

ÉTUDE D'UN MODÈLE FIN DE CHANGEMENT DE PHASE LIQUIDE-VAPEUR

Contribution à l'étude de la crise d'ébullition

Gloria Faccanoni^{1,2} Grégoire Allaire^{1,2} Samuel Kokh²

¹École Polytechnique - CMAP

²CEA Saclay - SFME/LETR

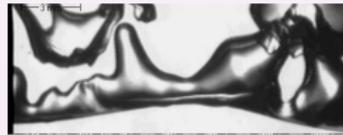


CRISE D'ÉBULLITION

Ébullition nucléée



Ébullition en film



source : http://www.spaceflight.esa.int/users/fluids/TT_boiling.htm

- 1 *Modèle*
- 2 *Méthode numérique*
- 3 *Conclusion*

- 1 *Modèle*
 - Construction
 - Propriétés
- 2 *Méthode numérique*
- 3 *Conclusion*

SYSTÈME DES ÉQUATIONS D'EULER

$$\begin{cases} \partial_t \varrho + \operatorname{div}(\varrho \mathbf{u}) = 0, \\ \partial_t(\varrho \mathbf{u}) + \operatorname{div}(\varrho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + P) = 0 \\ \partial_t \left(\varrho \left(\frac{|\mathbf{u}|^2}{2} + \varepsilon \right) \right) + \operatorname{div} \left(\left(\varrho \left(\frac{|\mathbf{u}|^2}{2} + \varepsilon \right) + P \right) \mathbf{u} \right) = 0. \end{cases}$$

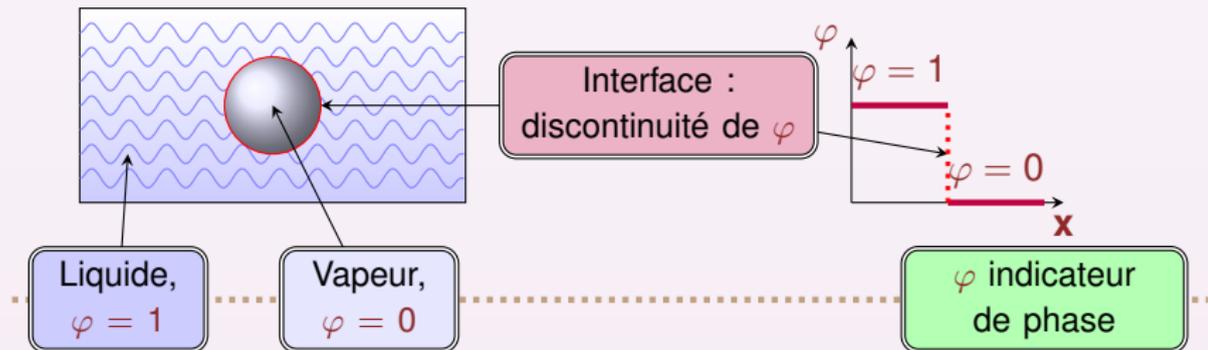
- $(\mathbf{x}, t) \mapsto \varrho$ densité molaire,
- $(\mathbf{x}, t) \mapsto \varepsilon$ énergie interne molaire,
- $(\mathbf{x}, t) \mapsto \mathbf{u}$ vitesse,
- $(\varrho, \varepsilon) \mapsto P$ loi de pression.

SYSTÈME DES ÉQUATIONS D'EULER

$$\begin{cases} \partial_t \varrho + \operatorname{div}(\varrho \mathbf{u}) = 0, \\ \partial_t(\varrho \mathbf{u}) + \operatorname{div}(\varrho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + \mathbf{P}) = 0 \\ \partial_t \left(\varrho \left(\frac{|\mathbf{u}|^2}{2} + \varepsilon \right) \right) + \operatorname{div} \left(\left(\varrho \left(\frac{|\mathbf{u}|^2}{2} + \varepsilon \right) + \mathbf{P} \right) \mathbf{u} \right) = 0. \end{cases}$$

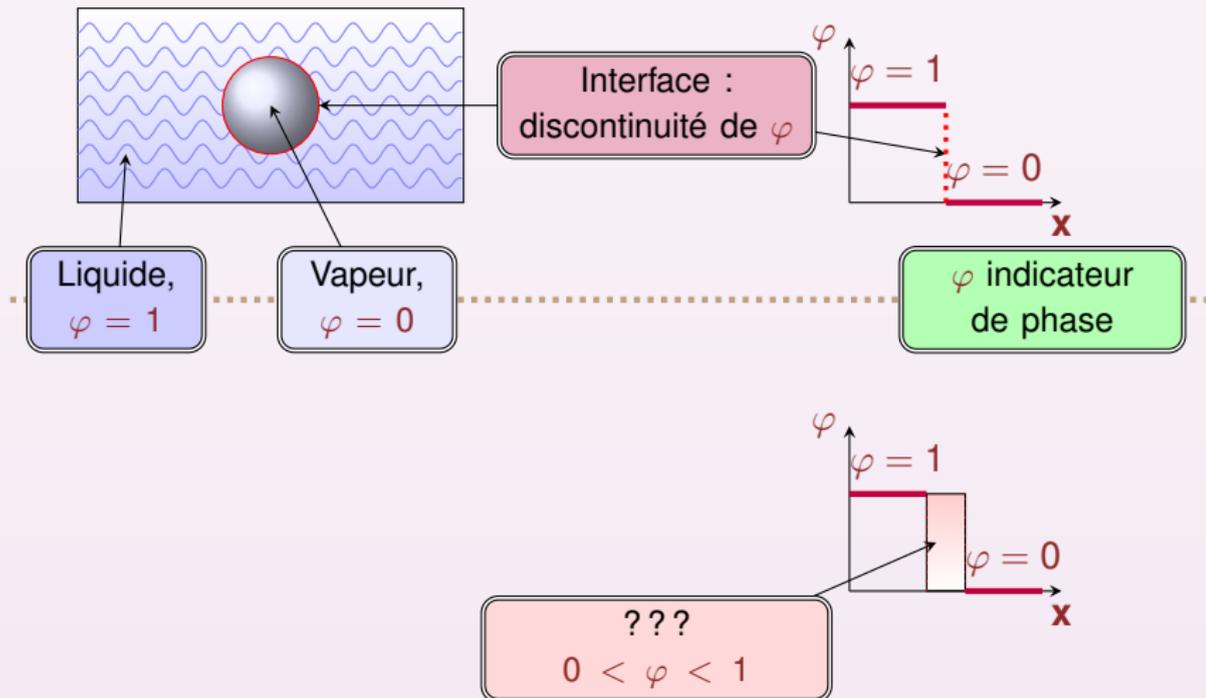
- $(\mathbf{x}, t) \mapsto \varrho$ densité molaire,
- $(\mathbf{x}, t) \mapsto \varepsilon$ énergie interne molaire,
- $(\mathbf{x}, t) \mapsto \mathbf{u}$ vitesse,
- $(\varrho, \varepsilon) \mapsto \mathbf{P}$ loi de pression.

INTERFACE LIQUIDE-VAPEUR

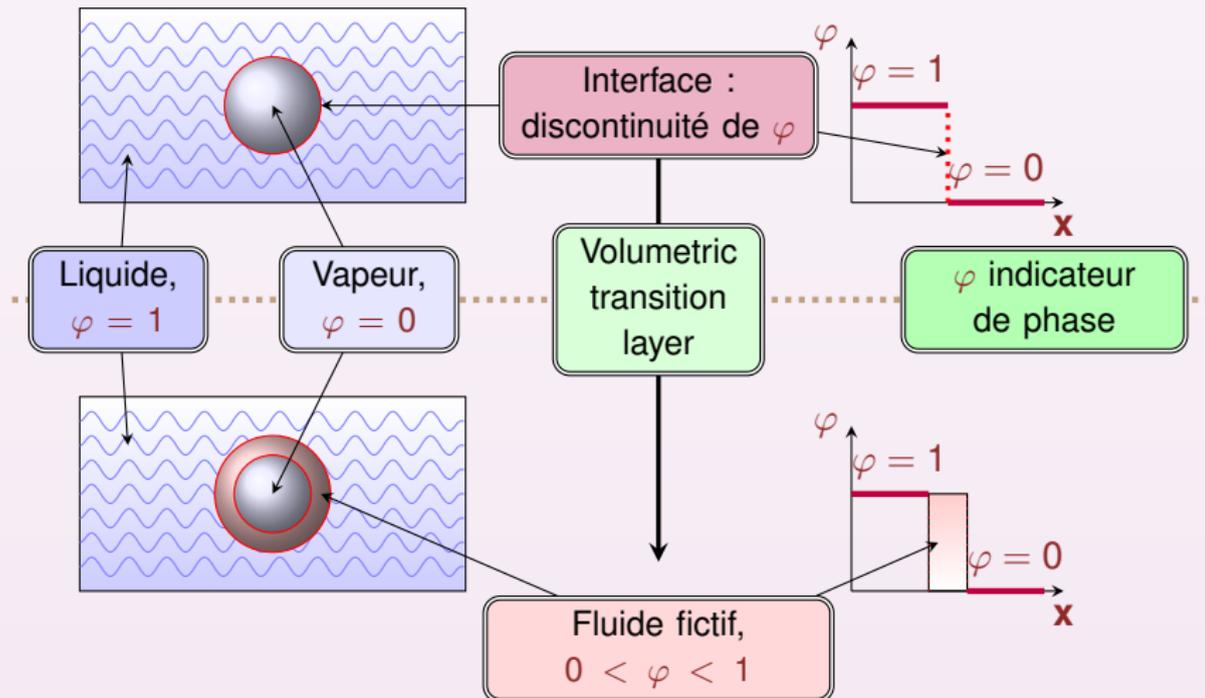


$$\partial_t \varphi + \mathbf{u} \cdot \text{grad } \varphi = 0$$

INTERFACE LIQUIDE-VAPEUR



INTERFACE LIQUIDE-VAPEUR



INTERFACE DIFFUSE

- «Construire» ce fluide dans la zone de coexistence
 - Second Gradient [C. Fouillet, D. Jamet, ...]
 - Phase Field [P. Ruyer, L. Truskinovsky, ...]
 - Chapman-Jouguet [O. Le Métayer, V. Perrier, R. Saurel, ...]
 - ...

