

MODÉLISATION DU CHANGEMENT DE PHASE POUR DES ÉCOULEMENTS COMPRESSIBLES



Gloria Faccanoni Samuel Kokh Grégoire Allaire

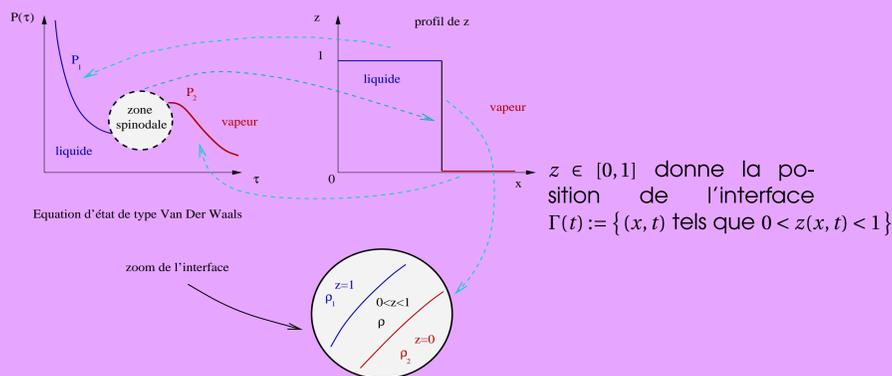
SFME/LETR, CEA Saclay 91191 Gif-Sur-Yvette Cedex
 CMAP, École Polytechnique 91128 Palaiseau Cedex
 gloria.faccanoni@cea.fr samuel.kokh@cea.fr
 allaire@cmap.polytechnique.fr

RÉSUMÉ

Ce travail porte sur la modélisation mathématique et numérique de la simulation du changement de phase liquide-vapeur pour des écoulements de fluides compressibles. Nous utilisons un modèle diphasique à 5 équations. Nous montrons que par un processus de relaxation on peut obtenir une loi d'état complète pour le mélange liquide-vapeur à saturation. Lorsqu'on traduit mathématiquement cette propriété, on obtient un système strictement hyperbolique. Nous proposons un schéma d'approximation numérique consistante avec cette approche.

1. POSITION DU PROBLÈME : CADRE DIPHASIQUE

- Deux lois d'état pour chaque phase pure $\alpha = 1, 2$:
 - τ_α volume
 - ε_α énergie interne
 - $s_\alpha(\tau_\alpha, \varepsilon_\alpha)$ entropie (strictement concave)
 - $1/\tau_\alpha := \frac{\partial s_\alpha}{\partial \varepsilon_\alpha} \Big|_{\tau_\alpha}$ température
 - $P_\alpha := T_\alpha \frac{\partial s_\alpha}{\partial \tau_\alpha} \Big|_{\varepsilon_\alpha}$ pression
 - $g_\alpha(P_\alpha, T_\alpha)$ enthalpie libre
 - $e_\alpha := \varepsilon_\alpha + u^2/2$ énergie totale
- Une loi d'état pour le mélange hors équilibre :
 - y_α fractions massiques, $\sum_\alpha y_\alpha = 1$
 - z_α fractions volumiques, $\sum_\alpha z_\alpha = 1$
 - $\tau := \sum_\alpha y_\alpha \tau_\alpha$ volume
 - $\rho := \sum_\alpha z_\alpha \rho_\alpha$ densité
 - $\varepsilon := \sum_\alpha y_\alpha \varepsilon_\alpha(\tau_\alpha, \varepsilon_\alpha)$ énergie interne
 - $\sigma(\tau, \varepsilon) := \sum_\alpha y_\alpha s_\alpha(\tau_\alpha, \varepsilon_\alpha)$ entropie hors équilibre
 - $e := \varepsilon + u^2/2$ énergie totale



On peut prouver que :

- l'entropie $s(\tau, \varepsilon)$ à l'équilibre est l'enveloppe concave du $\max_{\alpha=1,2} \{s_1(\tau, \varepsilon), s_2(\tau, \varepsilon)\}$ (cf. (5))
- l'entropie $s(\tau, \varepsilon)$ à l'équilibre est aussi le $\max_{(y_\alpha, \tau_\alpha, \varepsilon_\alpha)} \sigma(\tau, \varepsilon)$ (cf. (2, 4)),
- l'entropie $s(\tau, \varepsilon)$ à l'équilibre est strictement concave dans les phases pures, concave non strictement dans le mélange,
- le système d'Euler muni de cette loi d'état est **strictement hyperbolique**.

3. SYSTÈME HYDRO-THERMO-DYNAMIQUE

Système à l'équilibre (thermique)

Système à l'équilibre (thermique, mécanique, chimique.)

