

Solution numérique de l'équation de Grad-Shafranov : FEM versus BEM avec FreeFem++

Gloria Faccanoni

Contexte

On s'intéresse à la production d'énergie par fusion nucléaire. La fusion nucléaire est le processus par lequel des noyaux se rassemblent pour former un noyau plus lourd. Afin de surmonter la répulsion électrostatique entre les particules de même charge, et de forcer les noyaux de fusionner, il faut confiner le plasma.

Géométrie

Dans la configuration magnétique appelée *tokamak*, qui est celle retenue pour la future machine ITER, le plasma est confiné en forme d'anneau au moyen d'un champ magnétique toroïdal; la configuration axisymétrique permet de décrire le plasma sur une section poloidale bidimensionnelle : R est la coordonnée radiale, Z la coordonnée axiale et ϑ l'angle toroïdal (qu'on néglige).



Équation de Grad-Shafranov

L'équilibre magnétique dans un tokamak peut être modélisé par l'équation dite de Grad-Shafranov qui s'écrit

$$-\Delta^* \psi(R, Z) = f(R, \psi(R, Z)) \quad \text{dans } \Omega$$

où ψ est le flux magnétique poloidal, $f(R, \psi(R, Z)) = R\mu_0 J$ avec J la composante toroïdale de la densité de courant et Δ^* est l'opérateur de Grad-Shafranov défini par

$$\Delta^*(\cdot) \stackrel{\text{def}}{=} R \left(\nabla^2 - \frac{1}{R^2} \right) \left(\frac{\cdot}{R} \right) = \left(\frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{\partial^2}{\partial Z^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \right) (\cdot).$$

Cette équation aux dérivées partielles est complétée par la condition aux limites

$$\psi(R, Z) = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega.$$

Méthodes numériques

On considère deux méthodes pour approcher numériquement la solution de l'équation de Grad-Shafranov : la méthode des éléments finis et la méthode des éléments de frontière. Pour simplifier la présentation on considère f indépendante de ψ .

FEM (Finite Element Method)

1. Formulation faible.

On cherche $\psi \in H_0^1(\Omega)$ tel que, pour tout $\xi \in H_0^1(\Omega)$, l'on a

$$\iint_{\Omega} \nabla \psi(R, Z) \cdot \nabla \xi(R, Z) + \iint_{\Omega} \frac{1}{R} \frac{\partial \psi(R, Z)}{\partial R} \xi(R, Z) = \iint_{\Omega} f(R) \xi(R, Z).$$

2. Approximation de Galerkin.

Soit $V \subset H_0^1(\Omega)$ de dimension M finie et soit $\{\varphi_i\}_{i=1}^M$ une base de V . On cherche $\psi_h \in V$ tel que, pour tout $i = 1, \dots, M$, l'on ait

$$\iint_{\Omega} \nabla \psi_h(R, Z) \cdot \nabla \varphi_i(R, Z) + \iint_{\Omega} \frac{1}{R} \frac{\partial \psi_h(R, Z)}{\partial R} \varphi_i(R, Z) = \iint_{\Omega} f(R) \varphi_i(R, Z).$$

Si on décompose $\psi_h(R, Z) = \sum_{j=1}^M p_j \varphi_j(R, Z)$, il s'agit de trouver les M valeurs p_j telles que, pour tout $i = 1, \dots, M$, l'on ait

$$\sum_{j=1}^M p_j \left(\iint_{\Omega} \nabla \varphi_j(R, Z) \cdot \nabla \varphi_i(R, Z) + \iint_{\Omega} \frac{1}{R} \frac{\partial \varphi_j(R, Z)}{\partial R} \varphi_i(R, Z) \right) = \iint_{\Omega} f(R) \varphi_i(R, Z).$$

3. Mise en œuvre pratique : espace \mathbb{P}^1 .

On décompose le domaine en triangles $\Omega = \cup_j T_j$ et on note $\{(R_i, Z_i)\}_{i=1}^M$ un nœud de la triangulation. Si on choisit $V = \{v \in \mathcal{C}^0(\Omega) \mid v|_{T_j} \in \mathbb{P}^1, v|_{\partial\Omega} = 0\}$ et l'on considère comme base les fonctions $\{\varphi_i\}_{i=1}^M$ telles que $\varphi_i(R_j, Z_j) = \delta_{ij}$, la méthode consiste alors en la résolution du système linéaire $\mathbb{A}\mathbf{p} = \mathbf{b}$ où

$$a_{ij} = \iint_{\Omega} \nabla \varphi_j(R, Z) \cdot \nabla \varphi_i(R, Z) + \iint_{\Omega} \frac{1}{R} \frac{\partial \varphi_j(R, Z)}{\partial R} \varphi_i(R, Z) \quad \text{et} \quad b_i = \iint_{\Omega} f(R) \varphi_i(R, Z).$$

Comme le support de la fonction de base φ_i est constitué des seuls triangles qui ont en commun le sommet (R_i, Z_i) , la matrice \mathbb{A} est creuse ($a_{ij} \neq 0$ ssi (R_i, Z_i) et (R_j, Z_j) appartiennent aux mêmes triangles).

★ **FreeFem++**. Le logiciel FreeFem++ permet de calculer \mathbf{p} en quelques lignes : il suffit d'écrire le domaine et la formulation faible en indiquant l'espace V choisi, et le logiciel discrétise le domaine, assemble la matrice et résout le système sans que l'utilisateur ait à intervenir (si ce n'est pour préciser éventuellement le choix de telle ou telle méthode de résolution).

