

# Modélisation du changement de phase dans des écoulements à interface

Samuel Kokh - Gloria Faccanoni

CEA Saclay

- 1 Introduction
- 2 Modélisation du changement de phase
  - Modélisation statique
  - Modélisation dynamique
- 3 MTT-équilibre
  - Approximation
  - Tests numériques

## 1 Introduction

## 2 Modélisation du changement de phase

- Modélisation statique
- Modélisation dynamique

## 3 MTT-équilibre

- Approximation
- Tests numériques



Caro F. (2004).

*Modélisation et simulation numérique des transitions de phase liquide-vapeur.*

Ph.D. thesis, École Polytechnique.

- modèle isotherme
- modèle anisotherme avec changement de phase

## Thèse en cours

- ⇒ amélioration de l'algorithme global,
- ⇒ résolution "exacte" de l'étape de relaxation (changement de phase),
- ⇒ étude complète du cas Gaz Parfaits - Gaz Parfaits.



Caro F. (2004).

*Modélisation et simulation numérique des transitions de phase liquide-vapeur.*

Ph.D. thesis, École Polytechnique.

- modèle isotherme
- modèle anisotherme avec changement de phase

## Thèse en cours

- ⇒ amélioration de l'algorithme global,
- ⇒ résolution "exacte" de l'étape de relaxation (changement de phase),
- ⇒ étude complète du cas Gaz Parfaits - Gaz Parfaits.



Caro F. (2004).

*Modélisation et simulation numérique des transitions de phase liquide-vapeur.*

Ph.D. thesis, École Polytechnique.

- modèle isotherme
- modèle anisotherme avec changement de phase

## Thèse en cours

- ⇒ amélioration de l'algorithme global,
- ⇒ résolution "exacte" de l'étape de relaxation (changement de phase),
- ⇒ étude complète du cas Gaz Parfaits - Gaz Parfaits.



Caro F. (2004).

*Modélisation et simulation numérique des transitions de phase liquide-vapeur.*

Ph.D. thesis, École Polytechnique.

- modèle isotherme
- modèle anisotherme avec changement de phase

## Thèse en cours

- ➡ amélioration de l'algorithme global,
- ➡ résolution "exacte" de l'étape de relaxation (changement de phase),
- ➡ étude complète du cas Gaz Parfaits - Gaz Parfaits.

## 1 Introduction

## 2 Modélisation du changement de phase

- Modélisation statique
- Modélisation dynamique

## 3 MTT-équilibre

- Approximation
- Tests numériques



# Modèle à interface "épaisse"

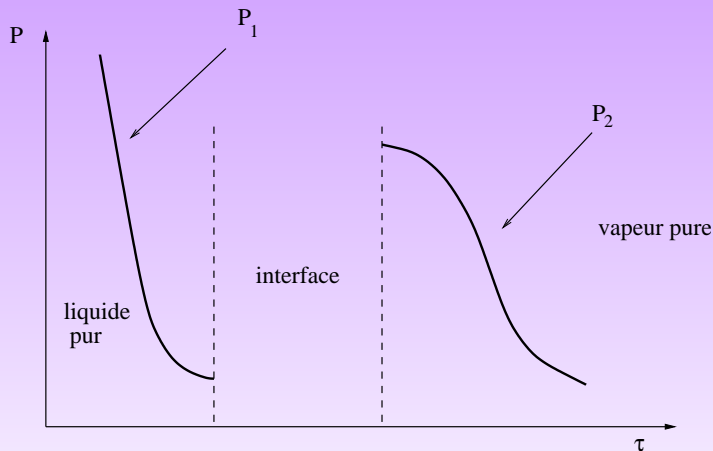
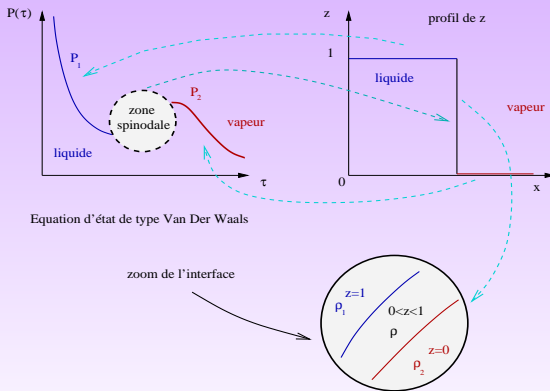


Fig.:  $P_\alpha = P_\alpha(\tau)$  à entropie ou température constante

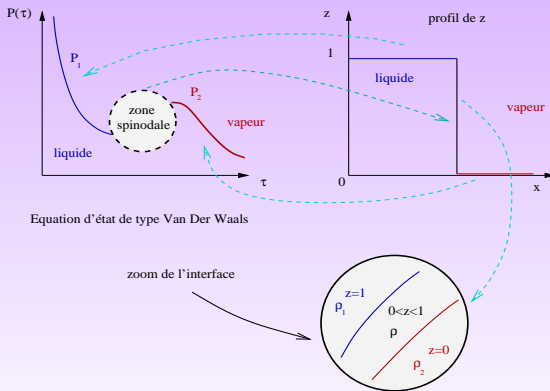
# Modèle à interface "épaisse"

Fig.: Paramètre d'ordre abstrait  $z \in [0, 1]$  qui donne la position de l'interface



# Modèle à interface "épaisse"

Fig.: Paramètre d'ordre abstrait  $z \in [0, 1]$  qui donne la position de l'interface



$$\text{Interface } \Gamma(t) := \{ (x, t) \text{ tels que } 0 < z(x, t) < 1 \}$$

# Modèle à interface épaisse

Notations et relations

Notations et relations constitutives pour le système diphasique :

# Modèle à interface épaisse

## Notations et relations

Notations et relations constitutives pour le système diphasique :

densité du mélange :  $\rho = \sum_{\alpha} z_{\alpha} \rho_{\alpha}$

volume du mélange :  $\tau = \sum_{\alpha} y_{\alpha} \tau_{\alpha}$       avec  $y_{\alpha} := \frac{z_{\alpha} \rho_{\alpha}}{\rho}$

$$\tau_{\alpha} y_{\alpha} = z_{\alpha} \tau$$

# Modèle à interface épaisse

## Notations et relations

Notations et relations constitutives pour le système diphasique :

densité du mélange :  $\rho = \sum_{\alpha} z_{\alpha} \rho_{\alpha}$

volume du mélange :  $\tau = \sum_{\alpha} y_{\alpha} \tau_{\alpha}$       avec  $y_{\alpha} := \frac{z_{\alpha} \rho_{\alpha}}{\rho}$   
 $\tau_{\alpha} y_{\alpha} = z_{\alpha} \tau$

énergie interne du mélange :  $\varepsilon = \sum_{\alpha} y_{\alpha} \varepsilon_{\alpha}$       avec  $\varepsilon_{\alpha} y_{\alpha} = \psi_{\alpha} \varepsilon$

# Modèle à interface épaisse

## Notations et relations

Notations et relations constitutives pour le système diphasique :

densité du mélange :  $\rho = \sum_{\alpha} z_{\alpha} \rho_{\alpha}$

volume du mélange :  $\tau = \sum_{\alpha} y_{\alpha} \tau_{\alpha}$       avec  $y_{\alpha} := \frac{z_{\alpha} \rho_{\alpha}}{\rho}$   
 $\tau_{\alpha} y_{\alpha} = z_{\alpha} \tau$

énergie interne du mélange :  $\varepsilon = \sum_{\alpha} y_{\alpha} \varepsilon_{\alpha}$       avec  $\varepsilon_{\alpha} y_{\alpha} = \psi_{\alpha} \varepsilon$

entropie spécifique de la phase  $\alpha$  :  $s_{\alpha}$   
enthalpie libre spécifique de la phase  $\alpha$  :  $g_{\alpha}$        $\alpha = 1, 2.$

