Modellizzazione del cambiamento di fase nei flussi a interfaccia

Gloria Faccanoni

E.Toro, Università di Trento
G.Allaire, École Polytechnique
S.Kokh, CEA

31 ottobre 2005

Plan

Panoramica

Introduzione

Kokh S. (2001).
Aspects numériques et théoriques de la modélisation des écoulements diphasiques compressibles par des méthodes de capture d'interfaces.
Ph.D. thesis, Université Paris 6.

- modello isotermo
- modello anisotermo con cambiamento di fase

Risultati

- miglioramento dell'algoritmo globale,
- risoluzione "esatta" della tappa di rilassamento (cambiamento di fase),
- studio completo del caso Gas Perfetto - Gas Perfetto.

Introduction

Kokh S. (2001).
Aspects numériques et théoriques de la modélisation des écoulements diphasiques compressibles par des méthodes de capture d'interfaces.
Ph.D. thesis, Université Paris 6.

Caro F. (2004).
Modélisation et simulation numérique des transitions de phase liquide-vapeur.
Ph.D. thesis, École Polytechnique.

- modello isotermo
- modello anisotermo con cambiamento di fase

Risultati

- miglioramento dell'algoritmo globale,
- risoluzione "esatta" della tappa di rilassamento (cambiamento di fase),
- studio completo del caso Gas Perfetto - Gas Perfetto.

Introduzione

Kokh S. (2001).
Aspects numériques et théoriques de la modélisation des écoulements diphasiques compressibles par des méthodes de capture d'interfaces.
Ph.D. thesis, Université Paris 6.

Caro F. (2004).
Modélisation et simulation numérique des transitions de phase liquide-vapeur.
Ph.D. thesis, École Polytechnique.

- modello isotermo
- modello anisotermo con cambiamento di fase

Risultati

- miglioramento dell'algoritmo globale,
- risoluzione "esatta" della tappa di rilassamento (cambiamento di fase),
- studio completo del caso Gas Perfetto - Gas Perfetto.

Introduzione

Kokh S. (2001).
Aspects numériques et théoriques de la modélisation des écoulements diphasiques compressibles par des méthodes de capture d'interfaces.
Ph.D. thesis, Université Paris 6.

Caro F. (2004).
Modélisation et simulation numérique des transitions de phase liquide-vapeur.
Ph.D. thesis, École Polytechnique.

- modello isotermo
- modello anisotermo con cambiamento di fase

Risultati

- miglioramento dell'algoritmo globale,
- risoluzione "esatta" della tappa di rilassamento (cambiamento di fase),
- studio completo del caso Gas Perfetto - Gas Perfetto.

Introduzione

Kokh S. (2001).
Aspects numériques et théoriques de la modélisation des écoulements diphasiques compressibles par des méthodes de capture d'interfaces.
Ph.D. thesis, Université Paris 6.

Caro F. (2004).
Modélisation et simulation numérique des transitions de phase liquide-vapeur.
Ph.D. thesis, École Polytechnique.

- modello isotermo
- modello anisotermo con cambiamento di fase

Risultati

- ➠ miglioramento dell'algoritmo globale,
- ➠ risoluzione "esatta" della tappa di rilassamento (cambiamento di fase),
- ➠ studio completo del caso Gas Perfetto - Gas Perfetto.

Panoramica

Panoramica

Modello a interfaccia “inspessita”

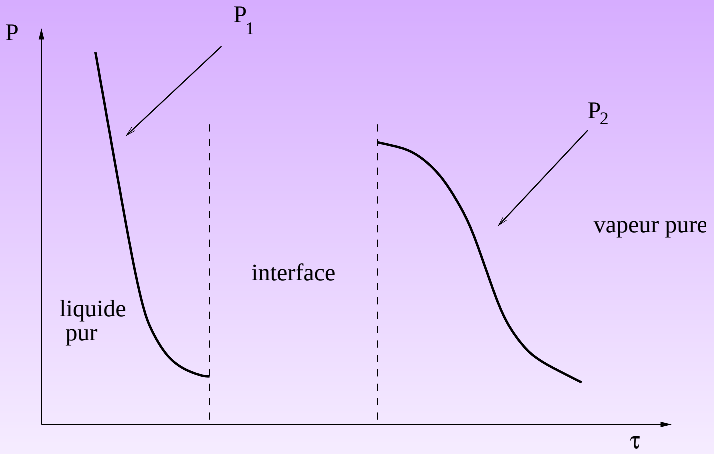
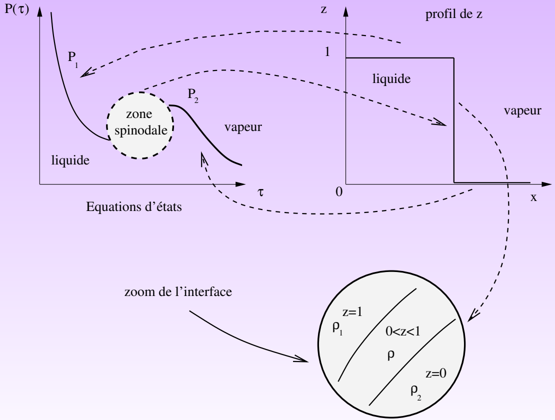


Figura: $P_\alpha = P_\alpha(\tau)$ a entropia o temperatura costante

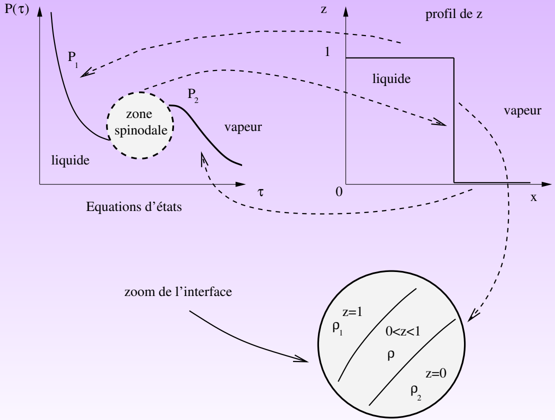
Modello a interfaccia “inspessita”

Figura: Parametro d’ordine astratto $z \in [0, 1]$ che fornisce la posizione dell’interfaccia



Modello a interfaccia “inspessita”

Figura: Parametro d’ordine astratto $z \in [0, 1]$ che fornisce la posizione dell’interfaccia



Interfaccia $\Gamma(t) := \{ (x, t) \text{ tali che} 0 < z(x, t) < 1 \}$

Modello a interfaccia "inspessita"

Notazioni e relazioni

Notazioni e relazioni costitutive per il sistema bifase:

Modello a interfaccia “inspessita”

Notazioni e relazioni

Notazioni e relazioni costitutive per il sistema bifase:

densità del miscuglio: $\rho = z\rho_1 + (1 - z)\rho_2$

volume del miscuglio: $\tau = y\tau_1 + (1 - y)\tau_2$ con $y := \dfrac{z\rho_1}{\rho}$

Modello a interfaccia “inspessita”
Notazioni e relazioni

Notazioni e relazioni costitutive per il sistema bifase:

densità del miscuglio: $\rho = z\rho_1 + (1 - z)\rho_2$

volume del miscuglio: $\tau = y\tau_1 + (1 - y)\tau_2$ con $y := \dfrac{z\rho_1}{\rho}$

energia interna del miscuglio: $\varepsilon = y\varepsilon_1 + (1 - y)\varepsilon_2$

Modello a interfaccia “inspessita”
Notazioni e relazioni

Notazioni e relazioni costitutive per il sistema bifase:

densità del miscuglio: $\rho = z\rho_1 + (1-z)\rho_2$

volume del miscuglio: $\tau = y\tau_1 + (1-y)\tau_2$ con $y := \dfrac{z\rho_1}{\rho}$

energia interna del miscuglio: $\varepsilon = y\varepsilon_1 + (1-y)\varepsilon_2$

entropia fisica della fase α : s_α
entalpia libera della fase α : g_α
$\alpha = 1, 2.$

Modellizzazione statica
Ottimizzazione

Ph.Helluy e Th.Barberon:

Senza cambiamento di fase

$\boxed{s_1\left(\rho_1, \varepsilon_1\right)}$ $\boxed{s_2\left(\rho_2, \varepsilon_2\right)}$

Modellizzazione statica

Ottimizzazione

Ph.Helluy e Th.Barberon:

Senza cambiamento di fase

$$\boxed{s_1\left(\rho_1,\varepsilon_1\right)} \qquad \boxed{s_2\left(\rho_2,\varepsilon_2\right)}$$

$$\boxed{s := \quad \{ys_1 + (1-y)s_2\}}$$

Modellizzazione statica

Ottimizzazione

Ph.Helluy e Th.Barberon:

