

# ÉTUDE D'UN MODÈLE FIN DE CHANGEMENT DE PHASE LIQUIDE-VAPEUR

*Contribution à l'étude de la crise d'ébullition*

Gloria Faccanoni<sup>1,2</sup>   Grégoire Allaire<sup>1,2</sup>   Samuel Kokh<sup>2</sup>

<sup>1</sup>École Polytechnique - CMAP

<sup>2</sup>CEA Saclay - SFME/LETR

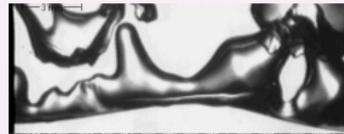


# CRISE D'ÉBULLITION

Ébullition nucléée



Ébullition en film



source : [http://www.spaceflight.esa.int/users/fluids/TT\\_boiling.htm](http://www.spaceflight.esa.int/users/fluids/TT_boiling.htm)

- 1 *Modèle*
- 2 *Méthode numérique*
- 3 *Conclusion*

- 1 *Modèle*
  - Construction
  - Propriétés
- 2 *Méthode numérique*
- 3 *Conclusion*

# SYSTÈME DES ÉQUATIONS D'EULER

$$\begin{cases} \partial_t \varrho + \operatorname{div}(\varrho \mathbf{u}) = 0, \\ \partial_t(\varrho \mathbf{u}) + \operatorname{div}(\varrho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + P) = 0 \\ \partial_t \left( \varrho \left( \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} + \varepsilon \right) \right) + \operatorname{div} \left( \left( \varrho \left( \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} + \varepsilon \right) + P \right) \mathbf{u} \right) = 0. \end{cases}$$

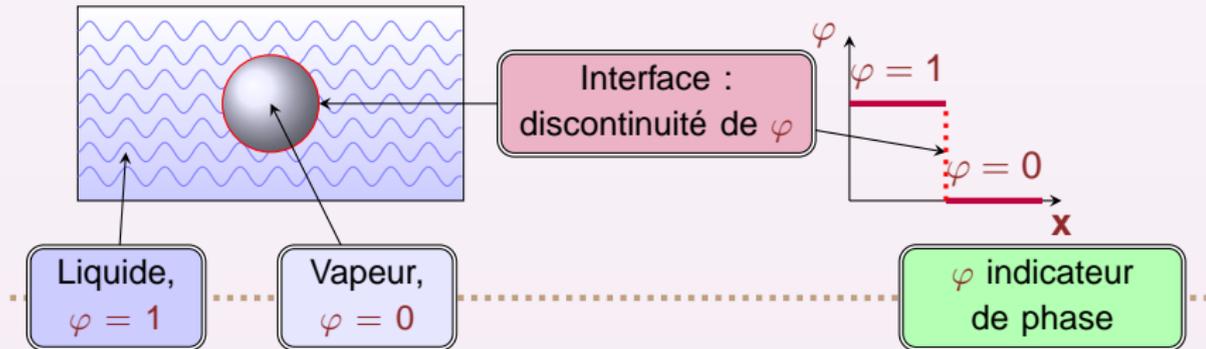
- $(\mathbf{x}, t) \mapsto \varrho$  densité molaire,
- $(\mathbf{x}, t) \mapsto \varepsilon$  énergie interne molaire,
- $(\mathbf{x}, t) \mapsto \mathbf{u}$  vitesse,
- $(\varrho, \varepsilon) \mapsto P$  loi de pression.

# SYSTÈME DES ÉQUATIONS D'EULER

$$\begin{cases} \partial_t \varrho + \operatorname{div}(\varrho \mathbf{u}) = 0, \\ \partial_t(\varrho \mathbf{u}) + \operatorname{div}(\varrho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + \mathbf{P}) = 0 \\ \partial_t \left( \varrho \left( \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} + \varepsilon \right) \right) + \operatorname{div} \left( \left( \varrho \left( \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} + \varepsilon \right) + \mathbf{P} \right) \mathbf{u} \right) = 0. \end{cases}$$

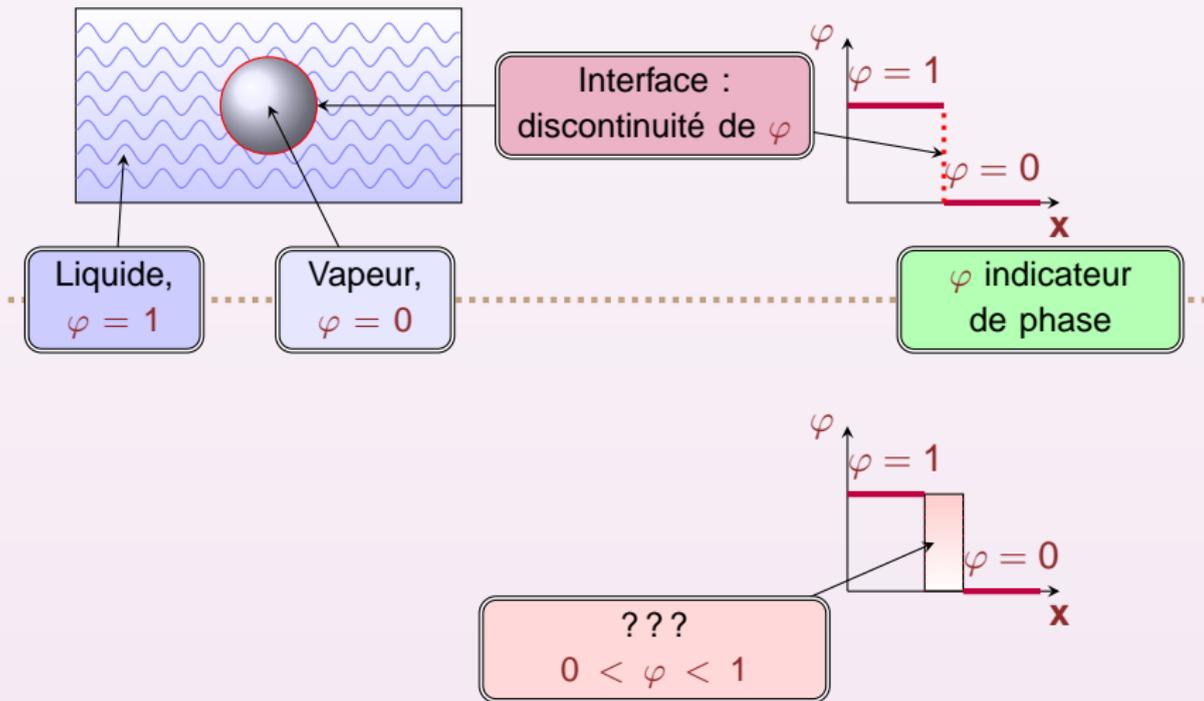
- $(\mathbf{x}, t) \mapsto \varrho$  densité molaire,
- $(\mathbf{x}, t) \mapsto \varepsilon$  énergie interne molaire,
- $(\mathbf{x}, t) \mapsto \mathbf{u}$  vitesse,
- $(\varrho, \varepsilon) \mapsto \mathbf{P}$  loi de pression.