Sans changement de phase

$$S_1(\tau_1, \varepsilon_1)$$

$$S_2(\tau_2, \varepsilon_2)$$



Sans changement de phase

$$s_1(\tau_1, \varepsilon_1)$$

$$s_2(\tau_2, \varepsilon_2)$$

$$s := \sum_{\alpha} y_{\alpha} s_{\alpha}(\tau_{\alpha}, \varepsilon_{\alpha})$$

Avec changement de phase

$$s_1(\tau_1, \varepsilon_1)$$

$$s_2(\tau_2, \varepsilon_2)$$

$$s := \sum_{\alpha} \widehat{s}_{\alpha}(y_{\alpha}, z_{\alpha}\tau, \psi_{\alpha}\varepsilon)$$

## Avec changement de phase

$$s_1(\tau_1, \varepsilon_1)$$

$$s_2(\tau_2, \varepsilon_2)$$

$$s := \max_{y, z, \psi} \left\{ \sum_{\alpha} \widehat{s}_{\alpha}(y_{\alpha}, z_{\alpha} \tau, \psi_{\alpha} \varepsilon) \right\}$$

$s(\tau, \varepsilon)$  du mélange avec changement de phase

## Avec changement de phase

$$s_1(\tau_1, \varepsilon_1)$$

$$s_2(\tau_2, \varepsilon_2)$$

$$s := \max_{y, z, \psi} \left\{ \sum_{\alpha} \widehat{s}_{\alpha}(y_{\alpha}, z_{\alpha} \tau, \psi_{\alpha} \varepsilon) \right\} = \widehat{s}_1 \square \widehat{s}_2$$

$s(\tau, \varepsilon)$  du mélange avec changement de phase

## Avec changement de phase

$$s_1(\tau_1, \varepsilon_1)$$

$$s_2(\tau_2, \varepsilon_2)$$

$$s := \max_{y, z, \psi} \left\{ \sum_{\alpha} \widehat{s}_{\alpha}(y_{\alpha}, z_{\alpha} \tau, \psi_{\alpha} \varepsilon) \right\} = \widehat{s}_1 \square \widehat{s}_2 = -((-\widehat{s}_1)^* + (-\widehat{s}_2)^*)^*$$

$s(\tau, \varepsilon)$  du mélange avec changement de phase

## Théorème

*Relaxation :*

$$\begin{cases} T_1 = T_2 \\ P_1(\rho_1, T_1) = P_2(\rho_2, T_2) \\ g_1(\rho_1, T_1) = g_2(\rho_2, T_2) \end{cases}$$

(formel)  
⇕

*Pb. d'optimisation :*

$$\begin{cases} \max_{y \in [0,1]} & s(y, \tau_1, \varepsilon_1, \tau_2, \varepsilon_2) \\ \text{contraintes :} & \begin{array}{l} 1. \quad \varepsilon = y\varepsilon_1 + (1-y)\varepsilon_2 \\ 2. \quad \tau = y\tau_1 + (1-y)\tau_2 \\ \quad \quad \varepsilon, \tau \text{ fixés} \end{array} \end{cases}$$

## Théorème

Relaxation :

$$\begin{cases} T_1 = T_2 \\ P_1(\rho_1, T_1) = P_2(\rho_2, T_2) \\ g_1(\rho_1, T_1) = g_2(\rho_2, T_2) \end{cases}$$

(formel)  
↕

Pb. d'optimisation :

$$\begin{cases} \max_{y \in [0,1]} & s(y, \tau_1, \varepsilon_1, \tau_2, \varepsilon_2) \\ \text{contraintes :} & \begin{array}{l} 1. \quad \varepsilon = y\varepsilon_1 + (1 - y)\varepsilon_2 \\ 2. \quad \tau = y\tau_1 + (1 - y)\tau_2 \\ \quad \quad \varepsilon, \tau \text{ fixés} \end{array} \end{cases}$$

## Trace de la démonstration.

$$s = y s_1(\tau_1, \varepsilon_1) + (1 - y) s_2(\tau_2, \varepsilon_2) \quad \text{avec} \quad y := \frac{z \rho_1}{\rho}$$

- L'optimisation par rapport à  $\varepsilon_\alpha$  équivaut à  $T_1 = T_2$ .
- L'optimisation par rapport à  $\tau_\alpha$  équivaut à  $\frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2}$ .
- L'optimisation par rapport à  $y$  équivaut à  $\frac{g_1}{T_1} = \frac{g_2}{T_2}$ .





## Trace de la démonstration.

$$\mathbf{s} = y\mathbf{s}_1(\tau_1, \varepsilon_1) + (1 - y)\mathbf{s}_2(\tau_2, \varepsilon_2) \quad \text{avec} \quad y := \frac{z\rho_1}{\rho}$$

- L'optimisation par rapport à  $\varepsilon_\alpha$  équivaut à  $T_1 = T_2$ .
- L'optimisation par rapport à  $\tau_\alpha$  équivaut à  $\frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2}$ .
- L'optimisation par rapport à  $y$  équivaut à  $\frac{g_1}{T_1} = \frac{g_2}{T_2}$ .



## Trace de la démonstration.

$$s = ys_1(\tau_1, \varepsilon_1) + (1 - y)s_2(\tau_2, \varepsilon_2) \quad \text{avec} \quad y := \frac{z\rho_1}{\rho}$$

- L'optimisation par rapport à  $\varepsilon_\alpha$  équivaut à  $T_1 = T_2$ .
- L'optimisation par rapport à  $\tau_\alpha$  équivaut à  $\frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2}$ .
- L'optimisation par rapport à  $y$  équivaut à  $\frac{g_1}{T_1} = \frac{g_2}{T_2}$ .



## Trace de la démonstration.

$$s = ys_1(\tau_1, \varepsilon_1) + (1 - y)s_2(\tau_2, \varepsilon_2) \quad \text{avec} \quad y := \frac{z\rho_1}{\rho}$$

- L'optimisation par rapport à  $\varepsilon_\alpha$  équivaut à  $T_1 = T_2$ .
- L'optimisation par rapport à  $\tau_\alpha$  équivaut à  $\frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2}$ .
- L'optimisation par rapport à  $y$  équivaut à  $\frac{g_1}{T_1} = \frac{g_2}{T_2}$ .



## Trace de la démonstration.

$$s = ys_1(\tau_1, \varepsilon_1) + (1 - y)s_2(\tau_2, \varepsilon_2) \quad \text{avec} \quad y := \frac{z \rho_1}{\rho}$$

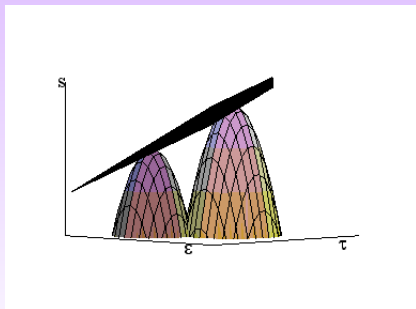
- L'optimisation par rapport à  $\varepsilon_\alpha$  équivaut à  $T_1 = T_2$ .
- L'optimisation par rapport à  $\tau_\alpha$  équivaut à  $\frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2}$ .
- L'optimisation par rapport à  $y$  équivaut à  $\frac{g_1}{T_1} = \frac{g_2}{T_2}$ .



## Théorème

Notons  $S_\alpha$  la surface  $(\tau, \varepsilon) \mapsto s_\alpha(\tau, \varepsilon)$  dans l'espace  $(\tau, \varepsilon, s)$ .

Le système équivaut à trouver un point  $(\tau_\alpha, \varepsilon_\alpha)$  sur chaque surface tel que les deux hyperplans tangents en ces points coïncident.

