

Modélisation du changement de phase dans des écoulements à interface

Gloria Faccanoni

E.Toro
Università di Trento

G.Allaire
École Polytechnique

S.Kokh
CEA

22 septembre 2005

Modélisation du
changement de
phase dans des
écoulements à
interface

Gloria Faccanoni

Introduction

Modélisation du
changement de
phase

Modélisation statique

Modélisation
dynamique

MTT-équilibre

Interpretation

Approximation

Tests numériques

Perspective

- 1 Introduction
- 2 Modélisation du changement de phase
 - Modélisation statique
 - Modélisation dynamique
- 3 MTT-équilibre
 - Interpretation
 - Approximation
 - Tests numériques
- 4 Perspective

Modélisation du
changement de
phase dans des
écoulements à
interface

Gloria Faccanoni

Introduction

Modélisation du
changement de
phase

Modélisation statique

Modélisation
dynamique

MTT-équilibre

Interpretation

Approximation

Tests numériques

Perspective

- 1 Introduction
- 2 Modélisation du changement de phase
 - Modélisation statique
 - Modélisation dynamique
- 3 MTT-équilibre
 - Interpretation
 - Approximation
 - Tests numériques
- 4 Perspective



Kokh S. (2001).

Aspects numériques et théoriques de la modélisation des écoulements diphasiques compressibles par des méthodes de capture d'interfaces.

Ph.D. thesis, Université Paris 6.

- modèle isotherme
- modèle anisotherme avec changement de phase

Stage

- ⇒ amélioration de l'algorithme global,
- ⇒ résolution "exacte" de l'étape de relaxation (changement de phase),
- ⇒ étude complète du cas Gaz Parfaits - Gaz Parfaits.



Kokh S. (2001).

Aspects numériques et théoriques de la modélisation des écoulements diphasiques compressibles par des méthodes de capture d'interfaces.

Ph.D. thesis, Université Paris 6.



Caro F. (2004).

Modélisation et simulation numérique des transitions de phase liquide-vapeur.

Ph.D. thesis, École Polytechnique.

- modèle isotherme
- modèle anisotherme avec changement de phase

Stage

- ⇒ amélioration de l'algorithme global,
- ⇒ résolution "exacte" de l'étape de relaxation (changement de phase),
- ⇒ étude complète du cas Gaz Parfaits - Gaz Parfaits.



Kokh S. (2001).

Aspects numériques et théoriques de la modélisation des écoulements diphasiques compressibles par des méthodes de capture d'interfaces.

Ph.D. thesis, Université Paris 6.



Caro F. (2004).

Modélisation et simulation numérique des transitions de phase liquide-vapeur.

Ph.D. thesis, École Polytechnique.

- modèle isotherme
- modèle anisotherme avec changement de phase

Stage

- ⇒ amélioration de l'algorithme global,
- ⇒ résolution "exacte" de l'étape de relaxation (changement de phase),
- ⇒ étude complète du cas Gaz Parfaits - Gaz Parfaits.



Kokh S. (2001).

Aspects numériques et théoriques de la modélisation des écoulements diphasiques compressibles par des méthodes de capture d'interfaces.

Ph.D. thesis, Université Paris 6.



Caro F. (2004).

Modélisation et simulation numérique des transitions de phase liquide-vapeur.

Ph.D. thesis, École Polytechnique.

- modèle isotherme
- modèle anisotherme avec changement de phase

Stage

- ⇒ amélioration de l'algorithme global,
- ⇒ résolution "exacte" de l'étape de relaxation (changement de phase),
- ⇒ étude complète du cas Gaz Parfaits - Gaz Parfaits.



Kokh S. (2001).

Aspects numériques et théoriques de la modélisation des écoulements diphasiques compressibles par des méthodes de capture d'interfaces.

Ph.D. thesis, Université Paris 6.



Caro F. (2004).

Modélisation et simulation numérique des transitions de phase liquide-vapeur.

Ph.D. thesis, École Polytechnique.

- modèle isotherme
- modèle anisotherme avec changement de phase

Stage

- ➡ amélioration de l'algorithme global,
- ➡ résolution "exacte" de l'étape de relaxation (changement de phase),
- ➡ étude complète du cas Gaz Parfaits - Gaz Parfaits.

Modélisation du
changement de
phase dans des
écoulements à
interface

Gloria Faccanoni

Introduction

Modélisation du
changement de
phase

Modélisation statique

Modélisation
dynamique

MTT-équilibre

Interpretation

Approximation

Tests numériques

Perspective

- 1 Introduction
- 2 **Modélisation du changement de phase**
 - **Modélisation statique**
 - **Modélisation dynamique**
- 3 MTT-équilibre
 - Interpretation
 - Approximation
 - Tests numériques
- 4 Perspective

Modélisation du
changement de
phase dans des
écoulements à
interface

Gloria Faccanoni

Introduction

Modélisation du
changement de
phase

Modélisation statique

Modélisation
dynamique

MTT-équilibre

Interpretation

Approximation

Tests numériques

Perspective

- 1 Introduction
- 2 Modélisation du changement de phase
 - **Modélisation statique**
 - Modélisation dynamique
- 3 MTT-équilibre
 - Interpretation
 - Approximation
 - Tests numériques
- 4 Perspective

Modèle à interface "épaisse"

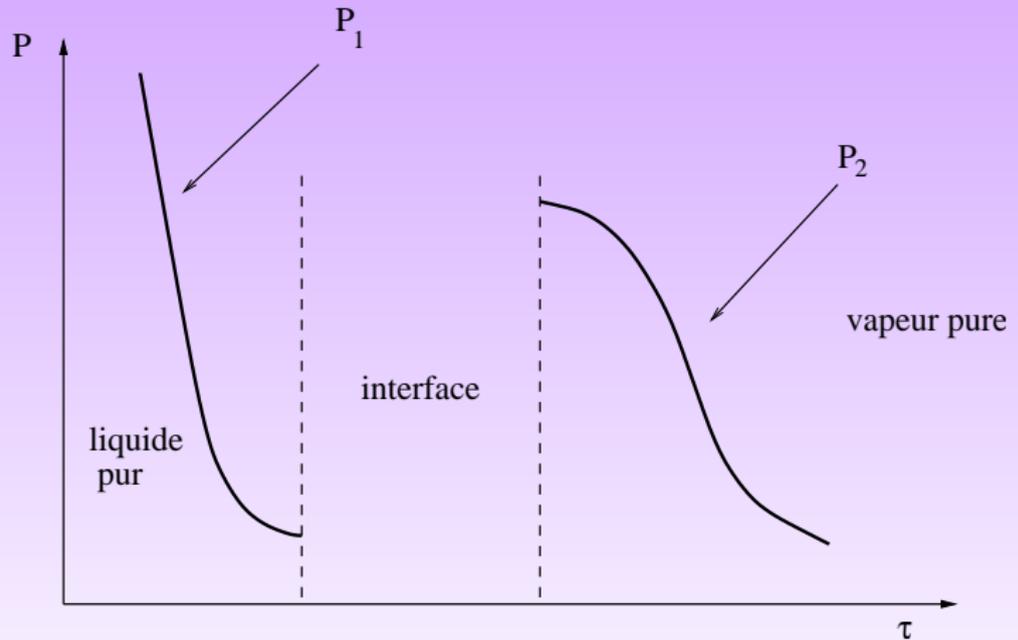
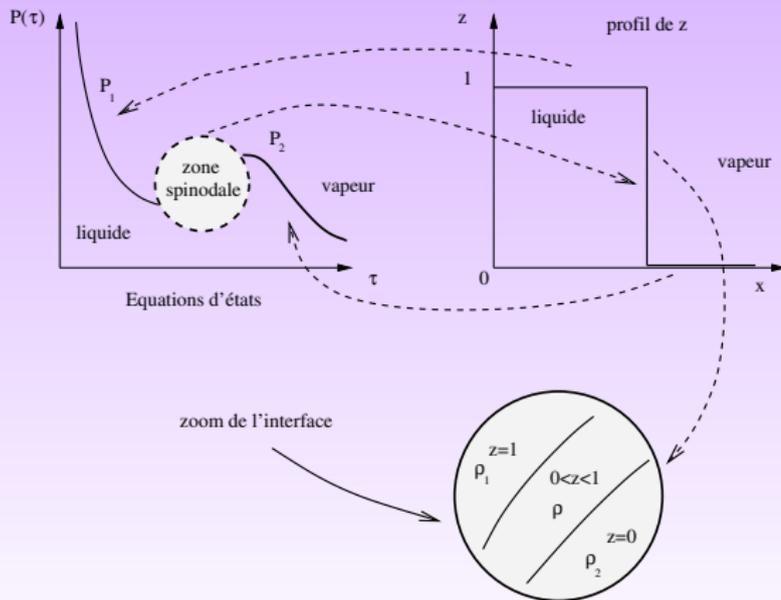