Con cambiamento di fase

$\boxed{s_1\ (\rho_1, \varepsilon_1)}$ $\boxed{s_2\ (\rho_2, \varepsilon_2)}$

$$\boxed{s := \max_{y} \{ y s_1 + (1-y) s_2 \}}$$

Modellizzazione statica
Ottimizzazione

Ph.Helluy e Th.Barberon:

Con cambiamento di fase

$\boxed{s_1\left(\rho_1,\varepsilon_1\right)}$ $\boxed{s_2\left(\rho_2,\varepsilon_2\right)}$

$$\boxed{s := \max_y \left\{ y s_1 + (1-y) s_2 \right\}}$$

$\downarrow$

$\boxed{s\left(\rho,\varepsilon\right) \text{ del miscuglio con cambiamento di fase}}$

Modellizzazione statica

Ottimizzazione

Ph.Helluy e Th.Barberon:

Con cambiamento di fase

$\boxed{s_1\left(\rho_1, \varepsilon_1\right)}$ $\boxed{s_2\left(\rho_2, \varepsilon_2\right)}$

$$\boxed{s := \max_{y} \{y s_1 + (1-y) s_2\} = s_1 \Box s_2}$$

$\downarrow$

$\boxed{s\left(\rho, \varepsilon\right) \text{ del miscuglio con cambiamento di fase}}$

Modellizzazione statica
Ottimizzazione

Ph.Helluy e Th.Barberon:

Con cambiamento di fase

$s_1(\rho_1, \varepsilon_1)$ $\qquad$ $s_2(\rho_2, \varepsilon_2)$

$$s := \max_y \{y s_1 + (1-y) s_2\} = s_1 \Box s_2 = (s_1^* + s_2^*)^*$$

$\downarrow$

$s(\rho, \varepsilon)$ del miscuglio con cambiamento di fase

Panoramica

Sistema

Equazioni:

$$\begin{cases} \partial_t(z\rho_1) & + & \mathrm{div}(z\rho_1 u) & = & \mathcal{S}_y, \\ \partial_t((1-z)\rho_2) & + & \mathrm{div}((1-z)\rho_2 u) & = & -\mathcal{S}_y, \\ \partial_t(\rho u) & + & \mathrm{div}(\rho u \otimes u + P\,\mathrm{Id}) & = & 0\ , \\ \partial_t\left(\rho\left(\varepsilon + {|u|^2}/{2}\right)\right) & + & \mathrm{div}\left(\left(\rho\left(\varepsilon + {|u|^2}/{2}\right) + P\right) u\right) & = & 0\ , \\ \partial_t z & + & u \cdot \mathbf{grad}\, z & = & \mathcal{S}_z, \end{cases}$$

Sistema

Equazioni:

$$\begin{cases} \partial_t(z\rho_1) & + & \operatorname{div}(z\rho_1 u) & = & \mathcal{S}_y, \\ \partial_t((1-z)\rho_2) & + & \operatorname{div}((1-z)\rho_2 u) & = & -\mathcal{S}_y, \\ \partial_t(\rho u) & + & \operatorname{div}(\rho u \otimes u + P\,\mathrm{Id}) & = & 0\ , \\ \partial_t\left(\rho\left(\varepsilon + {}^{|u|^2}/_2\right)\right) & + & \operatorname{div}\left(\left(\rho\left(\varepsilon + {}^{|u|^2}/_2\right) + P\right)u\right) & = & 0\ , \\ \partial_t z & + & u \cdot \mathbf{grad}\, z & = & \mathcal{S}_z, \end{cases}$$

Sistema

Equazioni:

$$\begin{cases} \partial_t(z\rho_1) & + & \operatorname{div}(z\rho_1 u) & = & \mathcal{S}_y, \\ \partial_t((1-z)\rho_2) & + & \operatorname{div}((1-z)\rho_2 u) & = & -\mathcal{S}_y, \\ \partial_t(\rho u) & + & \operatorname{div}(\rho u \otimes u + P\,\mathrm{Id}) & = & 0\ , \\ \partial_t\left(\rho\left(\varepsilon + |u|^2/2\right)\right) & + & \operatorname{div}\left(\left(\rho\left(\varepsilon + |u|^2/2\right) + P\right) u\right) & = & 0\ , \\ \partial_t z & + & u \cdot \mathbf{grad}\, z & = & \mathcal{S}_z, \end{cases}$$

chiusura isoterma

$$\begin{aligned} T_1 &= T_2, \\ P &= \sum_\alpha z_\alpha P_\alpha, \\ \mathcal{S}_y &= \lambda(g_2 - g_1), \\ \mathcal{S}_z &= \kappa\left(P_1 - P_2\right), \end{aligned}$$

chiusura isobara (gas perfetti)

$$\begin{aligned} P &= P_1 = P_2, \\ \mathcal{S}_y &= \lambda(h_2 - h_1), \\ \mathcal{S}_z &= \kappa\left(\rho_1 s_1 T_1 - \rho_2 s_2 T_2\right). \end{aligned}$$

Sistema

Equazioni:

$$\begin{cases} \partial_t(z\rho_1) & + & \operatorname{div}(z\rho_1 u) & = & \mathcal{S}_y, \\ \partial_t((1-z)\rho_2) & + & \operatorname{div}((1-z)\rho_2 u) & = & -\mathcal{S}_y, \\ \partial_t(\rho u) & + & \operatorname{div}(\rho u \otimes u + P\,\mathrm{Id}) & = & 0\ , \\ \partial_t\left(\rho\left(\varepsilon + {}^{|u|^2}/_2\right)\right) & + & \operatorname{div}\left(\left(\rho\left(\varepsilon + {}^{|u|^2}/_2\right) + P\right)u\right) & = & 0\ , \\ \partial_t z & + & u \cdot \mathbf{grad}\, z & = & \mathcal{S}_z, \end{cases}$$

chiusura isoterma

$$\begin{aligned} T_1 &= T_2, \\ P &= \sum_\alpha z_\alpha P_\alpha, \\ \mathcal{S}_y &= \lambda(g_2 - g_1), \\ \mathcal{S}_z &= \kappa\,(P_1 - P_2)\,, \end{aligned}$$

$$\partial_t(\rho s) + \operatorname{div}(\rho u s) =$$

$$= \frac{(\mathcal{S}_z(P_1 - P_2) + \mathcal{S}_y(g_2 - g_1))}{T} \geq ($$

$$\mathcal{S}_y = \lambda(g_2 - g_1),$$
$$\mathcal{S}_z = \kappa\,(P_1 - P_2)\,.$$

Panoramica

Modello MTT-equilibrio

$$
\begin{cases}
\partial_t(z\rho_1) & + & \operatorname{div}(z\rho_1 u) & = & \lambda(g_2 - g_1) \\
\partial_t((1-z)\rho_2) & + & \operatorname{div}((1-z)\rho_2 u) & = & -\lambda(g_2 - g_1) \\
\partial_t(\rho u) & + & \operatorname{div}(\rho u \otimes u + P) & = & 0 \\
\partial_t\left(\rho\left(\varepsilon + |u|^2/2\right)\right) & + & \operatorname{div}\left(\left(\rho\left(\varepsilon + |u|^2/2\right) + P\right)u\right) & = & 0 \\
\partial_t z & + & u \cdot \mathbf{grad}\, z & = & k(P_2 - P_1)
\end{cases}
$$

Modello MTT-equilibrio

$$\begin{cases}
\partial_t(z\rho_1) & + & \operatorname{div}(z\rho_1 u) & = & \lambda(g_2 - g_1) \\
\partial_t((1-z)\rho_2) & + & \operatorname{div}((1-z)\rho_2 u) & = & -\lambda(g_2 - g_1) \\
\partial_t(\rho u) & + & \operatorname{div}(\rho u \otimes u + P) & = & 0 \\
\partial_t\left(\rho\left(\varepsilon + |u|^2/2\right)\right) & + & \operatorname{div}\left(\left(\rho\left(\varepsilon + |u|^2/2\right) + P\right)u\right) & = & 0 \\
\partial_t z & + & u \cdot \mathbf{grad}\, z & = & k(P_2 - P_1)
\end{cases}$$

$\kappa = \lambda = +\infty$

trovare $\rho_\alpha^* \geq 0$ et $z^* \in [0,1]$ tali che

$$\begin{cases}
T_1 = T_2 & & \text{(chiusura isoterma)} \\
P_1(\rho_1, T_1) = P_2(\rho_2, T_2) & (k \to +\infty) & \text{(eq. meccanico)} \\
g_1(\rho_1, T_1) = g_2(\rho_2, T_2) & (\lambda \to +\infty) & \text{(eq. termodinamico)}
\end{cases}$$

con i vincoli $\begin{cases}
\rho\varepsilon & = & z^*\rho_1^*\varepsilon_1 & + & (1-z^*)\rho_2^*\varepsilon_2 \\
\rho & = & z^*\rho_1^* & + & (1-z^*)\rho_2^*
\end{cases}$