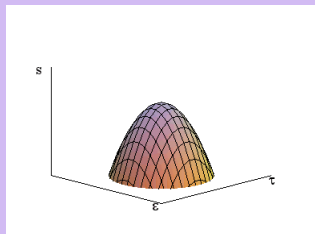


## Trace de la démonstration.

$$\tilde{S}_\alpha(\tau, \varepsilon) = \frac{1}{T_\alpha} \varepsilon + \frac{P_\alpha}{T_\alpha} \tau + \frac{S_\alpha T_\alpha - \varepsilon_\alpha - P_\alpha \tau_\alpha}{T_\alpha}$$

$$\tilde{S}_1 \parallel \tilde{S}_2 \Leftrightarrow \begin{cases} P_1 = P_2 \\ T_1 = T_2 \end{cases}$$

$$\tilde{S}_1 \equiv \tilde{S}_2 \Leftrightarrow g_1 = g_2$$

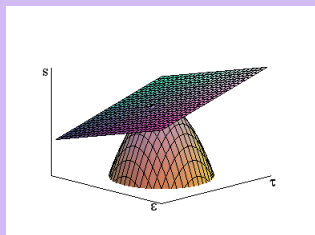


## Trace de la démonstration.

$$\tilde{S}_\alpha(\tau, \varepsilon) = \frac{1}{T_\alpha} \varepsilon + \frac{P_\alpha}{T_\alpha} \tau + \frac{s_\alpha T_\alpha - \varepsilon_\alpha - P_\alpha \tau_\alpha}{T_\alpha}$$

$$\tilde{S}_1 \parallel \tilde{S}_2 \Leftrightarrow \begin{cases} P_1 = P_2 \\ T_1 = T_2 \end{cases}$$

$$\tilde{S}_1 \equiv \tilde{S}_2 \Leftrightarrow g_1 = g_2$$

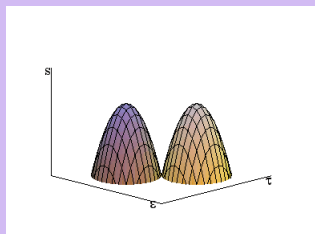


## Trace de la démonstration.

$$\tilde{s}_\alpha(\tau, \varepsilon) = \frac{1}{T_\alpha} \varepsilon + \frac{P_\alpha}{T_\alpha} \tau + \frac{s_\alpha T_\alpha - \varepsilon_\alpha - P_\alpha \tau_\alpha}{T_\alpha}$$

$$\tilde{s}_1 \parallel \tilde{s}_2 \Leftrightarrow \begin{cases} P_1 = P_2 \\ T_1 = T_2 \end{cases}$$

$$\tilde{s}_1 \equiv \tilde{s}_2 \Leftrightarrow g_1 = g_2$$





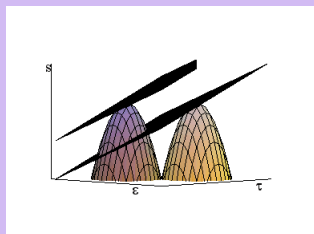
# Démonstration

## Trace de la démonstration.

$$\tilde{s}_\alpha(\tau, \varepsilon) = \frac{1}{T_\alpha} \varepsilon + \frac{P_\alpha}{T_\alpha} \tau + \frac{s_\alpha T_\alpha - \varepsilon_\alpha - P_\alpha \tau_\alpha}{T_\alpha}$$

$$\tilde{s}_1 \parallel \tilde{s}_2 \Leftrightarrow \begin{cases} P_1 = P_2 \\ T_1 = T_2 \end{cases}$$

$$\tilde{s}_1 \equiv \tilde{s}_2 \Leftrightarrow g_1 = g_2$$



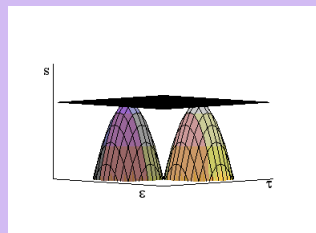
# Démonstration

## Trace de la démonstration.

$$\tilde{s}_\alpha(\tau, \varepsilon) = \frac{1}{T_\alpha} \varepsilon + \frac{P_\alpha}{T_\alpha} \tau + \frac{s_\alpha T_\alpha - \varepsilon_\alpha - P_\alpha \tau_\alpha}{T_\alpha}$$

$$\tilde{s}_1 \parallel \tilde{s}_2 \Leftrightarrow \begin{cases} P_1 = P_2 \\ T_1 = T_2 \end{cases}$$

$$\tilde{s}_1 \equiv \tilde{s}_2 \Leftrightarrow g_1 = g_2$$



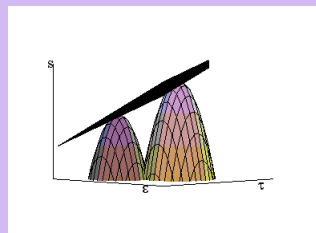
# Démonstration

## Trace de la démonstration.

$$\tilde{s}_\alpha(\tau, \varepsilon) = \frac{1}{T_\alpha} \varepsilon + \frac{P_\alpha}{T_\alpha} \tau + \frac{s_\alpha T_\alpha - \varepsilon_\alpha - P_\alpha \tau_\alpha}{T_\alpha}$$

$$\tilde{s}_1 \parallel \tilde{s}_2 \Leftrightarrow \begin{cases} P_1 = P_2 \\ T_1 = T_2 \end{cases}$$

$$\tilde{s}_1 \equiv \tilde{s}_2 \Leftrightarrow g_1 = g_2$$



# Interpretation

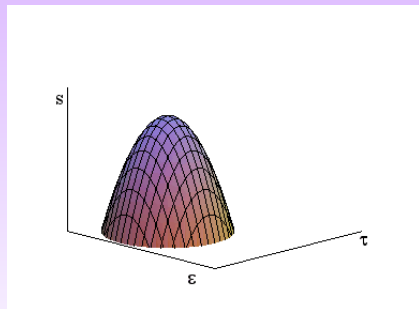
$s(\rho, \varepsilon)$  est l'enveloppe concave de la fonction

$$(\tau, \varepsilon) \longrightarrow \max \{s_1(\tau, \varepsilon), s_2(\tau, \varepsilon)\}$$

# Interpretation

$s(\rho, \varepsilon)$  est l'enveloppe concave de la fonction

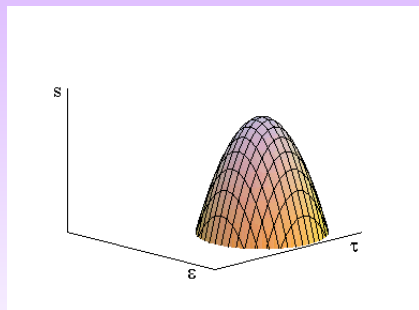
$$(\tau, \varepsilon) \longrightarrow \max \{s_1(\tau, \varepsilon), s_2(\tau, \varepsilon)\}$$



# Interpretation

$s(\rho, \varepsilon)$  est l'enveloppe concave de la fonction

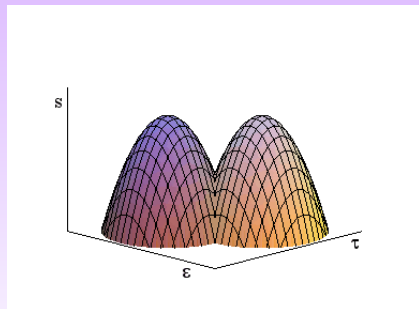
$$(\tau, \varepsilon) \longrightarrow \max \{s_1(\tau, \varepsilon), s_2(\tau, \varepsilon)\}$$



