrac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} + c$

29. $\displaystyle\int \frac{1}{(ax+b)^n} \, dx\,,\ ax+b \neq 0, a \neq 0, n > 1$ . . . . $\dfrac{1}{a}\dfrac{(ax+b)^{-n+1}}{-n+1} + c$

30. $\displaystyle\int \frac{x^3+x+1}{x^2+1} \, dx$ . . . . $\dfrac{x^2}{2} + \arctan x + c$

31. $\displaystyle\int (1+2x^3)^2 \, dx$ . . . . $\dfrac{4}{7}x^7 + x^4 + x + c$

32. $\displaystyle\int (1+\cos x)^2 \, dx$ . . . . $\dfrac{3}{2}x + 2\sin x + \dfrac{\sin x \cos x}{2} + c$

33. $\displaystyle\int \frac{1-2x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$ . . . . $\arcsin x + 2\sqrt{1-x^2} + c$

34. $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} \, dx$ . . . . $\tan x - \dfrac{1}{\tan x} + c$

35. $\displaystyle\int \frac{1}{1+e^x} \, dx$ . . . . $x - \ln(1+e^x) + c$

36. $\displaystyle\int \frac{\cos^2 x}{1-\sin x} \, dx$ . . . . $x - \cos x + c$

37. $\displaystyle\int \frac{1}{\sin(4x)} \, dx$ . . . . $\dfrac{1}{4}\ln|\tan(2x)| + c$

38. $\displaystyle\int \frac{1}{1+\sqrt{x}} \, dx$ . . . . . $\boxed{\begin{cases} t = \sqrt{x} \\ dx = 2t\,dt \end{cases}}$ . . . . . $2(\sqrt{x} - \ln(\sqrt{x}+1)) + c$

39. $\displaystyle\int \frac{1+e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \, dx$ . . . . . $\boxed{\begin{cases} t = \sqrt{x} \\ dx = 2t\,dt \end{cases}}$ . . . . . $2(\sqrt{x} + e^{\sqrt{x}}) + c$

40. $\displaystyle\int \frac{1}{x-\sqrt{x}} \, dx$ . . . . . $\boxed{\begin{cases} t = \sqrt{x} \\ dx = 2t\,dt \end{cases}}$ . . . . . $2\ln(\sqrt{x} - 1) + c$

41. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x(1+\sqrt{x})}}\,dx$ .... $\boxed{\begin{cases} t = 1+\sqrt{x} \\ dx = 2(t-1)\,dt \end{cases}}$ .... $\displaystyle\frac{4\sqrt{x^{3/2}+x}}{\sqrt{x}} + c$

42. $\displaystyle\int \frac{e^x}{1+e^x}\,dx$ .... $\boxed{\begin{cases} t = e^x \\ e^x\,dx = dt \end{cases}}$ .... $\ln(1+e^x) + c$

43. $\displaystyle\int \frac{1}{x\ln x}\,dx$ .... $\boxed{\begin{cases} t = \ln x \\ \frac{1}{x}\,dx = dt \end{cases}}$ .... $\ln|\ln x| + c$

44. $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{\ln\frac{1}{x}}}\,dx$ .... $\boxed{\begin{cases} t = \ln\frac{1}{x} \\ -\frac{1}{x}\,dx = 2t\,dt \end{cases}}$ .... $\displaystyle -2\sqrt{\ln\frac{1}{x}} + c$

45. $\displaystyle\int e^x\ln(1+e^x)\,dx$ .... $\boxed{\begin{cases} t = 1+e^x \\ e^x\,dx = dt \end{cases}}$ .... $(1+e^x)\ln(1+e^x) - e^x + c$

46. $\displaystyle\int \frac{1}{x(2+\ln^2 x)}\,dx$ .... $\boxed{\begin{cases} t = \ln x \\ \frac{1}{x}\,dx = dt \end{cases}}$ .... $\displaystyle\frac{\arctan\left(\frac{\ln x}{\sqrt{2}}\right)}{\sqrt{2}} + c$

47. $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ .... $\boxed{\begin{cases} t^2 = 1-x^2 \\ -x\,dx = t\,dt \end{cases}}$ .... $\displaystyle -\frac{(x^2+2)\sqrt{1-x^2}}{3} + c$

48. $\displaystyle\int \frac{x^5}{\sqrt{x^3-1}}\,dx$ .... $\boxed{\begin{cases} t^2 = x^3-1 \\ 3x^2\,dx = 2t\,dt \end{cases}}$ .... $\displaystyle\frac{2(x^3+2)\sqrt{x^3-1}}{9} + c$

49. $\displaystyle\int \sqrt{e^x-1}\,dx$ ..... $\boxed{\begin{cases} t^2 = e^x-1 \\ dx = \frac{2t}{t^2+1}\,dt \end{cases}}$ ...... $2\left(\sqrt{e^x-1} - \arctan(\sqrt{e^x-1})\right) + c$

50. $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x}\,dx$ .... $\boxed{\begin{cases} t = \ln x \\ dx = e^t\,dt \end{cases}}$ .... $\displaystyle\frac{\ln^2 x}{x} + c$

51. $\displaystyle\int \frac{1}{e^x+e^{-x}}\,dx$ .... $\boxed{\begin{cases} t = e^x \\ dx = \frac{1}{t}\,dt \end{cases}}$ .... $\arctan e^x + c$

52. $\displaystyle\int \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x}\,dx$ .... $\boxed{\begin{cases} t = \tan x \\ dx = \frac{1}{1+t^2}\,dt \end{cases}}$ .... $e^{\tan x} + c$

53. $\displaystyle\int \frac{\sin(\ln x)}{x}\,dx$ .... $\boxed{\begin{cases} t = \ln x \\ dx = e^t\,dt \end{cases}}$ .... $-\cos(\ln x) + c$

54. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$ .... $\boxed{\begin{cases} t = \sqrt{1+x^2} \\ 2x\,dx = 2t\,dt \end{cases}}$ .... $\sqrt{1+x^2} + c$

55. $\displaystyle\int x\sqrt{a+x^2}\,dx$ .... $\boxed{\begin{cases} t = \sqrt{a+x^2} \\ 2x\,dx = 2t\,dt \end{cases}}$ .... $\displaystyle\frac{\sqrt{(a+x^2)^3}}{3} + c$

56. $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}\,dx$ .... $\boxed{\begin{cases} t = \ln x \\ \frac{1}{x}\,dx = dt \end{cases}}$ .... $\arcsin(\ln x) + c$