INTERFACE DIFFUSE

- «Construire» ce fluide dans la zone de coexistence
 - Second Gradient [C. Fouillet, D. Jamet, ...]
 - Phase Field [P. Ruyer, L. Truskinovsky, ...]
 - Chapman-Jouguet [O. Le Métayer, V. Perrier, R. Saurel, ...]
 - ...
- Objectifs de notre construction :
 - $(\rho, \varepsilon, \mathbf{u}, P)$ continues (3 zones)
 - Position de l'interface implicite (\leadsto ~~δ~~)
 - Prise en compte automatique du changement de phase
 - Cohérence avec la thermodynamique classique [H. Callen]

LOI D'ÉTAT POUR CHAQUE PHASE $\alpha = 1, 2$

$$\left. \begin{array}{l} \tau_\alpha \text{ volume molaire} \\ \varepsilon_\alpha \text{ énergie interne molaire} \end{array} \right\} \Rightarrow \mathbf{w}_\alpha \stackrel{\text{déf}}{=} (\tau_\alpha, \varepsilon_\alpha);$$

$\mathbf{w}_\alpha \mapsto s_\alpha$ entropie molaire (d'hessienne déf. strict. nég.);

$$\left. \begin{array}{l} \tau_\alpha \stackrel{\text{déf}}{=} \left(\frac{\partial s_\alpha}{\partial \varepsilon_\alpha} \Big|_{\tau_\alpha} \right)^{-1} > 0 \text{ température,} \\ P_\alpha \stackrel{\text{déf}}{=} T_\alpha \frac{\partial s_\alpha}{\partial \tau_\alpha} \Big|_{\varepsilon_\alpha} > 0 \text{ pression,} \\ g_\alpha \stackrel{\text{déf}}{=} \varepsilon_\alpha + P_\alpha \tau_\alpha - T_\alpha s_\alpha \text{ enthalpie libre (potentiel de Gibbs).} \end{array} \right\}$$

LOI D'ÉTAT POUR CHAQUE PHASE $\alpha = 1, 2$

$$\left. \begin{array}{l} \tau_\alpha \text{ volume molaire} \\ \varepsilon_\alpha \text{ énergie interne molaire} \end{array} \right\} \Rightarrow \mathbf{w}_\alpha \stackrel{\text{déf}}{=} (\tau_\alpha, \varepsilon_\alpha);$$

$\mathbf{w}_\alpha \mapsto s_\alpha$ entropie molaire (d'hessienne déf. strict. nég.);

$$\left. \begin{array}{l} \tau_\alpha \stackrel{\text{déf}}{=} \left(\frac{\partial s_\alpha}{\partial \varepsilon_\alpha} \Big|_{\tau_\alpha} \right)^{-1} > 0 \text{ température,} \\ P_\alpha \stackrel{\text{déf}}{=} T_\alpha \frac{\partial s_\alpha}{\partial \tau_\alpha} \Big|_{\varepsilon_\alpha} > 0 \text{ pression,} \\ g_\alpha \stackrel{\text{déf}}{=} \varepsilon_\alpha + P_\alpha \tau_\alpha - T_\alpha s_\alpha \text{ enthalpie libre (potentiel de Gibbs).} \end{array} \right\}$$

LOI D'ÉTAT POUR CHAQUE PHASE $\alpha = 1, 2$

$$\left. \begin{array}{l} \tau_\alpha \text{ volume molaire} \\ \varepsilon_\alpha \text{ énergie interne molaire} \end{array} \right\} \Rightarrow \mathbf{w}_\alpha \stackrel{\text{déf}}{=} (\tau_\alpha, \varepsilon_\alpha);$$

$\mathbf{w}_\alpha \mapsto s_\alpha$ entropie molaire (d'hessienne déf. strict. nég.);

$$\left\{ \begin{array}{l} T_\alpha \stackrel{\text{déf}}{=} \left(\frac{\partial s_\alpha}{\partial \varepsilon_\alpha} \Big|_{\tau_\alpha} \right)^{-1} > 0 \quad \text{température,} \\ P_\alpha \stackrel{\text{déf}}{=} T_\alpha \frac{\partial s_\alpha}{\partial \tau_\alpha} \Big|_{\varepsilon_\alpha} > 0 \quad \text{pression,} \\ g_\alpha \stackrel{\text{déf}}{=} \varepsilon_\alpha + P_\alpha \tau_\alpha - T_\alpha s_\alpha \quad \text{enthalpie libre (potentiel de Gibbs).} \end{array} \right.$$

LOI D'ÉTAT SANS CHANGEMENT DE PHASE

- $\mathbf{w} \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{\alpha} y_{\alpha} \mathbf{w}_{\alpha}$;
- y_{α} fraction de masse, $\sum_{\alpha} y_{\alpha} = 1$;
- z_{α} fraction de volume, $\sum_{\alpha} z_{\alpha} = 1$ et $y_{\alpha} \tau_{\alpha} = z_{\alpha} \tau$;
- ψ_{α} fraction d'énergie, $\sum_{\alpha} \psi_{\alpha} = 1$ et $y_{\alpha} \varepsilon_{\alpha} = \psi_{\alpha} \varepsilon$.

LOI D'ÉTAT SANS CHANGEMENT DE PHASE

- $\mathbf{w} \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{\alpha} y_{\alpha} \mathbf{w}_{\alpha}$;
- y_{α} fraction de masse, $\sum_{\alpha} y_{\alpha} = 1$;
- z_{α} fraction de volume, $\sum_{\alpha} z_{\alpha} = 1$ et $y_{\alpha} \tau_{\alpha} = z_{\alpha} \tau$;
- ψ_{α} fraction d'énergie, $\sum_{\alpha} \psi_{\alpha} = 1$ et $y_{\alpha} \varepsilon_{\alpha} = \psi_{\alpha} \varepsilon$.

Entropie sans changement de phase

$$\sigma \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{\alpha} y_{\alpha} s_{\alpha}(\mathbf{w}_{\alpha}) = \sum_{\alpha} y_{\alpha} s_{\alpha} \left(\frac{z_{\alpha}}{y_{\alpha}} \tau, \frac{\psi_{\alpha}}{y_{\alpha}} \varepsilon \right)$$

LOI D'ÉTAT SANS CHANGEMENT DE PHASE

- $\mathbf{w} \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{\alpha} y_{\alpha} \mathbf{w}_{\alpha}$;
- y_{α} fraction de masse, $\sum_{\alpha} y_{\alpha} = 1$;
- z_{α} fraction de volume, $\sum_{\alpha} z_{\alpha} = 1$ et $y_{\alpha} \tau_{\alpha} = z_{\alpha} \tau$;
- ψ_{α} fraction d'énergie, $\sum_{\alpha} \psi_{\alpha} = 1$ et $y_{\alpha} \varepsilon_{\alpha} = \psi_{\alpha} \varepsilon$.

Entropie sans changement de phase

$$\sigma \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{\alpha} y_{\alpha} s_{\alpha}(\mathbf{w}_{\alpha}) = \sum_{\alpha} y_{\alpha} s_{\alpha} \left(\frac{z_{\alpha}}{y_{\alpha}} \tau, \frac{\psi_{\alpha}}{y_{\alpha}} \varepsilon \right)$$

LOI D'ÉTAT AVEC CHANGEMENT DE PHASE

Entropie sans Ch.Ph.

$$(\mathbf{w}_\alpha, \mathbf{w}) \mapsto \sigma$$



Entropie à l'équilibre

$$\mathbf{w} \mapsto s^{\text{eq}}$$

Définition [H. Callen, Ph. Helluy ...]

Problème d'optimisation :

$$s^{\text{eq}} \stackrel{\text{déf}}{=} \max_y (y s_1(\mathbf{w}_1) + (1 - y) s_2(\mathbf{w}_2))$$

$$\text{Contraintes : } \textcircled{1} \mathbf{w} = y \mathbf{w}_1 + (1 - y) \mathbf{w}_2$$

$$\textcircled{2} y \in [0, 1]$$

LOI D'ÉTAT AVEC CHANGEMENT DE PHASE

Entropie sans Ch.Ph.

$$(\mathbf{w}_\alpha, \mathbf{w}) \mapsto \sigma$$



Entropie à l'équilibre

$$\mathbf{w} \mapsto s^{\text{eq}}$$

Définition [H. Callen, Ph. Helluy ...]