Modello MTT-equilibrio

$$\begin{cases} \partial_t(z\rho_1) & + & \operatorname{div}(z\rho_1 u) & = & \lambda(g_2 - g_1) \\ \partial_t((1-z)\rho_2) & + & \operatorname{div}((1-z)\rho_2 u) & = & -\lambda(g_2 - g_1) \\ \partial_t(\rho u) & + & \operatorname{div}(\rho u \otimes u + P) & = & 0 \\ \partial_t\left(\rho\left(\varepsilon + |u|^2/2\right)\right) & + & \operatorname{div}\left(\left(\rho\left(\varepsilon + |u|^2/2\right) + P\right) u\right) & = & 0 \\ \partial_t z & + & u \cdot \textbf{grad}\, z & = & k(P_2 - P_1) \end{cases}$$

$\kappa = \lambda = +\infty$

trovare $\rho_\alpha^* \geq 0$ et $z^* \in [0,1]$ tali che

$$\begin{cases} T_1 = T_2 & & \text{(chiusura isoterma)} \\ P_1(\rho_1, T_1) = P_2(\rho_2, T_2) & (k \to +\infty) & \text{(eq. meccanico)} \\ g_1(\rho_1, T_1) = g_2(\rho_2, T_2) & (\lambda \to +\infty) & \text{(eq. termodinamico)} \end{cases}$$

con i vincoli $\begin{cases} \rho\varepsilon & = & z^*\rho_1^*\varepsilon_1 & + & (1-z^*)\rho_2^*\varepsilon_2 \\ \rho & = & z^*\rho_1^* & + & (1-z^*)\rho_2^* \end{cases}$

Modello MTT-equilibrio

Problemi

1. giustificare fisicamente il passaggio al limite
2. calcolare ρ_α^* e z^*.

Modello MTT-equilibrio

Problemi

1. giustificare fisicamente il passaggio al limite
2. calcolare ρ_α^* e z^*.

Modello MTT-equilibrio

Problemi

1. giustificare fisicamente il passaggio al limite
2. calcolare ρ^*_α e z^*.

Panoramica

Ottimizzazione convessa

Teorema

Rilassamento:
$$\begin{cases} T_1 = T_2 \\ P_1(\rho_1, T_1) = P_2(\rho_2, T_2) \\ g_1(\rho_1, T_1) = g_2(\rho_2, T_2) \end{cases}$$

$\Updownarrow$ *(formalmente)*

Pb. d'ottimizzazione:
$$\begin{cases} \max\limits_{y \in]0,1[} & s(y, \tau_1, \varepsilon_1, \tau_2, \varepsilon_2) \\ \text{vincoli:} & 1. \quad \varepsilon = y\varepsilon_1 + (1-y)\varepsilon_2 \\ & 2. \quad \tau = y\tau_1 + (1-y)\tau_2 \\ & \quad\ \ \varepsilon, \tau \text{ fissati} \end{cases}$$

Ottimizzazione convessa

Teorema

Rilassamento:

$$\begin{cases} T_1 = T_2 \\ P_1(\rho_1, T_1) = P_2(\rho_2, T_2) \\ g_1(\rho_1, T_1) = g_2(\rho_2, T_2) \end{cases}$$

$\Updownarrow$ *(formalmente)*

Pb. d'ottimizzazione:

$$\begin{cases} \max\limits_{y \in]0,1[} & s(y, \tau_1, \varepsilon_1, \tau_2, \varepsilon_2) \\ \textit{vincoli:} & 1. \quad \varepsilon = y\varepsilon_1 + (1-y)\varepsilon_2 \\ & 2. \quad \tau = y\tau_1 + (1-y)\tau_2 \\ & \qquad \varepsilon, \tau \textit{ fissati} \end{cases}$$

Dimostrazione

Traccia della dimostrazione.

$$s = ys_1(\tau_1, \varepsilon_1) + (1-y)s_2(\tau_2, \varepsilon_2) \qquad \text{con} \quad y := \frac{z\,\rho_1}{\rho}$$

- L'ottimizzazione rispetto a ε_α equivale a $T_1 = T_2$.
- L'ottimizzazione rispetto a τ_α equivale a $\frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2}$ e quindi a $P_1 = P_2$.
- L'ottimizzazione rispetto a y equivale a $\frac{g_1}{T_1} = \frac{g_2}{T_2}$ e quindi a $g_1 = g_2$.

□

Dimostrazione

Traccia della dimostrazione.

$$s = ys_1(\tau_1, \varepsilon_1) + (1-y)s_2(\tau_2, \varepsilon_2) \qquad \text{con} \quad y := \frac{z\,\rho_1}{\rho}$$

- L'ottimizzazione rispetto a ε_α equivale a $T_1 = T_2$.
- L'ottimizzazione rispetto a τ_α equivale a $\frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2}$ e quindi a $P_1 = P_2$.
- L'ottimizzazione rispetto a y equivale a $\frac{g_1}{T_1} = \frac{g_2}{T_2}$ e quindi a $g_1 = g_2$.

$\square$

Dimostrazione

Traccia della dimostrazione.

$$s = ys_1(\tau_1, \varepsilon_1) + (1-y)s_2(\tau_2, \varepsilon_2) \qquad \text{con} \quad y := \frac{z\,\rho_1}{\rho}$$

- L'ottimizzazione rispetto a ε_α equivale a $T_1 = T_2$.
- L'ottimizzazione rispetto a τ_α equivale a $\frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2}$ e quindi a $P_1 = P_2$.
- L'ottimizzazione rispetto a y equivale a $\frac{g_1}{T_1} = \frac{g_2}{T_2}$ e quindi a $g_1 = g_2$.

$\square$

Dimostrazione

Traccia della dimostrazione.

$$s = y s_1(\tau_1, \varepsilon_1) + (1 - y) s_2(\tau_2, \varepsilon_2) \qquad \text{con} \quad y := \frac{z\,\rho_1}{\rho}$$

- L'ottimizzazione rispetto a ε_α equivale a $T_1 = T_2$.
- L'ottimizzazione rispetto a τ_α equivale a $\frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2}$ e quindi a $P_1 = P_2$.
- L'ottimizzazione rispetto a y equivale a $\frac{g_1}{T_1} = \frac{g_2}{T_2}$ e quindi a $g_1 = g_2$.

$\square$

Dimostrazione

Traccia della dimostrazione.

$$s = ys_1(\tau_1, \varepsilon_1) + (1 - y)s_2(\tau_2, \varepsilon_2) \qquad \text{con} \quad y := \frac{z\,\rho_1}{\rho}$$

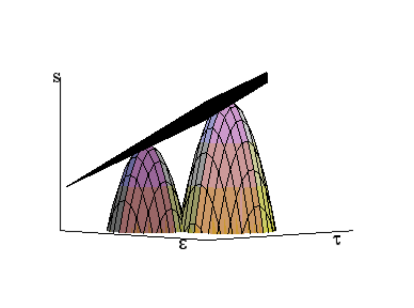
- L'ottimizzazione rispetto a ε_α equivale a $T_1 = T_2$.
- L'ottimizzazione rispetto a τ_α equivale a $\frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2}$ e quindi a $P_1 = P_2$.
- L'ottimizzazione rispetto a y equivale a $\frac{g_1}{T_1} = \frac{g_2}{T_2}$ e quindi a $g_1 = g_2$.

$\square$

Interpretazione geometrica del problema d'ottimizzazione

Teorema

Indichiamo con $\mathcal{S}_\alpha$ la superficie $(\tau,\varepsilon) \mapsto s_\alpha(\tau,\varepsilon)$ nello spazio (τ,ε,s). Il sistema è equivalente a trovare un punto $(\tau_\alpha,\varepsilon_\alpha)$ su ciascuna superficie tale che i due iperpiani tangenti in questi punti coincidono.