## INTERFACE LIQUIDE-VAPEUR

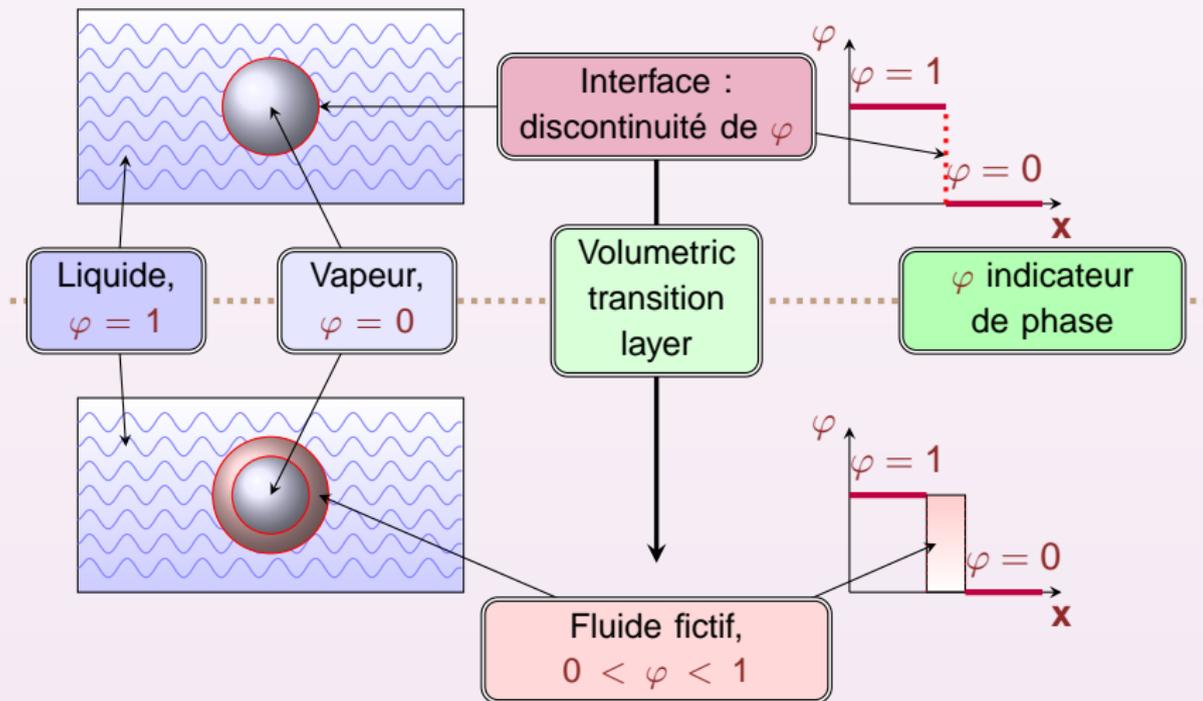


$$\partial_t \varphi + \mathbf{u} \cdot \text{grad } \varphi = 0$$

# INTERFACE LIQUIDE-VAPEUR



## INTERFACE LIQUIDE-VAPEUR



## INTERFACE DIFFUSE

- ➔ «Construire» ce fluide dans la zone de coexistence
- Second Gradient [C. Fouillet, D. Jamet, ... ]
  - Phase Field [P. Ruyer, L. Truskinovsky, ... ]
  - Chapman-Jouguet [O. Le Métayer, V. Perrier, R. Saurel, ... ]
  - ...

## INTERFACE DIFFUSE

### → «Construire» ce fluide dans la zone de coexistence

- Second Gradient [C. Fouillet, D. Jamet, ... ]
- Phase Field [P. Ruyer, L. Truskinovsky, ... ]
- Chapman-Jouguet [O. Le Métayer, V. Perrier, R. Saurel, ... ]
- ...

### → Objectifs de notre construction :

- $(\rho, \varepsilon, \mathbf{u}, P)$  continues (3 zones)
- Position de l'interface implicite ( $\sim$   ~~$\neq$~~ )
- Prise en compte automatique du changement de phase
- Cohérence avec la thermodynamique classique [H. Callen]

LOI D'ÉTAT POUR CHAQUE PHASE  $\alpha = 1, 2$ 

$$\left. \begin{array}{l} \tau_\alpha \text{ volume molaire} \\ \varepsilon_\alpha \text{ énergie interne molaire} \end{array} \right\} \Rightarrow \mathbf{w}_\alpha \stackrel{\text{déf}}{=} (\tau_\alpha, \varepsilon_\alpha);$$

$\mathbf{w}_\alpha \mapsto s_\alpha$  entropie molaire (d'hessienne déf. strict. nég.);

$$\left. \begin{array}{l} \rightarrow \\ \rightarrow \\ \rightarrow \end{array} \right\} \begin{cases} T_\alpha \stackrel{\text{déf}}{=} \left( \frac{\partial s_\alpha}{\partial \varepsilon_\alpha} \Big|_{\tau_\alpha} \right)^{-1} > 0 & \text{température,} \\ P_\alpha \stackrel{\text{déf}}{=} T_\alpha \frac{\partial s_\alpha}{\partial \tau_\alpha} \Big|_{\varepsilon_\alpha} > 0 & \text{pression,} \\ g_\alpha \stackrel{\text{déf}}{=} \varepsilon_\alpha + P_\alpha \tau_\alpha - T_\alpha s_\alpha & \text{enthalpie libre (potentiel de Gibbs).} \end{cases}$$

LOI D'ÉTAT POUR CHAQUE PHASE  $\alpha = 1, 2$ 

$$\left. \begin{array}{l} \tau_\alpha \text{ volume molaire} \\ \varepsilon_\alpha \text{ énergie interne molaire} \end{array} \right\} \Rightarrow \mathbf{w}_\alpha \stackrel{\text{déf}}{=} (\tau_\alpha, \varepsilon_\alpha);$$

$\mathbf{w}_\alpha \mapsto s_\alpha$  entropie molaire (d'hessienne déf. strict. nég.);

$$\left. \begin{array}{l} \rightarrow \\ \rightarrow \\ \rightarrow \end{array} \right\} \begin{cases} T_\alpha \stackrel{\text{déf}}{=} \left( \frac{\partial s_\alpha}{\partial \varepsilon_\alpha} \Big|_{\tau_\alpha} \right)^{-1} > 0 & \text{température,} \\ P_\alpha \stackrel{\text{déf}}{=} T_\alpha \frac{\partial s_\alpha}{\partial \tau_\alpha} \Big|_{\varepsilon_\alpha} > 0 & \text{pression,} \\ g_\alpha \stackrel{\text{déf}}{=} \varepsilon_\alpha + P_\alpha \tau_\alpha - T_\alpha s_\alpha & \text{enthalpie libre (potentiel de Gibbs).} \end{cases}$$

LOI D'ÉTAT POUR CHAQUE PHASE  $\alpha = 1, 2$ 

$$\left. \begin{array}{l} \tau_\alpha \text{ volume molaire} \\ \varepsilon_\alpha \text{ énergie interne molaire} \end{array} \right\} \Rightarrow \mathbf{w}_\alpha \stackrel{\text{déf}}{=} (\tau_\alpha, \varepsilon_\alpha);$$

$\mathbf{w}_\alpha \mapsto s_\alpha$  entropie molaire (d'hessienne déf. strict. nég.);

$$\left. \begin{array}{l} \rightarrow \\ \rightarrow \end{array} \right\} \begin{cases} T_\alpha \stackrel{\text{déf}}{=} \left( \frac{\partial s_\alpha}{\partial \varepsilon_\alpha} \Big|_{\tau_\alpha} \right)^{-1} > 0 & \text{température,} \\ P_\alpha \stackrel{\text{déf}}{=} T_\alpha \frac{\partial s_\alpha}{\partial \tau_\alpha} \Big|_{\varepsilon_\alpha} > 0 & \text{pression,} \\ g_\alpha \stackrel{\text{déf}}{=} \varepsilon_\alpha + P_\alpha \tau_\alpha - T_\alpha s_\alpha & \text{enthalpie libre (potentiel de Gibbs).} \end{cases}$$

# LOI D'ÉTAT SANS CHANGEMENT DE PHASE

- $\mathbf{w} \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{\alpha} y_{\alpha} \mathbf{w}_{\alpha}$  ;
- $y_{\alpha}$  fraction de masse,  $\sum_{\alpha} y_{\alpha} = 1$  ;
- $z_{\alpha}$  fraction de volume,  $\sum_{\alpha} z_{\alpha} = 1$  et  $y_{\alpha} \tau_{\alpha} = z_{\alpha} \tau$  ;
- $\psi_{\alpha}$  fraction d'énergie,  $\sum_{\alpha} \psi_{\alpha} = 1$  et  $y_{\alpha} \varepsilon_{\alpha} = \psi_{\alpha} \varepsilon$ .

# LOI D'ÉTAT SANS CHANGEMENT DE PHASE

- $\mathbf{w} \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{\alpha} y_{\alpha} \mathbf{w}_{\alpha}$  ;
- $y_{\alpha}$  fraction de masse,  $\sum_{\alpha} y_{\alpha} = 1$  ;
- $z_{\alpha}$  fraction de volume,  $\sum_{\alpha} z_{\alpha} = 1$  et  $y_{\alpha} \tau_{\alpha} = z_{\alpha} \tau$  ;
- $\psi_{\alpha}$  fraction d'énergie,  $\sum_{\alpha} \psi_{\alpha} = 1$  et  $y_{\alpha} \varepsilon_{\alpha} = \psi_{\alpha} \varepsilon$ .

## Entropie sans changement de phase

$$\sigma \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{\alpha} y_{\alpha} s_{\alpha}(\mathbf{w}_{\alpha}) = \sum_{\alpha} y_{\alpha} s_{\alpha} \left( \frac{z_{\alpha}}{y_{\alpha}} \tau, \frac{\psi_{\alpha}}{y_{\alpha}} \varepsilon \right)$$

# LOI D'ÉTAT SANS CHANGEMENT DE PHASE

- $\mathbf{w} \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{\alpha} y_{\alpha} \mathbf{w}_{\alpha}$  ;
- $y_{\alpha}$  fraction de masse,  $\sum_{\alpha} y_{\alpha} = 1$  ;
- $z_{\alpha}$  fraction de volume,  $\sum_{\alpha} z_{\alpha} = 1$  et  $y_{\alpha} \tau_{\alpha} = z_{\alpha} \tau$  ;
- $\psi_{\alpha}$  fraction d'énergie,  $\sum_{\alpha} \psi_{\alpha} = 1$  et  $y_{\alpha} \varepsilon_{\alpha} = \psi_{\alpha} \varepsilon$ .