Fig.: $P_\alpha = P_\alpha(\tau)$ à entropie ou température constante

Modèle à interface "épaisse"

Fig.: Paramètre d'ordre abstrait $z \in [0, 1]$ qui donne la position de l'interface



Modélisation du
changement de
phase dans des
écoulements à
interface

Gloria Faccanoni

Introduction

Modélisation du
changement de
phase

Modélisation statique

Modélisation
dynamique

MTT-équilibre

Interpretation

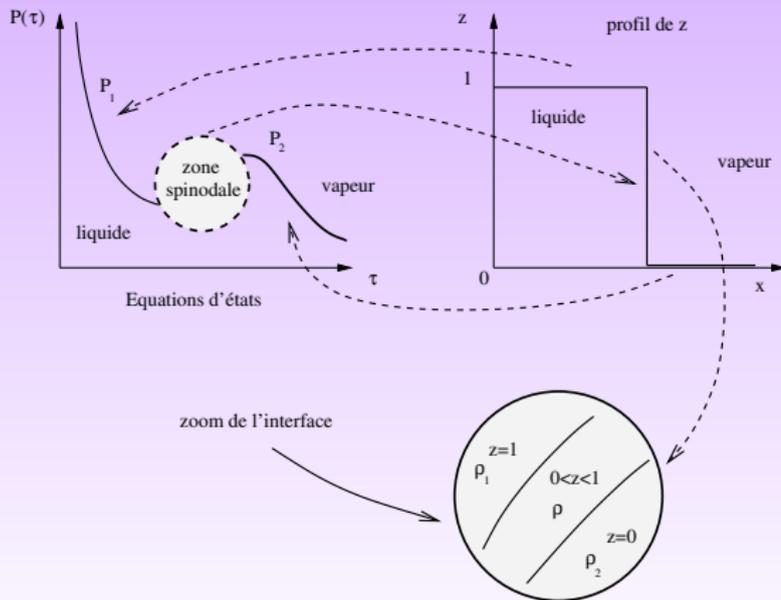
Approximation

Tests numériques

Perspective

Modèle à interface "épaisse"

FIG.: Paramètre d'ordre abstrait $z \in [0, 1]$ qui donne la position de l'interface



$$\text{Interface } \Gamma(t) := \{ (x, t) \text{ tels que } 0 < z(x, t) < 1 \}$$

Modèle à interface épaisse

Notations et relations

Modélisation du
changement de
phase dans des
écoulements à
interface

Gloria Faccanoni

Introduction

Modélisation du
changement de
phase

Modélisation statique

Modélisation
dynamique

MTT-équilibre

Interpretation

Approximation

Tests numériques

Perspective

Notations et relations constitutives pour le système diphasique :

Modèle à interface épaisse

Notations et relations

Modélisation du
changement de
phase dans des
écoulements à
interface

Gloria Faccanoni

Introduction

Modélisation du
changement de
phase

Modélisation statique

Modélisation
dynamique

MTT-équilibre

Interpretation

Approximation

Tests numériques

Perspective

Notations et relations constitutives pour le système diphasique :

$$\text{densité du mélange : } \rho = z\rho_1 + (1 - z)\rho_2$$

$$\text{volume du mélange : } \tau = y\tau_1 + (1 - y)\tau_2 \quad \text{avec } y := \frac{z\rho_1}{\rho}$$

Modèle à interface épaisse

Notations et relations

Modélisation du
changement de
phase dans des
écoulements à
interface

Gloria Faccanoni

Introduction

Modélisation du
changement de
phase

Modélisation statique

Modélisation
dynamique

MTT-équilibre

Interpretation

Approximation

Tests numériques

Perspective

Notations et relations constitutives pour le système diphasique :

$$\text{densité du mélange : } \rho = z\rho_1 + (1 - z)\rho_2$$

$$\text{volume du mélange : } \tau = y\tau_1 + (1 - y)\tau_2 \quad \text{avec } y := \frac{z\rho_1}{\rho}$$

$$\text{énergie interne du mélange : } \varepsilon = y\varepsilon_1 + (1 - y)\varepsilon_2$$

Modèle à interface épaisse

Notations et relations

Modélisation du
changement de
phase dans des
écoulements à
interface

Gloria Faccanoni

Introduction

Modélisation du
changement de
phase

Modélisation statique

Modélisation
dynamique

MTT-équilibre

Interpretation

Approximation

Tests numériques

Perspective

Notations et relations constitutives pour le système diphasique :

$$\text{densité du mélange : } \rho = z\rho_1 + (1 - z)\rho_2$$

$$\text{volume du mélange : } \tau = y\tau_1 + (1 - y)\tau_2 \quad \text{avec } y := \frac{z\rho_1}{\rho}$$

$$\text{énergie interne du mélange : } \varepsilon = y\varepsilon_1 + (1 - y)\varepsilon_2$$

$$\begin{array}{ll} \text{entropie physique} & \text{de la phase } \alpha : s_\alpha \\ \text{enthalpie libre} & \text{de la phase } \alpha : g_\alpha \end{array} \quad \alpha = 1, 2.$$

Modélisation statique

Optimisation

Modélisation du
changement de
phase dans des
écoulements à
interface

Gloria Faccanoni

Introduction

Modélisation du
changement de
phase

Modélisation statique

Modélisation
dynamique

MTT-équilibre

Interpretation

Approximation

Tests numériques

Perspective

Ph.Helluy et Th.Barberon :

Sans changement de phase

$$s_1(\rho_1, \varepsilon_1)$$

$$s_2(\rho_2, \varepsilon_2)$$

Modélisation statique

Optimisation

Modélisation du
changement de
phase dans des
écoulements à
interface

Gloria Faccanoni

Introduction

Modélisation du
changement de
phase

Modélisation statique

Modélisation
dynamique

MTT-équilibre

Interpretation

Approximation

Tests numériques

Perspective

Ph.Helluy et Th.Barberon :

Sans changement de phase

$$s_1(\rho_1, \varepsilon_1)$$

$$s_2(\rho_2, \varepsilon_2)$$

$$s := \{y s_1 + (1 - y) s_2\}$$

Modélisation statique

Optimisation

Modélisation du
changement de
phase dans des
écoulements à
interface

Gloria Faccanoni

Introduction

Modélisation du
changement de
phase

Modélisation statique

Modélisation
dynamique

MTT-équilibre

Interpretation

Approximation

Tests numériques

Perspective

Ph.Helluy et Th.Barberon :

Avec changement de phase

$$s_1(\rho_1, \varepsilon_1)$$

$$s_2(\rho_2, \varepsilon_2)$$

$$s := \max_y \{ y s_1 + (1 - y) s_2 \}$$

Modélisation statique

Optimisation

Ph.Helluy et Th.Barberon :

Avec changement de phase

$$s_1(\rho_1, \varepsilon_1)$$

$$s_2(\rho_2, \varepsilon_2)$$

$$s := \max_y \{y s_1 + (1 - y) s_2\}$$

$s(\rho, \varepsilon)$ du mélange avec changement de phase

Modélisation du
changement de
phase dans des
écoulements à
interface

Gloria Faccanoni

Introduction

Modélisation du
changement de
phase

Modélisation statique

Modélisation
dynamique

MTT-équilibre

Interpretation

Approximation

Tests numériques

Perspective

Modélisation statique

Optimisation

Modélisation du
changement de
phase dans des
écoulements à
interface

Gloria Faccanoni

Introduction

Modélisation du
changement de
phase

Modélisation statique

Modélisation
dynamique

MTT-équilibre

Interpretation

Approximation

Tests numériques

Perspective

Ph.Helluy et Th.Barberon :

Avec changement de phase

$$s_1(\rho_1, \varepsilon_1)$$

$$s_2(\rho_2, \varepsilon_2)$$

$$s := \max_y \{y s_1 + (1 - y) s_2\} = s_1 \square s_2$$

$s(\rho, \varepsilon)$ du mélange avec changement de phase

Ph.Helluy et Th.Barberon :

Avec changement de phase

$$s_1(\rho_1, \varepsilon_1)$$

$$s_2(\rho_2, \varepsilon_2)$$

$$s := \max_y \{y s_1 + (1 - y) s_2\} = s_1 \square s_2 = (s_1^* + s_2^*)^*$$

$s(\rho, \varepsilon)$ du mélange avec changement de phase

Modélisation du
changement de
phase dans des
écoulements à
interface

Gloria Faccanoni

Introduction

Modélisation du
changement de
phase

Modélisation statique

Modélisation
dynamique

MTT-équilibre

Interpretation

Approximation

Tests numériques

Perspective

- 1 Introduction
- 2 Modélisation du changement de phase
 - Modélisation statique
 - **Modélisation dynamique**
- 3 MTT-équilibre
 - Interpretation
 - Approximation
 - Tests numériques
- 4 Perspective