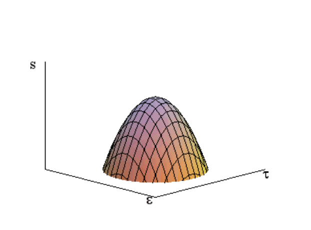
Dimostrazione

Traccia della dimostrazione.

$$\widetilde{s}_\alpha(\tau,\varepsilon) = \frac{1}{T_\alpha}\varepsilon + \frac{P_\alpha}{T_\alpha}\tau + \frac{s_\alpha T_\alpha - \varepsilon_\alpha - P_\alpha \tau_\alpha}{T_\alpha}$$

$$\widetilde{s}_1 \| \widetilde{s}_2 \iff \begin{cases} P_1 = P_2 \\ T_1 = T_2 \end{cases}$$

$$\widetilde{s}_1 = \widetilde{s}_2 \iff g_1 = g_2$$



$\square$

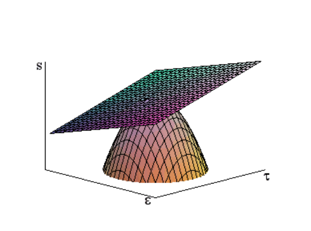
Dimostrazione

Traccia della dimostrazione.

$$\widetilde{s}_\alpha(\tau,\varepsilon) = \frac{1}{T_\alpha}\varepsilon + \frac{P_\alpha}{T_\alpha}\tau + \frac{s_\alpha T_\alpha - \varepsilon_\alpha - P_\alpha \tau_\alpha}{T_\alpha}$$

$$\widetilde{s}_1 \| \widetilde{s}_2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} P_1 &= P_2 \\ T_1 &= T_2 \end{cases}$$

$$\widetilde{s}_1 \equiv \widetilde{s}_2 \quad \Leftrightarrow \quad g_1 = g_2$$



$\square$

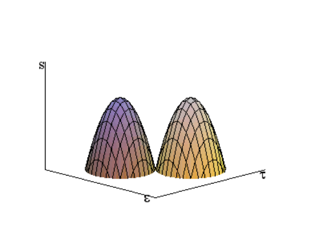
Dimostrazione

Traccia della dimostrazione.

$$\widetilde{s}_\alpha(\tau,\varepsilon) = \frac{1}{T_\alpha}\varepsilon + \frac{P_\alpha}{T_\alpha}\tau + \frac{s_\alpha T_\alpha - \varepsilon_\alpha - P_\alpha \tau_\alpha}{T_\alpha}$$

$$\widetilde{s}_1 \| \widetilde{s}_2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} P_1 & = P_2 \\ T_1 & = T_2 \end{cases}$$

$$\widetilde{s}_1 \equiv \widetilde{s}_2 \quad \Leftrightarrow \quad g_1 = g_2$$



$\square$

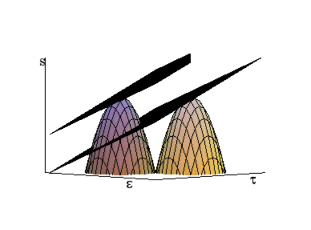
Dimostrazione

Traccia della dimostrazione.

$$\widetilde{s}_\alpha(\tau,\varepsilon) = \frac{1}{T_\alpha}\varepsilon + \frac{P_\alpha}{T_\alpha}\tau + \frac{s_\alpha T_\alpha - \varepsilon_\alpha - P_\alpha \tau_\alpha}{T_\alpha}$$

$$\widetilde{s}_1 \| \widetilde{s}_2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} P_1 &= P_2 \\ T_1 &= T_2 \end{cases}$$

$$\widetilde{s}_1 \equiv \widetilde{s}_2 \quad \Leftrightarrow \quad g_1 = g_2$$



□

Dimostrazione

Modellizzazione del cambiamento di fase nei flussi a interfaccia

Gloria Faccanoni

Introduzione

Modellizzazione del cambiamento di fase

Modellizzazione statica

Modellizzazione dinamica

MTT-equilibrio

Interpretazione

Approssimazione

Test numerici

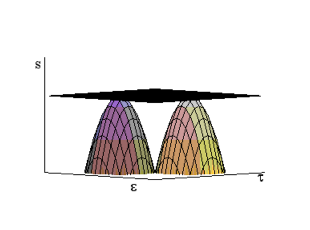
Prospettive

Traccia della dimostrazione.

$$\widetilde{s}_\alpha(\tau,\varepsilon) = \frac{1}{T_\alpha}\varepsilon + \frac{P_\alpha}{T_\alpha}\tau + \frac{s_\alpha T_\alpha - \varepsilon_\alpha - P_\alpha \tau_\alpha}{T_\alpha}$$

$$\widetilde{s}_1 || \widetilde{s}_2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} P_1 & = P_2 \\ T_1 & = T_2 \end{cases}$$

$$\widetilde{s}_1 \equiv \widetilde{s}_2 \quad \Leftrightarrow \quad g_1 = g_2$$



□

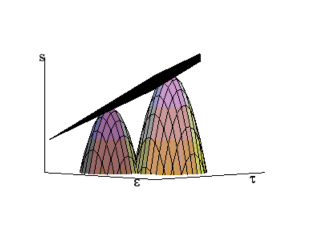
Dimostrazione

Traccia della dimostrazione.

$$\widetilde{s}_\alpha(\tau,\varepsilon) = \frac{1}{T_\alpha}\varepsilon + \frac{P_\alpha}{T_\alpha}\tau + \frac{s_\alpha T_\alpha - \varepsilon_\alpha - P_\alpha \tau_\alpha}{T_\alpha}$$

$$\widetilde{s}_1 \| \widetilde{s}_2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} P_1 & = P_2 \\ T_1 & = T_2 \end{cases}$$

$$\widetilde{s}_1 \equiv \widetilde{s}_2 \quad \Leftrightarrow \quad g_1 = g_2$$



$\square$

Interpretazione

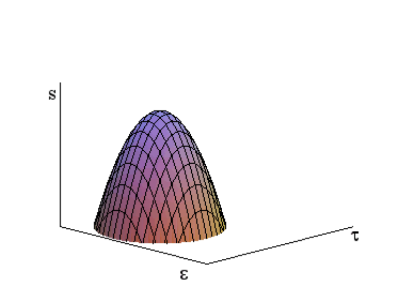
$s(\rho, \varepsilon)$ è l'inviluppo concavo della funzione

$$(\rho \ , \ \varepsilon) \quad \longrightarrow \quad \max\left\{ s_1(\rho_1, \varepsilon_1) \ , \ s_2\left(\frac{\rho - z\rho_1}{1 - z} \ , \ \frac{\varepsilon - \frac{z\rho_1}{\rho}\varepsilon_1}{1 - \frac{z\rho_1}{\rho}} \right) \right\}$$

Interpretazione

$s(\rho,\varepsilon)$ è l'inviluppo concavo della funzione

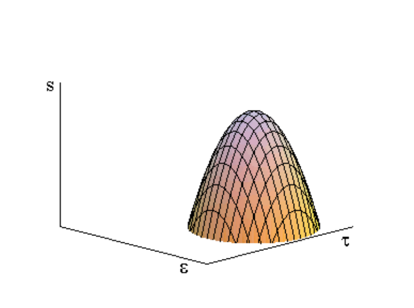
$$(\rho\ ,\ \varepsilon) \quad \longrightarrow \quad \max\left\{ s_1(\rho_1,\varepsilon_1)\ ,\ s_2\left(\frac{\rho - z\rho_1}{1-z}\ ,\ \frac{\varepsilon - \frac{z\rho_1}{\rho}\varepsilon_1}{1-\frac{z\rho_1}{\rho}} \right) \right\}$$



Interpretazione

$s(\rho,\varepsilon)$ è l'inviluppo concavo della funzione

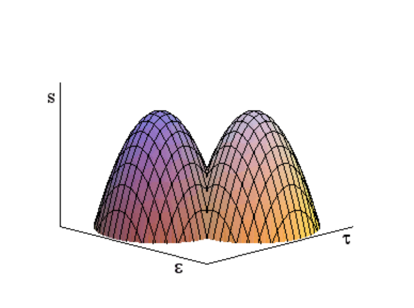
$$(\rho\ ,\ \varepsilon) \quad \longrightarrow \quad \max\left\{ s_1(\rho_1,\varepsilon_1)\ ,\ s_2\left(\frac{\rho - z\rho_1}{1-z}\ ,\ \frac{\varepsilon - \frac{z\rho_1}{\rho}\varepsilon_1}{1-\frac{z\rho_1}{\rho}} \right) \right\}$$



Interpretazione

$s(\rho,\varepsilon)$ è l'inviluppo concavo della funzione

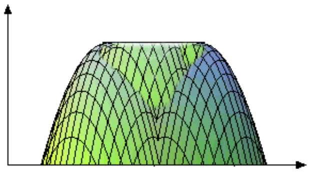
$$(\rho\ ,\ \varepsilon) \quad \longrightarrow \quad \max\left\{ s_1(\rho_1,\varepsilon_1)\ ,\ s_2\left(\frac{\rho - z\rho_1}{1-z}\ ,\ \frac{\varepsilon - \frac{z\rho_1}{\rho}\varepsilon_1}{1-\frac{z\rho_1}{\rho}}\right)\right\}$$