Problème d'optimisation :

$$s^{\text{eq}} \stackrel{\text{def}}{=} \max_y (y s_1(\mathbf{w}_1) + (1 - y) s_2(\mathbf{w}_2))$$

$$\text{Contraintes : } \textcircled{1} \mathbf{w} = y \mathbf{w}_1 + (1 - y) \mathbf{w}_2$$

$$\textcircled{2} y \in [0, 1]$$

LOI D'ÉTAT AVEC CHANGEMENT DE PHASE

Entropie sans Ch.Ph.

$$(\mathbf{w}_\alpha, \mathbf{w}) \mapsto \sigma$$



Entropie à l'équilibre

$$\mathbf{w} \mapsto s^{\text{eq}}$$

Définition [H. Callen, Ph. Helluy ...]

Problème d'optimisation :

$$s^{\text{eq}} \stackrel{\text{def}}{=} \max_y (y s_1(\mathbf{w}_1) + (1 - y) s_2(\mathbf{w}_2))$$

$$\text{Contraintes : } \textcircled{1} \mathbf{w} = y \mathbf{w}_1 + (1 - y) \mathbf{w}_2$$

$$\textcircled{2} y \in [0, 1]$$

Condition d'optimalité : $T_1 = T_2, P_1 = P_2, g_1 = g_2$.

LOI D'ÉTAT AVEC CHANGEMENT DE PHASE

Entropie sans Ch.Ph.

$$(\mathbf{w}_\alpha, \mathbf{w}) \mapsto \sigma$$



Entropie à l'équilibre

$$\mathbf{w} \mapsto s^{\text{eq}}$$

Définition [H. Callen, Ph. Helluy ...]

Problème d'optimisation :

$$s^{\text{eq}} \stackrel{\text{déf}}{=} \max_y (y s_1(\mathbf{w}_1) + (1 - y) s_2(\mathbf{w}_2))$$

$$\text{Contraintes : } \textcircled{1} \mathbf{w} = y \mathbf{w}_1 + (1 - y) \mathbf{w}_2$$

$$\textcircled{2} y \in [0, 1]$$

\mathbf{w}_α^* $\stackrel{\text{déf}}{=}$ solution du problème d'optimisation.

CONSTRUCTION DE $\mathbf{w} \mapsto \mathbf{s}^{\text{EQ}}$

$$\mathbf{s}^{\text{eq}} \stackrel{\text{def}}{=} \max_y \sum_{\alpha} y_{\alpha} \mathbf{s}_{\alpha}(\mathbf{w}_{\alpha})$$

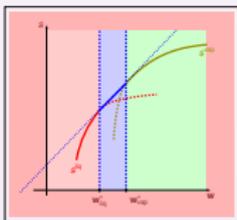
Contrainte :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \tau \\ \varepsilon \end{pmatrix} = \sum_{\alpha} y_{\alpha} \begin{pmatrix} 1 \\ \tau_{\alpha} \\ \varepsilon_{\alpha} \end{pmatrix}$$

CONSTRUCTION DE $\mathbf{w} \mapsto \mathbf{s}^{\text{EQ}}$

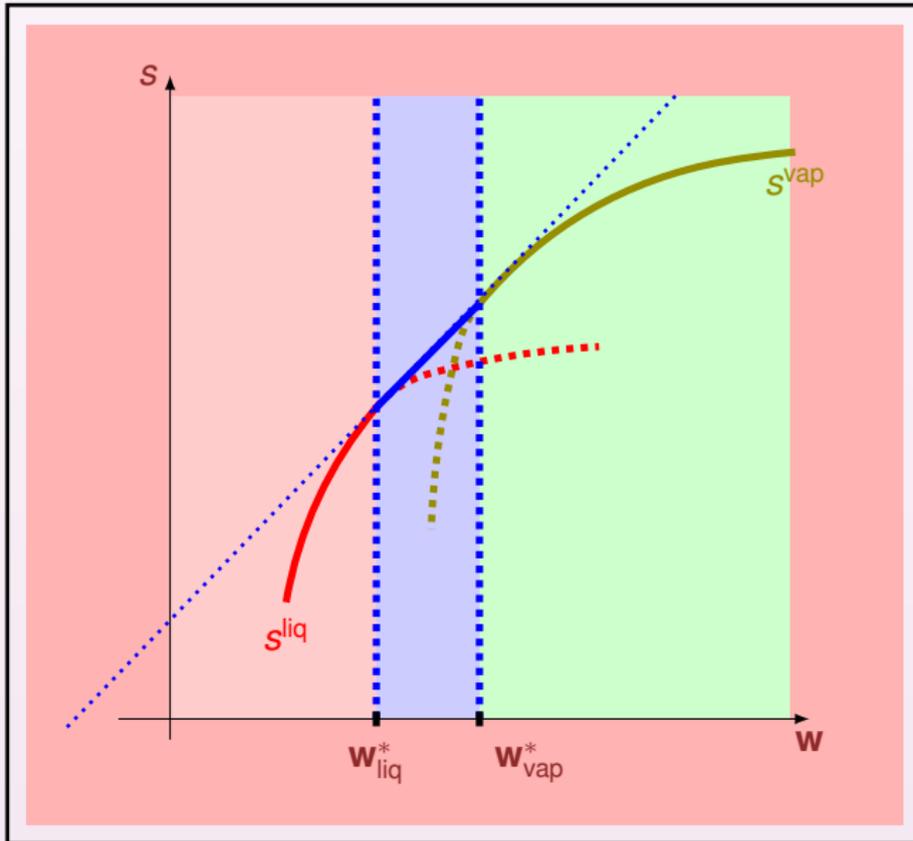
$$s^{\text{eq}} \stackrel{\text{def}}{=} \max_y \sum_{\alpha} y_{\alpha} s_{\alpha}(\mathbf{w}_{\alpha})$$

Bitangent



Contrainte :

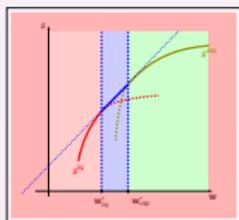
$$\begin{pmatrix} 1 \\ \tau \\ \varepsilon \end{pmatrix} = \sum_{\alpha} y_{\alpha} \begin{pmatrix} 1 \\ \tau_{\alpha} \\ \varepsilon_{\alpha} \end{pmatrix}$$



CONSTRUCTION DE $\mathbf{w} \mapsto \mathbf{s}^{\text{EQ}}$

$$s^{\text{eq}} \stackrel{\text{def}}{=} \max_y \sum_{\alpha} y_{\alpha} s_{\alpha}(\mathbf{w}_{\alpha})$$

Bitangent



$$s^{\text{eq}}(\mathbf{w}) \stackrel{\text{def}}{=} \text{enveloppe concave de} \\ \max \{ s_1(\mathbf{w}), s_2(\mathbf{w}) \}$$

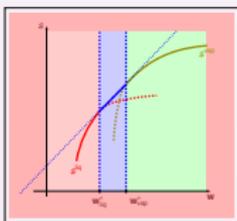
Contrainte :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \tau \\ \varepsilon \end{pmatrix} = \sum_{\alpha} y_{\alpha} \begin{pmatrix} 1 \\ \tau_{\alpha} \\ \varepsilon_{\alpha} \end{pmatrix}$$

CONSTRUCTION DE $\mathbf{w} \mapsto \mathbf{S}^{\text{EQ}}$

$$s^{\text{eq}} \stackrel{\text{def}}{=} \max_y \sum_{\alpha} y_{\alpha} s_{\alpha}(\mathbf{w}_{\alpha})$$

Bitangent



Inf-convolution
[Ph. Helluy, N. Seguin]

$s^{\text{eq}}(\mathbf{w}) \stackrel{\text{def}}{=} \text{enveloppe concave de}$
 $\max \{ s_1(\mathbf{w}), s_2(\mathbf{w}) \}$

$$S^{\text{eq}} \begin{pmatrix} y \\ y\tau_1 \\ y\varepsilon_1 \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} - \left\{ \left[-S_1 \begin{pmatrix} y \\ y\tau_1 \\ y\varepsilon_1 \end{pmatrix} \right] \square \left[-S_2 \begin{pmatrix} 1-y \\ \tau-y\tau_1 \\ \varepsilon-y\varepsilon_1 \end{pmatrix} \right] \right\}$$

Contrainte :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \tau \\ \varepsilon \end{pmatrix} = \sum_{\alpha} y_{\alpha} \begin{pmatrix} 1 \\ \tau_{\alpha} \\ \varepsilon_{\alpha} \end{pmatrix}$$

$$S^{\text{eq}} \stackrel{\text{def}}{=} - [(-S_1)^* + (-S_2)^*]^*$$

CINÉMATIQUE DU CHANGEMENT DE PHASE

Équations d'évolution

$$\begin{cases} \partial_t \varrho + \operatorname{div}(\varrho \mathbf{u}) = 0, \\ \partial_t(\varrho \mathbf{u}) + \operatorname{div}(\varrho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + \mathbf{P}^{\text{eq}}) = 0 \\ \partial_t \left(\varrho \left(\frac{|\mathbf{u}|^2}{2} + \varepsilon \right) \right) + \operatorname{div} \left(\varrho \left(\frac{|\mathbf{u}|^2}{2} + \varepsilon \right) \mathbf{u} + \mathbf{P}^{\text{eq}} \mathbf{u} \right) = 0 \end{cases}$$

avec $\mathbf{P}^{\text{eq}} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathbf{S}_\tau^{\text{eq}}}{\mathbf{S}_\varepsilon^{\text{eq}}}$.