## Entropie sans changement de phase

$$\sigma \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{\alpha} y_{\alpha} s_{\alpha}(\mathbf{w}_{\alpha}) = \sum_{\alpha} y_{\alpha} s_{\alpha} \left( \frac{z_{\alpha}}{y_{\alpha}} \tau, \frac{\psi_{\alpha}}{y_{\alpha}} \varepsilon \right)$$

# LOI D'ÉTAT AVEC CHANGEMENT DE PHASE

Entropie sans Ch.Ph.

$$(\mathbf{w}_\alpha, \mathbf{w}) \mapsto \sigma$$



Entropie à l'équilibre

$$\mathbf{w} \mapsto s^{\text{eq}}$$

Définition [H. Callen, Ph. Helluy ...]

Problème d'optimisation :

$$s^{\text{eq}} \stackrel{\text{def}}{=} \max_y (y s_1(\mathbf{w}_1) + (1 - y) s_2(\mathbf{w}_2))$$

Contraintes : ①  $\mathbf{w} = y\mathbf{w}_1 + (1 - y)\mathbf{w}_2$   
 ②  $y \in [0, 1]$

# LOI D'ÉTAT AVEC CHANGEMENT DE PHASE

Entropie sans Ch.Ph.

$$(\mathbf{w}_\alpha, \mathbf{w}) \mapsto \sigma$$



Entropie à l'équilibre

$$\mathbf{w} \mapsto S^{\text{eq}}$$

*Définition [H. Callen, Ph. Helluy ...]*

Problème d'optimisation :

$$S^{\text{eq}} \stackrel{\text{déf}}{=} \max_y (y s_1(\mathbf{w}_1) + (1 - y) s_2(\mathbf{w}_2))$$

Contraintes : ①  $\mathbf{w} = y\mathbf{w}_1 + (1 - y)\mathbf{w}_2$

②  $y \in [0, 1]$

# LOI D'ÉTAT AVEC CHANGEMENT DE PHASE

Entropie sans Ch.Ph.

$$(\mathbf{w}_\alpha, \mathbf{w}) \mapsto \sigma$$



Entropie à l'équilibre

$$\mathbf{w} \mapsto S^{\text{eq}}$$

*Définition [H. Callen, Ph. Helluy ...]*

Problème d'optimisation :

$$S^{\text{eq}} \stackrel{\text{déf}}{=} \max_y (y s_1(\mathbf{w}_1) + (1 - y) s_2(\mathbf{w}_2))$$

$$\text{Contraintes : } \textcircled{1} \mathbf{w} = y \mathbf{w}_1 + (1 - y) \mathbf{w}_2$$

$$\textcircled{2} y \in [0, 1]$$

Condition d'optimalité :  $T_1 = T_2, P_1 = P_2, g_1 = g_2.$

# LOI D'ÉTAT AVEC CHANGEMENT DE PHASE

Entropie sans Ch.Ph.

$$(\mathbf{w}_\alpha, \mathbf{w}) \mapsto \sigma$$



Entropie à l'équilibre

$$\mathbf{w} \mapsto S^{\text{eq}}$$

*Définition [H. Callen, Ph. Helluy ...]*

Problème d'optimisation :

$$S^{\text{eq}} \stackrel{\text{déf}}{=} \max_y (y s_1(\mathbf{w}_1) + (1 - y) s_2(\mathbf{w}_2))$$

Contraintes : ①  $\mathbf{w} = y\mathbf{w}_1 + (1 - y)\mathbf{w}_2$   
②  $y \in [0, 1]$

$\mathbf{w}_\alpha^* \stackrel{\text{déf}}{=} \text{solution du problème d'optimisation.}$

## CONSTRUCTION DE $\mathbf{W} \mapsto \mathbf{S}^{\text{EQ}}$

$$s^{\text{eq}} \stackrel{\text{def}}{=} \max_y \sum_{\alpha} y_{\alpha} s_{\alpha}(\mathbf{w}_{\alpha})$$

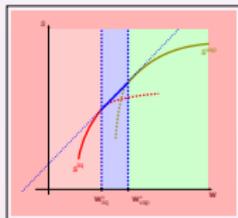
Contrainte :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \tau \\ \varepsilon \end{pmatrix} = \sum_{\alpha} y_{\alpha} \begin{pmatrix} 1 \\ \tau_{\alpha} \\ \varepsilon_{\alpha} \end{pmatrix}$$

# CONSTRUCTION DE $\mathbf{W} \mapsto \mathbf{S}^{\text{EQ}}$

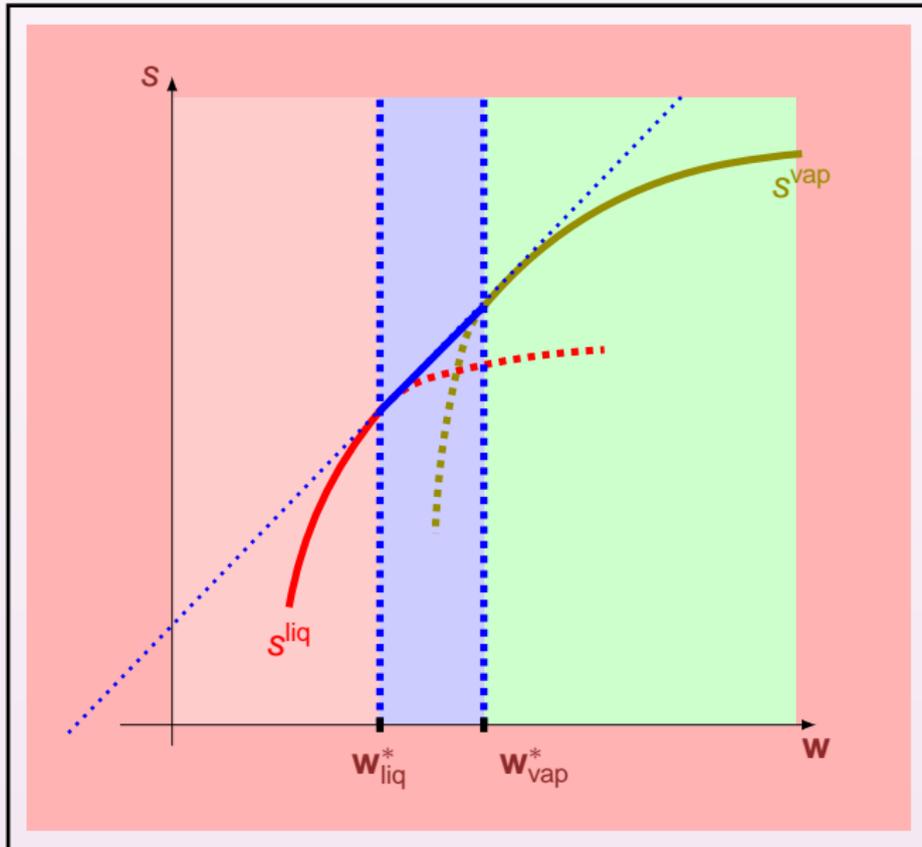
$$s^{\text{eq}} \stackrel{\text{def}}{=} \max_y \sum_{\alpha} y_{\alpha} s_{\alpha}(\mathbf{w}_{\alpha})$$

Bitangent



Contrainte :

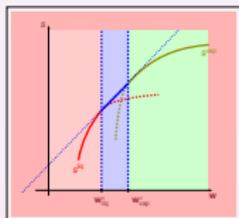
$$\begin{pmatrix} 1 \\ \tau \\ \varepsilon \end{pmatrix} = \sum_{\alpha} y_{\alpha} \begin{pmatrix} 1 \\ \tau_{\alpha} \\ \varepsilon_{\alpha} \end{pmatrix}$$



# CONSTRUCTION DE $\mathbf{w} \mapsto \mathbf{s}^{\text{EQ}}$

$$s^{\text{eq}} \stackrel{\text{def}}{=} \max_y \sum_{\alpha} y_{\alpha} s_{\alpha}(\mathbf{w}_{\alpha})$$

Bitangent



$$s^{\text{eq}}(\mathbf{w}) \stackrel{\text{def}}{=} \text{enveloppe concave de } \max \{ s_1(\mathbf{w}), s_2(\mathbf{w}) \}$$

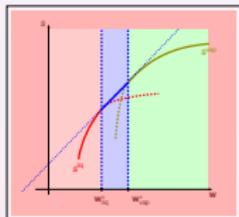
Contrainte :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \tau \\ \varepsilon \end{pmatrix} = \sum_{\alpha} y_{\alpha} \begin{pmatrix} 1 \\ \tau_{\alpha} \\ \varepsilon_{\alpha} \end{pmatrix}$$

# CONSTRUCTION DE $\mathbf{w} \mapsto \mathbf{s}^{\text{EQ}}$

$$s^{\text{eq}} \stackrel{\text{def}}{=} \max_y \sum_{\alpha} y_{\alpha} s_{\alpha}(\mathbf{w}_{\alpha})$$

Bitangent



Inf-convolution  
[Ph. Helluy, N. Seguin]

$$S^{\text{eq}} \begin{pmatrix} y \\ y_{\tau_1} \\ y_{\varepsilon_1} \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} - \left\{ \left[ -S_1 \begin{pmatrix} y \\ y_{\tau_1} \\ y_{\varepsilon_1} \end{pmatrix} \right] \square \left[ -S_2 \begin{pmatrix} 1-y \\ \tau - y_{\tau_1} \\ \varepsilon - y_{\varepsilon_1} \end{pmatrix} \right] \right\}$$