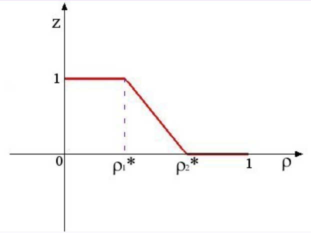
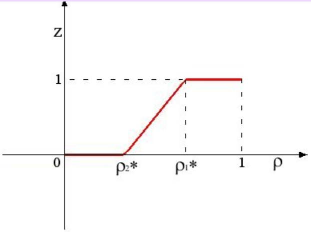
Interpretazione

$s(\rho,\varepsilon)$ è l'inviluppo concavo della funzione

$$(\rho\ ,\ \varepsilon) \quad\longrightarrow\quad \max\left\{ s_1(\rho_1,\varepsilon_1)\ ,\ s_2\left(\frac{\rho - z\rho_1}{1-z}\ ,\ \frac{\varepsilon - \frac{z\rho_1}{\rho}\varepsilon_1}{1-\frac{z\rho_1}{\rho}}\right)\right\}$$



Conclusione

se $\rho_1^* \le \rho_2^*$	se $\rho_1^* > \rho_2^*$
$z^* = \begin{cases} 1 & \text{se } \rho < \rho_1^*, \\ \dfrac{\rho - \rho_2^*}{\rho_1^* - \rho_2^*} & \text{se } \rho_1^* < \rho < \rho_2^*, \\ 0 & \text{se } \rho_2^* < \rho. \end{cases}$	$z^* = \begin{cases} 0 & \text{se } \rho < \rho_2^*, \\ \dfrac{\rho - \rho_2^*}{\rho_1^* - \rho_2^*} & \text{se } \rho_2^* < \rho < \rho_1^*, \\ 1 & \text{se } \rho_1^* < \rho. \end{cases}$
	

Equivalenze

$$\boxed{\begin{cases} T_1 = T_1 \\ P_1 = P_2 \\ g_1 = g_2 \end{cases}}$$

$$\boxed{s := \max_y \{ys_1 + (1-y)s_2\}}$$

$$\boxed{s := \text{concave hull of } \max_y\{s_1, s_2\}} \qquad \boxed{s := \text{sup-convolution}(s_1, s_2)}$$

$$\boxed{s := (s_1^* + s_2^*)^*}$$

Panoramica

Tecnica di splitting

1. **Tappa convettiva:**
   si risolve numericamente il sistema omogeneo

$$\mathbf{V}_i^n \xrightarrow[\text{a 5 equazioni (S.Kokh)}]{\text{Algoritmo quasi-conservativo}} \widehat{\mathbf{V}}_i^n$$

2. **Tappa di rilassamento:**
   si proietta questa soluzione $\widehat{\mathbf{V}}_i^n$ sulla varietà MTT-equilibrio *i.e.* si risolve il problema di ottimizzazione.

Tecnica di splitting

1. TAPPA CONVETTIVA:
   si risolve numericamente il sistema omogeneo

$$\mathbf{V}_i^n \quad \xrightarrow[\text{a 5 equazioni (S.Kokh)}]{\text{Algoritmo quasi-conservativo}} \quad \widehat{\mathbf{V}}_i^n$$

2. TAPPA DI RILASSAMENTO:
   si proietta questa soluzione $\widehat{\mathbf{V}}_i^n$ sulla varietà MTT-equilibrio
   i.e. si risolve il problema di ottimizzazione.

❷: proiezione

- Innanzitutto si utilizza il fatto che

$$\begin{cases} \partial_t \rho &= 0 \\ \partial_t(\rho u) &= 0 \\ \partial_t(\rho e) &= 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{per definire}} \begin{cases} \rho_i^{n+1} &= \widehat{\rho}_i^n, \\ (\rho u)_i^{n+1} &= \widehat{(\rho u)}_i^n, \\ (\rho e)_i^{n+1} &= \widehat{(\rho e)}_i^n. \end{cases}$$

- si calcolano le densità parziali $\rho_\alpha^*(\rho, \varepsilon)$ ottimizzando l'entropia del miscuglio
  che equivale a risolvere

$$\begin{cases} \partial_t(z\rho_1) &= (g_2 - g_1) \\ \partial_t z &= (P_1 - P_2) \end{cases} \quad \text{per } t \to +\infty$$

- si utilizzano le $(\rho_\alpha^*)_i^n$ per aggiornare z_i^{n+1}:

❷: proiezione

- Innanzitutto si utilizza il fatto che

$$\begin{cases} \partial_t \rho &= 0 \\ \partial_t(\rho u) &= 0 \\ \partial_t(\rho e) &= 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{per definire}} \begin{cases} \rho_i^{n+1} &= \widehat{\rho}_i^n, \\ (\rho u)_i^{n+1} &= \widehat{(\rho u)}_i^n, \\ (\rho e)_i^{n+1} &= \widehat{(\rho e)}_i^n. \end{cases}$$

- si calcolano le densità parziali $\rho_\alpha^*(\rho, \varepsilon)$ ottimizzando l'entropia del miscuglio
  che equivale a risolvere

$$\begin{cases} \partial_t(z\rho_1) &= (g_2 - g_1) \\ \partial_t z &= (P_1 - P_2) \end{cases} \quad \text{per } t \to +\infty$$

- si utilizzano le $(\rho_\alpha^*)_i^n$ per aggiornare z_i^{n+1}:

❷: proiezione

- Innanzitutto si utilizza il fatto che

$$\begin{cases} \partial_t \rho &= 0 \\ \partial_t(\rho u) &= 0 \\ \partial_t(\rho e) &= 0 \end{cases} \xRightarrow{\text{per definire}} \begin{cases} \rho_i^{n+1} &= \widehat{\rho}_i^n, \\ (\rho u)_i^{n+1} &= \widehat{(\rho u)}_i^n, \\ (\rho e)_i^{n+1} &= \widehat{(\rho e)}_i^n. \end{cases}$$

- si calcolano le densità parziali $\rho_\alpha^*(\rho, \varepsilon)$ ottimizzando l'entropia del miscuglio
  che equivale a risolvere

$$\begin{cases} \partial_t(z\rho_1) &= (g_2 - g_1) \\ \partial_t z &= (P_1 - P_2) \end{cases} \quad \text{per } t \to +\infty$$

- si utilizzano le $(\rho_\alpha^*)_i^n$ per aggiornare z_i^{n+1}:

❷: proiezione

$$(\rho_1^*)_i^n \le (\rho_2^*)_i^n \quad \Rightarrow \quad z_i^{n+1} = \begin{cases} 1 & \text{se } \rho_i^{n+1} < (\rho_1^*)_i^n, \\ \dfrac{\rho_i^{n+1} - (\rho_2^*)_i^n}{(\rho_1^*)_i^n - (\rho_2^*)_i^n} & \text{se } (\rho_1^*)_i^n < \rho_i^{n+1} < (\rho_2^*)_i^n, \\ 0 & \text{se } (\rho_2^*)_i^n < \rho_i^{n+1}. \end{cases}$$

$$(\rho_1^*)_i^n > (\rho_2^*)_i^n \quad \Rightarrow \quad z_i^{n+1} = \begin{cases} 0 & \text{se } \rho_i^{n+1} < (\rho_2^*)_i^n, \\ \dfrac{\rho_i^{n+1} (\rho_2^*)_i^n}{(\rho_1^*)_i^n - (\rho_2^*)_i^n} & \text{se } (\rho_2^*)_i^n < \rho_i^{n+1} < (\rho_1^*)_i^n, \\ 1 & \text{se } (\rho_1^*)_i^n < \rho_i^{n+1}. \end{cases}$$

Tappa di proiezione

- Innazitutto si utilizza il fatto che

$$\begin{cases} \partial_t \rho &= 0 \\ \partial_t(\rho u) &= 0 \\ \partial_t(\rho e) &= 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{per definire}} \begin{cases} \rho_i^{n+1} = \widehat{\rho}_i^n, \\ (\rho u)_i^{n+1} = \widehat{(\rho u)}_i^n, \\ (\rho e)_i^{n+1} = \widehat{(\rho e)}_i^n. \end{cases}$$

- **si calcolano le densità parziali $\rho_\alpha^*(\rho, \varepsilon)$ ottimizzando l'entropia del miscuglio.**
- si utilizzano le $(\rho_\alpha^*)_i^n$ per aggiornare z_i^{n+1}.

Se troviamo l'unica coppia (ρ_1^*, ρ_2^*) soluzione del problema di ottimizzazione, avremo completamente determinato la varietà MTT-equilibrio.