Questions :

- ① Hyperbolicité
- ② Problème de Riemann

CINÉMATIQUE DU CHANGEMENT DE PHASE

Équations d'évolution

$$\begin{cases} \partial_t \varrho + \operatorname{div}(\varrho \mathbf{u}) = 0, \\ \partial_t(\varrho \mathbf{u}) + \operatorname{div}(\varrho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + \mathbf{P}^{\text{eq}}) = 0 \\ \partial_t \left(\varrho \left(\frac{|\mathbf{u}|^2}{2} + \varepsilon \right) \right) + \operatorname{div} \left(\varrho \left(\frac{|\mathbf{u}|^2}{2} + \varepsilon \right) \mathbf{u} + \mathbf{P}^{\text{eq}} \mathbf{u} \right) = 0 \end{cases}$$

avec $\mathbf{P}^{\text{eq}} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathbf{s}_\tau^{\text{eq}}}{\mathbf{s}_\varepsilon^{\text{eq}}}$.

Questions :

- 1 Hyperbolicité
- 2 Problème de Riemann

① HYPERBOLICITÉ : SPECTRE DE LA JACOBIEENNE

$$\partial_t \begin{pmatrix} \rho \\ u \\ \varepsilon \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u & \rho & 0 \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial P^{\text{eq}}}{\partial \rho} \Big|_{\varepsilon} & u & \frac{1}{\rho} \frac{\partial P^{\text{eq}}}{\partial \varepsilon} \Big|_{\rho} \\ 0 & \frac{P^{\text{eq}}}{\rho} & u \end{pmatrix} \partial_x \begin{pmatrix} \rho \\ u \\ \varepsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Valeurs propres : $\lambda_1 = u - c$, $\lambda_2 = u$, $\lambda_3 = u + c$
- Vecteurs propres (à droite) associés :

$$\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} \rho^2 \\ -c\rho \\ P^{\text{eq}} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} \partial P^{\text{eq}} / \partial \varepsilon \\ 0 \\ -\partial P^{\text{eq}} / \partial \rho \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_3 = \begin{pmatrix} \rho^2 \\ c\rho \\ P^{\text{eq}} \end{pmatrix},$$

où c est la vitesse du son dont le carré s'écrit

$$c^2 = \tau^2 \left(P^{\text{eq}} \frac{\partial P^{\text{eq}}}{\partial \varepsilon} \Big|_{\tau} - \frac{\partial P^{\text{eq}}}{\partial \tau} \Big|_{\varepsilon} \right).$$

① HYPERBOLICITÉ : SPECTRE DE LA JACOBIEENNE

$$\partial_t \begin{pmatrix} \rho \\ u \\ \varepsilon \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u & \rho & 0 \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial P^{\text{eq}}}{\partial \rho} \Big|_{\varepsilon} & u & \frac{1}{\rho} \frac{\partial P^{\text{eq}}}{\partial \varepsilon} \Big|_{\rho} \\ 0 & \frac{P^{\text{eq}}}{\rho} & u \end{pmatrix} \partial_x \begin{pmatrix} \rho \\ u \\ \varepsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Valeurs propres : $\lambda_1 = u - c$, $\lambda_2 = u$, $\lambda_3 = u + c$
- Vecteurs propres (à droite) associés :

$$\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} \rho^2 \\ -c\rho \\ P^{\text{eq}} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} \partial P^{\text{eq}} / \partial \varepsilon \\ 0 \\ -\partial P^{\text{eq}} / \partial \rho \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_3 = \begin{pmatrix} \rho^2 \\ c\rho \\ P^{\text{eq}} \end{pmatrix},$$

où c est la vitesse du son dont le carré s'écrit

$$c^2 = \tau^2 \left(P^{\text{eq}} \frac{\partial P^{\text{eq}}}{\partial \varepsilon} \Big|_{\tau} - \frac{\partial P^{\text{eq}}}{\partial \tau} \Big|_{\varepsilon} \right).$$

Hyperbolicité du système d'Euler

- si $c < 0$ alors $\lambda_{1,3} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ donc le système est **non hyperbolique** (ex. système d'Euler avec P de Van der Waals),
- si $c = 0$ alors $\lambda_i \in \mathbb{R}$ mais la jacobienne n'est pas diagonalisable et donc le système est **faiblement hyperbolique**
- si $c > 0$ alors $\lambda_i \in \mathbb{R}$ et $\lambda_i \neq \lambda_j$ pour $i \neq j$ donc le système est **strictement hyperbolique** (ex. système d'Euler avec P dans une phase pure).

Hyperbolicité du système d'Euler

- si $c < 0$ alors $\lambda_{1,3} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ donc le système est **non hyperbolique** (ex. système d'Euler avec P de Van der Waals),
- si $c = 0$ alors $\lambda_i \in \mathbb{R}$ mais la jacobienne n'est pas diagonalisable et donc le système est **faiblement hyperbolique**
- si $c > 0$ alors $\lambda_i \in \mathbb{R}$ et $\lambda_i \neq \lambda_j$ pour $i \neq j$ donc le système est **strictement hyperbolique** (ex. système d'Euler avec P dans une phase pure).

Avec le changement de phase $c > 0$

Hyperbolicité du système d'Euler

- si $c < 0$ alors $\lambda_{1,3} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ donc le système est **non hyperbolique** (ex. système d'Euler avec P de Van der Waals),
- si $c = 0$ alors $\lambda_i \in \mathbb{R}$ mais la jacobienne n'est pas diagonalisable et donc le système est **faiblement hyperbolique**
- si $c > 0$ alors $\lambda_i \in \mathbb{R}$ et $\lambda_i \neq \lambda_j$ pour $i \neq j$ donc le système est **strictement hyperbolique** (ex. système d'Euler avec P dans une phase pure).

Avec le changement de phase $c > 0$

Remarque

$$c^2 = -\tau^2 T^{\text{eq}} \begin{bmatrix} P^{\text{eq}}, & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{\varepsilon\varepsilon}^{\text{eq}} & s_{\tau\varepsilon}^{\text{eq}} \\ s_{\tau\varepsilon}^{\text{eq}} & s_{\tau\tau}^{\text{eq}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P^{\text{eq}} \\ -1 \end{bmatrix}$$

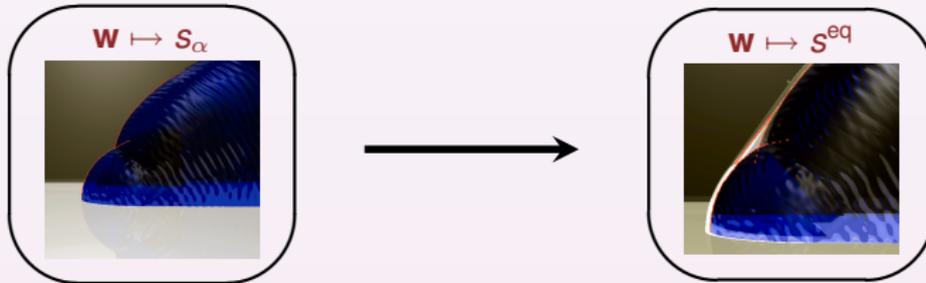
② PROBLÈME DE RIEMANN

Non unicité des solutions entropiques [R. Menikoff, B.J. Plohr]



Critère(s) de sélection ?

ENVELOPPE CONCAVE



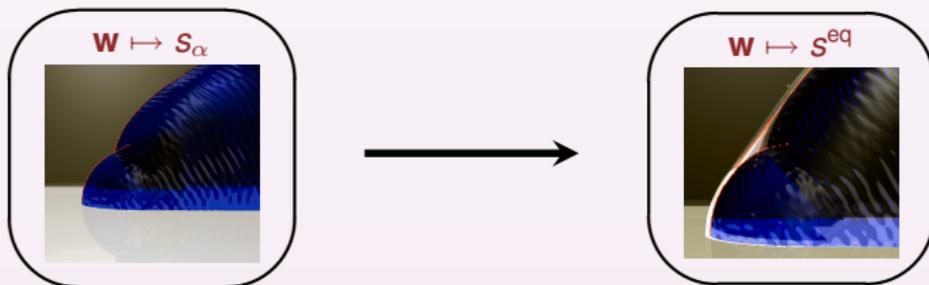
Hessienne de $w \mapsto S^{eq}$

$\forall w$ étatphasique : $\mathbf{v}^T d^2 S^{eq}(w) \mathbf{v} < 0 \quad \forall \mathbf{v} \neq 0$,

$\forall w$ état de coexistence : $\exists \mathbf{v}(w) \neq 0$ tq $(\mathbf{v}(w))^T d^2 S^{eq}(w) \mathbf{v}(w) = 0$.