$s^{\text{eq}}(\mathbf{w}) \stackrel{\text{def}}{=}$   
enveloppe concave de  
 $\max \{ s_1(\mathbf{w}), s_2(\mathbf{w}) \}$

Contrainte :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \tau \\ \varepsilon \end{pmatrix} = \sum_{\alpha} y_{\alpha} \begin{pmatrix} 1 \\ \tau_{\alpha} \\ \varepsilon_{\alpha} \end{pmatrix}$$

$$S^{\text{eq}} \stackrel{\text{def}}{=} - [(-S_1)^* + (-S_2)^*]^*$$

# CINÉMATIQUE DU CHANGEMENT DE PHASE

## Équations d'évolution

$$\begin{cases} \partial_t \varrho + \operatorname{div}(\varrho \mathbf{u}) = 0, \\ \partial_t(\varrho \mathbf{u}) + \operatorname{div}(\varrho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + \mathbf{P}^{\text{eq}}) = 0 \\ \partial_t \left( \varrho \left( \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} + \varepsilon \right) \right) + \operatorname{div} \left( \varrho \left( \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} + \varepsilon \right) \mathbf{u} + \mathbf{P}^{\text{eq}} \mathbf{u} \right) = 0 \end{cases}$$

avec  $\mathbf{P}^{\text{eq}} \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{\mathbf{S}_\tau^{\text{eq}}}{\mathbf{S}_\varepsilon^{\text{eq}}}.$

## Questions :

- ① Hyperbolicité
- ② Problème de Riemann

# CINÉMATIQUE DU CHANGEMENT DE PHASE

## Équations d'évolution

$$\begin{cases} \partial_t \varrho + \operatorname{div}(\varrho \mathbf{u}) = 0, \\ \partial_t(\varrho \mathbf{u}) + \operatorname{div}(\varrho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + \mathbf{P}^{\text{eq}}) = 0 \\ \partial_t \left( \varrho \left( \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} + \varepsilon \right) \right) + \operatorname{div} \left( \varrho \left( \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} + \varepsilon \right) \mathbf{u} + \mathbf{P}^{\text{eq}} \mathbf{u} \right) = 0 \end{cases}$$

avec  $\mathbf{P}^{\text{eq}} \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{\mathbf{S}_\tau^{\text{eq}}}{\mathbf{S}_\varepsilon^{\text{eq}}}$ .

## Questions :

- 1 Hyperbolicité
- 2 Problème de Riemann

# ① HYPERBOLICITÉ : SPECTRE DE LA JACOBIENNE

$$\partial_t \begin{pmatrix} \tau \\ u \\ \varepsilon \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u & -\tau & 0 \\ \tau \frac{\partial P^{\text{eq}}}{\partial \tau} \Big|_{\varepsilon} & u & \tau \frac{\partial P^{\text{eq}}}{\partial \varepsilon} \Big|_{\tau} \\ 0 & \tau P^{\text{eq}} & u \end{pmatrix} \partial_x \begin{pmatrix} \tau \\ u \\ \varepsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Valeurs propres :  $\lambda_1 = u - c$ ,  $\lambda_2 = u$ ,  $\lambda_3 = u + c$
- Vecteurs propres (à droite) associés :

$$\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} \tau \\ c \\ \tau P^{\text{eq}} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} \partial P^{\text{eq}} / \partial \varepsilon \\ 0 \\ -\partial P^{\text{eq}} / \partial \tau \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_3 = \begin{pmatrix} -\tau \\ c \\ \tau P^{\text{eq}} \end{pmatrix},$$

où  $c$  est la vitesse du son dont le carré s'écrit

$$c^2 = \tau^2 \left( P^{\text{eq}} \frac{\partial P^{\text{eq}}}{\partial \varepsilon} \Big|_{\tau} - \frac{\partial P^{\text{eq}}}{\partial \tau} \Big|_{\varepsilon} \right).$$

# ① HYPERBOLICITÉ : SPECTRE DE LA JACOBIENNE

$$\partial_t \begin{pmatrix} \tau \\ u \\ \varepsilon \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u & -\tau & 0 \\ \tau \frac{\partial P^{\text{eq}}}{\partial \tau} \Big|_{\varepsilon} & u & \tau \frac{\partial P^{\text{eq}}}{\partial \varepsilon} \Big|_{\tau} \\ 0 & \tau P^{\text{eq}} & u \end{pmatrix} \partial_x \begin{pmatrix} \tau \\ u \\ \varepsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Valeurs propres :  $\lambda_1 = u - c$ ,  $\lambda_2 = u$ ,  $\lambda_3 = u + c$
- Vecteurs propres (à droite) associés :

$$\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} \tau \\ c \\ \tau P^{\text{eq}} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} \partial P^{\text{eq}} / \partial \varepsilon \\ 0 \\ -\partial P^{\text{eq}} / \partial \tau \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_3 = \begin{pmatrix} -\tau \\ c \\ \tau P^{\text{eq}} \end{pmatrix},$$

où  $c$  est la vitesse du son dont le carré s'écrit

$$c^2 = \tau^2 \left( P^{\text{eq}} \frac{\partial P^{\text{eq}}}{\partial \varepsilon} \Big|_{\tau} - \frac{\partial P^{\text{eq}}}{\partial \tau} \Big|_{\varepsilon} \right).$$

## Hyperbolicité du système d'Euler

- si  $c > 0$  alors  $\lambda_i \in \mathbb{R}$  et  $\lambda_i \neq \lambda_j$  pour  $i \neq j$  donc le système est **strictement hyperbolique**  
(ex. système d'Euler avec  $P$  dans une phase pure),
- si  $c = 0$  alors  $\lambda_i \in \mathbb{R}$  mais la jacobienne n'est pas diagonalisable et donc le système est **faiblement hyperbolique**  
(ex. p-système avec changement de phase),
- si  $c < 0$  alors  $\lambda_{1,3} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  donc le système est **non hyperbolique**  
(ex. système d'Euler avec  $P$  de Van der Waals).

## Hyperbolicité du système d'Euler

- si  $c > 0$  alors  $\lambda_i \in \mathbb{R}$  et  $\lambda_i \neq \lambda_j$  pour  $i \neq j$  donc le système est **strictement hyperbolique** (ex. système d'Euler avec  $P$  dans une phase pure),
- si  $c = 0$  alors  $\lambda_i \in \mathbb{R}$  mais la jacobienne n'est pas diagonalisable et donc le système est **faiblement hyperbolique** (ex. p-système avec changement de phase),
- si  $c < 0$  alors  $\lambda_{1,3} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  donc le système est **non hyperbolique** (ex. système d'Euler avec  $P$  de Van der Waals).

Avec le changement de phase  $c \stackrel{?}{>} 0$

## Hyperbolicité du système d'Euler

- si  $c > 0$  alors  $\lambda_i \in \mathbb{R}$  et  $\lambda_i \neq \lambda_j$  pour  $i \neq j$  donc le système est **strictement hyperbolique** (ex. système d'Euler avec  $P$  dans une phase pure),
- si  $c = 0$  alors  $\lambda_i \in \mathbb{R}$  mais la jacobienne n'est pas diagonalisable et donc le système est **faiblement hyperbolique** (ex. p-système avec changement de phase),
- si  $c < 0$  alors  $\lambda_{1,3} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  donc le système est **non hyperbolique** (ex. système d'Euler avec  $P$  de Van der Waals).

Avec le changement de phase  $c \stackrel{?}{>} 0$

## Remarque

$$c^2 = -\tau^2 T^{\text{eq}} \begin{bmatrix} P^{\text{eq}}, & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{\varepsilon\varepsilon}^{\text{eq}} & s_{\tau\varepsilon}^{\text{eq}} \\ s_{\tau\varepsilon}^{\text{eq}} & s_{\tau\tau}^{\text{eq}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P^{\text{eq}} \\ -1 \end{bmatrix}$$

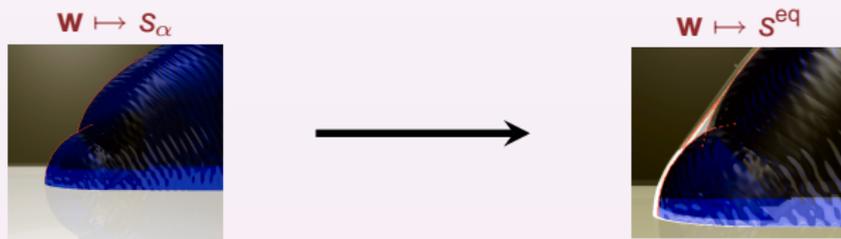
## ② PROBLÈME DE RIEMANN

Non unicité des solutions entropiques [R. Menikoff, B.J. Plohr]



Critère(s) de sélection ?