# Interpretation

$s(\rho, \varepsilon)$  est l'enveloppe concave de la fonction

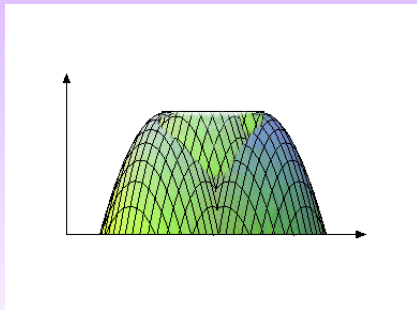
$$(\tau, \varepsilon) \rightarrow \max \{s_1(\tau, \varepsilon), s_2(\tau, \varepsilon)\}$$



# Interpretation

$s(\rho, \varepsilon)$  est l'**enveloppe concave** de la fonction

$$(\tau, \varepsilon) \longrightarrow \max \{s_1(\tau, \varepsilon), s_2(\tau, \varepsilon)\}$$

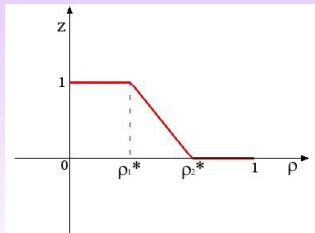




# Conclusion

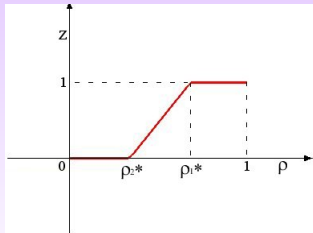
$$\text{si } \rho_1^* \leq \rho_2^*$$

$$z^* = \begin{cases} 1 & \text{si } \rho < \rho_1^*, \\ \frac{\rho - \rho_2^*}{\rho_1^* - \rho_2^*} & \text{si } \rho_1^* < \rho < \rho_2^*, \\ 0 & \text{si } \rho_2^* < \rho. \end{cases}$$



$$\text{si } \rho_1^* > \rho_2^*$$

$$z^* = \begin{cases} 0 & \text{si } \rho < \rho_2^*, \\ \frac{\rho - \rho_2^*}{\rho_1^* - \rho_2^*} & \text{si } \rho_2^* < \rho < \rho_1^*, \\ 1 & \text{si } \rho_1^* < \rho. \end{cases}$$



Equations :

$$\left\{ \begin{array}{lll} \partial_t(z\rho_1) & + \operatorname{div}(z\rho_1 u) & = \mathcal{S}_y, \\ \partial_t((1-z)\rho_2) & + \operatorname{div}((1-z)\rho_2 u) & = -\mathcal{S}_y, \\ \partial_t(\rho u) & + \operatorname{div}(\rho u \otimes u + P \operatorname{Id}) & = 0, \\ \partial_t(\rho(\varepsilon + |u|^2/2)) & + \operatorname{div}((\rho(\varepsilon + |u|^2/2) + P) u) & = 0, \\ \partial_t z & + u \cdot \mathbf{grad} z & = \mathcal{S}_z, \end{array} \right.$$

Equations :

$$\left\{ \begin{array}{lll} \partial_t(z\rho_1) & + \operatorname{div}(z\rho_1 u) & = \mathcal{S}_y, \\ \partial_t((1-z)\rho_2) & + \operatorname{div}((1-z)\rho_2 u) & = -\mathcal{S}_y, \\ \partial_t(\rho u) & + \operatorname{div}(\rho u \otimes u + P \operatorname{Id}) & = 0, \\ \partial_t(\rho(\varepsilon + |u|^2/2)) & + \operatorname{div}((\rho(\varepsilon + |u|^2/2) + P) u) & = 0, \\ \partial_t z & + u \cdot \mathbf{grad} z & = \mathcal{S}_z, \end{array} \right.$$

Equations :

$$\left\{ \begin{array}{lll} \partial_t(z\rho_1) & + \operatorname{div}(z\rho_1 u) & = S_y, \\ \partial_t((1-z)\rho_2) & + \operatorname{div}((1-z)\rho_2 u) & = -S_y, \\ \partial_t(\rho u) & + \operatorname{div}(\rho u \otimes u + P \operatorname{Id}) & = 0, \\ \partial_t(\rho(\varepsilon + |u|^2/2)) & + \operatorname{div}((\rho(\varepsilon + |u|^2/2) + P) u) & = 0, \\ \partial_t z & + u \cdot \operatorname{grad} z & = S_z, \end{array} \right.$$

fermeture isotherme

$$T_1 = T_2,$$

$$P = \sum_{\alpha} z_{\alpha} P_{\alpha},$$

$$S_y = \lambda(g_2 - g_1),$$

$$S_z = \kappa(P_1 - P_2),$$

fermeture isobare (gaz parfaits)

$$P = P_1 = P_2,$$

$$S_y = \lambda(h_2 - h_1),$$

$$S_z = \kappa(\rho_1 s_1 T_1 - \rho_2 s_2 T_2).$$

Equations :

$$\left\{ \begin{array}{lll} \partial_t(z\rho_1) & + \operatorname{div}(z\rho_1 u) & = S_y, \\ \partial_t((1-z)\rho_2) & + \operatorname{div}((1-z)\rho_2 u) & = -S_y, \\ \partial_t(\rho u) & + \operatorname{div}(\rho u \otimes u + P \operatorname{Id}) & = 0, \\ \partial_t(\rho(\varepsilon + |u|^2/2)) & + \operatorname{div}((\rho(\varepsilon + |u|^2/2) + P) u) & = 0, \\ \partial_t z & + u \cdot \mathbf{grad} z & = S_z, \end{array} \right.$$

fermeture isotherme

$$T_1 = T_2,$$

$$P = \sum_{\alpha} z_{\alpha} P_{\alpha},$$

$$S_y = \lambda(g_2 - g_1),$$

$$S_z = \kappa(P_1 - P_2),$$

$$\partial_t(\rho s) + \operatorname{div}(\rho u s) =$$

$$= \frac{(S_z(P_1 - P_2) + S_y(g_2 - g_1))}{T} \geq 0$$

$$S_y = \lambda(g_2 - g_1),$$

$$S_z = \kappa(P_1 - P_2).$$

- 1 Introduction
- 2 Modélisation du changement de phase
  - Modélisation statique
  - Modélisation dynamique
- 3 **MTT-équilibre**
  - **Approximation**
  - **Tests numériques**

# Modèle MTT-équilibre

$$\left\{ \begin{array}{lll} \partial_t(z\rho_1) & + \operatorname{div}(z\rho_1 u) & = \lambda(g_2 - g_1) \\ \partial_t((1-z)\rho_2) & + \operatorname{div}((1-z)\rho_2 u) & = -\lambda(g_2 - g_1) \\ \partial_t(\rho u) & + \operatorname{div}(\rho u \otimes u + P) & = 0 \\ \partial_t(\rho(\varepsilon + |u|^2/2)) & + \operatorname{div}((\rho(\varepsilon + |u|^2/2) + P) u) & = 0 \\ \partial_t z & + u \cdot \operatorname{grad} z & = k(P_2 - P_1) \end{array} \right.$$