① Hyperbolicité : $\forall w$ état de coexistence, $\mathbf{v}(w) \stackrel{?}{\equiv} [P^{eq}(w), -1]$

ENVELOPPE CONCAVE



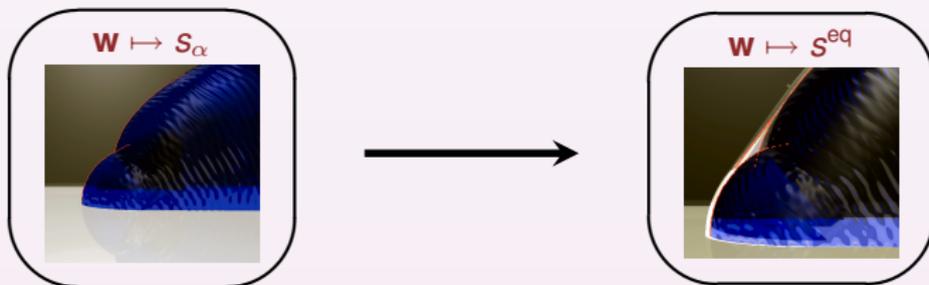
Hessienne de $\mathbf{w} \mapsto s^{eq}$

$\forall \mathbf{w}$ étatphasique : $\mathbf{v}^T d^2 s^{eq}(\mathbf{w}) \mathbf{v} < 0 \quad \forall \mathbf{v} \neq 0$,

$\forall \mathbf{w}$ état de coexistence : $\exists \mathbf{v}(\mathbf{w}) \neq 0$ tq $(\mathbf{v}(\mathbf{w}))^T d^2 s^{eq}(\mathbf{w}) \mathbf{v}(\mathbf{w}) = 0$.

① Hyperbolicité : $\forall \mathbf{w}$ état de coexistence, $\mathbf{v}(\mathbf{w}) \stackrel{?}{\equiv} [P^{eq}(\mathbf{w}), -1]$

ENVELOPPE CONCAVE



Hessienne de $\mathbf{w} \mapsto s^{eq}$

$\forall \mathbf{w}$ étatphasique : $\mathbf{v}^T d^2 s^{eq}(\mathbf{w}) \mathbf{v} < 0 \quad \forall \mathbf{v} \neq 0$,

$\forall \mathbf{w}$ état de coexistence : $\exists \mathbf{v}(\mathbf{w}) \neq 0$ tq $(\mathbf{v}(\mathbf{w}))^T d^2 s^{eq}(\mathbf{w}) \mathbf{v}(\mathbf{w}) = 0$.

❶ Hyperbolicité : $\forall \mathbf{w}$ état de coexistence, $\mathbf{v}(\mathbf{w}) \stackrel{?}{\equiv} [P^{eq}(\mathbf{w}), -1]$

UNICITÉ DU SEGMENT $\mathbf{v}(\mathbf{w})$

Théorème (G. Allaire, G. Faccanoni and S. Kokh)

Soit $\mathbf{w} \stackrel{\text{déf}}{=} (\tau, \varepsilon)$ un «état saturé». Si $\tau_1^* \neq \tau_2^*$ et $\varepsilon_1^* \neq \varepsilon_2^*$ alors

① UNICITÉ : il existe un et un seul $\mathbf{v}(\mathbf{w}) \stackrel{\text{déf}}{=} \tau_{12}(\mathbf{w}) \neq 0$ tel que $(\mathbf{v}(\mathbf{w}))^T d^2 s^{\text{eq}}(\mathbf{w}) \mathbf{v}(\mathbf{w}) = 0$.

② $s_{\tau\tau}^{\text{eq}} s_{\varepsilon\varepsilon}^{\text{eq}} = (s_{\tau\varepsilon}^{\text{eq}})^2$, $s_{\tau\tau}^{\text{eq}} = \left(\frac{\varepsilon_1^* - \varepsilon_2^*}{\tau_1^* - \tau_2^*} \right)^2 s_{\varepsilon\varepsilon}^{\text{eq}}$;

③ $s_{\tau\tau}^{\text{eq}}, s_{\varepsilon\varepsilon}^{\text{eq}} < 0$, $s_{\tau\varepsilon}^{\text{eq}} \neq 0$; $P \neq -\frac{\varepsilon_1^* - \varepsilon_2^*}{\tau_1^* - \tau_2^*}$, $T \neq \frac{\varepsilon_1^* - \varepsilon_2^*}{s_1^* - s_2^*}$

avec $(\tau_\alpha^*, \varepsilon_\alpha^*)$ extrémités du segment $\tau_{12}(\mathbf{w}) \ni \mathbf{w}$.

UNICITÉ DU SEGMENT $\mathbf{v}(\mathbf{w})$

Théorème (G. Allaire, G. Faccanoni and S. Kokh)

Soit $\mathbf{w} \stackrel{\text{déf}}{=} (\tau, \varepsilon)$ un «état saturé». Si $\tau_1^* \neq \tau_2^*$ et $\varepsilon_1^* \neq \varepsilon_2^*$ alors

1 UNICITÉ : il existe un et un seul $\mathbf{v}(\mathbf{w}) \stackrel{\text{déf}}{=} \mathbf{v}_{12}(\mathbf{w}) \neq 0$ tel que $(\mathbf{v}(\mathbf{w}))^T \mathbf{d}^2 \mathbf{s}^{\text{eq}}(\mathbf{w}) \mathbf{v}(\mathbf{w}) = 0$.

2 $\mathbf{s}_{\tau\tau}^{\text{eq}}, \mathbf{s}_{\varepsilon\varepsilon}^{\text{eq}} = (\mathbf{s}_{\tau\varepsilon}^{\text{eq}})^2$, $\mathbf{s}_{\tau\tau}^{\text{eq}} = \left(\frac{\varepsilon_1^* - \varepsilon_2^*}{\tau_1^* - \tau_2^*} \right)^2 \mathbf{s}_{\varepsilon\varepsilon}^{\text{eq}}$;

3 $\mathbf{s}_{\tau\tau}^{\text{eq}}, \mathbf{s}_{\varepsilon\varepsilon}^{\text{eq}} < 0$, $\mathbf{s}_{\tau\varepsilon}^{\text{eq}} \neq 0$; $P \neq -\frac{\varepsilon_1^* - \varepsilon_2^*}{\tau_1^* - \tau_2^*}$, $T \neq \frac{\varepsilon_1^* - \varepsilon_2^*}{s_1^* - s_2^*}$

avec $(\tau_\alpha^*, \varepsilon_\alpha^*)$ extrémités du segment $\mathbf{v}_{12}(\mathbf{w}) \ni \mathbf{w}$.

UNICITÉ DU SEGMENT $\mathbf{v}(\mathbf{w})$

Théorème (G. Allaire, G. Faccanoni and S. Kokh)

Soit $\mathbf{w} \stackrel{\text{déf}}{=} (\tau, \varepsilon)$ un «état saturé». Si $\tau_1^* \neq \tau_2^*$ et $\varepsilon_1^* \neq \varepsilon_2^*$ alors

① UNICITÉ : il existe un et un seul $\mathbf{v}(\mathbf{w}) \stackrel{\text{déf}}{=} \tau_{12}(\mathbf{w}) \neq 0$ tel que
 $(\mathbf{v}(\mathbf{w}))^T d^2 s^{\text{eq}}(\mathbf{w}) \mathbf{v}(\mathbf{w}) = 0$.

② $s_{\tau\tau}^{\text{eq}} s_{\varepsilon\varepsilon}^{\text{eq}} = (s_{\tau\varepsilon}^{\text{eq}})^2$, $s_{\tau\tau}^{\text{eq}} = \left(\frac{\varepsilon_1^* - \varepsilon_2^*}{\tau_1^* - \tau_2^*} \right)^2 s_{\varepsilon\varepsilon}^{\text{eq}}$;

③ $s_{\tau\tau}^{\text{eq}}, s_{\varepsilon\varepsilon}^{\text{eq}} < 0$, $s_{\tau\varepsilon}^{\text{eq}} \neq 0$; $P \neq -\frac{\varepsilon_1^* - \varepsilon_2^*}{\tau_1^* - \tau_2^*}$, $T \neq \frac{\varepsilon_1^* - \varepsilon_2^*}{s_1^* - s_2^*}$

avec $(\tau_\alpha^*, \varepsilon_\alpha^*)$ extrémités du segment $\tau_{12}(\mathbf{w}) \ni \mathbf{w}$.

Pour les Gaz Parfaits il faut que $c_{v1} \neq c_{v2}$ (\neq [R. Menikoff, B.J. Plohr], [S. Jaouen], [Ph. Helluy, N. Seguin], ...)

CINÉMATIQUE DU CHANGEMENT DE PHASE

Corollaire

Soit $\mathbf{w} \stackrel{\text{déf}}{=} (\tau, \varepsilon)$ un «état saturé». Si $\tau_1^* \neq \tau_2^*$ et $\varepsilon_1^* \neq \varepsilon_2^*$ alors

① $c(\mathbf{w}) > 0$,

② $s_{\tau\varepsilon}^{\text{eq}}(\mathbf{w}) > 0$

Réponses

- ① le système d'Euler est strictement hyperbolique (\neq p-système),
- ② il existe une unique solution de Liu.

Solution physique $\stackrel{\text{déf}}{=} l'$ unique solution de Liu

CINÉMATIQUE DU CHANGEMENT DE PHASE

Corollaire

Soit $\mathbf{w} \stackrel{\text{déf}}{=} (\tau, \varepsilon)$ un «état saturé». Si $\tau_1^* \neq \tau_2^*$ et $\varepsilon_1^* \neq \varepsilon_2^*$ alors

① $c(\mathbf{w}) > 0$,

② $s_{\tau\varepsilon}^{\text{eq}}(\mathbf{w}) > 0$

Réponses

- ① le système d'Euler est **strictement hyperbolique** (\neq p-système),
- ② il existe une unique solution de Liu.