57. $\displaystyle\int \frac{e^{1/x}}{x^2}\,dx$ . . . . $\boxed{\begin{cases} t = \frac{1}{x} \\ -\frac{1}{x^2}\,dx = dt \end{cases}}$ . . . . $-e^{1/x} + c$

58. $\displaystyle\int \frac{\cos x}{1+\sin x}\,dx$ . . . . $\boxed{\begin{cases} t = 1+\sin x \\ \cos x\,dx = dt \end{cases}}$ . . . . $\ln|1+\sin x| + c$

59. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}\,dx$ . . . . $\boxed{\begin{cases} t = \frac{1}{x} \\ -\dfrac{1}{x^2}\,dx = dt \end{cases}}$ . . . . $-\sin\dfrac{1}{x} + c$

60. $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$ . . . . $\boxed{\begin{cases} t^2 = 1+x^2 \\ x\,dx = t\,dt \end{cases}}$ . . . . $\dfrac{(x^2-2)}{3}\sqrt{x^2+1} + c$

Integrazione per parti: il metodo di integrazione indefinita per parti si può sintetizzare nella relazione:

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx\,.$$

Accanto ad ogni integrale in un riquadro abbiamo indicato una opportuna scelta del fattore finito e del fattore differenziale. Nel caso di due o più integrazioni per parti consecutive è indicata solo la scelta per la prima integrazione per parti.

1. $\displaystyle\int \ln(1+x)\,dx$ . . . . $\boxed{\begin{array}{c} f(x) = \ln(1+x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+x} \\ g(x) = x \Leftarrow g'(x) = 1 \end{array}}$ . . . . $(1+x)\ln(1+x) - x + c$

2. $\displaystyle\int x^2 e^x\,dx$ . . . . $\boxed{\begin{array}{c} f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x \\ g(x) = e^x \Leftarrow g'(x) = e^x \end{array}}$ . . . . $e^x((x-2)x+2) + c$

3. $\displaystyle\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$ . . . . $\boxed{\begin{array}{c} f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x} \\ g(x) = 2\sqrt{x} \Leftarrow g'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \end{array}}$ . . . . $2\sqrt{x}(\ln x - 2) + c$

4. $\displaystyle\int x\sin x\,dx$ . . . . $\boxed{\begin{array}{c} f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1 \\ g(x) = -\cos x \Leftarrow g'(x) = \sin x \end{array}}$ . . . . $-x\cos x + \sin x + c$

5. $\displaystyle\int x\ln x\,dx$ . . . . $\boxed{\begin{array}{c} f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = 1/x \\ g(x) = x^2/2 \Leftarrow g'(x) = x \end{array}}$ . . . . $\dfrac{x^2}{2}\ln x - \dfrac{1}{4}x^2 + c$

6. $\displaystyle\int x^2\cos x\,dx$ . . . . . . $\boxed{\begin{array}{c} f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x \\ g(x) = \sin x \Leftarrow g'(x) = \cos x \end{array}}$ . . . . . . $x^2\sin x - 2[-x\cos x + \sin x] + c$

7. $\displaystyle\int \frac{\ln(\ln x)}{x}\,dx$ . . . . $\boxed{\begin{array}{c} f(x) = \ln(\ln x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x\ln x} \\ g(x) = \ln x \Leftarrow g'(x) = \frac{1}{x} \end{array}}$ . . . . $-(1-\ln(\ln x))\ln x + c$

8. $\displaystyle\int \frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ . . . . $\boxed{\begin{array}{c} f(x) = \arcsin x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ g(x) = -\sqrt{1-x^2} \Leftarrow g'(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \end{array}}$ . . . $-\sqrt{1-x^2}\cdot\arcsin x + x + c$

9. $\displaystyle\int \frac{\sin x}{\cos^3 x}e^{\tan x}\,dx$ . . . . $\boxed{\begin{array}{c} f(x) = {}^{\sin x}/_{\cos x} \Rightarrow f'(x) = {}^{1}/_{\cos^2 x} \\ g(x) = e^{\tan x} \Leftarrow g'(x) = {}^{e^{\tan x}}/_{x^2} \end{array}}$ . . . . $e^{\tan x}(\tan x - 1) + c$

10. $\displaystyle\int x^3\sin x^2\,dx$ . . . . . . $\boxed{\begin{array}{c} f(x) = \sin(x^2) \Rightarrow f'(x) = 2x\cos(x^2) \\ g(x) = {}^{x^4}/_4 \Leftarrow g'(x) = x^3 \end{array}}$ . . . . . $\dfrac{-x^2\cos(x^2) + \sin(x^2)}{2} + c$

11. $\displaystyle\int e^{2x}\sin(3x)\,dx$ . . . . . $\boxed{\begin{array}{c} f(x) = \sin(3x) \Rightarrow f'(x) = 3\cos(3x) \\ g(x) = e^{2x}/2 \Leftarrow g'(x) = e^{2x} \end{array}}$ . . . . . $\frac{2e^{2x}(\sin(3x) - \frac{3}{2}\cos(3x))}{13} + c$

12. $\int e^{-3x}\cos(2x)\,dx$ $\dots\dots$ $\boxed{\begin{array}{l} f(x)=\cos(2x)\Rightarrow f'(x)=-2\sin(2x) \\ g(x)=\frac{-e^{-3x}}{3}\Leftarrow g'(x)=e^{-3x} \end{array}}$
$\dots\dots$ $-\dfrac{3e^{-3x}(\cos(2x)-\frac{2}{3}\sin(2x))}{13}+c$

13. $\int x^3\ln x\,dx$ $\dots\dots$ $\boxed{\begin{array}{l} f(x)=\ln x\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{x} \\ g(x)=\frac{x^4}{4}\Leftarrow g'(x)=x^3 \end{array}}$ $\dots\dots$ $\dfrac{x^4(4\ln x-1)}{16}+c$

14. $\int \dfrac{\ln x}{\sqrt[4]{x}}\,dx$ $\dots\dots$ $\boxed{\begin{array}{l} f(x)=\ln x\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{x} \\ g(x)=\frac{4x^{3/4}}{3}\Leftarrow g'(x)=\frac{1}{\sqrt[4]{x}} \end{array}}$ $\dots\dots$ $\dfrac{4}{3}x^{3/4}\left(\ln x-\dfrac{4}{3}\right)+c$