# Modèle MTT-équilibre

$$\left\{ \begin{array}{lll} \partial_t(z\rho_1) & + \operatorname{div}(z\rho_1 u) & = \lambda(g_2 - g_1) \\ \partial_t((1-z)\rho_2) & + \operatorname{div}((1-z)\rho_2 u) & = -\lambda(g_2 - g_1) \\ \partial_t(\rho u) & + \operatorname{div}(\rho u \otimes u + P) & = 0 \\ \partial_t(\rho(\varepsilon + |u|^2/2)) & + \operatorname{div}((\rho(\varepsilon + |u|^2/2) + P) u) & = 0 \\ \partial_t z & + u \cdot \operatorname{grad} z & = k(P_2 - P_1) \end{array} \right.$$

$$\kappa = \lambda = +\infty$$

trouver  $\rho_\alpha^* \geq 0$  et  $z^* \in ]0, 1[$

$$\left\{ \begin{array}{ll} T_1 = T_2 & \text{(fermeture isotherme)} \\ P_1(\rho_1, T_1) = P_2(\rho_2, T_2) \quad (k \rightarrow +\infty) & \text{(éq. mécanique)} \\ g_1(\rho_1, T_1) = g_2(\rho_2, T_2) \quad (\lambda \rightarrow +\infty) & \text{(éq. thermodynamique)} \end{array} \right.$$

sous la contrainte  $\left\{ \begin{array}{l} \rho \varepsilon = z^* \rho_1^* \varepsilon_1 + (1 - z^*) \rho_2^* \varepsilon_2 \\ \rho = z^* \rho_1^* + (1 - z^*) \rho_2^* \end{array} \right.$



# Modèle MTT-équilibre

$$\begin{cases} \partial_t(z\rho_1) & + \operatorname{div}(z\rho_1 u) & = & \lambda(g_2 - g_1) \\ \partial_t((1-z)\rho_2) & + \operatorname{div}((1-z)\rho_2 u) & = & -\lambda(g_2 - g_1) \\ \partial_t(\rho u) & + \operatorname{div}(\rho u \otimes u + P) & = & 0 \\ \partial_t(\rho(\varepsilon + |u|^2/2)) & + \operatorname{div}((\rho(\varepsilon + |u|^2/2) + P) u) & = & 0 \\ \partial_t z & + u \cdot \operatorname{grad} z & = & k(P_2 - P_1) \end{cases}$$

$$k = \lambda = +\infty$$

trouver  $\rho_\alpha^* \geq 0$  et  $z^* \in ]0, 1[$

$$\begin{cases} T_1 = T_2 & \text{(fermeture isotherme)} \\ P_1(\rho_1, T_1) = P_2(\rho_2, T_2) & (k \rightarrow +\infty) \text{ (éq. mécanique)} \\ g_1(\rho_1, T_1) = g_2(\rho_2, T_2) & (\lambda \rightarrow +\infty) \text{ (éq. thermodynamique)} \end{cases}$$

sous la contrainte  $\begin{cases} \rho \varepsilon & = & z^* \rho_1^* \varepsilon_1 & + & (1 - z^*) \rho_2^* \varepsilon_2 \\ \rho & = & z^* \rho_1^* & + & (1 - z^*) \rho_2^* \end{cases}$

# Schéma de décomposition

## ① ÉTAPE CONVECTIVE :

on résout numériquement le système homogène

$$\mathbf{v}_i^n \xrightarrow[\text{à 5 équations}]{\text{Schéma quasi-conservatif}} \widehat{\mathbf{v}}_i^n$$

## ② ÉTAPE DE RELAXATION :

on projette cette solution  $\widehat{\mathbf{v}}_i^n$  sur la variété MTT-équilibre  
*i.e.* on résout le problème de maximisation.

# Schéma de décomposition

## ① ÉTAPE CONVECTIVE :

on résout numériquement le système homogène

$$\mathbf{v}_i^n \xrightarrow[\text{à 5 équations}]{\text{Schéma quasi-conservatif}} \widehat{\mathbf{v}}_i^n$$

## ② ÉTAPE DE RELAXATION :

on projette cette solution  $\widehat{\mathbf{v}}_i^n$  sur la variété MTT-équilibre  
*i.e.* on résout le problème de maximisation.

## ② : projection

- Premièrement on utilise le fait que

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \rho = 0 \\ \partial_t(\rho u) = 0 \\ \partial_t(\rho e) = 0 \end{array} \right. \xrightarrow{\text{pour définir}} \left\{ \begin{array}{l} \rho_i^{n+1} = \widehat{\rho}_i^n, \\ (\rho u)_i^{n+1} = \widehat{(\rho u)}_i^n, \\ (\rho e)_i^{n+1} = \widehat{(\rho e)}_i^n. \end{array} \right.$$

- on calcule les densités partielles  $\rho_\alpha^*(\rho, \varepsilon)$  en optimisant l'entropie du mélange qui est équivalent à résoudre

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t(z\rho_1) = (g_2 - g_1) \\ \partial_t z = (P_1 - P_2) \end{array} \right. \text{ pour } t \rightarrow +\infty$$

- on utilise les  $(\rho_\alpha^*)_i^n$  pour actualiser  $z_i^{n+1}$  :

## ② : projection

- Premièrement on utilise le fait que

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \rho = 0 \\ \partial_t(\rho u) = 0 \\ \partial_t(\rho e) = 0 \end{array} \right. \xrightarrow{\text{pour définir}} \left\{ \begin{array}{l} \rho_i^{n+1} = \widehat{\rho}_i^n, \\ (\rho u)_i^{n+1} = \widehat{(\rho u)}_i^n, \\ (\rho e)_i^{n+1} = \widehat{(\rho e)}_i^n. \end{array} \right.$$

- on calcule les densités partielles  $\rho_\alpha^*(\rho, \varepsilon)$  en optimisant l'entropie du mélange qui est équivalent à résoudre

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t(z\rho_1) = (g_2 - g_1) \\ \partial_t z = (P_1 - P_2) \end{array} \right. \text{ pour } t \rightarrow +\infty$$

- on utilise les  $(\rho_\alpha^*)_i^n$  pour actualiser  $z_i^{n+1}$  :

## ② : projection

- Premièrement on utilise le fait que

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \rho = 0 \\ \partial_t(\rho u) = 0 \\ \partial_t(\rho e) = 0 \end{array} \right. \xrightarrow{\text{pour définir}} \left\{ \begin{array}{l} \rho_i^{n+1} = \widehat{\rho}_i^n, \\ (\rho u)_i^{n+1} = \widehat{(\rho u)}_i^n, \\ (\rho e)_i^{n+1} = \widehat{(\rho e)}_i^n. \end{array} \right.$$

- on calcule les densités partielles  $\rho_\alpha^*(\rho, \varepsilon)$  en optimisant l'entropie du mélange qui est équivalent à résoudre

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t(z\rho_1) = (g_2 - g_1) \\ \partial_t z = (P_1 - P_2) \end{array} \right. \text{ pour } t \rightarrow +\infty$$

- on utilise les  $(\rho_\alpha^*)_i^n$  pour actualiser  $z_i^{n+1}$  :

## ② : étape de projection

$$(\rho_1^*)_i \leq (\rho_2^*)_i \Rightarrow z_i^{n+1} = \begin{cases} 1 & \text{si } \rho_i^{n+1} < (\rho_1^*)_i^n, \\ \frac{\rho_i^{n+1} - (\rho_2^*)_i^n}{(\rho_1^*)_i^n - (\rho_2^*)_i^n} & \text{si } (\rho_1^*)_i^n < \rho_i^{n+1} < (\rho_2^*)_i^n, \\ 0 & \text{si } (\rho_2^*)_i^n < \rho_i^{n+1}. \end{cases}$$

$$(\rho_1^*)_i > (\rho_2^*)_i \Rightarrow z_i^{n+1} = \begin{cases} 0 & \text{si } \rho_i^{n+1} < (\rho_2^*)_i^n, \\ \frac{\rho_i^{n+1} (\rho_2^*)_i^n}{(\rho_1^*)_i^n - (\rho_2^*)_i^n} & \text{si } (\rho_2^*)_i^n < \rho_i^{n+1} < (\rho_1^*)_i^n, \\ 1 & \text{si } (\rho_1^*)_i^n < \rho_i^{n+1}. \end{cases}$$

# Étape de projection

- Premièrement on utilise le fait que

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \rho = 0 \\ \partial_t(\rho u) = 0 \\ \partial_t(\rho e) = 0 \end{array} \right. \quad \xRightarrow{\text{pour définir}} \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho_i^{n+1} = \widehat{\rho}_i^n, \\ (\rho u)_i^{n+1} = \widehat{(\rho u)}_i^n, \\ (\rho e)_i^{n+1} = \widehat{(\rho e)}_i^n. \end{array} \right.$$

- on calcule les densités partielles  $\rho_\alpha^*(\rho, \varepsilon)$  en optimisant l'entropie du mélange.
- on utilise les  $(\rho_\alpha^*)_i^n$  pour actualiser  $z_i^{n+1}$ .

