Modélisation d'Avalanches Érosives

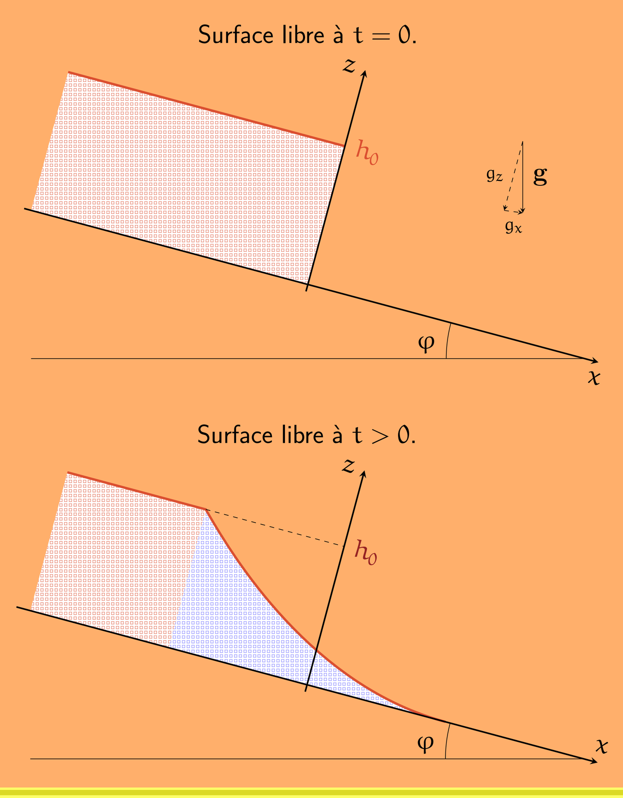
Gloria Faccanoni, Anne Mangeney, François Bouchut

Une avalanche de débris est un écoulement granulaire dense. Ce régime d'écoulement fait l'objet à l'heure actuelle de nombreuses recherches et les équations constitutives ne sont pas encore établies. Des approches hydrodynamiques proposées récemment permettent toutefois de décrire certaines configurations. Ici nous nous intéressons à celle où le milieu s'écoule sur un lit du même matériau déposé sur une pente rigide. Cette configuration est beaucoup plus complexe que le simple écoulement sur un plan incliné rugueux puisque le milieu granulaire comporte une zone statique qui peut se mettre en mouvement sous l'action de la zone en écoulement et il existe une interface diffuse entre la zone «fluide» et la zone «statique» qui complique sérieusement la description.

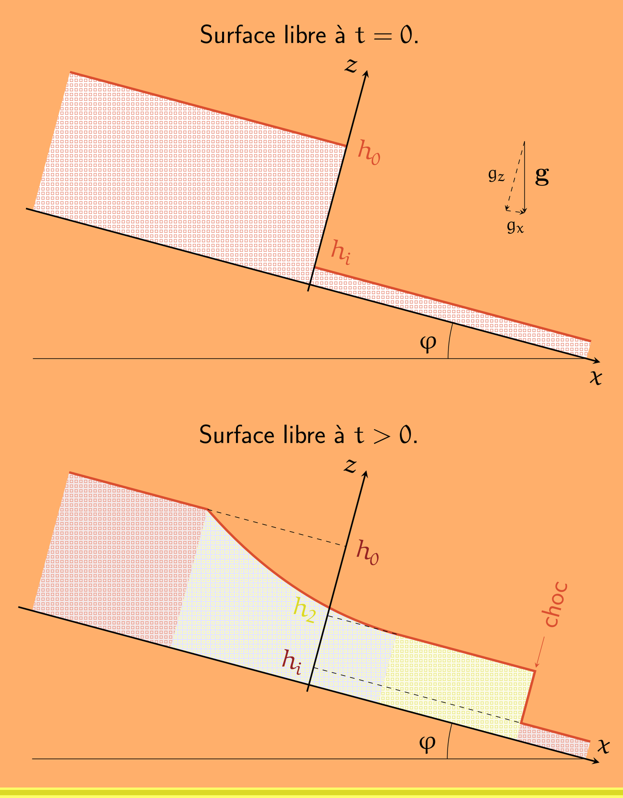
1. Modèle de base.

Une approche hydrodynamique des écoulemets granulaires sur un plan rigide a été proposée en 1989 par Savage et Hutter en s'inspirant des équations de St Venant pour les couches minces. Elle repose sur l'hypothèse que la couche qui coule est fine devant les longueurs caractéristiques de l'écoulement. C'est le cas par exemple des éboulements de terrain où une couche de matériau de quelques dizaines de mètres s'écoule sur des kilomètres. La configuration typique est celle de la figure : une couche d'un matériau ayant une vitesse u coule sur une pente inclinée d'un angle φ. La solution analytique développée dans [6], décrivant un matériau qui s'écoule sur un plan incliné rugueux, présente un bon accord avec les expériences de laboratoire [7]. Cette solution est une extension au cas frictionnel de la solution de Ritter [9] pour la description de la rupture d'un barrage sur un fond "sec". Nous avons alors développé une solution analytique décrivant l'écoulement d'une masse granulaire sur un lit couvert d'une fine couche du même matériau (extension cette fois-ci de la solution de Stoker [9] pour la description de la rupture d'un barrage sur un fond "mouillé").