Equations :

$$\left\{ \begin{array}{lll} \partial_t(z\rho_1) & + \operatorname{div}(z\rho_1 u) & = S_y, \\ \partial_t((1-z)\rho_2) & + \operatorname{div}((1-z)\rho_2 u) & = -S_y, \\ \partial_t(\rho u) & + \operatorname{div}(\rho u \otimes u + P \operatorname{Id}) & = 0, \\ \partial_t(\rho(\varepsilon + |u|^2/2)) & + \operatorname{div}((\rho(\varepsilon + |u|^2/2) + P) u) & = 0, \\ \partial_t z & + u \cdot \operatorname{grad} z & = S_z, \end{array} \right.$$

Equations :

$$\left\{ \begin{array}{lll} \partial_t(z\rho_1) & + \operatorname{div}(z\rho_1 u) & = \mathcal{S}_y, \\ \partial_t((1-z)\rho_2) & + \operatorname{div}((1-z)\rho_2 u) & = -\mathcal{S}_y, \\ \partial_t(\rho u) & + \operatorname{div}(\rho u \otimes u + P \operatorname{Id}) & = 0, \\ \partial_t(\rho(\varepsilon + |u|^2/2)) & + \operatorname{div}((\rho(\varepsilon + |u|^2/2) + P)u) & = 0, \\ \partial_t z & + u \cdot \mathbf{grad} z & = \mathcal{S}_z, \end{array} \right.$$

Equations :

$$\left\{ \begin{array}{lll} \partial_t(z\rho_1) & + \operatorname{div}(z\rho_1 u) & = S_y, \\ \partial_t((1-z)\rho_2) & + \operatorname{div}((1-z)\rho_2 u) & = -S_y, \\ \partial_t(\rho u) & + \operatorname{div}(\rho u \otimes u + P \operatorname{Id}) & = 0, \\ \partial_t(\rho(\varepsilon + |u|^2/2)) & + \operatorname{div}((\rho(\varepsilon + |u|^2/2) + P) u) & = 0, \\ \partial_t z & + u \cdot \mathbf{grad} z & = S_z, \end{array} \right.$$

fermeture isotherme

$$\begin{aligned} T_1 &= T_2, \\ P &= \sum_{\alpha} z_{\alpha} P_{\alpha}, \\ S_y &= \lambda(g_2 - g_1), \\ S_z &= \kappa(P_1 - P_2), \end{aligned}$$

fermeture isobare (gaz
parfaits)

$$\begin{aligned} P &= P_1 = P_2, \\ S_y &= \lambda(h_2 - h_1), \\ S_z &= \kappa(\rho_1 s_1 T_1 - \rho_2 s_2 T_2). \end{aligned}$$

Equations :

$$\begin{cases} \partial_t(z\rho_1) & + \operatorname{div}(z\rho_1 u) & = S_y, \\ \partial_t((1-z)\rho_2) & + \operatorname{div}((1-z)\rho_2 u) & = -S_y, \\ \partial_t(\rho u) & + \operatorname{div}(\rho u \otimes u + P \operatorname{Id}) & = 0, \\ \partial_t(\rho(\varepsilon + |u|^2/2)) & + \operatorname{div}((\rho(\varepsilon + |u|^2/2) + P) u) & = 0, \\ \partial_t z & + u \cdot \mathbf{grad} z & = S_z, \end{cases}$$

fermeture isotherme

$$\begin{aligned} T_1 &= T_2, \\ P &= \sum_{\alpha} z_{\alpha} P_{\alpha}, \\ S_y &= \lambda(g_2 - g_1), \\ S_z &= \kappa(P_1 - P_2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_t(\rho s) + \operatorname{div}(\rho s u) &= \\ &= \frac{(S_z(P_1 - P_2) + S_y(g_2 - g_1))}{T} \geq 0 \\ S_y &= \lambda(g_2 - g_1), \\ S_z &= \kappa(P_1 - P_2). \end{aligned}$$

Modélisation du
changement de
phase dans des
écoulements à
interface

Gloria Faccanoni

Introduction

Modélisation du
changement de
phase

Modélisation statique

Modélisation
dynamique

MTT-équilibre

Interpretation

Approximation

Tests numériques

Perspective

Modélisation du
changement de
phase dans des
écoulements à
interface

Gloria Faccanoni

Introduction

Modélisation du
changement de
phase

Modélisation statique

Modélisation
dynamique

MTT-équilibre

Interpretation

Approximation

Tests numériques

Perspective

- 1 Introduction
- 2 Modélisation du changement de phase
 - Modélisation statique
 - Modélisation dynamique
- 3 **MTT-équilibre**
 - **Interpretation**
 - **Approximation**
 - **Tests numériques**
- 4 Perspective

Modèle MTT-équilibre

Modélisation du
changement de
phase dans des
écoulements à
interface

Gloria Faccanoni

Introduction

Modélisation du
changement de
phase

Modélisation statique

Modélisation
dynamique

MTT-équilibre

Interpretation

Approximation

Tests numériques

Perspective

$$\begin{cases}
 \partial_t(z\rho_1) & + \operatorname{div}(z\rho_1 u) & = \lambda(g_2 - g_1) \\
 \partial_t((1-z)\rho_2) & + \operatorname{div}((1-z)\rho_2 u) & = -\lambda(g_2 - g_1) \\
 \partial_t(\rho u) & + \operatorname{div}(\rho u \otimes u + P) & = 0 \\
 \partial_t(\rho(\varepsilon + |u|^2/2)) & + \operatorname{div}((\rho(\varepsilon + |u|^2/2) + P) u) & = 0 \\
 \partial_t z & + u \cdot \mathbf{grad} z & = k(P_2 - P_1)
 \end{cases}$$

Modèle MTT-équilibre

Modélisation du
changement de
phase dans des
écoulements à
interface

Gloria Faccanoni

Introduction

Modélisation du
changement de
phase

Modélisation statique

Modélisation
dynamique

MTT-équilibre

Interpretation

Approximation

Tests numériques

Perspective

$$\left\{ \begin{array}{lll} \partial_t(z\rho_1) & + \operatorname{div}(z\rho_1 u) & = \lambda(g_2 - g_1) \\ \partial_t((1-z)\rho_2) & + \operatorname{div}((1-z)\rho_2 u) & = -\lambda(g_2 - g_1) \\ \partial_t(\rho u) & + \operatorname{div}(\rho u \otimes u + P) & = 0 \\ \partial_t(\rho(\varepsilon + |u|^2/2)) & + \operatorname{div}((\rho(\varepsilon + |u|^2/2) + P) u) & = 0 \\ \partial_t z & + u \cdot \operatorname{grad} z & = k(P_2 - P_1) \end{array} \right.$$

$$\kappa = \lambda = +\infty$$

trouver $\rho_\alpha^* \geq 0$ et $z^* \in [0, 1]$ tels que

$$\left\{ \begin{array}{ll} T_1 = T_2 & \text{(fermeture isotherme)} \\ P_1(\rho_1, T_1) = P_2(\rho_2, T_2) & (k \rightarrow +\infty) \text{ (éq. mécanique)} \\ g_1(\rho_1, T_1) = g_2(\rho_2, T_2) & (\lambda \rightarrow +\infty) \text{ (éq. thermodynamique)} \end{array} \right.$$

$$\text{sous la contrainte } \left\{ \begin{array}{ll} \rho \varepsilon & = z^* \rho_1^* \varepsilon_1 + (1 - z^*) \rho_2^* \varepsilon_2 \\ \rho & = z^* \rho_1^* + (1 - z^*) \rho_2^* \end{array} \right.$$

Modèle MTT-équilibre

Modélisation du
changement de
phase dans des
écoulements à
interface

Gloria Faccanoni

Introduction

Modélisation du
changement de
phase

Modélisation statique

Modélisation
dynamique

MTT-équilibre

Interpretation

Approximation

Tests numériques

Perspective

$$\left\{ \begin{array}{lll} \partial_t(z\rho_1) & + \operatorname{div}(z\rho_1 u) & = \lambda(g_2 - g_1) \\ \partial_t((1-z)\rho_2) & + \operatorname{div}((1-z)\rho_2 u) & = -\lambda(g_2 - g_1) \\ \partial_t(\rho u) & + \operatorname{div}(\rho u \otimes u + P) & = 0 \\ \partial_t(\rho(\varepsilon + |u|^2/2)) & + \operatorname{div}((\rho(\varepsilon + |u|^2/2) + P) u) & = 0 \\ \partial_t z & + u \cdot \operatorname{grad} z & = k(P_2 - P_1) \end{array} \right.$$

$$\kappa = \lambda = +\infty$$

trouver $\rho_\alpha^* \geq 0$ et $z^* \in [0, 1]$ tels que

$$\left\{ \begin{array}{ll} T_1 = T_2 & \text{(fermeture isotherme)} \\ P_1(\rho_1, T_1) = P_2(\rho_2, T_2) \quad (k \rightarrow +\infty) & \text{(éq. mécanique)} \\ g_1(\rho_1, T_1) = g_2(\rho_2, T_2) \quad (\lambda \rightarrow +\infty) & \text{(éq. thermodynamique)} \end{array} \right.$$

$$\text{sous la contrainte } \left\{ \begin{array}{lll} \rho \varepsilon & = & z^* \rho_1^* \varepsilon_1 + (1 - z^*) \rho_2^* \varepsilon_2 \\ \rho & = & z^* \rho_1^* + (1 - z^*) \rho_2^* \end{array} \right.$$

Modélisation du
changement de
phase dans des
écoulements à
interface

Gloria Faccanoni

Introduction

Modélisation du
changement de
phase

Modélisation statique

Modélisation
dynamique

MTT-équilibre

Interpretation

Approximation

Tests numériques

Perspective

Problèmes

- 1 justifier physiquement le passage à la limite
- 2 calculer ρ_α^* et z^* .