BEM (Boundary Element Method)

1. Formulation intégrale.

On cherche ψ dans $\bar{\Omega}$ et $q \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}}$ sur $\partial\Omega$ tels que

$$c(r, z) \psi(r, z) = \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\omega(R, Z, r, z)}{R} q(R, Z) \right) + \iint_{\Omega} \left(\frac{\omega(R, Z, r, z)}{R} f(R) \right)$$

où

$$c(r, z) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{1}_{\Omega}(r, z) + \frac{\text{angle interne}}{2\pi} \mathbb{1}_{\partial\Omega}(r, z)$$

et $\omega(R, Z, r, z)$ est la solution fondamentale, i.e. $-\Delta^* \omega(R, Z, r, z) = R \delta_{(r, z)}$ dans \mathbb{R}^2 :

$$\omega(R, Z, r, z) = \frac{rR}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos(t)}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2rR \cos(t) + (Z - z)^2}} dt.$$

2. Mise en œuvre pratique : éléments de bord constants.

On décompose le bord en N segments $\partial\Omega = \cup_{j=1}^N \Gamma_j$. Les valeurs de ψ et q sont supposées constantes dans chaque élément et égales à la valeur au milieu, noté (r_j, z_j) . La méthode est alors constituée des deux étapes suivantes :

① pour $(r, z) \in \partial\Omega$, on note (r_i, z_i) le milieu du segment $\Gamma_i \ni (r, z)$ et $q_i = q(r_i, z_i)$; comme $\psi(r, z) = 0$ on obtient l'équation

$$\sum_{j=1}^N q_j \int_{\Gamma_j} \left(\frac{\omega(R, Z, r, z)}{R} \right) = - \iint_{\Omega} \left(\frac{\omega(R, Z, r, z)}{R} f(R) \right);$$

on doit alors résoudre le système linéaire $\mathbb{A}\mathbf{q} = \mathbf{b}$ où

$$a_{ij} = \int_{\Gamma_j} \left(\frac{\omega(R, Z, r_i, z_i)}{R} \right) \quad \text{et} \quad b_i = - \iint_{\Omega} \left(\frac{\omega(R, Z, r_i, z_i)}{R} f(R) \right);$$

② pour $(r, z) \in \Omega$, on pose

$$\psi(r, z) = \sum_{j=1}^N q_j \int_{\Gamma_j} \left(\frac{\omega(R, Z, r, z)}{R} \right) + \iint_{\Omega} \left(\frac{\omega(R, Z, r, z)}{R} f(R) \right).$$

★ **FreeFem++**. On peut utiliser le logiciel FreeFem++ pour discrétiser le domaine, calculer les intégrales sur Ω et résoudre le système. En revanche, les éléments a_{ij} nécessitent de formules de quadrature plus précises.

Équilibre de Soloviev

Dans cet exemple, la solution numérique de l'équation de Grad-Shafranov est calculée avec FreeFem++ [1] lorsque le terme source (fonction de densité de courant) est supposé être un équilibre de Soloviev, autrement dit $f(R, \psi(R, Z)) = \alpha R^2 + \beta$ avec α et β deux constantes.

Exemple [2]

$$\triangleright \partial\Omega = \{ (R, Z) \mid R = \sqrt{1 + \cos \vartheta}, Z = \frac{\sin \vartheta}{2}, \vartheta \in [0 : 2\pi] \}$$

$$\triangleright f(R) = R^2 + 1$$

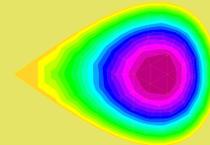
Triangulation

134 triangles



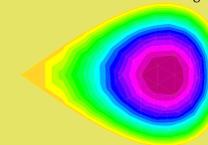
FEM- \mathbb{P}^1 [3]

$M = 83$



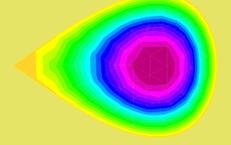
Exacte

$$\psi_{\text{exacte}}(R, Z) = \frac{1 - 4Z^2 - (R^2 - 1)^2}{8}$$



BEM

$N = 30$



Conclusion & Perspectives

FEM

- ▷ triangulation de tout le domaine 2D
- ▷ matrice creuse mais d'ordre $M \times M$
- ▷ intégrales simples à calculer numériquement
- ▷ ne nécessite aucune connaissance sur la solution
- ▷ calcul de la solution en tout point du domaine

BEM

- ▷ triangulation du bord 1D uniquement
- ▷ matrice pleine mais d'ordre $N \times N$
- ▷ intégrales délicates à calculer numériquement
- ▷ nécessite la connaissance de la solution fondamentale
- ▷ possibilité de calculer la solution seulement en un point

En toute généralité, l'équation de Grad-Shafranov est non linéaire à cause du courant f dépendant du flux ψ . Lorsque le terme source contenant le flux magnétique est non linéaire, il faut utiliser une procédure itérative :

$$-\Delta^* \psi^{(k+1)} = f(R, \psi^{(k)})$$

où k est le pas de l'itération et on s'arrête lorsque $\max_{\Omega} |\psi^{(k+1)} - \psi^{(k)}| \leq \text{tol}$.

Références

- [1] F. HECHT, O. PIRONNEAU, A. LE HYARIC et K. OHTSUKA. *Freefem++ Manual*. Citeseer, 2010. URL : <http://www.freefem.org/ff++/index.htm>.
- [2] S.H. AYDIN et M. TEZER-SEZGIN. "Numerical Solution of Grad-Shafranov Equation for the Distribution of Magnetic Flux in Nuclear Fusion Devices". Dans : *Turkish Journal of Engineering & Environmental Sciences* 32.5 (2008), p. 265–275.
- [3] E. DERIAZ, B. DESPRES, G. FACCANONI, K.P. GOSTAF, L.-M. IMBERT-GÉRARD, G. SADAQA et R. SART. "Magnetic Equations with FreeFem++. The Grad-Shafranov equation & The Current Hole". Cemracs 2010.