Tappa di proiezione

- Innazitutto si utilizza il fatto che

$$\begin{cases} \partial_t \rho &= 0 \\ \partial_t(\rho u) &= 0 \\ \partial_t(\rho e) &= 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{per definire}} \begin{cases} \rho_i^{n+1} = \widehat{\rho}_i^n, \\ (\rho u)_i^{n+1} = \widehat{(\rho u)}_i^n, \\ (\rho e)_i^{n+1} = \widehat{(\rho e)}_i^n. \end{cases}$$

- si calcolano le densità parziali $\rho_\alpha^*(\rho, \varepsilon)$ ottimizzando l'entropia del miscuglio.
- si utilizzano le $(\rho_\alpha^*)_i^n$ per aggiornare z_i^{n+1}.

Se troviamo l'unica coppia (ρ_1^*, ρ_2^*) soluzione del problema di ottimizzazione, avremo completamente determinato la varietà MTT-equilibrio.

Gas Perfetti

Leggi di stato:

$$P_\alpha = (\gamma_\alpha - 1)\,\frac{\varepsilon_\alpha}{\tau_\alpha} \qquad \text{con} \qquad \varepsilon_\alpha = c_{v_\alpha} T_\alpha$$

$$s_\alpha = c_{v_\alpha} \log\Big(\varepsilon_\alpha\,(\tau_\alpha)^{\gamma_\alpha - 1}\Big) + s^0_\alpha.$$

s^0_α: stato termodinamico di riferimento,

(in questo seminario supporremo la normalizzazione $s^0_\alpha = 0$).

Gas Perfetti

Leggi di stato:

$$P_\alpha = (\gamma_\alpha - 1)\,\frac{\varepsilon_\alpha}{\tau_\alpha} \qquad \text{con} \qquad \varepsilon_\alpha = c_{v_\alpha} T_\alpha$$

$$s_\alpha = c_{v_\alpha} \log\left(\varepsilon_\alpha\,(\tau_\alpha)^{\gamma_\alpha - 1}\right) + s_\alpha^0.$$

s_α^0: stato termodinamico di riferimento,

(in questo seminario supporremo la normalizzazione $s_\alpha^0 = 0$).

Gas Perfetti

Leggi di stato:

$$P_\alpha = (\gamma_\alpha - 1)\,\frac{\varepsilon_\alpha}{\tau_\alpha} \qquad \text{con} \qquad \varepsilon_\alpha = c_{v_\alpha} T_\alpha$$

$$s_\alpha = c_{v_\alpha} \log\left(\varepsilon_\alpha\,(\tau_\alpha)^{\gamma_\alpha - 1}\right) + s_\alpha^0.$$

s_α^0: stato termodinamico di riferimento,

(in questo seminario supporremo la normalizzazione $s_\alpha^0 = 0$).

Gas Perfetti

Dobbiamo pertanto risolvere il sistema:

$$\begin{cases} T_1 & = & T_2 \\ (\gamma_1 - 1) c_{v_1} \tau_2 & = & (\gamma_2 - 1) c_{v_2} \tau_1 \\ c_{v_1} \left[\log \left(\varepsilon_1 \, \tau_1^{\gamma_1 - 1} \right) - \gamma_1 \right] & = & c_{v_2} \left[\log \left(\varepsilon_2 \, \tau_2^{\gamma_2 - 1} \right) - \gamma_2 \right] \end{cases}$$

con i vincoli

$$\begin{cases} \varepsilon & = & y\varepsilon_1 + (1 - y)\varepsilon_2 \\ \tau & = & y\tau_1 + (1 - y)\tau_2 \end{cases}$$

Gas Perfetti

Caso 1 $c_{v_1} = c_{v_2}$ e $\gamma_1 \neq \gamma_2$;

Caso 2 $c_{v_1} \neq c_{v_2}$ e $c_{v_1}(\gamma_1 - 1) = c_{v_2}(\gamma_2 - 1)$

Caso 3 $c_{v_1} \neq c_{v_2}$ e $c_{p_1} = c_{p_2}$

Caso 4 $c_{v_1} \neq c_{v_2}$ e $c_{v_1}(\gamma_1 - 1) \neq c_{v_2}(\gamma_2 - 1)$, $c_{v_1}\gamma_1 \neq c_{v_2}\gamma_2$

Gas Perfetti

Caso 1 $c_{v_1} = c_{v_2}$ e $\gamma_1 \neq \gamma_2$;

Caso 2 $c_{v_1} \neq c_{v_2}$ e $c_{v_1}(\gamma_1 - 1) = c_{v_2}(\gamma_2 - 1)$

Caso 3 $c_{v_1} \neq c_{v_2}$ e $c_{p_1} = c_{p_2}$

Caso 4 $c_{v_1} \neq c_{v_2}$ e $c_{v_1}(\gamma_1 - 1) \neq c_{v_2}(\gamma_2 - 1)$, $c_{v_1}\gamma_1 \neq c_{v_2}\gamma_2$

Gas Perfetti

Caso 1 $c_{v_1} = c_{v_2}$ e $\gamma_1 \neq \gamma_2$;

Caso 2 $c_{v_1} \neq c_{v_2}$ e $c_{v_1}(\gamma_1 - 1) = c_{v_2}(\gamma_2 - 1)$

Caso 3 $c_{v_1} \neq c_{v_2}$ e $c_{p_1} = c_{p_2}$

Caso 4 $c_{v_1} \neq c_{v_2}$ e $c_{v_1}(\gamma_1 - 1) \neq c_{v_2}(\gamma_2 - 1)$, $c_{v_1}\gamma_1 \neq c_{v_2}\gamma_2$

Caso 1: $c_{v_1} = c_{v_2}$

$$\begin{cases} \rho_1^* = \exp(-1)\left(\dfrac{\gamma_2 - 1}{\gamma_1 - 1}\right)^{\frac{\gamma_2-1}{\gamma_2-\gamma_1}} \\ \rho_2^* = \exp(-1)\left(\dfrac{\gamma_2 - 1}{\gamma_1 - 1}\right)^{\frac{\gamma_1-1}{\gamma_2-\gamma_1}} \end{cases}$$

Curva di saturazione per il miscuglio liquido-vapore:

$$P = \begin{cases} (\gamma_1 - 1)\rho_1\varepsilon_1, & \text{per } \rho < \rho_1^* \\ \Gamma^* c_v T^*, & \text{per } \rho_1^* \leq \rho \leq \rho_2^* \\ (\gamma_2 - 1)\rho_2\varepsilon_2, & \text{per } \rho > \rho_2^* \end{cases}$$

dove

$$\Gamma^* := \exp(-1)\left(\frac{(\gamma_2 - 1)^{(\gamma_2-1)}}{(\gamma_1 - 1)^{(\gamma_1-1)}}\right)^{\frac{1}{(\gamma_2-1)-(\gamma_1-1)}}$$

$$T^* = T(\rho, \varepsilon, \rho_1^*, \rho_2^*)$$

OSSERVAZIONE: $P \in \mathcal{C}^0$, ma $\notin \mathcal{C}^1$.

Caso 1: $c_{v_1} = c_{v_2}$

$$\begin{cases} \rho_1^* = \exp(-1)\left(\dfrac{\gamma_2 - 1}{\gamma_1 - 1}\right)^{\frac{\gamma_2 - 1}{\gamma_2 - \gamma_1}} \\ \rho_2^* = \exp(-1)\left(\dfrac{\gamma_2 - 1}{\gamma_1 - 1}\right)^{\frac{\gamma_1 - 1}{\gamma_2 - \gamma_1}} \end{cases}$$

Curva di saturazione per il miscuglio liquido-vapore:

$$P = \begin{cases} (\gamma_1 - 1)\rho_1\varepsilon_1, & \text{per } \rho < \rho_1^* \\ \Gamma^* c_v T^*, & \text{per } \rho_1^* \leq \rho \leq \rho_2^* \\ (\gamma_2 - 1)\rho_2\varepsilon_2, & \text{per } \rho > \rho_2^* \end{cases}$$

dove

$$\Gamma^* := \exp(-1)\left(\frac{(\gamma_2 - 1)^{(\gamma_2 - 1)}}{(\gamma_1 - 1)^{(\gamma_1 - 1)}}\right)^{\frac{1}{(\gamma_2 - 1) - (\gamma_1 - 1)}}$$
$$T^* = T(\rho, \varepsilon, \rho_1^*, \rho_2^*)$$

OSSERVAZIONE: $P \in \mathcal{C}^0$, ma $\notin \mathcal{C}^1$.