Modélisation du
changement de
phase dans des
écoulements à
interface

Gloria Faccanoni

Introduction

Modélisation du
changement de
phase

Modélisation statique

Modélisation
dynamique

MTT-équilibre

Interpretation

Approximation

Tests numériques

Perspective

Problèmes

- 1 justifier physiquement le passage à la limite
- 2 calculer ρ_α^* et z^* .

Modélisation du
changement de
phase dans des
écoulements à
interface

Gloria Faccanoni

Introduction

Modélisation du
changement de
phase

Modélisation statique

Modélisation
dynamique

MTT-équilibre

Interpretation

Approximation

Tests numériques

Perspective

Problèmes

- 1 justifier physiquement le passage à la limite
- 2 calculer ρ_α^* et z^* .

Modélisation du
changement de
phase dans des
écoulements à
interface

Gloria Faccanoni

Introduction

Modélisation du
changement de
phase

Modélisation statique

Modélisation
dynamique

MTT-équilibre

Interpretation

Approximation

Tests numériques

Perspective

- 1 Introduction
- 2 Modélisation du changement de phase
 - Modélisation statique
 - Modélisation dynamique
- 3 MTT-équilibre
 - **Interpretation**
 - Approximation
 - Tests numériques
- 4 Perspective

Théorème

$$\text{Relaxation : } \left\{ \begin{array}{l} T_1 = T_2 \\ P_1(\rho_1, T_1) = P_2(\rho_2, T_2) \\ g_1(\rho_1, T_1) = g_2(\rho_2, T_2) \end{array} \right.$$

(formel)

$$\text{Pb. d'optimisation : } \left\{ \begin{array}{l} \max_{y \in]0,1[} s(y, \tau_1, \varepsilon_1, \tau_2, \varepsilon_2) \\ \text{contraintes : } \begin{array}{l} 1. \quad \varepsilon = y\varepsilon_1 + (1-y)\varepsilon_2 \\ 2. \quad \tau = y\tau_1 + (1-y)\tau_2 \\ \varepsilon, \tau \text{ fixés} \end{array} \end{array} \right.$$

Théorème

$$\text{Relaxation : } \begin{cases} T_1 = T_2 \\ P_1(\rho_1, T_1) = P_2(\rho_2, T_2) \\ g_1(\rho_1, T_1) = g_2(\rho_2, T_2) \end{cases}$$

(formel)

$$\text{Pb. d'optimisation : } \begin{cases} \max_{y \in]0,1[} & s(y, \tau_1, \varepsilon_1, \tau_2, \varepsilon_2) \\ \text{contraintes :} & \begin{aligned} 1. & \quad \varepsilon = y\varepsilon_1 + (1 - y)\varepsilon_2 \\ 2. & \quad \tau = y\tau_1 + (1 - y)\tau_2 \\ & \quad \varepsilon, \tau \text{ fixés} \end{aligned} \end{cases}$$

Trace de la démonstration.

$$s = ys_1(\tau_1, \varepsilon_1) + (1 - y)s_2(\tau_2, \varepsilon_2) \quad \text{avec} \quad y := \frac{z \rho_1}{\rho}$$

- L'optimisation par rapport à ε_α équivaut à $T_1 = T_2$.
- L'optimisation par rapport à τ_α équivaut à $\frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2}$ et donc à $P_1 = P_2$.
- L'optimisation par rapport à y équivaut à $\frac{g_1}{T_1} = \frac{g_2}{T_2}$ et donc à $g_1 = g_2$.



Trace de la démonstration.

$$\mathbf{s} = y\mathbf{s}_1(\tau_1, \varepsilon_1) + (1 - y)\mathbf{s}_2(\tau_2, \varepsilon_2) \quad \text{avec} \quad y := \frac{z \rho_1}{\rho}$$

- L'optimisation par rapport à ε_α équivaut à $T_1 = T_2$.
- L'optimisation par rapport à τ_α équivaut à $\frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2}$ et donc à $P_1 = P_2$.
- L'optimisation par rapport à y équivaut à $\frac{g_1}{T_1} = \frac{g_2}{T_2}$ et donc à $g_1 = g_2$.



Trace de la démonstration.

$$s = ys_1(\tau_1, \varepsilon_1) + (1 - y)s_2(\tau_2, \varepsilon_2) \quad \text{avec} \quad y := \frac{z \rho_1}{\rho}$$

- L'optimisation par rapport à ε_α équivaut à $T_1 = T_2$.
- L'optimisation par rapport à τ_α équivaut à $\frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2}$ et donc à $P_1 = P_2$.
- L'optimisation par rapport à y équivaut à $\frac{g_1}{T_1} = \frac{g_2}{T_2}$ et donc à $g_1 = g_2$.



Trace de la démonstration.

$$s = ys_1(\tau_1, \varepsilon_1) + (1 - y)s_2(\tau_2, \varepsilon_2) \quad \text{avec} \quad y := \frac{z \rho_1}{\rho}$$

- L'optimisation par rapport à ε_α équivaut à $T_1 = T_2$.
- L'optimisation par rapport à τ_α équivaut à $\frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2}$ et donc à $P_1 = P_2$.
- L'optimisation par rapport à y équivaut à $\frac{g_1}{T_1} = \frac{g_2}{T_2}$ et donc à $g_1 = g_2$.



Trace de la démonstration.

$$s = ys_1(\tau_1, \varepsilon_1) + (1 - y)s_2(\tau_2, \varepsilon_2) \quad \text{avec} \quad y := \frac{z \rho_1}{\rho}$$

- L'optimisation par rapport à ε_α équivaut à $T_1 = T_2$.
- L'optimisation par rapport à τ_α équivaut à $\frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2}$ et donc à $P_1 = P_2$.
- L'optimisation par rapport à y équivaut à $\frac{g_1}{T_1} = \frac{g_2}{T_2}$ et donc à $g_1 = g_2$.

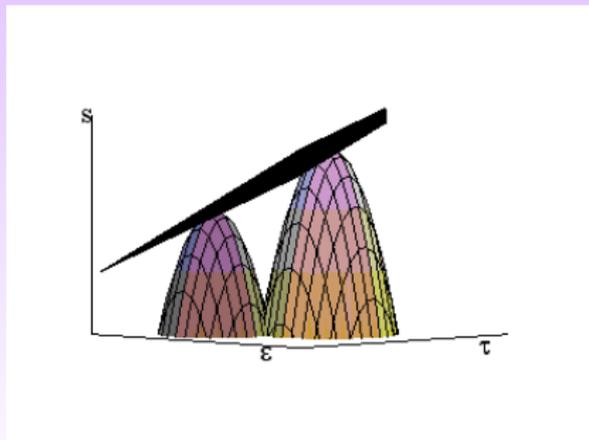


Interpretation géométrique du problème d'optimisation

Théorème

Notons S_α la surface $(\tau, \varepsilon) \mapsto s_\alpha(\tau, \varepsilon)$ dans l'espace (τ, ε, s) .

Le système équivaut à trouver un point $(\tau_\alpha, \varepsilon_\alpha)$ sur chaque surface tel que les deux hyperplans tangents en ces points coïncident.