Si on trouve l'unique couple  $(\rho_1^*, \rho_2^*)$  solution du problème d'optimisation, on aura déterminé entièrement la variété MTT-équilibre.



# Étape de projection

- Premièrement on utilise le fait que

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \rho = 0 \\ \partial_t(\rho u) = 0 \\ \partial_t(\rho e) = 0 \end{array} \right. \xrightarrow{\text{pour définir}} \left\{ \begin{array}{l} \rho_i^{n+1} = \widehat{\rho}_i^n, \\ (\rho u)_i^{n+1} = \widehat{(\rho u)}_i^n, \\ (\rho e)_i^{n+1} = \widehat{(\rho e)}_i^n. \end{array} \right.$$

- on calcule les densités partielles  $\rho_\alpha^*(\rho, \varepsilon)$  en optimisant l'entropie du mélange.
- on utilise les  $(\rho_\alpha^*)_i^n$  pour actualiser  $z_i^{n+1}$ .

Si on trouve l'unique couple  $(\rho_1^*, \rho_2^*)$  solution du problème d'optimisation, on aura déterminé entièrement la variété MTT-équilibre.

## Lois d'états :

$$s_\alpha = c_{v_\alpha} \log(\varepsilon_\alpha (\tau_\alpha)^{\gamma_\alpha - 1}) + s_\alpha^0$$

$$P_\alpha = (\gamma_\alpha - 1) \frac{\varepsilon_\alpha}{\tau_\alpha} \quad \text{avec} \quad \varepsilon_\alpha = c_{v_\alpha} T_\alpha$$

$s_\alpha^0$  : état thermodynamique de référence,

(dans cette exposé on supposera la normalisation  $s_\alpha^0 = 0$ ).

## Lois d'états :

$$s_\alpha = c_{v_\alpha} \log(\varepsilon_\alpha (\tau_\alpha)^{\gamma_\alpha - 1}) + s_\alpha^0$$

$$P_\alpha = (\gamma_\alpha - 1) \frac{\varepsilon_\alpha}{\tau_\alpha} \quad \text{avec} \quad \varepsilon_\alpha = c_{v_\alpha} T_\alpha$$

$s_\alpha^0$  : état thermodynamique de référence,

(dans cette exposé on supposera la normalisation  $s_\alpha^0 = 0$ ).

## Lois d'états :

$$s_\alpha = c_{v_\alpha} \log(\varepsilon_\alpha (\tau_\alpha)^{\gamma_\alpha - 1}) + s_\alpha^0$$

$$P_\alpha = (\gamma_\alpha - 1) \frac{\varepsilon_\alpha}{\tau_\alpha} \quad \text{avec} \quad \varepsilon_\alpha = c_{v_\alpha} T_\alpha$$

$s_\alpha^0$  : état thermodynamique de référence,

(dans cette exposé on supposera la normalisation  $s_\alpha^0 = 0$ ).

On a donc à résoudre le système

$$\begin{cases} T_1 = T_2 \\ (\gamma_1 - 1)c_{v_1}\tau_2 = (\gamma_2 - 1)c_{v_2}\tau_1 \\ c_{v_1} \left[ \log(\varepsilon_1 \tau_1^{\gamma_1-1}) - \gamma_1 \right] = c_{v_2} \left[ \log(\varepsilon_2 \tau_2^{\gamma_2-1}) - \gamma_2 \right] \end{cases}$$

avec les contraintes

$$\begin{cases} \varepsilon = y\varepsilon_1 + (1-y)\varepsilon_2 \\ \tau = y\tau_1 + (1-y)\tau_2 \end{cases}$$

Analyser séparément les 4 cas suivants :

Cas 1  $c_{V_1} = c_{V_2}$  et  $\gamma_1 \neq \gamma_2$  ;

Cas 2  $c_{V_1} \neq c_{V_2}$  et  $c_{V_1}(\gamma_1 - 1) = c_{V_2}(\gamma_2 - 1)$

Cas 3  $c_{V_1} \neq c_{V_2}$  et  $c_{p_1} = c_{p_2}$

Cas 4  $c_{V_1} \neq c_{V_2}$  et  $c_{V_1}(\gamma_1 - 1) \neq c_{V_2}(\gamma_2 - 1)$ ,  $c_{V_1}\gamma_1 \neq c_{V_2}\gamma_2$

Analyser séparément les 4 cas suivants :

Cas 1  $c_{v_1} = c_{v_2}$  et  $\gamma_1 \neq \gamma_2$  ;

Cas 2  $c_{v_1} \neq c_{v_2}$  et  $c_{v_1}(\gamma_1 - 1) = c_{v_2}(\gamma_2 - 1)$

Cas 3  $c_{v_1} \neq c_{v_2}$  et  $c_{p_1} = c_{p_2}$

Cas 4  $c_{v_1} \neq c_{v_2}$  et  $c_{v_1}(\gamma_1 - 1) \neq c_{v_2}(\gamma_2 - 1)$ ,  $c_{v_1}\gamma_1 \neq c_{v_2}\gamma_2$

Analyser séparément les 4 cas suivants :

Cas 1  $c_{v_1} = c_{v_2}$  et  $\gamma_1 \neq \gamma_2$  ;

Cas 2  $c_{v_1} \neq c_{v_2}$  et  $c_{v_1}(\gamma_1 - 1) = c_{v_2}(\gamma_2 - 1)$

Cas 3  $c_{v_1} \neq c_{v_2}$  et  $c_{p_1} = c_{p_2}$

Cas 4  $c_{v_1} \neq c_{v_2}$  et  $c_{v_1}(\gamma_1 - 1) \neq c_{v_2}(\gamma_2 - 1)$ ,  $c_{v_1}\gamma_1 \neq c_{v_2}\gamma_2$



# Cas 1 : $c_{v_1} = c_{v_2}$

$$\begin{cases} \rho_1^* = \exp(-1) \left( \frac{\gamma_2 - 1}{\gamma_1 - 1} \right)^{\frac{\gamma_2 - 1}{\gamma_2 - \gamma_1}} \\ \rho_2^* = \exp(-1) \left( \frac{\gamma_2 - 1}{\gamma_1 - 1} \right)^{\frac{\gamma_1 - 1}{\gamma_2 - \gamma_1}} \end{cases}$$

Courbe de saturation pour le mélange liquide-vapeur :

$$P = \begin{cases} (\gamma_1 - 1)\rho_1\varepsilon_1, & \text{pour } \rho < \rho_1^* \\ \Gamma^*\varepsilon, & \text{pour } \rho_1^* \leq \rho \leq \rho_2^* \\ (\gamma_2 - 1)\rho_2\varepsilon_2, & \text{pour } \rho > \rho_2^* \end{cases}$$

où

$$\Gamma^* := \exp(-1) \left( \frac{(\gamma_2 - 1)^{(\gamma_2 - 1)}}{(\gamma_1 - 1)^{(\gamma_1 - 1)}} \right)^{\frac{1}{(\gamma_2 - 1) - (\gamma_1 - 1)}}$$

REMARQUE :  $P \in C^0$ , mais  $\notin C^1$ .