## ENVELOPPE CONCAVE



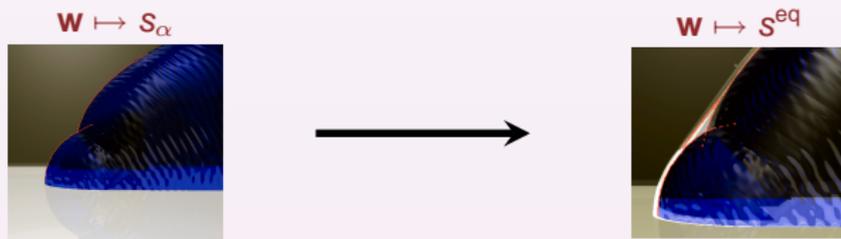
Hessienne de  $\mathbf{w} \mapsto s^{eq}$

$\forall \mathbf{w}$  état phasique :  $\mathbf{v}^T d^2 s^{eq}(\mathbf{w}) \mathbf{v} < 0 \quad \forall \mathbf{v} \neq 0$ ,

$\forall \mathbf{w}$  état de coexistence :  $\exists \mathbf{v}(\mathbf{w}) \neq 0$  tq  $(\mathbf{v}(\mathbf{w}))^T d^2 s^{eq}(\mathbf{w}) \mathbf{v}(\mathbf{w}) = 0$ .

① Hyperbolicité :  $\forall \mathbf{w}$  état de coexistence,  $\mathbf{v}(\mathbf{w}) \stackrel{?}{\equiv} [P^{eq}(\mathbf{w}), -1]$

## ENVELOPPE CONCAVE



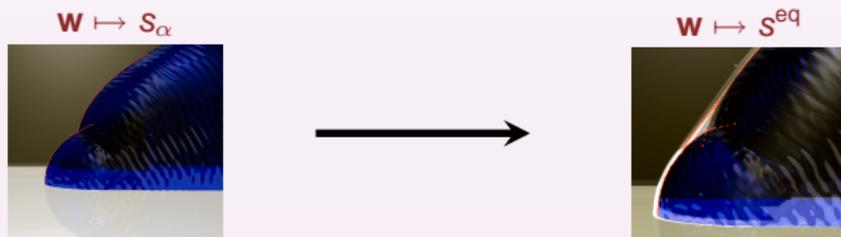
Hessienne de  $\mathbf{w} \mapsto s^{eq}$

$\forall \mathbf{w}$  état phasique :  $\mathbf{v}^T d^2 s^{eq}(\mathbf{w}) \mathbf{v} < 0 \quad \forall \mathbf{v} \neq 0$ ,

$\forall \mathbf{w}$  état de coexistence :  $\exists \mathbf{v}(\mathbf{w}) \neq 0$  tq  $(\mathbf{v}(\mathbf{w}))^T d^2 s^{eq}(\mathbf{w}) \mathbf{v}(\mathbf{w}) = 0$ .

① Hyperbolicité :  $\forall \mathbf{w}$  état de coexistence,  $\mathbf{v}(\mathbf{w}) \stackrel{?}{\equiv} [P^{eq}(\mathbf{w}), -1]$

## ENVELOPPE CONCAVE



Hessienne de  $\mathbf{w} \mapsto s^{eq}$

$\forall \mathbf{w}$  état phasique :  $\mathbf{v}^T d^2 s^{eq}(\mathbf{w}) \mathbf{v} < 0 \quad \forall \mathbf{v} \neq 0$ ,

$\forall \mathbf{w}$  état de coexistence :  $\exists \mathbf{v}(\mathbf{w}) \neq 0$  tq  $(\mathbf{v}(\mathbf{w}))^T d^2 s^{eq}(\mathbf{w}) \mathbf{v}(\mathbf{w}) = 0$ .

❶ Hyperbolicité :  $\forall \mathbf{w}$  état de coexistence,  $\mathbf{v}(\mathbf{w}) \stackrel{?}{\equiv} [P^{eq}(\mathbf{w}), -1]$

## UNICITÉ DU SEGMENT $\mathbf{v}(\mathbf{w})$

*Théorème (G. Allaire, G. Faccanoni and S. Kokh)*

Soit  $\mathbf{w} \stackrel{\text{déf}}{=} (\tau, \varepsilon)$  un «état saturé». Si  $\tau_1^* \neq \tau_2^*$  et  $\varepsilon_1^* \neq \varepsilon_2^*$  alors

① **UNICITÉ** : il existe un et un seul  $\mathbf{v}(\mathbf{w}) \stackrel{\text{déf}}{=} \tau_{12}(\mathbf{w}) \neq 0$  tel que  $(\mathbf{v}(\mathbf{w}))^T d^2 s^{\text{eq}}(\mathbf{w}) \mathbf{v}(\mathbf{w}) = 0$ .

②  $s_{\tau\tau}^{\text{eq}} s_{\varepsilon\varepsilon}^{\text{eq}} = (s_{\tau\varepsilon}^{\text{eq}})^2, \quad s_{\tau\tau}^{\text{eq}} = \left( \frac{\varepsilon_1^* - \varepsilon_2^*}{\tau_1^* - \tau_2^*} \right)^2 s_{\varepsilon\varepsilon}^{\text{eq}};$

③  $s_{\tau\tau}^{\text{eq}}, s_{\varepsilon\varepsilon}^{\text{eq}} < 0, \quad s_{\tau\varepsilon}^{\text{eq}} \neq 0; \quad P \neq -\frac{\varepsilon_1^* - \varepsilon_2^*}{\tau_1^* - \tau_2^*}, \quad T \neq \frac{\varepsilon_1^* - \varepsilon_2^*}{s_1^* - s_2^*}$

avec  $(\tau_\alpha^*, \varepsilon_\alpha^*)$  extrémités du segment  $\tau_{12}(\mathbf{w}) \ni \mathbf{w}$ .

## UNICITÉ DU SEGMENT $\mathbf{v}(\mathbf{w})$

*Théorème (G. Allaire, G. Faccanoni and S. Kokh)*

Soit  $\mathbf{w} \stackrel{\text{déf}}{=} (\tau, \varepsilon)$  un «état saturé». Si  $\tau_1^* \neq \tau_2^*$  et  $\varepsilon_1^* \neq \varepsilon_2^*$  alors

1 UNICITÉ : il existe un et un seul  $\mathbf{v}(\mathbf{w}) \stackrel{\text{déf}}{=} \mathbf{v}_{12}(\mathbf{w}) \neq 0$  tel que  $(\mathbf{v}(\mathbf{w}))^T d^2 s^{\text{eq}}(\mathbf{w}) \mathbf{v}(\mathbf{w}) = 0$ .

2  $s_{\tau\tau}^{\text{eq}} s_{\varepsilon\varepsilon}^{\text{eq}} = (s_{\tau\varepsilon}^{\text{eq}})^2$ ,  $s_{\tau\tau}^{\text{eq}} = \left( \frac{\varepsilon_1^* - \varepsilon_2^*}{\tau_1^* - \tau_2^*} \right)^2 s_{\varepsilon\varepsilon}^{\text{eq}}$  ;

3  $s_{\tau\tau}^{\text{eq}}, s_{\varepsilon\varepsilon}^{\text{eq}} < 0$ ,  $s_{\tau\varepsilon}^{\text{eq}} \neq 0$ ;  $P \neq -\frac{\varepsilon_1^* - \varepsilon_2^*}{\tau_1^* - \tau_2^*}$ ,  $T \neq \frac{\varepsilon_1^* - \varepsilon_2^*}{s_1^* - s_2^*}$

avec  $(\tau_\alpha^*, \varepsilon_\alpha^*)$  extrémités du segment  $\mathbf{v}_{12}(\mathbf{w}) \ni \mathbf{w}$ .

# UNICITÉ DU SEGMENT $\mathbf{v}(\mathbf{w})$

*Théorème (G. Allaire, G. Faccanoni and S. Kokh)*

Soit  $\mathbf{w} \stackrel{\text{déf}}{=} (\tau, \varepsilon)$  un «état saturé». Si  $\tau_1^* \neq \tau_2^*$  et  $\varepsilon_1^* \neq \varepsilon_2^*$  alors

① UNICITÉ : il existe un et un seul  $\mathbf{v}(\mathbf{w}) \stackrel{\text{déf}}{=} \tau_{12}(\mathbf{w}) \neq 0$  tel que  
 $(\mathbf{v}(\mathbf{w}))^T d^2 s^{\text{eq}}(\mathbf{w}) \mathbf{v}(\mathbf{w}) = 0$ .