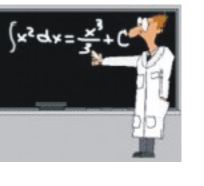
15. $\int \ln^2 x\,dx$ $\dots\dots$ $\boxed{\begin{array}{l} f(x)=\ln x\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{x} \\ g(x)=x\ln x-x\Leftarrow g'(x)=\ln x \end{array}}$ $\dots\dots$ $x(\ln^2 x-2\ln x+2)+c$

16. $\int x\sin^2 x\,dx$ $\dots\dots$ $\boxed{\begin{array}{l} f(x)=\sin^2 x\Rightarrow f'(x)=2\sin x\cos x=\sin(2x) \\ g(x)=\frac{x^2}{2}\Leftarrow g'(x)=x \end{array}}$
$\dots\dots$ $\dfrac{1}{4}(x^2-x\sin(2x)-\dfrac{1}{2}\cos(2x))+c$

Integrazione di funzioni razionali fratte:

1. $\int \dfrac{a}{x-b}\,dx$ $\dots\dots$ $a\ln|x-b|+c$
2. $\int \dfrac{a}{(x-b)^n}\,dx\,,\, n\neq 1$ $\dots\dots$ $\dfrac{a}{(1-n)(x-b)^{n-1}}+c$
3. $\int \dfrac{2x-1}{(x-1)(x-2)}\,dx$ $\dots\dots$ $\ln\left|\dfrac{(x-2)^3}{x-1}\right|+c$
4. $\int \frac{3x+1}{x^3-4x}\,dx$ $\dots\dots$ $\boxed{\frac{3x+1}{x^3-4x}=\frac{-1/4}{x}+\frac{-5/8}{x+2}+\frac{7/8}{x-2}}$ $\dots\dots$ $-\frac{\ln|x|}{4}-\frac{5\ln|x+2|}{8}+\frac{7\ln|x-2|}{4}+c$
5. $\int \frac{3x^2+2x-5}{3x^2-5x-2}\,dx$ $\dots\dots$ $\boxed{\frac{3x^2+2x-5}{3x^2-5x-2}=x+\frac{5}{3}+\frac{\frac{37}{3}x-\frac{5}{3}}{3x^2-5x-2}=x+\frac{5}{3}+\frac{1}{9}\left(\frac{52/7}{x+\frac{1}{3}}+\frac{207/7}{x-2}\right)}$
$\dots\dots$ $\frac{x^2}{2}+\frac{5}{3}+\frac{52}{63}\ln\left|x+\frac{1}{3}\right|+\frac{23}{7}\ln|x-2|+c$

Calcolo degli integrali definiti: precauzioni per l'uso



Si elencano qui alcune elementari (ma fondamentali) attenzioni da avere, e alcuni errori grossolani (ma frequenti) da evitare.

1. Per calcolare un integrale definito, si applica il Teorema fondamentale del calcolo integrale, quindi occorre comunque trovare una primitiva dell'integranda, preliminarmente. Nel far questo, talvolta si applica il metodo di sostituzione. A questo riguardo, tener presente che ci sono due diversi modi (corretti) di procedere:
   a) Mediante opportuna sostituzione, trasformare l'integrale definito in un altro integrale definito: in questo caso cambia l'integranda e cambiano anche gli estremi di integrazione, ad esempio:

$$\int_1^2 \frac{\log^2 x}{x}\,dx \;=$$

$$\begin{pmatrix} t := \log x \\ dt = \dfrac{1}{x}\, dx \\ \boxed{t \in [0, \log 2]} \end{pmatrix}$$

$$= \int_0^{\log 2} t^2\, dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{\log 2} = \frac{1}{3}\log^3 2$$

Errore tipico: eseguire la sostituzione nell'integranda ma lasciare inalterati gli estremi di integrazione.

b) Oppure, si può lasciare da parte momentaneamente l'integrale definito che si deve calcolare, e si comincia a cercare una primitiva dell'integranda. Ad esempio, dovendo calcolare

$$\int_1^2 \frac{\log^2 x}{x}\, dx$$

si incomincia a cercare la primitiva; per cercare la primitiva, si esegue un'opportuna sostituzione:

$$\int \frac{\log^2 x}{x}\, dx =$$

$$\begin{pmatrix} t := \log x \\ dt = \dfrac{1}{x}\, dx \end{pmatrix}$$

$$= \int t^2\, dt = \frac{t^3}{3} + c = \frac{\log^3 x}{3} + c$$

Osservare che, una volta trovata la primitiva rispetto alla nuova variabile t, occorre ritornare alla variabile originaria x. A questo punto si calcola l'integrale definito sostituendo gli estremi di partenza nella primitiva trovata:

$$\int_1^2 \frac{\log^2 x}{x}\, dx = \left[\frac{\log^3 x}{3}\right]_1^2 = \frac{1}{3}\log^3 2.$$

2. Dovendo calcolare un integrale definito, è bene chiedersi sempre se il risultato numerico trovato è "ragionevole", almeno dal punto di vista del segno. Ad esempio, per ogni a,

a) per ogni funzione pari si ha

$$\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 2\int_0^a f(x)\, dx$$

b) per ogni funzione dispari si ha

$$\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 0$$

c) per ogni funzione periodica di periodo T si ha

$$\int_a^{a+T} f(x)\, dx = \int_0^T f(x)\, dx$$

d) se la funzione integranda è sempre positiva (negativa) sull'intervallo di integrazione, anche l'integrale definito (avente come estremo inferiore l'estremo sinistro dell'intervallo) sarà positivo (negativo): un risultato diverso indica che si è commesso un errore;

e) se l'integrale risulta valere 0 è bene rifletterci sopra (difficilmente ciò avviene "per caso"): la funzione presenta, sull'intervallo di integrazione, qualche simmetria tale da giustificare l'annullamento dell'integrale? (E allora era meglio osservarlo subito e non fare calcoli inutili!). O non si è forse commesso qualche errore? (spesso un errore di segno che porta a cancellare termini che invece si sommano).