# Cas 1 : $c_{v_1} = c_{v_2}$

$$\begin{cases} \rho_1^* = \exp(-1) \left( \frac{\gamma_2 - 1}{\gamma_1 - 1} \right)^{\frac{\gamma_2 - 1}{\gamma_2 - \gamma_1}} \\ \rho_2^* = \exp(-1) \left( \frac{\gamma_2 - 1}{\gamma_1 - 1} \right)^{\frac{\gamma_1 - 1}{\gamma_2 - \gamma_1}} \end{cases}$$

Courbe de saturation pour le mélange liquide-vapeur :

$$P = \begin{cases} (\gamma_1 - 1)\rho_1\varepsilon_1, & \text{pour } \rho < \rho_1^* \\ \Gamma^* \varepsilon, & \text{pour } \rho_1^* \leq \rho \leq \rho_2^* \\ (\gamma_2 - 1)\rho_2\varepsilon_2, & \text{pour } \rho > \rho_2^* \end{cases}$$

où

$$\Gamma^* := \exp(-1) \left( \frac{(\gamma_2 - 1)^{(\gamma_2 - 1)}}{(\gamma_1 - 1)^{(\gamma_1 - 1)}} \right)^{\frac{1}{(\gamma_2 - 1) - (\gamma_1 - 1)}}$$

REMARQUE :  $P \in C^0$ , mais  $\notin C^1$ .

# Cas 1 : $c_{v_1} = c_{v_2}$

$$\begin{cases} \rho_1^* = \exp(-1) \left( \frac{\gamma_2 - 1}{\gamma_1 - 1} \right)^{\frac{\gamma_2 - 1}{\gamma_2 - \gamma_1}} \\ \rho_2^* = \exp(-1) \left( \frac{\gamma_2 - 1}{\gamma_1 - 1} \right)^{\frac{\gamma_1 - 1}{\gamma_2 - \gamma_1}} \end{cases}$$

Courbe de saturation pour le mélange liquide-vapeur :

$$P = \begin{cases} (\gamma_1 - 1)\rho_1\varepsilon_1, & \text{pour } \rho < \rho_1^* \\ \Gamma^*\varepsilon, & \text{pour } \rho_1^* \leq \rho \leq \rho_2^* \\ (\gamma_2 - 1)\rho_2\varepsilon_2, & \text{pour } \rho > \rho_2^* \end{cases}$$

où

$$\Gamma^* := \exp(-1) \left( \frac{(\gamma_2 - 1)^{(\gamma_2 - 1)}}{(\gamma_1 - 1)^{(\gamma_1 - 1)}} \right)^{\frac{1}{(\gamma_2 - 1) - (\gamma_1 - 1)}}$$

REMARQUE :  $P \in C^0$ , mais  $\notin C^1$ .

Cas général :  $c_{V_1} \neq c_{V_2}$  avec  $c_{V_1}(\gamma_1 - 1) \neq c_{V_2}(\gamma_2 - 1)$  et  $c_{V_1}\gamma_1 \neq c_{V_2}\gamma_2$

$$\tau_\alpha^* = A_\alpha (T^*)^B$$

où

$$\left\{ \begin{array}{l} B = \frac{c_{V_2} - c_{V_1}}{(\gamma_1 - 1)c_{V_1} - (\gamma_2 - 1)c_{V_2}} \\ A_1 = \left[ \frac{(c_{V_2})^{c_{V_2}}}{(c_{V_1})^{c_{V_1}}} \left( \frac{(\gamma_2 - 1)c_{V_2}}{(\gamma_1 - 1)c_{V_1}} \right)^{(\gamma_2 - 1)c_{V_2}} \exp(c_{V_1}\gamma_1 - c_{V_2}\gamma_2) \right]^{\frac{1}{(\gamma_1 - 1)c_{V_1} - (\gamma_2 - 1)c_{V_2}}} \\ A_2 = \left[ \frac{(c_{V_2})^{c_{V_2}}}{(c_{V_1})^{c_{V_1}}} \left( \frac{(\gamma_2 - 1)c_{V_2}}{(\gamma_1 - 1)c_{V_1}} \right)^{(\gamma_1 - 1)c_{V_1}} \exp(c_{V_1}\gamma_1 - c_{V_2}\gamma_2) \right]^{\frac{1}{(\gamma_1 - 1)c_{V_1} - (\gamma_2 - 1)c_{V_2}}} \end{array} \right.$$

et  $T^*(\tau, \varepsilon)$  est la température d'équilibre définie comme la racine de la fonction...

Cas général :  $c_{V_1} \neq c_{V_2}$  avec  $c_{V_1}(\gamma_1 - 1) \neq c_{V_2}(\gamma_2 - 1)$  et  $c_{V_1}\gamma_1 \neq c_{V_2}\gamma_2$

$$\tau_\alpha^* = A_\alpha (T^*)^B$$

où

$$\left\{ \begin{array}{l} B = \frac{c_{V_2} - c_{V_1}}{(\gamma_1 - 1)c_{V_1} - (\gamma_2 - 1)c_{V_2}} \\ A_1 = \left[ \frac{(c_{V_2})^{c_{V_2}}}{(c_{V_1})^{c_{V_1}}} \left( \frac{(\gamma_2 - 1)c_{V_2}}{(\gamma_1 - 1)c_{V_1}} \right)^{(\gamma_2 - 1)c_{V_2}} \exp(c_{V_1}\gamma_1 - c_{V_2}\gamma_2) \right]^{\frac{1}{(\gamma_1 - 1)c_{V_1} - (\gamma_2 - 1)c_{V_2}}} \\ A_2 = \left[ \frac{(c_{V_2})^{c_{V_2}}}{(c_{V_1})^{c_{V_1}}} \left( \frac{(\gamma_2 - 1)c_{V_2}}{(\gamma_1 - 1)c_{V_1}} \right)^{(\gamma_1 - 1)c_{V_1}} \exp(c_{V_1}\gamma_1 - c_{V_2}\gamma_2) \right]^{\frac{1}{(\gamma_1 - 1)c_{V_1} - (\gamma_2 - 1)c_{V_2}}} \end{array} \right.$$

et  $T^*(\tau, \varepsilon)$  est la température d'équilibre définie comme la racine de la fonction...

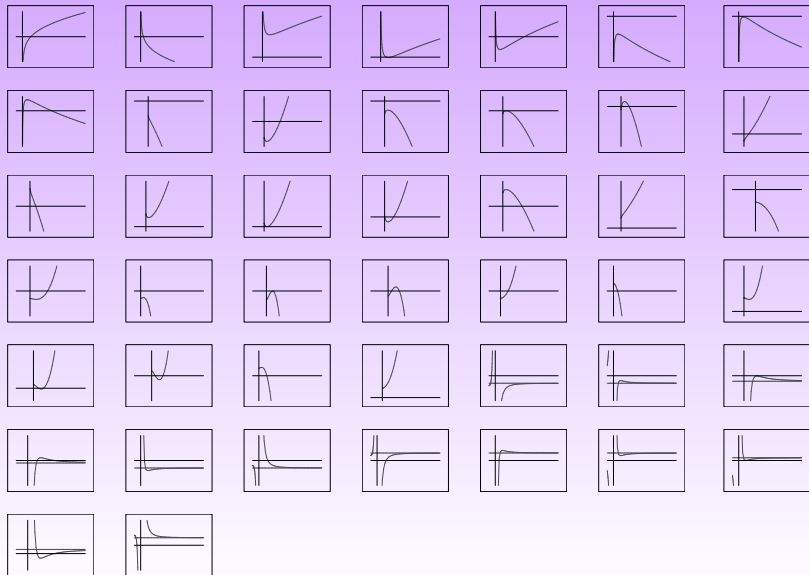
# Cas général

$$\begin{aligned} f : (0, +\infty) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ T &\longmapsto a_3 T^B + a_2 T^{B-1} + a_1 \end{aligned}$$