②  $s_{\tau\tau}^{\text{eq}} s_{\varepsilon\varepsilon}^{\text{eq}} = (s_{\tau\varepsilon}^{\text{eq}})^2$ ,  $s_{\tau\tau}^{\text{eq}} = \left( \frac{\varepsilon_1^* - \varepsilon_2^*}{\tau_1^* - \tau_2^*} \right)^2 s_{\varepsilon\varepsilon}^{\text{eq}}$  ;

③  $s_{\tau\tau}^{\text{eq}}, s_{\varepsilon\varepsilon}^{\text{eq}} < 0$ ,  $s_{\tau\varepsilon}^{\text{eq}} \neq 0$ ;  $P \neq -\frac{\varepsilon_1^* - \varepsilon_2^*}{\tau_1^* - \tau_2^*}$ ,  $T \neq \frac{\varepsilon_1^* - \varepsilon_2^*}{s_1^* - s_2^*}$

avec  $(\tau_\alpha^*, \varepsilon_\alpha^*)$  extrémités du segment  $\tau_{12}(\mathbf{w}) \ni \mathbf{w}$ .

Pour les Gaz Parfaits il faut que  $c_{V1} \neq c_{V2}$  ( $\neq$  [R. Menikoff, B.J. Plohr], [S. Jaouen], [Ph. Helluy, N. Seguin], ...)

# CINÉMATIQUE DU CHANGEMENT DE PHASE

## Corollaire

Soit  $\mathbf{w} \stackrel{\text{déf}}{=} (\tau, \varepsilon)$  un «état saturé». Si  $\tau_1^* \neq \tau_2^*$  et  $\varepsilon_1^* \neq \varepsilon_2^*$  alors

- ①  $c(\mathbf{w}) > 0$ ,
- ②  $s_{\tau\varepsilon}^{\text{eq}}(\mathbf{w}) > 0$

## Réponses

- ① le système d'Euler est strictement hyperbolique ( $\neq$  p-système),
- ② il existe une unique solution de Liu.

Solution physique  $\stackrel{\text{déf}}{=} l'$ unique solution de Liu

# CINÉMATIQUE DU CHANGEMENT DE PHASE

## Corollaire

Soit  $\mathbf{w} \stackrel{\text{déf}}{=} (\tau, \varepsilon)$  un «état saturé». Si  $\tau_1^* \neq \tau_2^*$  et  $\varepsilon_1^* \neq \varepsilon_2^*$  alors

- ①  $c(\mathbf{w}) > 0$ ,
- ②  $s_{\tau\varepsilon}^{\text{eq}}(\mathbf{w}) > 0$

## Réponses

- ① le système d'Euler est **strictement hyperbolique** ( $\neq$  p-système),
- ② il existe une unique solution de Liu.

Solution physique  $\stackrel{\text{déf}}{=} \text{l'unique solution de Liu}$

# CINÉMATIQUE DU CHANGEMENT DE PHASE

## Corollaire

Soit  $\mathbf{w} \stackrel{\text{déf}}{=} (\tau, \varepsilon)$  un «état saturé». Si  $\tau_1^* \neq \tau_2^*$  et  $\varepsilon_1^* \neq \varepsilon_2^*$  alors

①  $c(\mathbf{w}) > 0$ ,                      ②  $s_{\tau\varepsilon}^{\text{eq}}(\mathbf{w}) > 0$

## Réponses

- ① le système d'Euler est strictement hyperbolique ( $\neq$  p-système),
- ② il existe une **unique solution de Liu**.

Solution physique  $\stackrel{\text{déf}}{=} l'$ unique solution de Liu

# CINÉMATIQUE DU CHANGEMENT DE PHASE

## Corollaire

Soit  $\mathbf{w} \stackrel{\text{déf}}{=} (\tau, \varepsilon)$  un «état saturé». Si  $\tau_1^* \neq \tau_2^*$  et  $\varepsilon_1^* \neq \varepsilon_2^*$  alors

①  $c(\mathbf{w}) > 0$ ,                      ②  $s_{\tau\varepsilon}^{\text{eq}}(\mathbf{w}) > 0$

## Réponses

- ① le système d'Euler est strictement hyperbolique ( $\neq$  p-système),
- ② il existe une unique solution de Liu.

Solution physique  $\stackrel{\text{déf}}{=} \text{l'unique solution de Liu}$

## 1 *Modèle*

## 2 *Méthode numérique*

- Approche par relaxation
- Mise en œuvre
- Exemple(s)

## 3 *Conclusion*

## APPROXIMATION DE LA SOLUTION DE LIU

- Solveur de Riemann exact [A. Voß]
- Solveur qui capture l'unique solution qui admette un profil visqueux [S. Jaouen]
- Solveur(s) basé(s) sur une approche par relaxation [F. Coquel, B. Perthame], [Th. Barberon, Ph. Helluy], [Ph. Helluy, N. Seguin], ...

## APPROXIMATION DE LA SOLUTION DE LIU

- Solveur de Riemann exact [A. Voß]
- Solveur qui capture l'unique solution qui admette un profil visqueux [S. Jaouen]
- Solveur(s) basé(s) sur une approche par relaxation [F. Coquel, B. Perthame], [Th. Barberon, Ph. Helluy], [Ph. Helluy, N. Seguin], ...

## APPROXIMATION DE LA SOLUTION DE LIU

- Solveur de Riemann exact [A. Voß]
- Solveur qui capture l'unique solution qui admette un profil visqueux [S. Jaouen]
- Solveur(s) basé(s) sur une approche par relaxation [F. Coquel, B. Perthame], [Th. Barberon, Ph. Helluy], [Ph. Helluy, N. Seguin], ...

## APPROXIMATION DE LA SOLUTION DE LIU

- Solveur de Riemann exact [A. Voß]
- Solveur qui capture l'unique solution qui admette un profil visqueux [S. Jaouen]
- Solveur(s) basé(s) sur une **approche par relaxation** [F. Coquel, B. Perthame], [Th. Barberon, Ph. Helluy], [Ph. Helluy, N. Seguin], . . .

# APPROCHE PAR RELAXATION

$$\partial_t \mathbf{U} + \text{div} \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \mathbf{0}$$

## APPROCHE PAR RELAXATION

$$\partial_t \mathbf{V} + \operatorname{div} \mathbf{G}(\mathbf{V}) = \frac{1}{\mu} \mathbf{R}(\mathbf{V}) \quad \xrightarrow[\mu \rightarrow 0]{\text{Formellement}} \quad \partial_t \mathbf{U} + \operatorname{div} \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \mathbf{0}$$

$\frac{1}{\mu}$  <sup>def</sup> paramètre de relaxation

## APPROCHE PAR RELAXATION

$$\partial_t \mathbf{V} + \operatorname{div} \mathbf{G}(\mathbf{V}) = \frac{1}{\mu} \mathbf{R}(\mathbf{V}) \quad \xrightarrow[\mu \rightarrow 0]{\text{Formellement}} \quad \partial_t \mathbf{U} + \operatorname{div} \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \mathbf{0}$$

Système à saturation

$$\begin{cases} \partial_t \varrho + \operatorname{div}(\varrho \mathbf{u}) = 0 \\ \partial_t(\varrho \mathbf{u}) + \operatorname{div}(\varrho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + P^{\text{eq}}) = 0 \\ \partial_t(\varrho \mathbf{e}) + \operatorname{div}((\varrho \mathbf{e} + P^{\text{eq}}) \mathbf{u}) = 0 \end{cases}$$

$$P^{\text{eq}}(\varrho, \varepsilon) = \frac{\mathbf{s}_r^{\text{eq}}}{\mathbf{s}_e^{\text{eq}}}, \quad \mathbf{e} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} + \varepsilon$$

$\frac{1}{\mu} \stackrel{\text{def}}{=} \text{paramètre de relaxation}$

# APPROCHE PAR RELAXATION

$$\partial_t \mathbf{V} + \operatorname{div} \mathbf{G}(\mathbf{V}) = \frac{1}{\mu} \mathbf{R}(\mathbf{V}) \quad \xrightarrow[\mu \rightarrow 0]{\text{Formellement}} \quad \partial_t \mathbf{U} + \operatorname{div} \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \mathbf{0}$$

2 fluides, 1 vitesse

$$\begin{cases} \partial_t \varrho + \operatorname{div}(\varrho \mathbf{u}) = 0 \\ \partial_t(\varrho \mathbf{u}) + \operatorname{div}(\varrho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + \mathbf{P}) = 0 \\ \partial_t(\varrho \mathbf{e}) + \operatorname{div}((\varrho \mathbf{e} + \mathbf{P})\mathbf{u}) = 0 \end{cases}$$

$$P(\varrho, \varepsilon, \mathbf{z}, \mathbf{y}, \psi) = \frac{\sigma_r}{\sigma_\varepsilon}$$

Système à saturation

$$\begin{cases} \partial_t \varrho + \operatorname{div}(\varrho \mathbf{u}) = 0 \\ \partial_t(\varrho \mathbf{u}) + \operatorname{div}(\varrho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + \mathbf{P}^{\text{eq}}) = 0 \\ \partial_t(\varrho \mathbf{e}) + \operatorname{div}((\varrho \mathbf{e} + \mathbf{P}^{\text{eq}})\mathbf{u}) = 0 \end{cases}$$

$$P^{\text{eq}}(\varrho, \varepsilon) = \frac{\mathbf{s}_r^{\text{eq}}}{\mathbf{s}_\varepsilon^{\text{eq}}}, \quad \mathbf{e} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} + \varepsilon$$