APPENDICE E

Calcolo combinatorio e probabilità

1 Consideriamo gli insiemi $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{a, b, c\}$; quante sono le funzioni di A in B? $\boxed{3^4}$

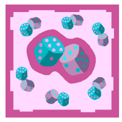
2 A un concorso di bellezza con 4 posti partecipano 12 concorrenti. Quante sono le possibili graduatorie di vincitori? $\boxed{11\,880}$

3 In quanti modi si possono colorare 10 caselle allineate avendo a disposizione 4 colori diversi (senza il vincolo di doverli utilizzare tutti), se si vuole che due caselle consecutive abbiano sempre colori diversi? $\boxed{78\,732}$

4 Si lanciano simultaneamente 3 dadi e si sommano i punti che appaiono sulle loro facce superiori. Quanti sono i diversi valori possibili per tale somma? $\boxed{16}$

5 18 persone partecipano ad una corsa e soltanto ai primi 3 verrà data una medaglia (oro, argento o bronzo). In quanti modi diversi possono essere assegnate le tre medaglie? $\boxed{4\,896}$

6 18 squadre partecipano al campionato di calcio di serie B e soltanto le prime 3 saranno promosse in serie A. Quante sono le possibili terne di squadre promosse in serie A? $\boxed{\frac{4\,896}{6}}$



7 In quanti modi diversi 4 persone possono occupare 4 di 5 posti numerati $\boxed{120}$

8 In quanti modi si possono coprire 3 teste con 5 cappelli $\boxed{60}$

9 6 giocatori di tennis quanti incontri singolari possono organizzare? $\boxed{15}$

10 Con i 7 colori dell'iride quanti gruppi di 3 colori si possono formare? $\boxed{35}$

11 Quanti ambi si possono formare con i 90 numeri del lotto? $\boxed{4\,005}$

12 Quanti prodotti diversi di 5 fattori ciascuno si possono formare con 10 numeri diversi da 0? $\boxed{252}$

13 Quante squadre di calcio può formare un allenatore utilizzando gli undici giocatori in tutti i ruoli?

$\boxed{11!}$

14 In quanti modi diversi 4 persone possono occupare 4 posti numerati?

$\boxed{24}$

15 Determinare il numero dei punti di intersezione di tutte le diagonali di un poligono di n lati, esclusi i vertici del poligono. (In ogni punto si tagliano due diagonali che impegnano 4 vertici distinti.)

$\boxed{\binom{n}{4}}$

16 Dati 10 punti distinti del piano, a tre a tre non allineati, quante sono le rette del piano che si ottengono congiungendoli a due a due?

$\boxed{45}$

17 A una gara dei 100 m piano partecipano 6 concorrenti. Quanti ordini di arrivo sono possibili?

$\boxed{720}$

18 Quante sono le applicazioni non decrescenti dell'insieme $\{1, 2, \ldots 7\}$ nell'insieme $\{1, 2, \ldots 5\}$?

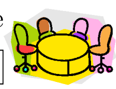
$\boxed{\sum_{k=1}^{5}\binom{5}{k}\binom{6}{7-k}}$

19 Quante coppie non ordinate si possono formare utilizzando n diversi simboli (eventualmente ripetuti)?

$\boxed{\frac{(n^2+n)}{2}}$

20 Vi sono 12 persone sedute ad un tavolo circolare. In quanti diversi modi si possono scegliere 3 persone fra queste, se si vuole che, fra quelle scelte, non ve ne siano due adiacenti?

$\boxed{112}$



21 Quante sono le possibili estrazioni del lotto nelle quali, su 10 ruote, compare almeno un numero inferiore a 10?

$\boxed{\binom{90}{5}^{10} - \binom{81}{5}^{10}}$

22 In un gruppo di 15 professori, 10 insegnano chimica e 5 matematica. Utilizzando tali professori, quante diverse commissioni d'esame di 3 membri ciascuna si possono formare, se i vuole che in ogni commissione sia presente almeno un professore per ogni disciplina?

$\boxed{325}$

23 Il signor Luca si vanta con gli amici di essere un intenditore di vini e di saperli riconoscere all'assaggio. Gli amici che, conoscendolo, non gli credono, decidono di metterlo alla prova: prendono quattro bottiglie di quattro vini diversi, scrivono su un foglio i nomi dei quattri vini e lo sfidano ad associare ad ogni bottiglis il nome corrispondente. Poiché Luca non è affatto un intenditore può soltato scrivere i quattro nomi a casaccio. Quale probabilità ha di indovinare il nome di almeno due vini?

$\boxed{29\%}$

24 Devo cambiare le 4 pile del telecomando e ne ho comprate 4 nuove. Sfortunatamente, dopo che ho tolto le vecchie, tutte le pile cadono per terra e non sono più in grado di distinguere le vecchie dalle nuove. Scegliendo a caso 4 pile tra le 8 cadute in terra, qual è la probabilità che scelga proprio tutte quelle nuove?

$\boxed{\frac{1}{70}}$

25 Il gioco del lotto è formato da 90 palline, indistinguibili al tatto, ognuna delle quali contiene un numero da 1 a 90. Ogni settimana vengono estratte 5 palline, e quindi 5 numeri diversi, che poi vengono rimesse nell'urna per l'estrazione della settimana successiva. Un quotidiano pubblica l'informazione che il numero 13 non esce da ben 73 settimane, mentre il numero 17 è uscito la settimana precedente. Qual è la probabilità che esca il 13 alla successiva estrazione? E che esca il 17?

La probabilità di uscita è uguale per entrambi i numeri: $\frac{2\,441\,626}{43\,949\,268} \approx 5.6\%$

26 Due scatole contengono in tutto 20 palline, alcune bianche e altre nere. La prima ne contiene più della seconda. Se si estrae a caso una pallina da una qualsiasi delle due scatole si hanno sempre, per ogni probabilità che essa sia bianca, quattro probabilità che sia invece nera. Quante palline, e di quale colore, contiene ciascuna scatola?

Prima scatola: 3 bianche e 12 nere; seconda scatola: 1 bianca e 4 nere.

27 Qual è la probabilità che, nel lancio di un dado, esca un numero maggiore di 4? E che non esca un numero maggiore di 4?