Écoulement sur fond rugueux [6].



Écoulement sur une couche érodable [7].



Équations.

$$\begin{cases}\partial_t h + \partial_x(hu) = 0,\\ \partial_t(hu) + \partial_x(hu^2 + g_z h/2) = (g_x - g_z \tan\delta)h,\end{cases}$$

Conclusion.

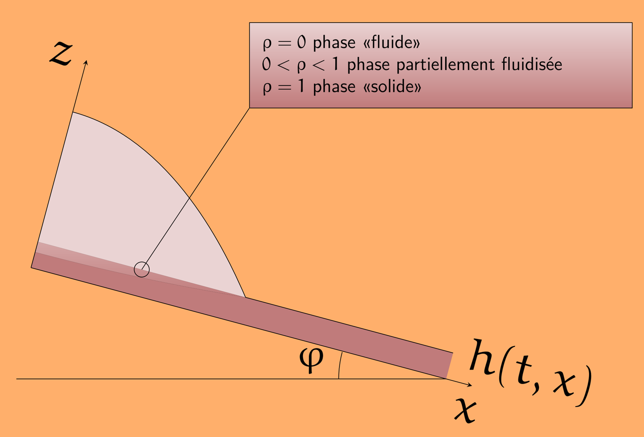
La solution exacte pour l'écoulement sur un fond rugueux permet de retrouver la bonne vitesse d'avancement du front. En revanche, lors de l'écoulement sur une couche érodable, on trouve que la vitesse du choc décroît lorsque le rapport h_i/h_0 croît, autrement dit la solution analytique conduit à une diminution de la mobilité de l'avalanche quand l'épaisseur de la couche de grains augmente, contrairement aux observations expérimentales [7] : le modèle n'est plus adapté dès qu'un lit érodable est présent.

2. Modèle de fluidisation.

Nous considérons un nouveau modèle, proposé initialement par Aranson et Tsimring [1, 2], qui décrit la transition statique/mobile dans le cadre de la théorie des milieux continus via un paramètre d'ordre ρ qui dépend du rapport entre le nombre de contacts statiques et le nombre total de contacts entre les grains. L'originalité de ce modèle consiste à décomposer la contrainte totale en une contribution statique et une contribution mobile dont la proportion dépend de ce paramètre d'ordre. Son évolution est décrite par une équation de transition de phase qui prend la forme d'une EDP de type Ginzbourg-Landau avec une énergie libre bistable. Le système d'équations aux dérivées partielles, donné dans un référentiel lié à la pente, correspond à un système de Navier-Stokes incompressible augmenté de l'équation sur le paramètre d'ordre qui décrit le comportement du milieu granulaire. Un modèle numérique simplifié basé sur cette théorie a déjà permis de reproduire les ondes d'érosion observées expérimentalement pour un milieu granulaire en écoulement sur une couche érodable [8].

Modèle complet [1–3, 8, 10, 11].

$$\begin{cases}\partial_t n + \mathbf{u}\cdot\mathbf{grad}\, n = 0\\ \partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u}\cdot\mathbf{grad}\,\mathbf{u} = \frac{1}{n}\operatorname{div}\cdot\underline{\sigma} + \mathbf{g}\\ \operatorname{div}\mathbf{u} = 0\\ \partial_t\rho + \mathbf{u}\cdot\mathbf{grad}\,\rho = \Delta\rho - f(\rho, \partial_x h)\end{cases}$$



- ▷ n densité, $\mathbf{u} = (u, w)$ vitesse, $\mathbf{g} = (g\sin\varphi, -g\cos\varphi)$ force de gravité ;
- ▷ $\rho \in [0; 1]$ paramètre d'ordre ; $q = (1-\rho)^{2.7}$;
- ▷ $\underline{\sigma} = \frac{1}{q}\underline{\sigma}^F = -\psi\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} + \nu\begin{bmatrix}2\,\partial_x u & \partial_z u + \partial_x w\\ \partial_z u + \partial_x w & 2\,\partial_z w\end{bmatrix}$ avec $\psi = \frac{p}{q}$ et $\nu = \frac{\mu_0\sqrt{p}}{q}$;
- ▷ $f(\rho, \partial_x h) = (\rho - 1)\begin{cases}\rho^2 - 2r\rho + r^2(1-\xi), & \text{si } \xi < 1\\ \rho(\rho - r(1+\xi)), & \text{si } \xi > 1\end{cases}$ avec $\xi = A((\tan\varphi - \partial_x h)^2 - d^2)$.