$\frac{1}{\mu} \stackrel{\text{def}}{=} \text{paramètre de relaxation}$

## APPROCHE PAR RELAXATION

$$\partial_t \mathbf{V} + \operatorname{div} \mathbf{G}(\mathbf{V}) = \frac{1}{\mu} \mathbf{R}(\mathbf{V}) \quad \xrightarrow[\mu \rightarrow 0]{\text{Formellement}} \quad \partial_t \mathbf{U} + \operatorname{div} \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \mathbf{0}$$

2 fluides, 1 vitesse

$$\begin{cases} \partial_t \varrho + \operatorname{div}(\varrho \mathbf{u}) = 0 \\ \partial_t(\varrho \mathbf{u}) + \operatorname{div}(\varrho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + P) = 0 \\ \partial_t(\varrho \mathbf{e}) + \operatorname{div}((\varrho \mathbf{e} + P)\mathbf{u}) = 0 \end{cases}$$

Dans l'interface

$$\begin{cases} \partial_t z + \mathbf{u} \cdot \operatorname{grad} z = \\ \partial_t y + \mathbf{u} \cdot \operatorname{grad} y = \\ \partial_t \psi + \mathbf{u} \cdot \operatorname{grad} \psi = \end{cases}$$

$$P(\varrho, \varepsilon, z, y, \psi) = \frac{\sigma_r}{\sigma_\varepsilon}$$

Système à saturation

$$\begin{cases} \partial_t \varrho + \operatorname{div}(\varrho \mathbf{u}) = 0 \\ \partial_t(\varrho \mathbf{u}) + \operatorname{div}(\varrho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + P^{\text{eq}}) = 0 \\ \partial_t(\varrho \mathbf{e}) + \operatorname{div}((\varrho \mathbf{e} + P^{\text{eq}})\mathbf{u}) = 0 \end{cases}$$

$$P^{\text{eq}}(\varrho, \varepsilon) = \frac{s_r^{\text{eq}}}{s_\varepsilon^{\text{eq}}}, \quad \mathbf{e} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} + \varepsilon$$

$\frac{1}{\mu} \stackrel{\text{def}}{=} \text{paramètre de relaxation}$

# APPROCHE PAR RELAXATION

$$\partial_t \mathbf{V} + \operatorname{div} \mathbf{G}(\mathbf{V}) = \frac{1}{\mu} \mathbf{R}(\mathbf{V}) \quad \xrightarrow[\mu \rightarrow 0]{\text{Formellement}} \quad \partial_t \mathbf{U} + \operatorname{div} \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \mathbf{0}$$

2 fluides, 1 vitesse

$$\begin{cases} \partial_t \varrho + \operatorname{div}(\varrho \mathbf{u}) = 0 \\ \partial_t(\varrho \mathbf{u}) + \operatorname{div}(\varrho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + P) = 0 \\ \partial_t(\varrho \mathbf{e}) + \operatorname{div}((\varrho \mathbf{e} + P)\mathbf{u}) = 0 \end{cases}$$

Dans l'interface

$$\begin{cases} \partial_t z + \mathbf{u} \cdot \mathbf{grad} z = \frac{1}{\mu} \left( \frac{P_2}{T_2} - \frac{P_1}{T_1} \right) \\ \partial_t y + \mathbf{u} \cdot \mathbf{grad} y = \frac{1}{\mu} \left( \frac{g_1}{T_1} - \frac{g_2}{T_2} \right) \frac{1}{\varrho} \\ \partial_t \psi + \mathbf{u} \cdot \mathbf{grad} \psi = \frac{1}{\mu} \left( \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right) \varepsilon \end{cases}$$

$$P(\varrho, \varepsilon, z, y, \psi) = \frac{\sigma_r}{\sigma_\varepsilon}$$

$$\xrightarrow[\mu \rightarrow 0]{\text{Formellement}}$$

Système à saturation

$$\begin{cases} \partial_t \varrho + \operatorname{div}(\varrho \mathbf{u}) = 0 \\ \partial_t(\varrho \mathbf{u}) + \operatorname{div}(\varrho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + P^{\text{eq}}) = 0 \\ \partial_t(\varrho \mathbf{e}) + \operatorname{div}((\varrho \mathbf{e} + P^{\text{eq}})\mathbf{u}) = 0 \end{cases}$$

$$P^{\text{eq}}(\varrho, \varepsilon) = \frac{\mathbf{s}_r^{\text{eq}}}{\mathbf{s}_\varepsilon^{\text{eq}}}, \quad \mathbf{e} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} + \varepsilon$$

$\frac{1}{\mu} \stackrel{\text{def}}{=} \text{paramètre de relaxation : temps de retour à l'équilibre.}$

## SCHÉMA À PAS FRACTIONNAIRES

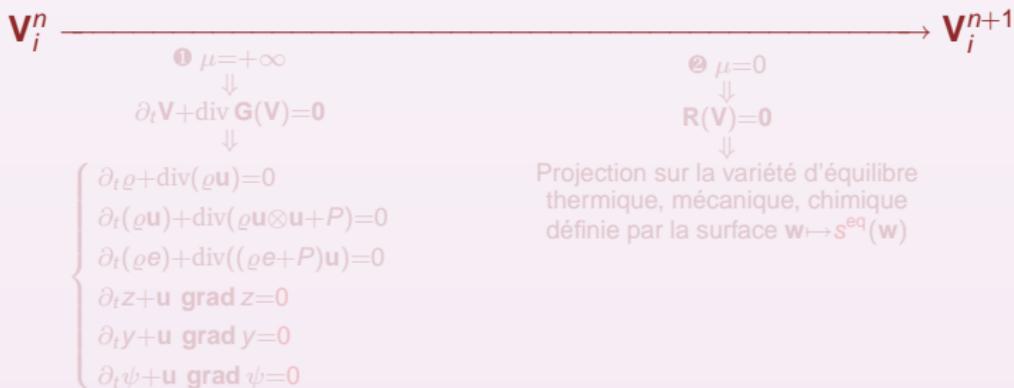
$$\partial_t \mathbf{V} + \text{div} \mathbf{G}(\mathbf{V}) = \frac{1}{\mu} \mathbf{R}(\mathbf{V})$$



- ③  $\partial_t \psi + \mathbf{u} \cdot \text{grad} \psi = 0 \rightarrow T_1 = T_2$  [G. Allaire, S. Clerc et S. Kokh], [S. Kokh et F. Lagoutière], ...
- ④ Pour les gaz parfaits résolution d'une équation non linéaire, sinon QHull (<http://www.qhull.org>) ou Inf-convolution [L. Conias, Y. Lucet, ...]

## SCHÉMA À PAS FRACTIONNAIRES

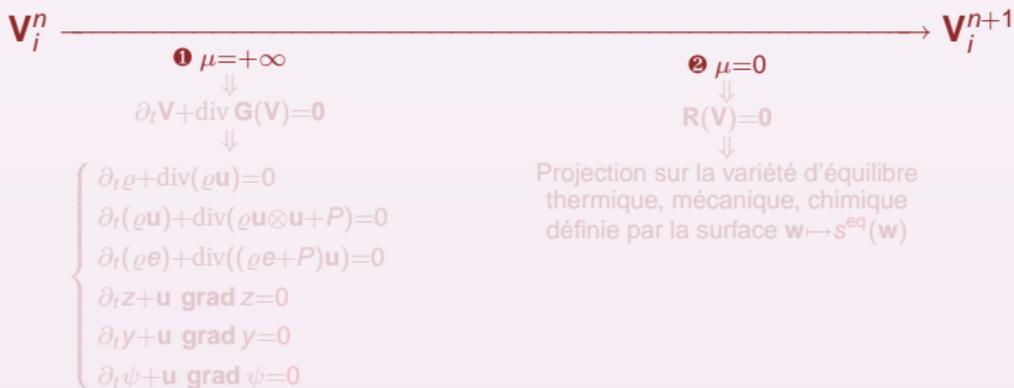
$$\partial_t \mathbf{V} + \text{div} \mathbf{G}(\mathbf{V}) = \frac{1}{\mu} \mathbf{R}(\mathbf{V})$$



- ①  $\partial_t \psi + \mathbf{u} \cdot \text{grad} \psi = 0 \rightsquigarrow T_1 = T_2$  [G. Allaire, S. Clerc et S. Kokh], [S. Kokh et F. Lagoutière], ...
- ② Pour les gaz parfaits résolution d'une équation non linéaire, sinon QHull (<http://www.qhull.org>) ou Inf-convolution [L. Corrias, Y. Lucet, ...]

# SCHÉMA À PAS FRACTIONNAIRES

$$\partial_t \mathbf{V} + \text{div} \mathbf{G}(\mathbf{V}) = \frac{1}{\mu} \mathbf{R}(\mathbf{V})$$



- ❶  $\partial_t \psi + \mathbf{u} \cdot \text{grad} \psi = 0 \rightsquigarrow T_1 = T_2$  [G. Allaire, S. Clerc et S. Kokh], [S. Kokh et F. Lagoutière], ...
- ❷ Pour les gaz parfaits résolution d'une équation non linéaire, sinon QHull (<http://www.qhull.org>) ou Inf-convolution [L. Corrias, Y. Lucet, ...]