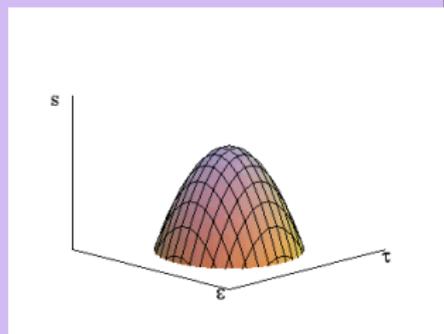


Trace de la démonstration.

$$\bar{S}_\alpha(\tau, \varepsilon) = \frac{1}{T_\alpha} \varepsilon + \frac{P_\alpha}{T_\alpha} \tau + \frac{s_\alpha T_\alpha - \varepsilon_\alpha - P_\alpha \tau_\alpha}{T_\alpha}$$

$$\bar{S}_1 \parallel \bar{S}_2 \Leftrightarrow \begin{cases} P_1 = P_2 \\ T_1 = T_2 \end{cases}$$

$$\bar{S}_1 \equiv \bar{S}_2 \Leftrightarrow g_1 = g_2$$

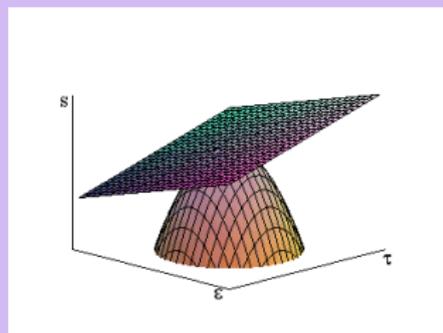


Trace de la démonstration.

$$\tilde{S}_\alpha(\tau, \varepsilon) = \frac{1}{T_\alpha} \varepsilon + \frac{P_\alpha}{T_\alpha} \tau + \frac{s_\alpha T_\alpha - \varepsilon_\alpha - P_\alpha \tau_\alpha}{T_\alpha}$$

$$\tilde{S}_1 \parallel \tilde{S}_2 \Leftrightarrow \begin{cases} P_1 = P_2 \\ T_1 = T_2 \end{cases}$$

$$\tilde{S}_1 \equiv \tilde{S}_2 \Leftrightarrow g_1 = g_2$$

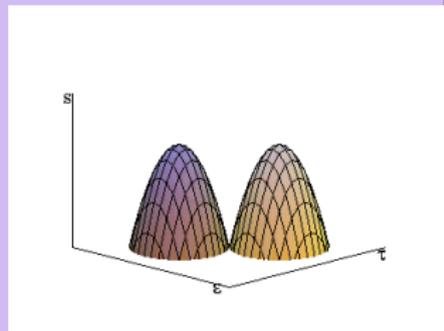


Trace de la démonstration.

$$\widetilde{S}_\alpha(\tau, \varepsilon) = \frac{1}{T_\alpha} \varepsilon + \frac{P_\alpha}{T_\alpha} \tau + \frac{s_\alpha T_\alpha - \varepsilon_\alpha - P_\alpha \tau_\alpha}{T_\alpha}$$

$$\widetilde{S}_1 \parallel \widetilde{S}_2 \Leftrightarrow \begin{cases} P_1 = P_2 \\ T_1 = T_2 \end{cases}$$

$$\widetilde{S}_1 \equiv \widetilde{S}_2 \Leftrightarrow g_1 = g_2$$

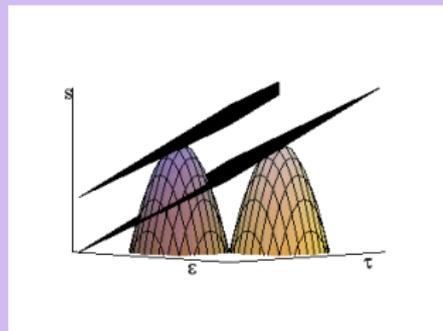


Trace de la démonstration.

$$\widetilde{S}_\alpha(\tau, \varepsilon) = \frac{1}{T_\alpha} \varepsilon + \frac{P_\alpha}{T_\alpha} \tau + \frac{s_\alpha T_\alpha - \varepsilon_\alpha - P_\alpha \tau_\alpha}{T_\alpha}$$

$$\widetilde{S}_1 \parallel \widetilde{S}_2 \Leftrightarrow \begin{cases} P_1 = P_2 \\ T_1 = T_2 \end{cases}$$

$$\widetilde{S}_1 \equiv \widetilde{S}_2 \Leftrightarrow g_1 = g_2$$

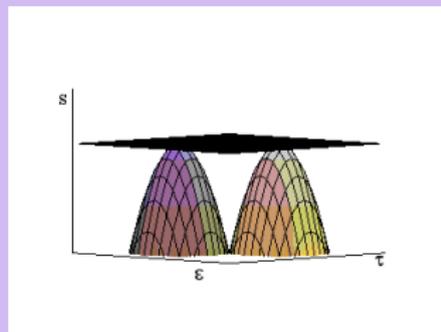


Trace de la démonstration.

$$\widetilde{S}_\alpha(\tau, \varepsilon) = \frac{1}{T_\alpha} \varepsilon + \frac{P_\alpha}{T_\alpha} \tau + \frac{s_\alpha T_\alpha - \varepsilon_\alpha - P_\alpha \tau_\alpha}{T_\alpha}$$

$$\widetilde{S}_1 \parallel \widetilde{S}_2 \Leftrightarrow \begin{cases} P_1 = P_2 \\ T_1 = T_2 \end{cases}$$

$$\widetilde{S}_1 \equiv \widetilde{S}_2 \Leftrightarrow g_1 = g_2$$



Démonstration

Modélisation du
changement de
phase dans des
écoulements à
interface

Gloria Faccanoni

Introduction

Modélisation du
changement de
phase

Modélisation statique

Modélisation
dynamique

MTT-équilibre

Interpretation

Approximation

Tests numériques

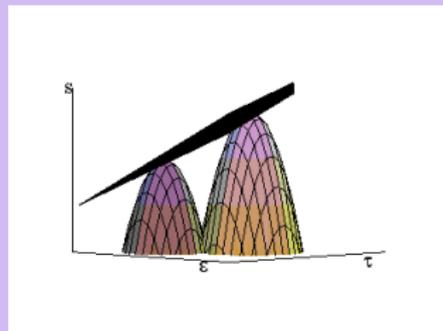
Perspective

Trace de la démonstration.

$$\widetilde{S}_\alpha(\tau, \varepsilon) = \frac{1}{T_\alpha} \varepsilon + \frac{P_\alpha}{T_\alpha} \tau + \frac{s_\alpha T_\alpha - \varepsilon_\alpha - P_\alpha \tau_\alpha}{T_\alpha}$$

$$\widetilde{S}_1 \parallel \widetilde{S}_2 \Leftrightarrow \begin{cases} P_1 = P_2 \\ T_1 = T_2 \end{cases}$$

$$\widetilde{S}_1 \equiv \widetilde{S}_2 \Leftrightarrow g_1 = g_2$$



Modélisation du
changement de
phase dans des
écoulements à
interface

Gloria Faccanoni

Introduction

Modélisation du
changement de
phase

Modélisation statique

Modélisation
dynamique

MTT-équilibre

Interpretation

Approximation

Tests numériques

Perspective

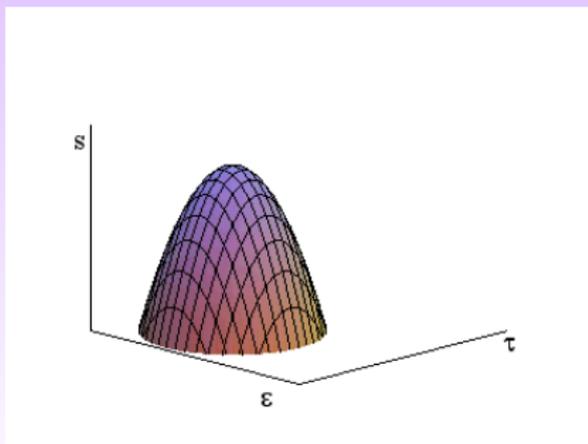
$s(\rho, \varepsilon)$ est l'enveloppe concave de la fonction

$$(\rho, \varepsilon) \longrightarrow \max \left\{ s_1(\rho_1, \varepsilon_1), s_2 \left(\frac{\rho - z\rho_1}{1 - z}, \frac{\varepsilon - \frac{z\rho_1}{\rho}\varepsilon_1}{1 - \frac{z\rho_1}{\rho}} \right) \right\}$$

Interpretation

$s(\rho, \varepsilon)$ est l'enveloppe concave de la fonction

$$(\rho, \varepsilon) \rightarrow \max \left\{ s_1(\rho_1, \varepsilon_1), s_2 \left(\frac{\rho - z\rho_1}{1-z}, \frac{\varepsilon - \frac{z\rho_1}{\rho}\varepsilon_1}{1 - \frac{z\rho_1}{\rho}} \right) \right\}$$



Modélisation du
changement de
phase dans des
écoulements à
interface

Gloria Faccanoni

Introduction

Modélisation du
changement de
phase

Modélisation statique

Modélisation
dynamique

MTT-équilibre

Interpretation

Approximation

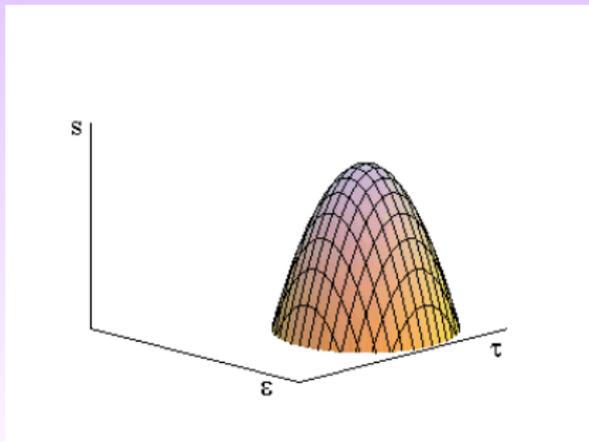
Tests numériques

Perspective

Interpretation

$s(\rho, \varepsilon)$ est l'enveloppe concave de la fonction

$$(\rho, \varepsilon) \rightarrow \max \left\{ s_1(\rho_1, \varepsilon_1), s_2 \left(\frac{\rho - z\rho_1}{1-z}, \frac{\varepsilon - \frac{z\rho_1}{\rho}\varepsilon_1}{1 - \frac{z\rho_1}{\rho}} \right) \right\}$$