Modèle adimensionné.

$$\begin{cases}\partial_t n + \partial_x(nu) + \partial_z(nw) = 0\\ \partial_t u + \partial_x(u^2) + \partial_z(uw) + \frac{1}{n}\partial_x\psi = \frac{1}{n}\partial_z(\nu\,\partial_z u) + g\sin\varphi\\ \partial_z\psi = -gn\cos\varphi\\ \partial_x u + \partial_z w = 0\\ \partial_t\rho + \partial_x(\rho u) + \partial_z(\rho w) = \partial_{xx}\rho + \partial_{zz}\rho - f(\rho, \partial_x h)\\ \rho = 1 & \text{en } z = 0\\ w = 0 & \text{en } z = 0\\ \nu(\partial_z u) = 0 & \text{en } z = 0\\ \partial_t h + u\,\partial_x h - w = 0 & \text{en } z = h(x,t)\\ (\partial_z\rho) = 0 & \text{en } z = h(x,t)\\ \psi = 0 & \text{en } z = h(x,t)\end{cases}$$

3. Perspectives : modèles multicouches.

Dériver un modèle «intermédiaire» entre St Venant et Navier-Stokes afin de lever une des limitations intrinsèques aux modèles de type St Venant classiques, à savoir le fait que toute la section verticale du matériau est supposée avoir le même paramètre d'ordre. Hors cette limitation est rédhibitoire pour notre application. Nous voulons donc établir un modèle qui préserve l'efficacité du système de type St Venant — réduction de la dimension du problème, domaine de calcul fixe — mais qui permet d'obtenir des profils verticaux non constants. Il s'agit des modèles de St Venant multicouches, et en particulier on considère les deux suivants inspirés des travaux [4, 5] :

- ▷ le modèle de St Venant multicouche sans échange de masse entre les couches [4] : le paramètre d'ordre et la densité sont constants dans chaque couche mais ils varient d'une couche à l'autre, les hauteurs des couches ne sont pas proportionnelles entre elles ;
- ▷ le modèle de St Venant multicouche avec échange de masse entre les couches [5] : le paramètre d'ordre et la densité sont les mêmes dans chaque couche, les hauteurs des couches sont proportionnelles entre elles.

Références.

[1] I.S. Aranson et L.S. Tsimring. "Continuum description of avalanches in granular media". Dans : *Physical Review E* 64 (2001).

[2] I.S. Aranson et L.S. Tsimring. "Continuum theory of partially fluidized granular flows". Dans : *Physical Review E* 65 (2002).

[3] I.S. Aranson, L.S. Tsimring, F. Malloggi et E. Clément. "Nonlocal rheological properties of granular flows near a jamming limit". Dans : *Physical Review E* 78 (2008).

[4] E. Audusse. "A multilayer Saint-Venant model : derivation and numerical validation". Dans : *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B* 5.2 (2005).

[5] E. Audusse, M. O. Bristeau, B. Perthame et J. Sainte-Marie. *A multilayer Saint-Venant system with mass exchanges for shallow water flows. Derivation and numerical validation.* 2009.

[6] A. Mangeney, Ph. Heinrich et R. Roche. "Analytical Solution for Testing Debris Avalanche Numerical Models". Dans : *Pure Appl. Geophys.* 157 (2000), p. 1081–1096.

[7] A. Mangeney, O. Roche, O. Hungr, N. Mangold, G. Faccanoni et A. Lucas. "Erosion and mobility in granular collapse over sloping beds." Dans : *Journal of Geophysical Research - Earth Surface* (2010).

[8] A. Mangeney, L.S. Tsimring, D. Volfson, I.S. Aranson et F. Bouchut. "Avalanche mobility induced by the presence of an erodible bed and associated entrainment". Dans : *Geophysical Research Letters* 34 (2007).

[9] J.J. Stoker. *Water Waves, The Mathematical Theory with Applications.* New York : Interscience Publishers, 1957.

[10] D. Volfson, L.S. Tsimring et I.S. Aranson. "Order Parameter Description of Stationary Partially Fluidized Shear Granular Flow". Dans : *Physical Review Letters* (2003).

[11] D. Volfson, L.S. Tsimring et I.S. Aranson. "Partially fluidized shear granular flows : Continuum theory and molecular dynamics simulations". Dans : *Physical Review E* 68 (2003).

Gloria Faccanoni, IMATH — Université du Sud Toulon-Var ✉ gloria.faccanoni@univ-tln.fr ⓘ http ://faccanoni.univ-tln.fr/
Anne Mangeney, Laboratoire de Sismologie — IPGP ✉ mangeney@ipgp.jussieu.fr ⓘ http ://www.ipgp.fr/ mangeney/
François Bouchut, LAMA — Université Paris-Est - Marne-la-Vallée ✉ francois.bouchut@univ-mlv.fr ⓘ http ://perso-math.univ-mlv.fr/users/bouchut.francois/