$\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{3}$

28 Qual è la probabilità che ricevendo 3 carte da un mazzo di carte napoletane (40 carte) si riceva almeno una figura?

$1 - \frac{3\,276}{9\,880}$

29 Qual è la probabilità che, nel lancio di un dado, esca un numero pari o un numero maggiore di 4?

$\frac{2}{3}$

30 Qual è la probabilità che da un mazzo di 52 carte da poker venga estratto un asso?

$\frac{1}{13}$

31 Qual è la probabilità che da un mazzo di 52 carte da poker venga estratta una carta di picche?

$\frac{1}{4}$

32 Qual è la probabilità che da un'urna contenente 10 palline bianche e 5 rosse venga estratta una pallina bianca?

$\frac{2}{3}$

33 Qual è la probabilità che lanciando un dado si ottenga almeno 5?

$\frac{1}{3}$

34 Qual è la probabilità che lanciando contemporaneamente due dadi la somma sia 11?

$\frac{1}{18}$

35 Qual è la probabilità che lanciando contemporaneamente due dadi la somma sia 6?

$\frac{5}{36}$

36 Un'urna contiene 30 palline di cui 10 bianche e 8 rosse. Qual è la probabilità che estraendo una pallina non sia né bianca né rossa?

$\frac{2}{5}$

37 Qual è la probabilità che, estraendo un numero dal sacchetto della tombola (90 gettoni numerati da 1 a 90),

1. esca un multiplo di 25?
2. esca un multiplo di 15?

3. esca un multiplo di 18?
4. esca un multiplo di 25 o di 15?
5. esca un multiplo di 25 e di 18?

1: $\frac{3}{90}$, 2: $\frac{6}{90}$, 3: $\frac{5}{90}$, 4: $\frac{8}{90}$, 5: 0

38 Consideriamo un'urna contenente 5 palline, 2 bianche e 3 nere. Estraiamo due palline secondo le due diverse modalità sotto descritte.

1. Estrazione con reimmissione: le palline, una volta estratte, vengono reimmesse.
   a) Qual è la probabilità che entrambe le palline estratte siano bianche?
   b) Qual è la probabilità che entrambe le palline estratte siano nere?
   c) Qual è la probabilità che le palline estratte siano di diverso colore?

1a: $\frac{4}{25}$, 1b: $\frac{9}{25}$, 1c: $\frac{12}{25}$

2. Estrazione senza reimmissione: le palline, una volta estratte, non vengono reimmesse.
   a) Qual è la probabilità che entrambe le palline estratte siano bianche?
   b) Qual è la probabilità che entrambe le palline estratte siano nere?
   c) Qual è la probabilità che le palline estratte siano di diverso colore?

2a: $\frac{2}{20}$, 2b: $\frac{6}{20}$, 2c: $\frac{12}{20}$

39 In un'urna vi sono 4 palline uguali a parte il colore. Di esse 3 sono bianche e una è nera.

1. Si estrae la prima pallina: è bianca e non la si rimette nell'urna. Qual è la probabilità che la seconda pallina estratta sia bianca?
2. Si estrae la prima pallina e, senza vederne il colore, la si mette da parte senza rimetterla nell'urna. Qual è la probabilità che la seconda pallina estratta sia bianca?

1: $\frac{2}{3}$, 2: $\frac{3}{4}$

40 In un'urna ci sono 6 palline di cui 2 nere e 4 bianche. Calcolare la probabilità che estraendo due palline si verifichino i seguenti eventi:

1. vengano estratte contemporaneamente due palline bianche; $\frac{2}{5}$
2. venga estratta una pallina alla volta (bianca) ma la prima non viene rimessa nell'urna; $\frac{2}{5}$
3. venga estratta una pallina alla volta (bianca) ma la prima viene rimessa nell'urna; $\frac{4}{9}$
4. vengono estratte due palline dello stesso colore contemporaneamente; $\frac{7}{15}$
5. vengono estratte due palline dello stesso colore ma la prima non viene rimessa nell'urna; $\frac{7}{15}$
6. vengono estratte due palline dello stesso colore ma la prima viene rimessa nell'urna; $\frac{5}{9}$

41 Compilando in modo del tutto casuale la schedina del Totocalcio, qual è il numero di pronostici che è più probabile azzeccare? 4

42 Un test a risposte multiple consiste di 10 domande, per ciascuna delle quali si può scegliere tra tre risposte possibili, di cui una e una sola esatta. Qual è la probabilità che, rispondendo completamente a caso, uno studente risponda esattamente a tutte dieci le domande? $\frac{1}{3^{10}}$

43 Un test a risposte multiple consiste di 10 domande, per ciascuna delle quali sono fornite 4 risposte, di cui una e una sola esatta. Per superare il test è necessario rispondere correttamente ad almeno 7 domande. Qual è la probabilità di superare il test rispondendo completamente a caso?

$$\boxed{4^{-10}\left(\binom{10}{7}3^3+\binom{10}{8}3^2+31\right)}$$

APPENDICE F

Esercizi vari

(ma soprattutto di BUON SENSO)

N.B. Gli esercizi sono di difficoltà molto varia (a volte superiore rispetto a quella presente nei temi d'esame) e sono esposti in ordine casuale.

1 Un vaso della capacità di 30 litri è pieno di vino e un altro della capacità di 20 litri è pieno di acqua. Prelevando da ciascun recipiente uno stesso numero di litri di liquido e versandoli nell'altro vaso, si vogliono ottenere due miscugli uguali. Quanti litri si devono travasare?

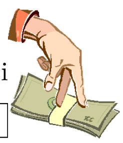
12 litri

2 Per organizzare una gita collettiva vengono affittati due pulmini dello stesso modello, per i quali ciascun partecipante deve pagare 12 euro. Sui pulmini restano in tutto 4 posti liberi. Se fossero stati occupati anch'essi, ogni partecipante avrebbe risparmiato 1,50 euro. Quanti posti vi sono su ogni pulmino?

16

3 Antonio, Beatrice, Claudio e Donatella si dividono una vincita al Lotto in modo che Beatrice ha il doppio di Antonio, Claudio il doppio di Beatrice e Donatella il triplo di Antonio. Poiché la vincita è stata di 400 euro, quanto ha vinto ciascuno?

Antonio 40, Beatrice 80, Claudio 160 e Donatella 120

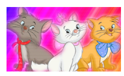


4 Un titolo in borsa perde ogni mese l'1% del suo valore. Se ora vale 0,1 euro, tra quanti mesi varrà meno di 0,095 euro?

6 mesi

5 4 mucche nere e 3 mucche bianche producono in 5 giorni altrettanto latte quanto 3 mucche nere e 5 mucche bianche ne producono in 4 giorni. Quale delle due razze, le mucche nere o le bianche, produce la maggior quantità di latte?

Bianche



6 «Visto che i miei gatti ti piacciono tanto — dice un giorno il signor Luigi a un amico che li ammira — te ne regalerò un terzo di quanti ne posseggo più un terzo di gatto. Per me ne terrò uno.» Quanti gatti possiede il signor Luigi?