Modélisation du
changement de
phase dans des
écoulements à
interface

Gloria Faccanoni

Introduction

Modélisation du
changement de
phase

Modélisation statique

Modélisation
dynamique

MTT-équilibre

Interpretation

Approximation

Tests numériques

Perspective

Interpretation

Modélisation du
changement de
phase dans des
écoulements à
interface

Gloria Faccanoni

Introduction

Modélisation du
changement de
phase

Modélisation statique

Modélisation
dynamique

MTT-équilibre

Interpretation

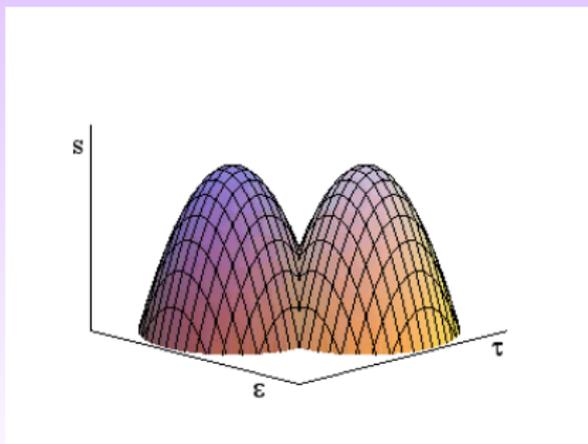
Approximation

Tests numériques

Perspective

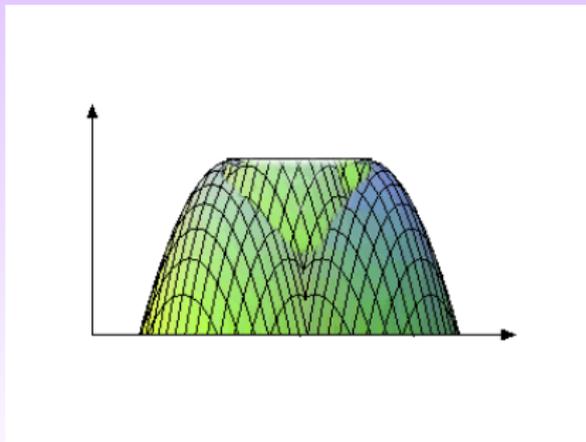
$s(\rho, \varepsilon)$ est l'enveloppe concave de la fonction

$$(\rho, \varepsilon) \rightarrow \max \left\{ s_1(\rho_1, \varepsilon_1), s_2 \left(\frac{\rho - z\rho_1}{1-z}, \frac{\varepsilon - \frac{z\rho_1}{\rho}\varepsilon_1}{1 - \frac{z\rho_1}{\rho}} \right) \right\}$$



$s(\rho, \varepsilon)$ est l'**enveloppe concave** de la fonction

$$(\rho, \varepsilon) \rightarrow \max \left\{ s_1(\rho_1, \varepsilon_1), s_2 \left(\frac{\rho - z\rho_1}{1-z}, \frac{\varepsilon - \frac{z\rho_1}{\rho}\varepsilon_1}{1 - \frac{z\rho_1}{\rho}} \right) \right\}$$



Conclusion

Modélisation du changement de phase dans des écoulements à interface

Gloria Faccanoni

Introduction

Modélisation du changement de phase

Modélisation statique

Modélisation dynamique

MTT-équilibre

Interpretation

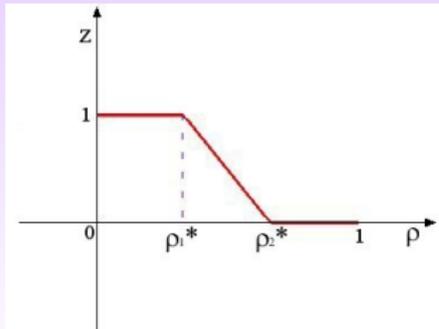
Approximation

Tests numériques

Perspective

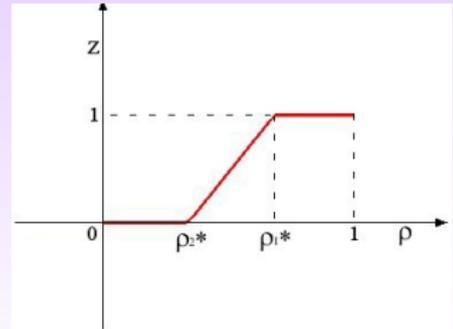
$$\text{si } \rho_1^* \leq \rho_2^*$$

$$z^* = \begin{cases} 1 & \text{si } \rho < \rho_1^*, \\ \frac{\rho - \rho_2^*}{\rho_1^* - \rho_2^*} & \text{si } \rho_1^* < \rho < \rho_2^*, \\ 0 & \text{si } \rho_2^* < \rho. \end{cases}$$



$$\text{si } \rho_1^* > \rho_2^*$$

$$z^* = \begin{cases} 0 & \text{si } \rho < \rho_2^*, \\ \frac{\rho - \rho_2^*}{\rho_1^* - \rho_2^*} & \text{si } \rho_2^* < \rho < \rho_1^*, \\ 1 & \text{si } \rho_1^* < \rho. \end{cases}$$



Modélisation du
changement de
phase dans des
écoulements à
interface

Gloria Faccanoni

Introduction

Modélisation du
changement de
phase

Modélisation statique

Modélisation
dynamique

MTT-équilibre

Interpretation

Approximation

Tests numériques

Perspective

- 1 Introduction
- 2 Modélisation du changement de phase
 - Modélisation statique
 - Modélisation dynamique
- 3 MTT-équilibre
 - Interpretation
 - **Approximation**
 - Tests numériques
- 4 Perspective

Schéma de décomposition

Modélisation du
changement de
phase dans des
écoulements à
interface

Gloria Faccanoni

Introduction

Modélisation du
changement de
phase

Modélisation statique

Modélisation
dynamique

MTT-équilibre

Interpretation

Approximation

Tests numériques

Perspective

① ÉTAPE CONVECTIVE :

on résout numériquement le système homogène

$$\mathbf{v}_i^n \xrightarrow[\text{à 5 équations (S.Kokh)}]{\text{Schéma quasi-conservatif}} \widehat{\mathbf{v}}_i^n$$

② ÉTAPE DE RELAXATION :

on projette cette solution $\widehat{\mathbf{v}}_i^n$ sur la variété MTT-équilibre
i.e. on résout le problème de maximisation.

Schéma de décomposition

Modélisation du
changement de
phase dans des
écoulements à
interface

Gloria Faccanoni

Introduction

Modélisation du
changement de
phase

Modélisation statique

Modélisation
dynamique

MTT-équilibre

Interpretation

Approximation

Tests numériques

Perspective

① ÉTAPE CONVECTIVE :

on résout numériquement le système homogène

$$\mathbf{v}_i^n \xrightarrow[\text{à 5 équations (S.Kokh)}]{\text{Schéma quasi-conservatif}} \widehat{\mathbf{v}}_i^n$$

② ÉTAPE DE RELAXATION :

on projette cette solution $\widehat{\mathbf{v}}_i^n$ sur la variété MTT-équilibre
i.e. on résout le problème de maximisation.