Solution physique $\stackrel{\text{déf}}{=} l'$ unique solution de Liu

CINÉMATIQUE DU CHANGEMENT DE PHASE

Corollaire

Soit $\mathbf{w} \stackrel{\text{déf}}{=} (\tau, \varepsilon)$ un «état saturé». Si $\tau_1^* \neq \tau_2^*$ et $\varepsilon_1^* \neq \varepsilon_2^*$ alors

❶ $c(\mathbf{w}) > 0$,

❷ $s_{\tau\varepsilon}^{\text{eq}}(\mathbf{w}) > 0$

Réponses

- ❶ le système d'Euler est strictement hyperbolique (\neq p-système),
- ❷ il existe une **unique solution de Liu**.

Solution physique $\stackrel{\text{déf}}{=} \text{l'unique solution de Liu}$

CINÉMATIQUE DU CHANGEMENT DE PHASE

Corollaire

Soit $\mathbf{w} \stackrel{\text{déf}}{=} (\tau, \varepsilon)$ un «état saturé». Si $\tau_1^* \neq \tau_2^*$ et $\varepsilon_1^* \neq \varepsilon_2^*$ alors

❶ $c(\mathbf{w}) > 0$,

❷ $s_{\tau\varepsilon}^{\text{eq}}(\mathbf{w}) > 0$

Réponses

- ❶ le système d'Euler est strictement hyperbolique (\neq p-système),
- ❷ il existe une unique solution de Liu.

Solution physique $\stackrel{\text{déf}}{=} \text{l'unique solution de Liu}$

1 *Modèle*

2 *Méthode numérique*

- Approche par relaxation
- Mise en œuvre
- Exemple(s)

3 *Conclusion*

APPROXIMATION DE LA SOLUTION DE LIU

- Solveur de Riemann exact [A. Voß]
- Solveur qui capture l'unique solution qui admette un profil visqueux [S. Jaouen]
- Solveur(s) basé(s) sur une approche par relaxation [F. Coquel, B. Perthame], [Th. Barberon, Ph. Helluy], [Ph. Helluy, N. Seguin], . . .

APPROXIMATION DE LA SOLUTION DE LIU

- Solveur de Riemann exact [A. Voß]
- Solveur qui capture l'unique solution qui admette un profil visqueux [S. Jaouen]
- Solveur(s) basé(s) sur une approche par relaxation [F. Coquel, B. Perthame], [Th. Barberon, Ph. Helluy], [Ph. Helluy, N. Seguin], . . .

APPROXIMATION DE LA SOLUTION DE LIU

- Solveur de Riemann exact [A. Voß]
- Solveur qui capture l'unique solution qui admette un profil visqueux [S. Jaouen]
- Solveur(s) basé(s) sur une approche par relaxation [F. Coquel, B. Perthame], [Th. Barberon, Ph. Helluy], [Ph. Helluy, N. Seguin], . . .

APPROXIMATION DE LA SOLUTION DE LIU

- Solveur de Riemann exact [A. Voß]
- Solveur qui capture l'unique solution qui admette un profil visqueux [S. Jaouen]
- Solveur(s) basé(s) sur une **approche par relaxation** [F. Coquel, B. Perthame], [Th. Barberon, Ph. Helluy], [Ph. Helluy, N. Seguin], . . .

APPROCHE PAR RELAXATION

$$\partial_t \mathbf{U} + \operatorname{div} \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \mathbf{0}$$

APPROCHE PAR RELAXATION

$$\partial_t \mathbf{V} + \operatorname{div} \mathbf{G}(\mathbf{V}) = \frac{1}{\mu} \mathbf{R}(\mathbf{V}) \quad \xrightarrow[\mu \rightarrow 0]{\text{Formellement}} \quad \partial_t \mathbf{U} + \operatorname{div} \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \mathbf{0}$$

$\frac{1}{\mu}$ ^{déf} paramètre de relaxation

APPROCHE PAR RELAXATION

$$\partial_t \mathbf{V} + \operatorname{div} \mathbf{G}(\mathbf{V}) = \frac{1}{\mu} \mathbf{R}(\mathbf{V}) \quad \xrightarrow[\mu \rightarrow 0]{\text{Formellement}} \quad \partial_t \mathbf{U} + \operatorname{div} \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \mathbf{0}$$

Systeme à saturation

$$\begin{cases} \partial_t \varrho + \operatorname{div}(\varrho \mathbf{u}) = 0 \\ \partial_t(\varrho \mathbf{u}) + \operatorname{div}(\varrho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + \mathbf{P}^{\text{eq}}) = 0 \\ \partial_t(\varrho \mathbf{e}) + \operatorname{div}((\varrho \mathbf{e} + \mathbf{P}^{\text{eq}}) \mathbf{u}) = 0 \end{cases}$$

$$\mathbf{P}^{\text{eq}}(\varrho, \varepsilon) = \frac{\mathbf{s}_r^{\text{eq}}}{\mathbf{s}_\varepsilon^{\text{eq}}}, \quad \mathbf{e} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} + \varepsilon$$

$\frac{1}{\mu} \stackrel{\text{def}}{=} \text{paramètre de relaxation}$

APPROCHE PAR RELAXATION

$$\partial_t \mathbf{V} + \operatorname{div} \mathbf{G}(\mathbf{V}) = \frac{1}{\mu} \mathbf{R}(\mathbf{V}) \quad \xrightarrow[\mu \rightarrow 0]{\text{Formellement}} \quad \partial_t \mathbf{U} + \operatorname{div} \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \mathbf{0}$$

2 fluides, 1 vitesse

$$\begin{cases} \partial_t \varrho + \operatorname{div}(\varrho \mathbf{u}) = 0 \\ \partial_t(\varrho \mathbf{u}) + \operatorname{div}(\varrho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + \mathbf{P}) = 0 \\ \partial_t(\varrho \mathbf{e}) + \operatorname{div}((\varrho \mathbf{e} + \mathbf{P})\mathbf{u}) = 0 \end{cases}$$

$$P(\varrho, \varepsilon, z, y, \psi) = \frac{\sigma_\tau}{\sigma_\varepsilon}$$

Système à saturation

$$\begin{cases} \partial_t \varrho + \operatorname{div}(\varrho \mathbf{u}) = 0 \\ \partial_t(\varrho \mathbf{u}) + \operatorname{div}(\varrho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + \mathbf{P}^{\text{eq}}) = 0 \\ \partial_t(\varrho \mathbf{e}) + \operatorname{div}((\varrho \mathbf{e} + \mathbf{P}^{\text{eq}})\mathbf{u}) = 0 \end{cases}$$

$$\mathbf{P}^{\text{eq}}(\varrho, \varepsilon) = \frac{\mathbf{s}_\tau^{\text{eq}}}{\mathbf{s}_\varepsilon^{\text{eq}}}, \quad \mathbf{e} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} + \varepsilon$$

$\frac{1}{\mu} \stackrel{\text{def}}{=} \text{paramètre de relaxation}$

APPROCHE PAR RELAXATION

$$\partial_t \mathbf{V} + \operatorname{div} \mathbf{G}(\mathbf{V}) = \frac{1}{\mu} \mathbf{R}(\mathbf{V}) \quad \xrightarrow[\mu \rightarrow 0]{\text{Formellement}} \quad \partial_t \mathbf{U} + \operatorname{div} \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \mathbf{0}$$

2 fluides, 1 vitesse

$$\begin{cases} \partial_t \varrho + \operatorname{div}(\varrho \mathbf{u}) = 0 \\ \partial_t(\varrho \mathbf{u}) + \operatorname{div}(\varrho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + P) = 0 \\ \partial_t(\varrho \mathbf{e}) + \operatorname{div}((\varrho \mathbf{e} + P)\mathbf{u}) = 0 \end{cases}$$

Dans l'interface

$$\begin{cases} \partial_t z + \mathbf{u} \cdot \operatorname{grad} z = \\ \partial_t y + \mathbf{u} \cdot \operatorname{grad} y = \\ \partial_t \psi + \mathbf{u} \cdot \operatorname{grad} \psi = \end{cases}$$

$$P(\varrho, \varepsilon, z, y, \psi) = \frac{\sigma_\tau}{\sigma_\varepsilon}$$

Système à saturation

$$\begin{cases} \partial_t \varrho + \operatorname{div}(\varrho \mathbf{u}) = 0 \\ \partial_t(\varrho \mathbf{u}) + \operatorname{div}(\varrho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + P^{\text{eq}}) = 0 \\ \partial_t(\varrho \mathbf{e}) + \operatorname{div}((\varrho \mathbf{e} + P^{\text{eq}})\mathbf{u}) = 0 \end{cases}$$

$$P^{\text{eq}}(\varrho, \varepsilon) = \frac{\mathbf{s}_\tau^{\text{eq}}}{\mathbf{s}_\varepsilon^{\text{eq}}}, \quad \mathbf{e} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} + \varepsilon$$

$\frac{1}{\mu} \stackrel{\text{def}}{=} \text{paramètre de relaxation}$

APPROCHE PAR RELAXATION

$$\partial_t \mathbf{V} + \operatorname{div} \mathbf{G}(\mathbf{V}) = \frac{1}{\mu} \mathbf{R}(\mathbf{V}) \quad \xrightarrow[\mu \rightarrow 0]{\text{Formellement}} \quad \partial_t \mathbf{U} + \operatorname{div} \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \mathbf{0}$$