2

7 Alfio e Toni sono gli unici proprietari di una mandria di vitelli. Dato che Alfio ne possiede solo i 3/7 e vuole mettersi alla pari, acquista da Toni 4 capi. Quanti vitelli ha la mandria?

56

8 La somma dei quattro termini di una proporzione $A : B = C : D$ è 544 e ciascun termine è i 3/5 del precedente. Qual'è la proporzione?

$\boxed{250 : 150 = 90 : 54}$

9 Apportando una modifica ad un impianto industriale, in un processo industriale, è possibile ridurre le spese di produzione del 50%; una diversa modifica le può ridurre del 40%, mentre una terza modifica consente una riduzione del 10%. Di quale percentuale sarebbero ridotte le spese di produzione se introducessimo simultaneamente le 3 modifiche, che sono fra loro indipendenti?

$\boxed{73\%}$

10 Nei rami di un tubo a U sono posti due liquidi caratterizzati da diverse densità. Il liquido del primo ramo raggiunge 50 centimetri d'altezza rispetto al livello del contatto tra i due liquidi, quello nel secondo si ferma a 45 centimetri. Poiché il primo liquido ha une densità di 1,08 g/cm^3, qual è la densità del secondo?

$\boxed{1{,}20 \text{ g/cm}^3}$

11 Il rumore d'un colpo d'arma da fuoco, esploso a una distanza di 3 400 metri, viene registrato due volte da un apparecchio con un intervallo di 0,32 secondi, poiché la prima volta esso arriva attraverso una conduttura d'acciaio e la seconda attraverso l'aria. Poiché nell'aria il suono si propaga alla velocità di 340 metri al secondo, a quale velocità si propaga nell'acciaio?

$\boxed{5\,000 \text{ metri al secondo}}$

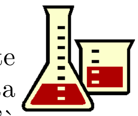
12 Due soci guadagnano in un certo mese 6 000 euro. Il mese successivo il primo socio guadagna 300 euro in meno ma l'altro raddoppia il suo guadagno. Se il guadagno complessivo in quest'ultimo mese è aumentato del 15%, quanto è stato il guadagno di ognuno dei due soci nel mese precedente?

$\boxed{1\,800;\ 4\,200\,000}$

13 Ad una cisterna sono collegate due pompe A e B. Ognuna di esse può aspirare o immettere acqua. Si hanno queste informazioni: se la pompa A immette acqua per tre ore e la B la immette per 6 ore, nella cisterna l'acqua cresce di 960 litri; se la pompa A aspira per 7 ore e 12 minuti e B immette acqua per 5 ore e mezza, nella cisterna l'acqua cresce di 84 litri. Qual è la portata delle due pompe?

$\boxed{\text{A } 80, \text{ B } 120}$

14 Un recipiente contiene 10 litri di acido cloridrico. Parte dell'acido è stata tolta e nel recipiente è stata messa una pari quantità d'acqua. Poi, une uguale quantità di questa miscela è stata nuovamente tolta e successivamente reintegrata con acqua. Nella miscela così ottenuta c'è una soluzione di acido loridrico al 64%. Quanti litri sono stati tolti ogni volta?



$\boxed{2}$

15 A 6 litri di una soluzione al 5% aggiungi una certa quantità di solvente fino a portare la concentrazione al 3%. Quanto solvente ho aggiunto?

$\boxed{4 \text{ litri di solvente}}$

16 Un tizio ha pescato alcuni pesci. Dà i tre più grandi al suo cane, riducendo il peso totale della sua pesca del 35%. Dà poi i tre pesci più piccoli al suo gatto, riducendo il peso totale rimanente di $\frac{5}{13}$. Quanti pesci ha pescato quel tizio?

$\boxed{10}$

17 Due persone percorrono la stessa strada nella medesima direzione facendo uno 3 e l'altro 4 metri al secondo. Quest'ultimo insegue il primo, partito con un vantaggio di 150 metri e 52 secondi prima. Dopo quanto tempo lo raggiungerà?

$\boxed{\text{Dopo 5 minuti e 6 secondi}}$

18 Un treno attraversa un ponte lungo 200 metri alla velocità di 72 Km/h. Il rumore, sopra il ponte, dura 30 secondi. Quanto è lungo il treno?

400 metri

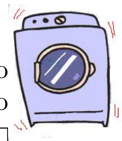
19 In una sequenza di numeri razionali positivi, ogni termine esclusi i primi due è la somma di tutti quelli che lo precedono. L'undicesimo termine della sequenza è 1000 e il primo è 1. Qual è il secondo termine?

93/32

20 In un dato istante, l'84% del corpo di un cammello è costituito da acqua. Successivamente il cammello beve; dopo che ha bevuto il suo corpo pesa 800 Kg e l'acqua concorre a fornire l'85% del suo peso. Quanto pesava il cammello in quell'istante?

750 Kg

21 Nella fase di lavaggio di una lavatrice vengono immessi 96 g di detersivo. Ad ogni risciacquo viene eliminato il 96% del detersivo. Quanti risciacqui sono necessari affinché rimanga meno di 0,1g di detersivo?

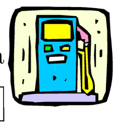


3 risciacqui

22 Oggi peso 80 Kg e decido di dimagrire. La mia dieta mi permette di perdere il 5% del peso ogni settimana. Dopo quante settimane avrò raggiunto i 70 Kg?

3 settimane

23 Se il costo della benzina aumentasse ogni settimana dell'1% ed oggi costa 1 euro al litro, tra quante settimane costerà 1,1 euro al litro?



10 settimane

24 Ho una coltura batterica. All'inizio ci sono 1000 batteri. Il numero di batteri raddoppia ogni 3 ore. Dopo 48 ore:

1. quanti batteri ci sono?
2. dopo quante ore il numero di batteri è pari a un quarto di quello dopo 48 ore?

65 536 batteri; 14 ore

25 Una colonia di batteri raddoppia ogni 9 giorni. Se dopo 9 settimane abbiamo 12 milioni di batteri, quanti ne avevamo all'inizio?

93 750 batteri

26 Oggi deposito in banca 1 euro. Ogni anno la banca mi dà un interesse composto del 4%, ossia il secondo anno mi dà il 4% di $(1 + 4\%)$ euro. (I) Dopo 50 anni quanti euro avrò? (II) Se lascio i soldi per un tempo infinito quanti euro avrò?