② : projection

- Premièrement on utilise le fait que

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \rho = 0 \\ \partial_t(\rho u) = 0 \\ \partial_t(\rho e) = 0 \end{array} \right. \xrightarrow{\text{pour définir}} \left\{ \begin{array}{l} \rho_i^{n+1} = \widehat{\rho}_i^n, \\ (\rho u)_i^{n+1} = \widehat{(\rho u)}_i^n, \\ (\rho e)_i^{n+1} = \widehat{(\rho e)}_i^n. \end{array} \right.$$

- on calcule les densités partielles $\rho_\alpha^*(\rho, \varepsilon)$ en optimisant l'entropie du mélange qui est équivalent à résoudre

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t(z\rho_1) = (g_2 - g_1) \\ \partial_t z = (P_1 - P_2) \end{array} \right. \text{ pour } t \rightarrow +\infty)$$

- on utilise les $(\rho_\alpha^*)_i^n$ pour actualiser z_i^{n+1} :

② : projection

- Premièrement on utilise le fait que

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \rho = 0 \\ \partial_t(\rho u) = 0 \\ \partial_t(\rho e) = 0 \end{array} \right. \xrightarrow{\text{pour définir}} \left\{ \begin{array}{l} \rho_i^{n+1} = \widehat{\rho}_i^n, \\ (\rho u)_i^{n+1} = \widehat{(\rho u)}_i^n, \\ (\rho e)_i^{n+1} = \widehat{(\rho e)}_i^n. \end{array} \right.$$

- on calcule les densités partielles $\rho_\alpha^*(\rho, \varepsilon)$ en optimisant l'entropie du mélange qui est équivalent à résoudre

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t(z\rho_1) = (g_2 - g_1) \\ \partial_t z = (P_1 - P_2) \end{array} \right. \text{ pour } t \rightarrow +\infty)$$

- on utilise les $(\rho_\alpha^*)_i^n$ pour actualiser z_i^{n+1} :

② : projection

- Premièrement on utilise le fait que

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \rho = 0 \\ \partial_t(\rho u) = 0 \\ \partial_t(\rho e) = 0 \end{array} \right. \xrightarrow{\text{pour définir}} \left\{ \begin{array}{l} \rho_i^{n+1} = \widehat{\rho}_i^n, \\ (\rho u)_i^{n+1} = \widehat{(\rho u)}_i^n, \\ (\rho e)_i^{n+1} = \widehat{(\rho e)}_i^n. \end{array} \right.$$

- on calcule les densités partielles $\rho_\alpha^*(\rho, \varepsilon)$ en optimisant l'entropie du mélange qui est équivalent à résoudre

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t(z\rho_1) = (g_2 - g_1) \\ \partial_t z = (P_1 - P_2) \end{array} \right. \text{ pour } t \rightarrow +\infty)$$

- on utilise les $(\rho_\alpha^*)_i^n$ pour actualiser z_i^{n+1} :

② : étape de projection

Modélisation du
changement de
phase dans des
écoulements à
interface

Gloria Faccanoni

Introduction

Modélisation du
changement de
phase

Modélisation statique

Modélisation
dynamique

MTT-équilibre

Interpretation

Approximation

Tests numériques

Perspective

$$(\rho_1^*)_i^n \leq (\rho_2^*)_i^n \Rightarrow z_i^{n+1} = \begin{cases} 1 & \text{si } \rho_i^{n+1} < (\rho_1^*)_i^n, \\ \frac{\rho_i^{n+1} - (\rho_2^*)_i^n}{(\rho_1^*)_i^n - (\rho_2^*)_i^n} & \text{si } (\rho_1^*)_i^n < \rho_i^{n+1} < (\rho_2^*)_i^n, \\ 0 & \text{si } (\rho_2^*)_i^n < \rho_i^{n+1}. \end{cases}$$

$$(\rho_1^*)_i^n > (\rho_2^*)_i^n \Rightarrow z_i^{n+1} = \begin{cases} 0 & \text{si } \rho_i^{n+1} < (\rho_2^*)_i^n, \\ \frac{\rho_i^{n+1} (\rho_2^*)_i^n}{(\rho_1^*)_i^n - (\rho_2^*)_i^n} & \text{si } (\rho_2^*)_i^n < \rho_i^{n+1} < (\rho_1^*)_i^n, \\ 1 & \text{si } (\rho_1^*)_i^n < \rho_i^{n+1}. \end{cases}$$

Étape de projection

- Premièrement on utilise le fait que

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \rho = 0 \\ \partial_t(\rho u) = 0 \\ \partial_t(\rho e) = 0 \end{array} \right. \xrightarrow{\text{pour définir}} \left\{ \begin{array}{l} \rho_i^{n+1} = \widehat{\rho}_i^n, \\ (\rho u)_i^{n+1} = \widehat{(\rho u)}_i^n, \\ (\rho e)_i^{n+1} = \widehat{(\rho e)}_i^n. \end{array} \right.$$

- on calcule les densités partielles $\rho_\alpha^*(\rho, \varepsilon)$ en optimisant l'entropie du mélange.
- on utilise les $(\rho_\alpha^*)_i^n$ pour actualiser z_i^{n+1} .

Si on trouve l'unique couple (ρ_1^*, ρ_2^*) solution du problème d'optimisation, on aura déterminé entièrement la variété MTT-equilibre.

Étape de projection

- Premièrement on utilise le fait que

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \rho = 0 \\ \partial_t(\rho u) = 0 \\ \partial_t(\rho e) = 0 \end{array} \right. \xrightarrow{\text{pour définir}} \left\{ \begin{array}{l} \rho_i^{n+1} = \widehat{\rho}_i^n, \\ (\rho u)_i^{n+1} = \widehat{(\rho u)}_i^n, \\ (\rho e)_i^{n+1} = \widehat{(\rho e)}_i^n. \end{array} \right.$$

- on calcule les densités partielles $\rho_\alpha^*(\rho, \varepsilon)$ en optimisant l'entropie du mélange.
- on utilise les $(\rho_\alpha^*)_i^n$ pour actualiser z_i^{n+1} .

Si on trouve l'unique couple (ρ_1^*, ρ_2^*) solution du problème d'optimisation, on aura déterminé entièrement la variété MTT-equilibre.

Modélisation du
changement de
phase dans des
écoulements à
interface

Gloria Faccanoni

Introduction

Modélisation du
changement de
phase

Modélisation statique

Modélisation
dynamique

MTT-équilibre

Interpretation

Approximation

Tests numériques

Perspective

Lois d'états :

$$P_\alpha = (\gamma_\alpha - 1) \frac{\varepsilon_\alpha}{\tau_\alpha} \quad \text{avec} \quad \varepsilon_\alpha = c_{v,\alpha} T_\alpha$$

$$s_\alpha = c_{v,\alpha} \log(\varepsilon_\alpha (\tau_\alpha)^{\gamma_\alpha - 1}) + s_\alpha^0.$$

s_α^0 : état thermodynamique de référence,

(dans cette exposé on supposera la normalisation $s_\alpha^0 = 0$).

Modélisation du
changement de
phase dans des
écoulements à
interface

Gloria Faccanoni

Introduction

Modélisation du
changement de
phase

Modélisation statique

Modélisation
dynamique

MTT-équilibre

Interpretation

Approximation

Tests numériques

Perspective

Lois d'états :

$$P_\alpha = (\gamma_\alpha - 1) \frac{\varepsilon_\alpha}{\tau_\alpha} \quad \text{avec} \quad \varepsilon_\alpha = c_{V_\alpha} T_\alpha$$

$$s_\alpha = c_{V_\alpha} \log(\varepsilon_\alpha (\tau_\alpha)^{\gamma_\alpha - 1}) + s_\alpha^0.$$

s_α^0 : état thermodynamique de référence,

(dans cette exposé on supposera la normalisation $s_\alpha^0 = 0$).

Modélisation du
changement de
phase dans des
écoulements à
interface

Gloria Faccanoni

Introduction

Modélisation du
changement de
phase

Modélisation statique

Modélisation
dynamique

MTT-équilibre

Interpretation

Approximation

Tests numériques

Perspective

Lois d'états :

$$P_\alpha = (\gamma_\alpha - 1) \frac{\varepsilon_\alpha}{\tau_\alpha} \quad \text{avec} \quad \varepsilon_\alpha = c_{v_\alpha} T_\alpha$$

$$s_\alpha = c_{v_\alpha} \log(\varepsilon_\alpha (\tau_\alpha)^{\gamma_\alpha - 1}) + s_\alpha^0.$$

s_α^0 : état thermodynamique de référence,

(dans cette exposé on supposera la normalisation $s_\alpha^0 = 0$).