où

$$\begin{cases} a_1 := \tau (c_{v_2} - c_{v_1}), \\ a_2 := \varepsilon \left[ \frac{(\gamma_1 - 1)c_{v_1}}{(\gamma_2 - 1)c_{v_2}} - 1 \right] \left[ \frac{(c_{v_2})^{c_{v_2}}}{(c_{v_1})^{c_{v_1}}} \left( \frac{(\gamma_2 - 1)c_{v_2}}{(\gamma_1 - 1)c_{v_1}} \right)^{(\gamma_1 - 1)c_{v_1}} \exp(c_{v_1} \gamma_1 - c_{v_2} \gamma_2) \right]^{\frac{1}{(\gamma_1 - 1)c_{v_1} - (\gamma_2 - 1)c_{v_2}}}, \\ a_3 := c_{v_1} \left[ 1 - \frac{(\gamma_1 - 1)}{(\gamma_2 - 1)} \right] \left[ \frac{(c_{v_2})^{c_{v_2}}}{(c_{v_1})^{c_{v_1}}} \left( \frac{(\gamma_2 - 1)c_{v_2}}{(\gamma_1 - 1)c_{v_1}} \right)^{(\gamma_1 - 1)c_{v_1}} \exp(c_{v_1} \gamma_1 - c_{v_2} \gamma_2) \right]^{\frac{1}{(\gamma_1 - 1)c_{v_1} - (\gamma_2 - 1)c_{v_2}}} \end{cases}$$

# Cas général



# Cas général





Equation de la courbe de saturation est :

$$P^* = (T^*)^{\frac{(c_{v2} \gamma_2 - c_{v1} \gamma_1)}{(c_{v2} (\gamma_2 - 1) - c_{v1} (\gamma_1 - 1))}} \left[ \frac{((\gamma_2 - 1)^{(\gamma_2 - 1)} c_{v2}^{\gamma_2})^{c_{v2}}}{((\gamma_1 - 1)^{(\gamma_1 - 1)} c_{v1}^{\gamma_1})^{c_{v1}}} \exp(c_{v1} \gamma_1 - c_{v2} \gamma_2) \right]^{\frac{1}{(c_{v2} (\gamma_2 - 1) - c_{v1} (\gamma_1 - 1))}}$$

# Tests numériques

- 1-D : un domaine de 1 m de longueur avec une interface.

- |          |   |         |         |
|----------|---|---------|---------|
| $c_v$    | $\text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ | LIQUIDE | VAPEUR  |
| $\gamma$ | $(= c_p/c_v)$                                       | 1816.2  | 1040.14 |
|          |   | 2.35    | 1.43    |

- $T|_{t=0} = 400 \text{ K}$  dans tout le domaine

- $(P, \rho_1, \rho_2)|_{t=0} (T)$  tels qu'il y a ÉQUILIBRE.

# Tests numériques

- 1-D : un domaine de 1 m de longueur avec une interface.

- |          |   |         |         |
|----------|---|---------|---------|
| $c_v$    | $\text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ | LIQUIDE | VAPEUR  |
| $\gamma$ | $(= c_p/c_v)$                                       | 1816.2  | 1040.14 |
|          |   | 2.35    | 1.43    |

- $T|_{t=0} = 400 \text{ K}$  dans tout le domaine
- $(P, \rho_1, \rho_2)|_{t=0} (T)$  tels qu'il y a ÉQUILIBRE.

# Tests numériques

- 1-D : un domaine de 1 m de longueur avec une interface.

- |          |   |         |         |
|----------|---|---------|---------|
| $c_v$    | $\text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ | LIQUIDE | VAPEUR  |
| $\gamma$ | $(= c_p/c_v)$                                       | 1816.2  | 1040.14 |
|          |   | 2.35    | 1.43    |

- $T|_{t=0} = 400 \text{ K}$  dans tout le domaine
- $(P, \rho_1, \rho_2)|_{t=0} (T)$  tels qu'il y a ÉQUILIBRE.

# Tests numériques

- 1-D : un domaine de 1 m de longueur avec une interface.

- |          |   |         |         |
|----------|---|---------|---------|
| $c_v$    | $\text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ | LIQUIDE | VAPEUR  |
| $\gamma$ | $(= c_p/c_v)$                                       | 1816.2  | 1040.14 |
|          |   | 2.35    | 1.43    |

- $T|_{t=0} = 400 \text{ K}$  dans tout le domaine
- $(P, \rho_1, \rho_2)|_{t=0} (T)$  tels qu'il y a ÉQUILIBRE.

# Advection

- $u = 100$  m/s de chaque côté de l'interface
- conditions limites : infinie

# Advection

- $u = 100$  m/s de chaque côté de l'interface
- conditions limites : infinie

# Advection

- $u = 100$  m/s de chaque côté de l'interface
- conditions limites : infinie



# Advection

- $u = 100$  m/s de chaque côté de l'interface
- conditions limites : infinie

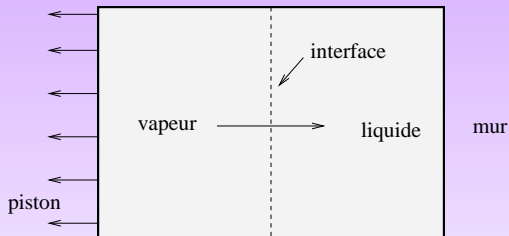
# Mur - Piston

- $u = 0$  m/s de chaque côté de l'interface
- conditions limites :
  - Droite : Mur
  - Gauche : Piston  
 $u_{\text{piston}} = -100$  m/s

- $u = 0$  m/s de chaque côté de l'interface
- conditions limites :
  - Droite : Mur
  - Gauche : Piston  
 $u_{\text{piston}} = -100$  m/s

# Mur - Piston

- $u = 0$  m/s de chaque côté de l'interface
- conditions limites :
  - Droite : Mur
  - Gauche : Piston  
 $u_{\text{piston}} = -100$  m/s



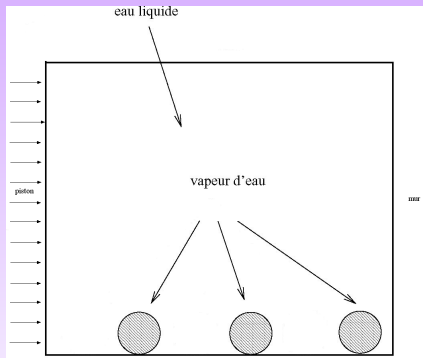
# Mur - Piston

- $u = 0$  m/s de chaque côté de l'interface
- conditions limites :
  - Droite : Mur
  - Gauche : Piston  
 $u_{\text{piston}} = -100$  m/s

- $u = 0$  m/s de chaque côté de l'interface
- conditions limites :
  - Droite : Mur
  - Gauche : Piston  
 $u_{\text{piston}} = +200$  m/s

- $u = 0$  m/s de chaque côté de l'interface
- conditions limites :
  - Droite : Mur
  - Gauche : Piston  
 $u_{\text{piston}} = +200$  m/s

- $u = 0$  m/s de chaque côté de l'interface
- conditions limites :
  - Droite : Mur
  - Gauche : Piston
$$u_{\text{piston}} = +200 \text{ m/s}$$





- $u = 0$  m/s de chaque côté de l'interface
- conditions limites :
  - Droite : Mur
  - Gauche : Piston
$$u_{\text{piston}} = +200 \text{ m/s}$$