2 fluides, 1 vitesse

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \varrho + \operatorname{div}(\varrho \mathbf{u}) = 0 \\ \partial_t(\varrho \mathbf{u}) + \operatorname{div}(\varrho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + P) = 0 \\ \partial_t(\varrho \mathbf{e}) + \operatorname{div}((\varrho \mathbf{e} + P)\mathbf{u}) = 0 \end{array} \right.$$

Dans l'interface

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t z + \mathbf{u} \cdot \operatorname{grad} z = \frac{1}{\mu} \left(\frac{P_2}{T_2} - \frac{P_1}{T_1} \right) \\ \partial_t y + \mathbf{u} \cdot \operatorname{grad} y = \frac{1}{\mu} \left(\frac{g_1}{T_1} - \frac{g_2}{T_2} \right) \frac{1}{\varrho} \\ \partial_t \psi + \mathbf{u} \cdot \operatorname{grad} \psi = \frac{1}{\mu} \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right) \varepsilon \end{array} \right.$$

$$P(\varrho, \varepsilon, z, y, \psi) = \frac{\sigma_\tau}{\sigma_\varepsilon}$$

$$\xrightarrow[\mu \rightarrow 0]{\text{Formellement}}$$

Système à saturation

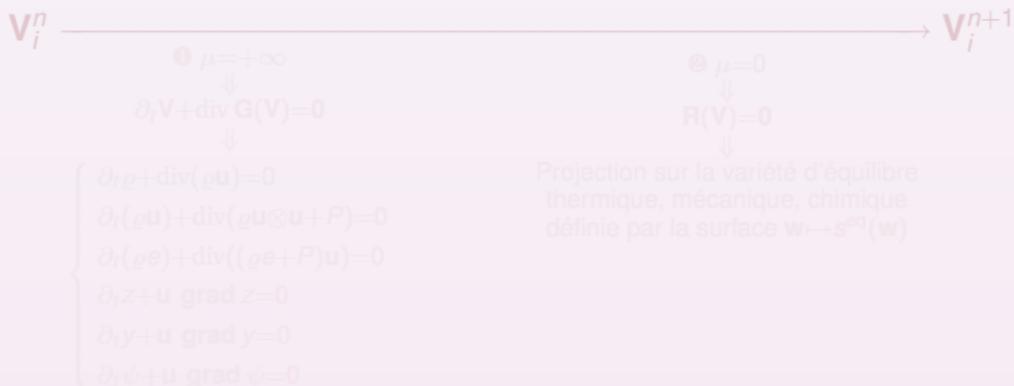
$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \varrho + \operatorname{div}(\varrho \mathbf{u}) = 0 \\ \partial_t(\varrho \mathbf{u}) + \operatorname{div}(\varrho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + P^{\text{eq}}) = 0 \\ \partial_t(\varrho \mathbf{e}) + \operatorname{div}((\varrho \mathbf{e} + P^{\text{eq}})\mathbf{u}) = 0 \end{array} \right.$$

$$P^{\text{eq}}(\varrho, \varepsilon) = \frac{\mathbf{s}_\tau^{\text{eq}}}{\mathbf{s}_\varepsilon^{\text{eq}}}, \quad \mathbf{e} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} + \varepsilon$$

$\frac{1}{\mu} \stackrel{\text{def}}{=} \text{paramètre de relaxation : temps de retour à l'équilibre.}$

SCHÉMA À PAS FRACTIONNAIRES

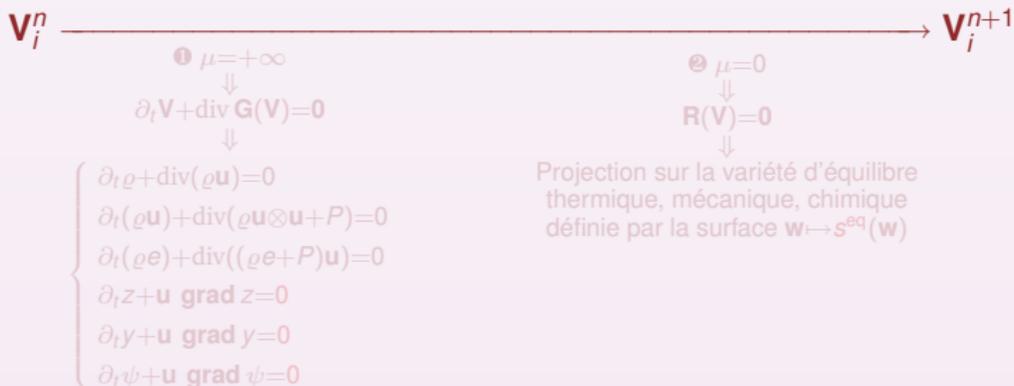
$$\partial_t \mathbf{V} + \text{div} \mathbf{G}(\mathbf{V}) = \frac{1}{\mu} \mathbf{R}(\mathbf{V})$$



- $\oplus \partial_t \psi + \mathbf{u} \cdot \text{grad} \psi = 0 \rightarrow T_1 = T_2$ [G. Allaire, S. Clerc et S. Kokh], [S. Kokh et F. Lagoutière], ...
- \oplus Pour les stiffened gas résolution d'une équation non linéaire, sinon QHull (<http://www.gbu11.org>) ou Inf-convolution [L. Comras, Y. Lucet, ...]

SCHÉMA À PAS FRACTIONNAIRES

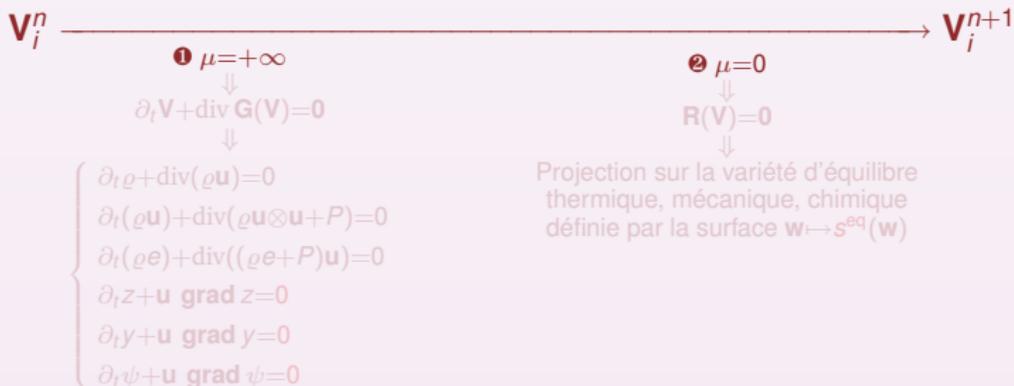
$$\partial_t \mathbf{V} + \text{div} \mathbf{G}(\mathbf{V}) = \frac{1}{\mu} \mathbf{R}(\mathbf{V})$$



- ① $\partial_t \psi + \mathbf{u} \cdot \text{grad} \psi = 0 \rightsquigarrow T_1 = T_2$ [G. Allaire, S. Clerc et S. Kokh], [S. Kokh et F. Lagoutière], ...
- ② Pour les stiffened gaz résolution d'une équation non linéaire, sinon QHull (<http://www.qhull.org>) ou Inf-convolution [L. Corrias, Y. Lucet, ...]

SCHÉMA À PAS FRACTIONNAIRES

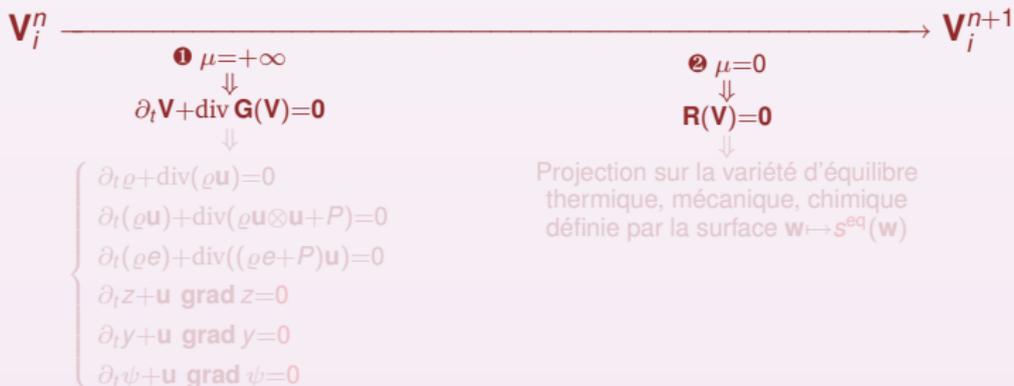
$$\partial_t \mathbf{V} + \text{div} \mathbf{G}(\mathbf{V}) = \frac{1}{\mu} \mathbf{R}(\mathbf{V})$$



- ① $\partial_t \psi + \mathbf{u} \cdot \text{grad} \psi = 0 \rightsquigarrow T_1 = T_2$ [G. Allaire, S. Clerc et S. Kokh], [S. Kokh et F. Lagoutière], ...
- ② Pour les stiffened gas résolution d'une équation non linéaire, sinon QHull (<http://www.qhull.org>) ou Inf-convolution [L. Corrias, Y. Lucet, ...]