(I) 2,69 euro (II) e

27 Il signor Bianchi vorrebbe smettere di fumare e fa un po' il bilancio del suo vizio. Si accorge che per i primi 2/7 della sua vita non ha fumato, poi ha fumato sigarette per 24 anni e infine la pipa per 1/3 della sua vita. Quanti anni ha il signor Bianchi?

63 anni

28 Un palla particolarmente elastica dopo ogni rimbalzo raggiunge i 3/4 dell'altezza precedente. Essa viene lasciata cadere da una finestra e, dopo 4 rimbalzi, raggiunge 81 cm. Da quale altezza è caduta?

2,56 metri

29 Un bidone cilindrico di 40 cm di diametro ha una capacità di 160 litri. Quale capacità avrebbe un bidone della stessa altezza ma con diametro di 60 cm?

360 litri

30 Su un rettilineo autostradale, una automobile lunga 3,8 m supera un furgoncino di 6,2 m che procede a 90 Km/h. Dal momento dell'inizio del sorpasso alla sua conclusione trascorrono 10 secondi. Qual è la velocità dell'automobile?

93,6 Km/h

31 In un giardino pubblico, per lastricare un viale lungo 84 metri sono impegnati tre operai. Il primo ne esegue 5 metri ogni 3 giorni, il secondo 7 metri ogni 4 giorni e il terzo 11 metri ogni 6 giorni. Dopo quanto tempo sarà completato il lavoro?

Dopo 16 giorni

32 Lisa si accorge che 10 000 euro investiti 5 anni fa sono diventati 15 000. Quanto hanno reso mediamente all'anno?

8,44%

33 Procedendo su una pista circolare, un'automobile percorre, in tre minuti e mezzo, un angolo di 21°14'. Quale angolo percorre, a uguale velocità, in due minuti e mezzo?

Un angolo di 15°10'

34 A 500 ml di una soluzione di H_2SO_4 (tetraossosolfato) al 20% p/p vengono addizionati 200 ml di una soluzione dello stesso acido al 90% p/p. Si ottiene una soluzione al ...%.

40% p/p

35 Calcolare quanti ml di acqua occorre aggiungere a 150 ml di una soluzione acquosa di H_3PO_4 (tetraossofosfato) al 6% p/p per ottenere una soluzione al 4% p/p.

75 ml

36 Tra una superficie di mezzo metro al quadrato e una equivalente alla metà di un metro quadrato, qual'è quella più ampia?

metà di un metro quadrato

37 x e y misurano in passi la distanza tra le loro abitazioni. Il passo di x è di 72 cm, quello di y è più lungo del 25%. Alla fine x ha fatto 90 passi in più di y. Qual'è la distanza fra le due case?

32 400 cm

38 Il proprietario di una grande industria compra un nuovo macchinario che lavora per un tempo del 10% superiore al precedente ma con un'efficienza inferiore del 10%. È stato un buon investimento?

No poiché i risultati sono pari al 99%

39 Due amici entrano in una casa da gioco, acquistano un certo numero di gettoni e se li dividono in parti uguali. Al termine della serata uno dei due ha perso la metà della sua dotazione iniziale, ma l'altro lo rassicura: << I tuoi gettoni rappresentano esattamente la nostra vincita>>. Quanto aveva inizialmente ciascuno dei due giocatori, se alla fine hanno in tutto 75 gettoni?

30 gettoni

40 Quando una vasca è riempita tranne che per il 30% contiene 30 litri più di quando è riempita solo al 30%. Quanti litri contiene la vasca quando è piena?

75 litri

41 Quando viene congelata, l'acqua aumenta di 1/11 il proprio volume. Di quanto diminuisce il volume del ghiaccio quando, fondendo, ritorna acqua?

1/12

42 Un tizio impiega 90 secondi per portarsi al sesto piano di un grande magazzino salendo a piedi i gradini di una scala mobile quando questa non è in funzione; ne impiega invece 60 quando la scala è in funzione, ma si lascia trasportare senza muoversi (rispetto ad essa). Quanti secondi impiega se la scala è in funzione e contemporaneamente egli ne sale i gradini?

[36]

43 16 cioccolatini (uguali) costano tanti euro quanti sono i cioccolatini che si riescono a comprare con un euro. Quanto costa un cioccolatino?

[25 centesimi]

44 Ho 11 scatole grandi: alcune di esse contengono 8 scatole medie ciascuna, alcune delle scatole medie contengono a loro volta 8 scatole piccole ciascuna. Se le scatole vuote (di varia dimensione) sono 102, quante sono in totale le scatole (a prescindere dalla dimensione)?

[115]

45 Un oggetto di lega oro-argento pesa 350 grammi. Immerso nell'acqua "perde" (apparentemente) 20 grammi. Poiché il peso specifico dell'oro è 19,5 e quello dell'argento 10,5, di quanti grammi di ciascuno è costituito l'oggetto?

[312 grammi d'oro e 42 grammi d'argento]

46 Per far ridipingere i muri delle scale di un palazzo due ditte A e B chiedono le seguenti forme di compenso:

ditta A: vuole 5 000 euro più 5 euro al mq;

ditta B: vuole 15 000 euro.

In quali casi conviene ingaggiare la ditta A, in quali la ditta B e quando è indifferente scegliere l'una o l'altra?

[A se si hanno meno di 2 000 mq, B se si hanno più di 2 000 mq, indifferenti se si hanno 2 000 mq]

47 Per fare un trasloco due ditte A e B chiedono i seguenti compensi:

ditta A: vuole 10 euro al chilometro più 300 euro di spese fisse;

ditta B: vuole 15 euro al chilometro.

In quali casi conviene far fare il trasloco alla ditta A, in quali alla ditta B e quando è indifferente scegliere l'una o l'altra?

[B per meno di 60 Km, A per più di 60 Km, indifferenti per 60 Km]

48 Per un lavoro di venditore di enciclopedie si ha la possibilità di scegliere tra due forme di contratto:

I: vengono dati 800 euro mensili ed altri 120 per ogni enciclopedia venduta;

II: vengono dati 2 240 euro al mese indipendentemente dal numero di enciclopedie vendute.

In quali casi conviene il primo contratto, in quali casi il secondo e quando sono indifferenti?