Caso 1: $c_{v_1} = c_{v_2}$

$$\begin{cases} \rho_1^* = \exp(-1)\left(\dfrac{\gamma_2-1}{\gamma_1-1}\right)^{\frac{\gamma_2-1}{\gamma_2-\gamma_1}} \\ \rho_2^* = \exp(-1)\left(\dfrac{\gamma_2-1}{\gamma_1-1}\right)^{\frac{\gamma_1-1}{\gamma_2-\gamma_1}} \end{cases}$$

Curva di saturazione per il miscuglio liquido-vapore:

$$P = \begin{cases} (\gamma_1-1)\rho_1\varepsilon_1, & \text{per } \rho < \rho_1^* \\ \Gamma^* c_v T^*, & \text{per } \rho_1^* \le \rho \le \rho_2^* \\ (\gamma_2-1)\rho_2\varepsilon_2, & \text{per } \rho > \rho_2^* \end{cases}$$

dove

$$\Gamma^* := \exp(-1)\left(\frac{(\gamma_2-1)^{(\gamma_2-1)}}{(\gamma_1-1)^{(\gamma_1-1)}}\right)^{\frac{1}{(\gamma_2-1)-(\gamma_1-1)}}$$

$$T^* = T(\rho, \varepsilon, \rho_1^*, \rho_2^*)$$

OSSERVAZIONE: $P \in \mathcal{C}^0$, ma $\notin \mathcal{C}^1$.

Caso generale: $c_{v_1} \neq c_{v_2}$ con $c_{v_1}(\gamma_1 - 1) \neq c_{v_2}(\gamma_2 - 1)$ e $c_{v_1}\gamma_1 \neq c_{v_2}\gamma_2$

Modellizzazione del cambiamento di fase nei flussi a interfaccia
Gloria Faccanoni
Introduzione
Modellizzazione del cambiamento di fase
Modellizzazione statica
Modellizzazione dinamica
MTT-equilibrio
Interpretazione
Approssimazione
Test numerici
Prospettive

$$\tau_\alpha^* = A_\alpha (T^*)^B$$

dove

$$\begin{cases} B = \dfrac{c_{v_2} - c_{v_1}}{(\gamma_1 - 1)c_{v_1} - (\gamma_2 - 1)c_{v_2}} \\ A_1 = \left[\dfrac{(c_{v_2})^{c_{v_2}}}{(c_{v_1})^{c_{v_1}}} \left(\dfrac{(\gamma_2 - 1)c_{v_2}}{(\gamma_1 - 1)c_{v_1}} \right)^{(\gamma_2 - 1)c_{v_2}} \exp(c_{v_1}\gamma_1 - c_{v_2}\gamma_2) \right]^{\frac{1}{(\gamma_1 - 1)c_{v_1} - (\gamma_2 - 1)c_{v_2}}} \\ A_2 = \left[\dfrac{(c_{v_2})^{c_{v_2}}}{(c_{v_1})^{c_{v_1}}} \left(\dfrac{(\gamma_2 - 1)c_{v_2}}{(\gamma_1 - 1)c_{v_1}} \right)^{(\gamma_1 - 1)c_{v_1}} \exp(c_{v_1}\gamma_1 - c_{v_2}\gamma_2) \right]^{\frac{1}{(\gamma_1 - 1)c_{v_1} - (\gamma_2 - 1)c_{v_2}}} \end{cases}$$

e $T^*(\tau, \varepsilon)$ è la temperatura d'equilibrio definita come la radice della funzione...

Caso generale: $c_{v_1} \neq c_{v_2}$ con $c_{v_1}(\gamma_1 - 1) \neq c_{v_2}(\gamma_2 - 1)$ e $c_{v_1}\gamma_1 \neq c_{v_2}\gamma_2$

$$\tau^*_\alpha = A_\alpha (T^*)^B$$

dove

$$\begin{cases} B = \dfrac{c_{v_2} - c_{v_1}}{(\gamma_1 - 1)c_{v_1} - (\gamma_2 - 1)c_{v_2}} \\ A_1 = \left[\dfrac{(c_{v_2})^{c_{v_2}}}{(c_{v_1})^{c_{v_1}}} \left(\dfrac{(\gamma_2 - 1)c_{v_2}}{(\gamma_1 - 1)c_{v_1}} \right)^{(\gamma_2 - 1)c_{v_2}} \exp(c_{v_1}\gamma_1 - c_{v_2}\gamma_2) \right]^{\frac{1}{(\gamma_1 - 1)c_{v_1} - (\gamma_2 - 1)c_{v_2}}} \\ A_2 = \left[\dfrac{(c_{v_2})^{c_{v_2}}}{(c_{v_1})^{c_{v_1}}} \left(\dfrac{(\gamma_2 - 1)c_{v_2}}{(\gamma_1 - 1)c_{v_1}} \right)^{(\gamma_1 - 1)c_{v_1}} \exp(c_{v_1}\gamma_1 - c_{v_2}\gamma_2) \right]^{\frac{1}{(\gamma_1 - 1)c_{v_1} - (\gamma_2 - 1)c_{v_2}}} \end{cases}$$

e $T^*(\tau, \varepsilon)$ è la temperatura d'equilibrio definita come la radice della funzione…

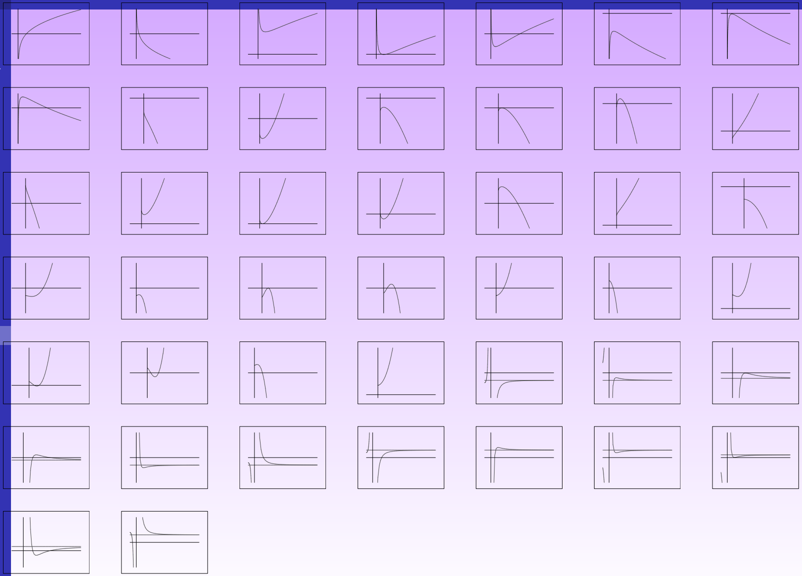
Caso generale

$$\begin{aligned} f : (0,+\infty) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ T &\longmapsto a_3 T^B + a_2 T^{B-1} + a_1 \end{aligned}$$

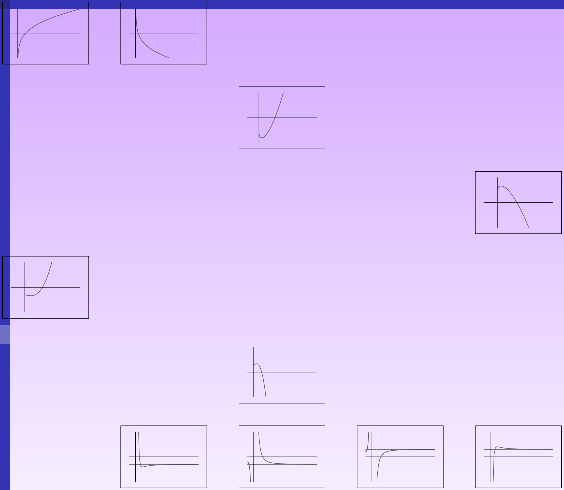
dove

$$\begin{cases} a_1 := \tau\left(c_{v_2} - c_{v_1}\right), \\ a_2 := \varepsilon\left[\dfrac{(\gamma_1-1)c_{v_1}}{(\gamma_2-1)c_{v_2}} - 1\right]\left[\dfrac{(c_{v_2})^{c_{v_2}}}{(c_{v_1})^{c_{v_1}}}\left(\dfrac{(\gamma_2-1)c_{v_2}}{(\gamma_1-1)c_{v_1}}\right)^{(\gamma_1-1)c_{v_1}} \exp(c_{v_1}\gamma_1 - c_{v_2}\gamma_2)\right]^{\frac{1}{(\gamma_1-1)c_{v_1}-(\gamma_2-1)c_{v_2}}} \\ a_3 := c_{v_1}\left[1 - \dfrac{(\gamma_1-1)}{(\gamma_2-1)}\right]\left[\dfrac{(c_{v_2})^{c_{v_2}}}{(c_{v_1})^{c_{v_1}}}\left(\dfrac{(\gamma_2-1)c_{v_2}}{(\gamma_1-1)c_{v_1}}\right)^{(\gamma_1-1)c_{v_1}} \exp(c_{v_1}\gamma_1 - c_{v_2}\gamma_2)\right]^{\frac{1}{(\gamma_1-1)c_{v_1}-(\gamma_2-1)c_{v_2}}} \end{cases}$$