SCHÉMA À PAS FRACTIONNAIRES

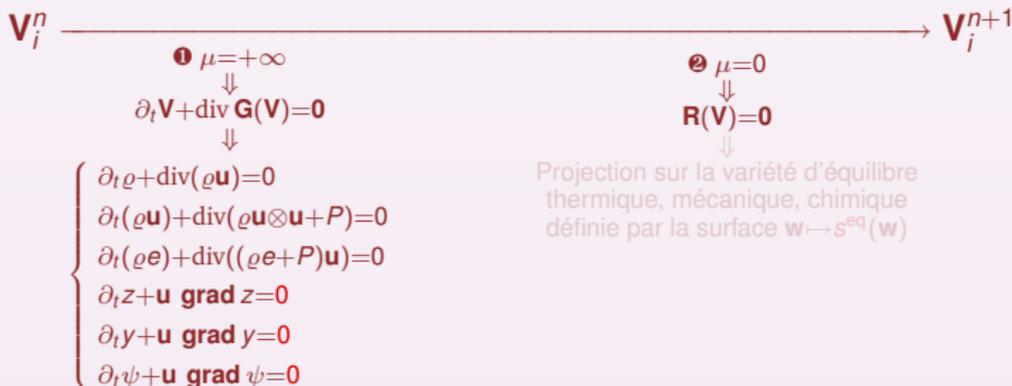
$$\partial_t \mathbf{V} + \text{div} \mathbf{G}(\mathbf{V}) = \frac{1}{\mu} \mathbf{R}(\mathbf{V})$$



- ① $\partial_t \psi + \mathbf{u} \cdot \text{grad} \psi = 0 \rightsquigarrow T_1 = T_2$ [G. Allaire, S. Clerc et S. Kokh], [S. Kokh et F. Lagoutière], ...
- ② Pour les stiffened gaz résolution d'une équation non linéaire, sinon QHull (<http://www.qhull.org>) ou Inf-convolution [L. Corrias, Y. Lucet, ...]

SCHÉMA À PAS FRACTIONNAIRES

$$\partial_t \mathbf{V} + \text{div} \mathbf{G}(\mathbf{V}) = \frac{1}{\mu} \mathbf{R}(\mathbf{V})$$



- ❶ $\partial_t \psi + \mathbf{u} \cdot \text{grad} \psi = 0 \rightsquigarrow T_1 = T_2$ [G. Allaire, S. Clerc et S. Kokh], [S. Kokh et F. Lagoutière], ...
- ❷ Pour les stiffened gaz résolution d'une équation non linéaire, sinon QHull (<http://www.qhull.org>) ou Inf-convolution [L. Corrias, Y. Lucet, ...]

SCHÉMA À PAS FRACTIONNAIRES

$$\partial_t \mathbf{V} + \operatorname{div} \mathbf{G}(\mathbf{V}) = \frac{1}{\mu} \mathbf{R}(\mathbf{V})$$

$$\mathbf{V}_i^n \xrightarrow{\hspace{15em}} \mathbf{V}_i^{n+1}$$

① $\mu = +\infty$



$$\partial_t \mathbf{V} + \operatorname{div} \mathbf{G}(\mathbf{V}) = 0$$



$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0 \\ \partial_t(\rho \mathbf{u}) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + P) = 0 \\ \partial_t(\rho e) + \operatorname{div}((\rho e + P)\mathbf{u}) = 0 \\ \partial_t z + \mathbf{u} \cdot \operatorname{grad} z = 0 \\ \partial_t y + \mathbf{u} \cdot \operatorname{grad} y = 0 \\ \partial_t \psi + \mathbf{u} \cdot \operatorname{grad} \psi = 0 \end{array} \right.$$

② $\mu = 0$



$$\mathbf{R}(\mathbf{V}) = 0$$



Projection sur la variété d'équilibre thermique, mécanique, chimique définie par la surface $\mathbf{w} \mapsto \mathbf{s}^{\text{eq}}(\mathbf{w})$



- ① $\partial_t \psi + \mathbf{u} \cdot \operatorname{grad} \psi = 0 \rightsquigarrow T_1 = T_2$ [G. Allaire, S. Clerc et S. Kokh], [S. Kokh et F. Lagoutière], ...
- ② Pour les stiffened gaz résolution d'une équation non linéaire, sinon QHull (<http://www.qhull.org>) ou Inf-convolution [L. Corrias, Y. Lucet, ...]

CAS TEST

Lois d'état : $w \mapsto s_\alpha \stackrel{\text{déf}}{=} c_{V\alpha} \ln(\varepsilon T^{\gamma\alpha-1})$

	LIQUIDE	VAPEUR
c_v [J · kg ⁻¹ · K ⁻¹]	1040.14	1816.2
γ (= c_p/c_v)	1.43	2.35
ϑ [JKm ⁻¹ s ⁻¹]	$6 \cdot 10^4$	$23 \cdot 10^3$

Données du problème de Riemann

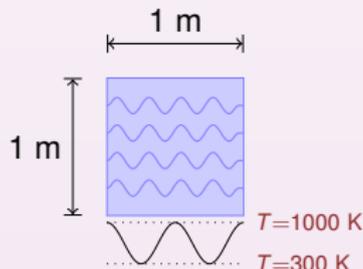
$T _{t=0} = 300 \text{ K}$	partout
$(P, \tau_1) _{t=0} (T)$	à saturation
$u = 0 \text{ m/s}$	partout

Phénomènes

- Dynamique
- Diffusion de la chaleur
- Capillarité
- Gravité
- Changement de phase

Géométrie

mesh : 80×80 ; $t_{\text{final}} = 1 \text{ s}$



CAS TEST

▶ Skip

CAS TEST

Lois d'état : $w \mapsto s_\alpha \stackrel{\text{déf}}{=} c_{V_\alpha} \ln(\varepsilon T^{\gamma_\alpha - 1})$

	LIQUIDE	VAPEUR
c_v [J · kg ⁻¹ · K ⁻¹]	1040.14	1816.2
γ (= c_p/c_v)	1.43	2.35
ϑ [JKm ⁻¹ s ⁻¹]	$6 \cdot 10^4$	$23 \cdot 10^3$

Données du problème de Riemann

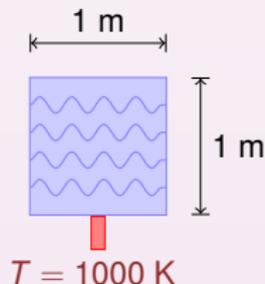
$T _{t=0} = 300 \text{ K}$	partout
$(P, \tau_1) _{t=0} (T)$	à saturation
$u = 0 \text{ m/s}$	partout

Phénomènes

- Dynamique
- Diffusion de la chaleur
- **Capillarité**
- Gravité
- Changement de phase

Géométrie

mesh : 80×80 ; $t_{\text{final}} = 1 \text{ s}$



CAS TEST

▶ Skip

- 1 *Modèle*
- 2 *Méthode numérique*
- 3 *Conclusion*

- EOS globale à l'équilibre (maximisation d'une entropie)
- Système d'Euler strictement hyperbolique
- Unicité des solutions de Liu
- Approche par relaxation
- Schéma à pas fractionnaires avec
 - effets thermiques \leadsto 2D implicite
 - capillarité \leadsto CSF [J.U. Brackbill, D.B. Kothe, C. Zemach]

- EOS globale à l'équilibre (maximisation d'une entropie)
- Système d'Euler strictement hyperbolique
- Unicité des solutions de Liu
- Approche par relaxation
- Schéma à pas fractionnaires avec
 - effets thermiques \leadsto 2D implicite
 - capillarité \leadsto CSF [J.U. Brackbill, D.B. Kothe, G. Zemach]

- EOS globale à l'équilibre (maximisation d'une entropie)
- Système d'Euler strictement hyperbolique
- Unicité des solutions de Liu
- Approche par relaxation
- Schéma à pas fractionnaires avec
 - effets thermiques \leadsto 2D implicite
 - capillarité \leadsto CSF [J.U. Brackbill, D.B. Kothe, C. Zemach]

- EOS globale à l'équilibre (maximisation d'une entropie)
- Système d'Euler strictement hyperbolique
- Unicité des solutions de Liu
- Approche par relaxation
- Schéma à pas fractionnaires avec
 - effets thermiques \leadsto 2D implicite
 - capillarité \leadsto CSF [J.U. Brackbill, D.B. Kothe, C. Zemach]

- EOS globale à l'équilibre (maximisation d'une entropie)
- Système d'Euler strictement hyperbolique
- Unicité des solutions de Liu
- Approche par relaxation
- Schéma à pas fractionnaires avec
 - effets thermiques \leadsto $2D$ implicite
 - capillarité \leadsto CSF [J.U. Brackbill, D.B. Kothe, C. Zemach]

- EOS globale à l'équilibre (maximisation d'une entropie)
- Système d'Euler strictement hyperbolique
- Unicité des solutions de Liu
- Approche par relaxation
- Schéma à pas fractionnaires avec
 - effets thermiques \leadsto $2D$ implicite
 - capillarité \leadsto CSF [J.U. Brackbill, D.B. Kothe, C. Zemach]

- EOS globale à l'équilibre (maximisation d'une entropie)
- Système d'Euler strictement hyperbolique
- Unicité des solutions de Liu
- Approche par relaxation
- Schéma à pas fractionnaires avec
 - effets thermiques \rightsquigarrow 2D implicite
 - capillarité \rightsquigarrow CSF [J.U. Brackbill, D.B. Kothe, C. Zemach]