# SCHÉMA À PAS FRACTIONNAIRES

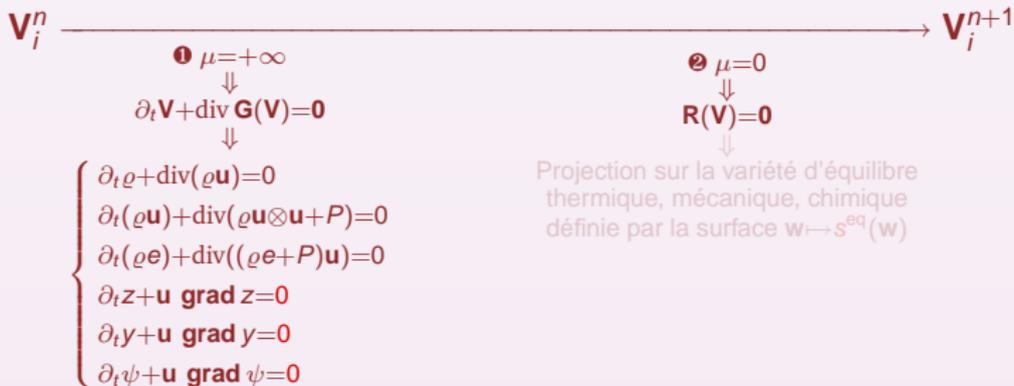
$$\partial_t \mathbf{V} + \text{div} \mathbf{G}(\mathbf{V}) = \frac{1}{\mu} \mathbf{R}(\mathbf{V})$$



- ①  $\partial_t \psi + \mathbf{u} \cdot \text{grad} \psi = 0 \rightsquigarrow T_1 = T_2$  [G. Allaire, S. Clerc et S. Kokh], [S. Kokh et F. Lagoutière], ...
- ② Pour les gaz parfaits résolution d'une équation non linéaire, sinon QHull (<http://www.qhull.org>) ou Inf-convolution [L. Corrias, Y. Lucet, ...]

# SCHÉMA À PAS FRACTIONNAIRES

$$\partial_t \mathbf{V} + \text{div} \mathbf{G}(\mathbf{V}) = \frac{1}{\mu} \mathbf{R}(\mathbf{V})$$



- ❶  $\partial_t \psi + \mathbf{u} \cdot \text{grad} \psi = 0 \rightsquigarrow T_1 = T_2$  [G. Allaire, S. Clerc et S. Kokh], [S. Kokh et F. Lagoutière], ...
- ❷ Pour les gaz parfaits résolution d'une équation non linéaire, sinon QHull (<http://www.qhull.org>) ou Inf-convolution [L. Corrias, Y. Lucet, ...]

# SCHÉMA À PAS FRACTIONNAIRES

$$\partial_t \mathbf{V} + \text{div} \mathbf{G}(\mathbf{V}) = \frac{1}{\mu} \mathbf{R}(\mathbf{V})$$



- ①  $\partial_t \psi + \mathbf{u} \cdot \text{grad} \psi = 0 \rightsquigarrow T_1 = T_2$  [G. Allaire, S. Clerc et S. Kokh], [S. Kokh et F. Lagoutière], ...
- ② Pour les gaz parfaits résolution d'une équation non linéaire, sinon QHull (<http://www.qhull.org>) ou Inf-convolution [L. Corrias, Y. Lucet, ...]

## CAS TEST

Lois d'état :  $w \mapsto s_\alpha \stackrel{\text{déf}}{=} c_{V,\alpha} \ln(\varepsilon T^{\gamma_\alpha - 1})$

		LIQUIDE	VAPEUR
$c_V$	[J · kg <sup>-1</sup> · K <sup>-1</sup> ]	1040.14	1816.2
$\gamma$	(= $c_p/c_v$ )	1.43	2.35
$\vartheta$	[JKm <sup>-1</sup> s <sup>-1</sup> ]	6 10 <sup>4</sup>	23 10 <sup>3</sup>

Données du problème de Riemann

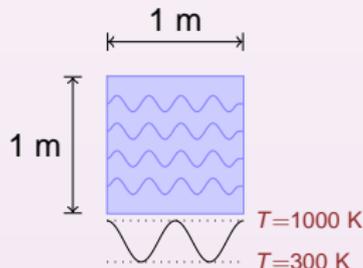
$T _{t=0} = 300 \text{ K}$	partout
$(P, \tau_1) _{t=0} (T)$	à saturation
$u = 0 \text{ m/s}$	partout

### Phénomènes

- Dynamique
- Diffusion de la chaleur
- Capillarité
- Gravité
- Changement de phase

### Géométrie

mesh :  $80 \times 80$  ;  $t_{\text{final}} = 1 \text{ s}$



# CAS TEST

▶ Skip

## CAS TEST

Lois d'état :  $w \mapsto s_\alpha \stackrel{\text{déf}}{=} c_{V\alpha} \ln(\varepsilon T^{\gamma_\alpha - 1})$

		LIQUIDE	VAPEUR
$c_V$	[J · kg <sup>-1</sup> · K <sup>-1</sup> ]	1040.14	1816.2
$\gamma$	(= $c_p/c_v$ )	1.43	2.35
$\vartheta$	[JKm <sup>-1</sup> s <sup>-1</sup> ]	$6 \cdot 10^4$	$23 \cdot 10^3$

Données du problème de Riemann

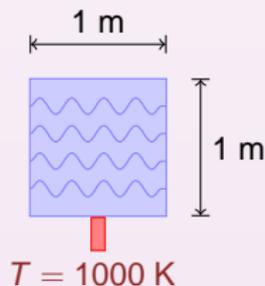
$T _{t=0} = 300 \text{ K}$	partout
$(P, \tau_1) _{t=0} (T)$	à saturation
$u = 0 \text{ m/s}$	partout

### Phénomènes

- Dynamique
- Diffusion de la chaleur
- **Capillarité**
- Gravité
- Changement de phase

### Géométrie

mesh :  $80 \times 80$  ;  $t_{\text{final}} = 1 \text{ s}$



# CAS TEST

▶ Skip

- 1 *Modèle*
- 2 *Méthode numérique*
- 3 *Conclusion*

- EOS globale à l'équilibre (maximisation d'une entropie)
- Système d'Euler strictement hyperbolique
- Unicité des solutions de Liu
- Approche par relaxation
- Schéma à pas fractionnaires avec
  - effets thermiques  $\sim$  2D implicite
  - capillarité  $\sim$  CSF [J.U. Brackbill, D.B. Kothe, C. Zemach]

- EOS globale à l'équilibre (maximisation d'une entropie)
- Système d'Euler strictement hyperbolique
- Unicité des solutions de Liu
- Approche par relaxation
- Schéma à pas fractionnaires avec
  - effets thermiques  $\sim$  2D implicite
  - capillarité  $\sim$  CSF [J.U. Brackbill, D.B. Kothe, C. Zemach]

- EOS globale à l'équilibre (maximisation d'une entropie)
- Système d'Euler strictement hyperbolique
- Unicité des solutions de Liu
- Approche par relaxation
- Schéma à pas fractionnaires avec
  - effets thermiques  $\sim$  2D implicite
  - capillarité  $\sim$  CSF [J.U. Brackbill, D.B. Kothe, C. Zemach]

- EOS globale à l'équilibre (maximisation d'une entropie)
- Système d'Euler strictement hyperbolique
- Unicité des solutions de Liu
- Approche par relaxation
- Schéma à pas fractionnaires avec
  - effets thermiques  $\sim$  2D implicite
  - capillarité  $\sim$  CSF [J.U. Brackbill, D.B. Kothe, C. Zemach]

- EOS globale à l'équilibre (maximisation d'une entropie)
- Système d'Euler strictement hyperbolique
- Unicité des solutions de Liu
- Approche par relaxation
- Schéma à pas fractionnaires avec
  - effets thermiques  $\leadsto$  2D implicite
  - capillarité  $\leadsto$  CSF [J.U. Brackbill, D.B. Kothe, C. Zemach]

- EOS globale à l'équilibre (maximisation d'une entropie)
- Système d'Euler strictement hyperbolique
- Unicité des solutions de Liu
- Approche par relaxation
- Schéma à pas fractionnaires avec
  - effets thermiques  $\rightsquigarrow$   $2D$  implicite
  - capillarité  $\rightsquigarrow$  CSF [J.U. Brackbill, D.B. Kothe, C. Zemach]

- EOS globale à l'équilibre (maximisation d'une entropie)
- Système d'Euler strictement hyperbolique
- Unicité des solutions de Liu
- Approche par relaxation
- Schéma à pas fractionnaires avec
  - effets thermiques  $\rightsquigarrow$  2D implicite
  - capillarité  $\rightsquigarrow$  CSF [J.U. Brackbill, D.B. Kothe, C. Zemach]