Caso generale



Caso generale



Caso genrale

Equazione della curva di saturazione:

$$P^* = (T^*)^{\frac{(c_{v_2}\gamma_2 - c_{v_1}\gamma_1)}{(c_{v_2}(\gamma_2-1)-c_{v_1}(\gamma_1-1))}} \left[\frac{\left((\gamma_2-1)^{(\gamma_2-1)} c_{v_2}^{\gamma_2}\right)^{c_{v_2}}}{\left((\gamma_1-1)^{(\gamma_1-1)} c_{v_1}^{\gamma_1}\right)^{c_{v_1}}} \exp\left(c_{v_1}\gamma_1 - c_{v_2}\gamma_2\right) \right]^{\frac{1}{(c_{v_2}(\gamma_2-1)-c_{v_1}(\gamma_1-1))}}$$

Panoramica

Test numerici

- 1-D: un dominio di 1 m di lunghezza con una interfaccia.
-

		Liquido	Vapore
c_v	$\mathrm{J} \cdot \mathrm{kg}^{-1} \cdot \mathrm{K}^{-1}$	1816.2	1040.14
γ	$(= c_p/c_v)$	2.35	1.43

- $T|_{t=0} = 400$ K in tutto il dominio
- $(P, \rho_1, \rho_2)\big|_{t=0} (T)$ tali che ci sia equilibrio.

Test numerici

- 1-D: un dominio di 1 m di lunghezza con una interfaccia.
-

		Liquido	Vapore
c_v	$J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}$	1816.2	1040.14
γ	$(= c_p/c_v)$	2.35	1.43

- $T|_{t=0} = 400$ K in tutto il dominio
- $(P, \rho_1, \rho_2)\big|_{t=0} (T)$ tali che ci sia equilibrio.

Test numerici

- 1-D: un dominio di 1 m di lunghezza con una interfaccia.
-

		LIQUIDO	VAPORE
c_v	$J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}$	1816.2	1040.14
γ	$(= c_p/c_v)$	2.35	1.43

- $T|_{t=0} = 400$ K in tutto il dominio
- $(P, \rho_1, \rho_2)\big|_{t=0}(T)$ tali che ci sia EQUILIBRIO.

Test numerici

- 1-D: un dominio di 1 m di lunghezza con una interfaccia.
-

		LIQUIDO	VAPORE
c_v	$\mathrm{J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}}$	1816.2	1040.14
γ	$(= c_p/c_v)$	2.35	1.43

- $T|_{t=0} = 400$ K in tutto il dominio
- $(P, \rho_1, \rho_2)\big|_{t=0}(T)$ tali che ci sia EQUILIBRIO.

Avvezione

- $u = 100$ m/s in ciascun lato dell'interfaccia
- condizioni ai limiti: infinite

Avvezione

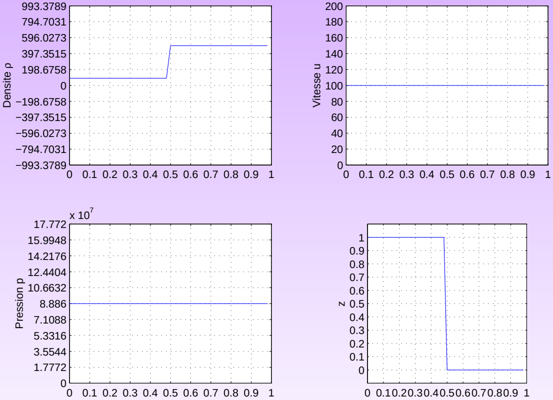
- $u = 100$ m/s in ciascun lato dell'interfaccia
- condizioni ai limiti: infinite

Avvezione

- $u = 100$ m/s in ciascun lato dell'interfaccia
- condizioni ai limiti: infinite

Avvezione

- $u = 100$ m/s in ciascun lato dell'interfaccia
- condizioni ai limiti: infinite



Muro - Pistone

- $u = 0$ m/s in ciascun lato dell'interfaccia
- condizioni ai limiti:
  - Destra: Muro
  - Sinistra: Pistone $u_{\text{pistone}} =$ -100 m/s

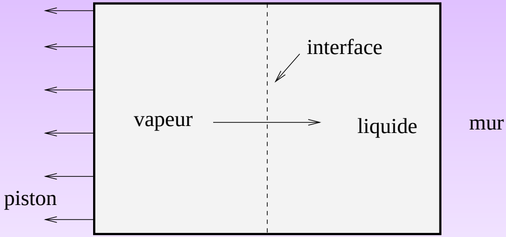
Muro - Pistone

- $u = 0$ m/s in ciascun lato dell'interfaccia
- condizioni ai limiti:
  - Destra: Muro
  - Sinistra: Pistone $u_{\text{pistone}} =$ -100 m/s

Muro - Pistone

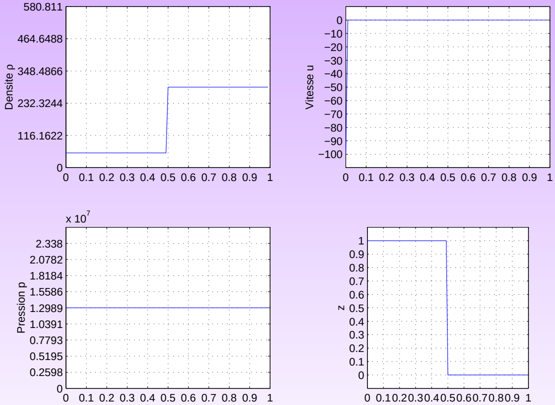
- $u = 0$ m/s in ciascun lato dell'interfaccia
- condizioni ai limiti:
  - Destra: Muro
  - Sinistra: Pistone

    $u_{\text{pistone}} =$ -100 m/s



Muro - Pistone

- $u = 0$ m/s in ciascun lato dell'interfaccia
- condizioni ai limiti:
  - Destra: Muro
  - Sinistra: Pistone $u_{\text{pistone}} =$ -100 m/s



Bolle

- $u = 0$ m/s in ciascun lato dell'interfaccia
- condizioni ai limiti:
  - Destra: Muro
  - Sinistra: Pistone $u_{\text{pistone}} = +200$ m/s

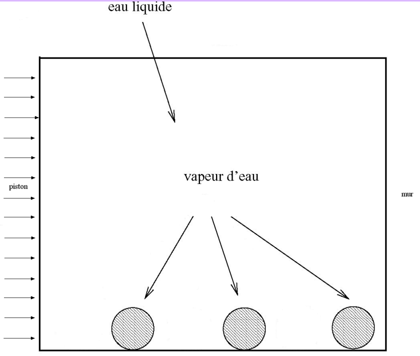
Bolle

- $u = 0$ m/s in ciascun lato dell'interfaccia
- condizioni ai limiti:
  - Destra: Muro
  - Sinistra: Pistone

    $u_{\text{pistone}} = +200$ m/s

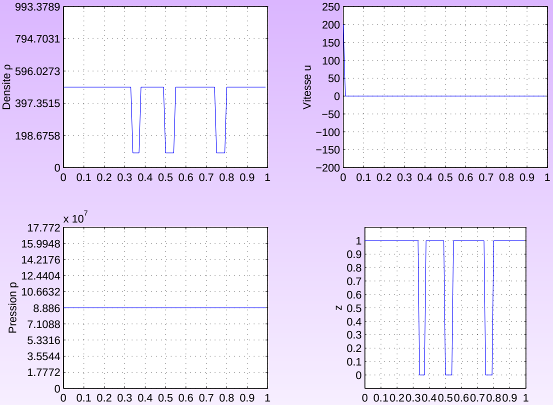
Bolle

- $u = 0$ m/s in ciascun lato dell'interfaccia
- condizioni ai limiti:
  - Destra: Muro
  - Sinistra: Pistone $u_{\text{pistone}} = +200$ m/s



Bolle

- $u = 0$ m/s in ciascun lato dell'interfaccia
- condizioni ai limiti:
  - Destra: Muro
  - Sinistra: Pistone $u_{\text{pistone}} = +200$ m/s



Panoramica

Prospettive

- Stiffened Gas
- Iperbolicità
- studio di “leggi di stato del miscuglio” più globali: ad esempio potenziali d’interazione
- risoluzione con la trasformata di Legendre
- presa in considerazione della capillarità (tensione di superficie)
- studio del punto triplo du point triple
- introduzione del cambiamento di fase in un quadro di simulazione 3D (TRITON)