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho \mathbf{u}) = 0 \\ \partial_t(\rho \mathbf{u}) + \partial_x(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + P) = 0 \\ \partial_t(\rho e) + \partial_x((\rho e + P)\mathbf{u}) = 0 \\ \partial_t z + \mathbf{u} \cdot \text{grad} z = \kappa(P_1 - P_2) \\ \partial_t y + \mathbf{u} \cdot \text{grad} y = \lambda(g_2 - g_1)/\rho \end{cases} \xrightarrow[\text{équilibre instantané cf. (3)}]{\lambda, \kappa \rightarrow +\infty} \begin{cases} \partial_t \rho + \text{div}(\rho \mathbf{u}) = 0 \\ \partial_t(\rho \mathbf{u}) + \text{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + P) = 0 \\ \partial_t(\rho e) + \partial_x((\rho e + P)\mathbf{u}) = 0 \end{cases}$$

avec $P(\rho, \varepsilon) = \frac{\partial s / \partial \tau \Big|_\varepsilon}{\partial s / \partial \varepsilon \Big|_\tau}$

$T_1 = T_2$

4. RÉOLUTION NUMÉRIQUE : SCHEMA À PAS FRACTIONNAIRES

- ÉTAPE CONVECTIVE : on résout numériquement le système homogène

$$\mathbf{v}_i^n \xrightarrow[\text{à 5 équations (cf. (1))}]{\text{Schéma quasi-conservatif}} \hat{\mathbf{v}}_i^n$$

- ÉTAPE DE RELAXATION : on projette cette solution $\hat{\mathbf{v}}_i^n$ sur la variété d'équilibre définie par la surface $(\tau, \varepsilon) \mapsto s(\tau, \varepsilon)$.

5. ÉTUDE COMPLÈTE DU CAS GAZ PARFAIT / GAZ PARFAIT

- Il existe toujours une unique solution s ,
- on se ramène au problème $f(T) = 0$ où f est non linéaire.

2. CHANGEMENT DE PHASE DU 1^{ER} ORDRE : ÉQUILIBRE THERMIQUE, MÉCANIQUE ET CHIMIQUE



6. UN EXEMPLE

On suppose qu'il y a 3 bulles de vapeur immergées dans le liquide. Les deux phases sont initialement immobiles. On crée artificiellement une compression en imposant une vitesse fictive sur les mailles à gauche du domaine afin de simuler le mouvement d'un piston. On observe que ce mouvement va générer une onde se déplaçant de la gauche vers la droite. Lorsqu'elle atteint une bulle, elle va perturber l'équilibre thermo-mécanique et les bulles de vapeur vont se liquéfier.

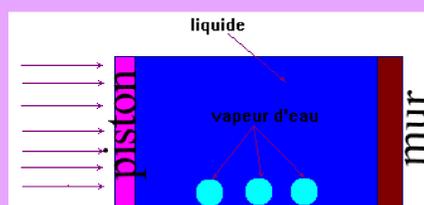
6.1 Données initiales du problème de Riemann

- 1D : un domaine de 1 m de longueur,
- caractéristiques des fluides :

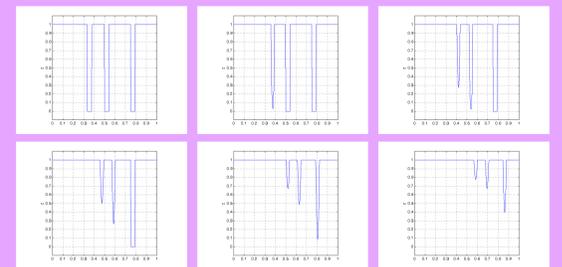
	LIQUIDE	VAPEUR
c_v ($= c_p/c_v$)	1816.2	1040.14
γ ($= c_p/c_v$)	2.35	1.43
- $u|_{t=0} = 0$ m/s de chaque côté de l'interface,
- $T|_{t=0} = 400$ K dans tout le domaine,
- $(P, \rho_1, \rho_2)|_{t=0}(T)$ tels qu'il y a ÉQUILIBRE.

6.2 Géométrie

- Droite : mur,
- Gauche : piston $u_{\text{piston}} = +200$ m/s.



6.3 Profil de l'interface



Références

- Allaire, G., Clerc, S., and Kokh, S. (2002). A five-equation model for the simulation of interfaces between compressible fluids. *J. Comput. Phys.*, 181(2) :577–616.
- Barberon, T. and Helluy, P. (2002). Finite volume simulations of cavitating flows. In *Finite volumes for complex applications, III (Porquerolles, 2002)*, pages 441–448 (electronic). Lab. Anal. Topol. Probab. CNRS, Marseille.
- Caro, F. (2004). *Modélisation et simulation numérique des transitions de phase liquide-vapeur*. PhD thesis, École Polytechnique.
- Helluy, P. (2005). Mémoire d'habilitation à diriger des recherches : quelques exemples de méthodes numériques récentes pour le calcul des écoulements multiphasiques.
- Jaouen, S. (2001). *Etude mathématique et numérique de stabilité pour des modèles hydrodynamiques avec transition de phase*. PhD thesis, Université Paris 6.