[II per meno di 12 enciclopedie, I per più di 12 enciclopedie, indifferenti per 12 enciclopedie]

49 

Un treno viaggia alla velocità costante di 70 Km/h verso nord e passa all'istante $t = 0$ alla stazione A. La sua legge del moto (che esprime a che distanza s sarà da A dopo t ore) è quindi $s = 70t$. Un altro treno viaggia alla velocità costante di 80 Km/h verso sud e passa all'istante $t = 0$ alla stazione B (che si trova a 30 Km a nord di A). La sua legge del moto è perciò $s = -80t + 30$. Se la ferrovia tra A e B è a binario unico, dopo quanto tempo e a quale distanza da A i due treni si scontreranno?

[Dopo 20 minuti a 14 Km da A]

50 In una città vi sono tre discoteche: per la discoteca A si spendono 10 euro per la tessera mensile più 4 euro per ogni ingresso; nella discoteca B, invece, la tessera mensile costa 26,50 euro ma non si paga il biglietto di ingresso; la discoteca C, infine, non fa pagare la tessera mensile ma ogni volta il biglietto di ingresso costa 6 euro. Quale delle tre discoteche è la più conveniente se si decide di recarvisi non più di una volta a settimana?

C

51 L'alfabeto di uno strano popolo è formato dalle sei lettere A,B,E,L,R,S prese in questo ordine. Le parole del loro linguaggio sono esattamente le sequenze, ordinate alfabeticamente, di queste sei lettere, dove ogni lettera viene utilizzata una e una sola volta. Qual è la parola che si trova nella 537-ma posizione del loro dizionario?

REBLAS

52 Cinque persone salgono a coppie su una bilancia in tutte le combinazioni possibili. I pesi letti sono (in Kg): 90, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 100, 101. Qual è la somma dei pesi delle cinque persone?

239 Kg

53 Determinare la somma di numeratore e denominatore, quando la frazione sia ridotta ai minimi termini, del risultato della seguente espressione

$$\prod_{n=2}^{n=2003}\left(1-\frac{1}{n^2}\right).$$

$\frac{1\,002}{2\,003}$

54 Per ogni numero intero positivo n si calcoli la somma delle sue cifre (in rappresentazione decimale), poi la somma delle cifre del numero ottenuto e così via, fino ad ottenere un numero di una sola cifra che viene denotato con $w(n)$. Quanto vale $w\left(2001^{2001}\right)$?

6

55 Quanto vale il termine indipendente da x nello sviluppo delle potenza $(x^5 - x^{-3})^8$?

-56

56 Assumiamo che la terra sia perfettamente sferica e che la lunghezza dell'equatore sia di 40.000 Km. Qual è la lunghezza, arrotondata alle centinaia di Km, dei due paralleli che si trovano a 60° di latitudine?

20 000 Km

57 Chiaramente 2003! è divisibile per 2002. Qual è il massimo valore intero di k tale che 2002^k divida 2003! ? E il massimo valore intero di n tale che 2003^n divida 2004! ?

$k = 165$, $n = 1$

58 Quanti numeri compresi fra 1 e 10^{2003} hanno la somma delle cifre uguale a 2?

2 007 006

59 Quante sono le coppie (non ordinate) di numeri interi compresi fra 1 e 1000 la somma dei cui quadrati sia divisibile per 49?

10.153

60 In rappresentazione decimale, qual è la cifra delle unità del numero

$$1999^{2000} + 2000^{2001} + 2001^{2002} + 2002^{2003}\ ?$$

8

61 Si consideri la successione $\{\,1, 4, 9, 16, \dots\,\}$ dei quadrati dei numeri naturali. Il numero 10^8 è un termine di questa successione. Qual è il termine successivo?

$10\,001^2$

62 In un magazzino di un complesso sportivo numerose palle da tennis sono disposte in modo da formare una piramide. Questa piramide ha una base quadrata, di cui ogni lato misura ben 15 palle. Quante sono le palle da tennis?

1 240 palle

63 Le pagine della tesina di uno studente universitario sono tutte numerate. Se la somma di tutti numeri è 2 145, qual è il numero dell'ultima pagina?

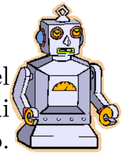
65

64 Un quadrato è suddiviso in 16 quadrati di uguale lato che possono essere colorati ciascuno di un colore scelto fra 4 possibili. In quanti diversi modi si può effettuare la colorazione, se in ogni riga e in ogni colonna non possono esserci due quadrati dello stesso colore?

864

65 Quanti numeri interi di 4 cifre significative sono tali che la somma delle ultime due cifre e del numero formato dalle prime due coincida con il numero formato dalle ultime due cifre? (Un numero che soddisfa la condizione descritta è, ad esempio, 6370: infatti $7 + 0 + 63 = 70$.)

80



66 Assegnato un numero reale x qualunque, un robot ha le sole possibilità di trasformarlo nel numero $x + 3$ o nel numero $x - 2$ o nel numero $1/x$ o nel numero x^2. Gli è concesso di eseguire la trasformazione per 3 volte consecutive, con piena libertà di scelta ad ogni passo. Inizialmente gli viene assegnato il numero 1,99. Qual è il massimo risultato che il robot può ottenere?

10 000

67 Con quanti zeri termina la rappresentazione decimale del prodotto dei primi 2 003 numeri primi?

1

68 Paolo e Filippo sparano contro un bersaglio formato da quattro settori circolari concentrici, nei quali i punti, dall'interno verso l'esterno, sono 28-16-8-4. Dopo aver effettuato cinque tiri ognuno, essi totalizzano entrambi 64 punti, ma Paolo si considera il vincitore perché ha colpito il centro, mentre Filippo non vi è riuscito. Quale punteggio ha ottenuto ciascuno in ogni tiro?

Paolo ha ottenuto 28, 16, 8, 8, 4 punti; Filippo 16, 16, 16, 8, 8

69 Quante sono le soluzioni in interi della disequazione $|x| + |y| \leqslant 1000$? (N.B. Ogni soluzione è una coppia ordinata (x, y).)

2 002 001

70 Calcolare $\dfrac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{6}} + \dfrac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{5}} + \dfrac{1}{\sqrt{5}+2}$.

$\sqrt{7} - 2$

71 Quanto vale $\dfrac{999\ldots999}{999\,999\,999} - 1$, dove a numeratore e denominatore della frazione vi sono rispettivamente i numeri formati da 18 cifre e da 9 cifre tutte uguali a 9?

10^9

Indice Analitico