On a donc à résoudre le système

$$\begin{cases} T_1 = T_2 \\ (\gamma_1 - 1)c_{v_1}\tau_2 = (\gamma_2 - 1)c_{v_2}\tau_1 \\ c_{v_1} [\log(\varepsilon_1 \tau_1^{\gamma_1-1}) - \gamma_1] = c_{v_2} [\log(\varepsilon_2 \tau_2^{\gamma_2-1}) - \gamma_2] \end{cases}$$

avec les contraintes

$$\begin{cases} \varepsilon = y\varepsilon_1 + (1-y)\varepsilon_2 \\ \tau = y\tau_1 + (1-y)\tau_2 \end{cases}$$

Modélisation du
changement de
phase dans des
écoulements à
interface

Gloria Faccanoni

Introduction

Modélisation du
changement de
phase

Modélisation statique

Modélisation
dynamique

MTT-équilibre

Interpretation

Approximation

Tests numériques

Perspective

Analyser séparément les 4 cas suivants :

Cas 1 $c_{V_1} = c_{V_2}$ et $\gamma_1 \neq \gamma_2$;

Cas 2 $c_{V_1} \neq c_{V_2}$ et $c_{V_1}(\gamma_1 - 1) = c_{V_2}(\gamma_2 - 1)$

Cas 3 $c_{V_1} \neq c_{V_2}$ et $c_{p_1} = c_{p_2}$

Cas 4 $c_{V_1} \neq c_{V_2}$ et $c_{V_1}(\gamma_1 - 1) \neq c_{V_2}(\gamma_2 - 1)$, $c_{V_1}\gamma_1 \neq c_{V_2}\gamma_2$

Analyser séparément les 4 cas suivants :

Cas 1 $c_{v_1} = c_{v_2}$ et $\gamma_1 \neq \gamma_2$;

Cas 2 $c_{v_1} \neq c_{v_2}$ et $c_{v_1}(\gamma_1 - 1) = c_{v_2}(\gamma_2 - 1)$

Cas 3 $c_{v_1} \neq c_{v_2}$ et $c_{p_1} = c_{p_2}$

Cas 4 $c_{v_1} \neq c_{v_2}$ et $c_{v_1}(\gamma_1 - 1) \neq c_{v_2}(\gamma_2 - 1)$, $c_{v_1}\gamma_1 \neq c_{v_2}\gamma_2$

Modélisation du
changement de
phase dans des
écoulements à
interface

Gloria Faccanoni

Introduction

Modélisation du
changement de
phase

Modélisation statique

Modélisation
dynamique

MTT-équilibre

Interpretation

Approximation

Tests numériques

Perspective

Analyser séparément les 4 cas suivants :

Cas 1 $c_{v_1} = c_{v_2}$ et $\gamma_1 \neq \gamma_2$;

Cas 2 $c_{v_1} \neq c_{v_2}$ et $c_{v_1}(\gamma_1 - 1) = c_{v_2}(\gamma_2 - 1)$

Cas 3 $c_{v_1} \neq c_{v_2}$ et $c_{p_1} = c_{p_2}$

Cas 4 $c_{v_1} \neq c_{v_2}$ et $c_{v_1}(\gamma_1 - 1) \neq c_{v_2}(\gamma_2 - 1)$, $c_{v_1}\gamma_1 \neq c_{v_2}\gamma_2$

Cas 1 : $c_{V_1} = c_{V_2}$

Modélisation du
changement de
phase dans des
écoulements à
interface

Gloria Faccanoni

Introduction

Modélisation du
changement de
phase

Modélisation statique

Modélisation
dynamique

MTT-équilibre

Interpretation

Approximation

Tests numériques

Perspective

$$\begin{cases} \rho_1^* = \exp(-1) \left(\frac{\gamma_2 - 1}{\gamma_1 - 1} \right)^{\frac{\gamma_2 - 1}{\gamma_2 - \gamma_1}} \\ \rho_2^* = \exp(-1) \left(\frac{\gamma_2 - 1}{\gamma_1 - 1} \right)^{\frac{\gamma_1 - 1}{\gamma_2 - \gamma_1}} \end{cases}$$

Courbe de saturation pour le mélange liquide-vapeur :

$$P = \begin{cases} (\gamma_1 - 1)\rho_1\varepsilon_1, & \text{pour } \rho < \rho_1^* \\ \Gamma^* c_v T^*, & \text{pour } \rho_1^* \leq \rho \leq \rho_2^* \\ (\gamma_2 - 1)\rho_2\varepsilon_2, & \text{pour } \rho > \rho_2^* \end{cases}$$

où

$$\Gamma^* := \exp(-1) \left(\frac{(\gamma_2 - 1)^{(\gamma_2 - 1)}}{(\gamma_1 - 1)^{(\gamma_1 - 1)}} \right)^{\frac{1}{(\gamma_2 - 1) - (\gamma_1 - 1)}}$$

$$T^* = T(\rho, \varepsilon, \rho_1^*, \rho_2^*)$$

REMARQUE : $P \in C^0$, mais $\notin C^1$.

Cas 1 : $c_{V_1} = c_{V_2}$

Modélisation du
changement de
phase dans des
écoulements à
interface

Gloria Faccanoni

Introduction

Modélisation du
changement de
phase

Modélisation statique

Modélisation
dynamique

MTT-équilibre

Interpretation

Approximation

Tests numériques

Perspective

$$\begin{cases} \rho_1^* = \exp(-1) \left(\frac{\gamma_2 - 1}{\gamma_1 - 1} \right)^{\frac{\gamma_2 - 1}{\gamma_2 - \gamma_1}} \\ \rho_2^* = \exp(-1) \left(\frac{\gamma_2 - 1}{\gamma_1 - 1} \right)^{\frac{\gamma_1 - 1}{\gamma_2 - \gamma_1}} \end{cases}$$

Courbe de saturation pour le mélange liquide-vapeur :

$$P = \begin{cases} (\gamma_1 - 1)\rho_1\varepsilon_1, & \text{pour } \rho < \rho_1^* \\ \Gamma^* c_v T^*, & \text{pour } \rho_1^* \leq \rho \leq \rho_2^* \\ (\gamma_2 - 1)\rho_2\varepsilon_2, & \text{pour } \rho > \rho_2^* \end{cases}$$

où

$$\Gamma^* := \exp(-1) \left(\frac{(\gamma_2 - 1)^{(\gamma_2 - 1)}}{(\gamma_1 - 1)^{(\gamma_1 - 1)}} \right)^{\frac{1}{(\gamma_2 - 1) - (\gamma_1 - 1)}}$$

$$T^* = T(\rho, \varepsilon, \rho_1^*, \rho_2^*)$$

REMARQUE : $P \in C^0$, mais $\notin C^1$.

Cas 1 : $c_{V_1} = c_{V_2}$

Modélisation du
changement de
phase dans des
écoulements à
interface

Gloria Faccanoni

Introduction

Modélisation du
changement de
phase

Modélisation statique

Modélisation
dynamique

MTT-équilibre

Interpretation

Approximation

Tests numériques

Perspective

$$\begin{cases} \rho_1^* = \exp(-1) \left(\frac{\gamma_2 - 1}{\gamma_1 - 1} \right)^{\frac{\gamma_2 - 1}{\gamma_2 - \gamma_1}} \\ \rho_2^* = \exp(-1) \left(\frac{\gamma_2 - 1}{\gamma_1 - 1} \right)^{\frac{\gamma_1 - 1}{\gamma_2 - \gamma_1}} \end{cases}$$

Courbe de saturation pour le mélange liquide-vapeur :

$$P = \begin{cases} (\gamma_1 - 1)\rho_1\varepsilon_1, & \text{pour } \rho < \rho_1^* \\ \Gamma^* c_v T^*, & \text{pour } \rho_1^* \leq \rho \leq \rho_2^* \\ (\gamma_2 - 1)\rho_2\varepsilon_2, & \text{pour } \rho > \rho_2^* \end{cases}$$

où

$$\Gamma^* := \exp(-1) \left(\frac{(\gamma_2 - 1)^{(\gamma_2 - 1)}}{(\gamma_1 - 1)^{(\gamma_1 - 1)}} \right)^{\frac{1}{(\gamma_2 - 1) - (\gamma_1 - 1)}}$$

$$T^* = T(\rho, \varepsilon, \rho_1^*, \rho_2^*)$$

REMARQUE : $P \in C^0$, mais $\notin C^1$.

Cas général : $c_{V_1} \neq c_{V_2}$ avec

$$c_{V_1}(\gamma_1 - 1) \neq c_{V_2}(\gamma_2 - 1) \text{ et } c_{V_1}\gamma_1 \neq c_{V_2}\gamma_2$$

Modélisation du
changement de
phase dans des
écoulements à
interface

Gloria Faccanoni

Introduction

Modélisation du
changement de
phase

Modélisation statique

Modélisation
dynamique

MTT-équilibre

Interpretation

Approximation

Tests numériques

Perspective

$$\tau_\alpha^* = A_\alpha (T^*)^B$$

où

$$\left\{ \begin{array}{l} B = \frac{c_{V_2} - c_{V_1}}{(\gamma_1 - 1)c_{V_1} - (\gamma_2 - 1)c_{V_2}} \\ A_1 = \left[\frac{(c_{V_2})^{c_{V_2}}}{(c_{V_1})^{c_{V_1}}} \left(\frac{(\gamma_2 - 1)c_{V_2}}{(\gamma_1 - 1)c_{V_1}} \right)^{(\gamma_2 - 1)c_{V_2}} \exp(c_{V_1}\gamma_1 - c_{V_2}\gamma_2) \right]^{\frac{1}{(\gamma_1 - 1)c_{V_1} - (\gamma_2 - 1)c_{V_2}}} \\ A_2 = \left[\frac{(c_{V_2})^{c_{V_2}}}{(c_{V_1})^{c_{V_1}}} \left(\frac{(\gamma_2 - 1)c_{V_2}}{(\gamma_1 - 1)c_{V_1}} \right)^{(\gamma_1 - 1)c_{V_1}} \exp(c_{V_1}\gamma_1 - c_{V_2}\gamma_2) \right]^{\frac{1}{(\gamma_1 - 1)c_{V_1} - (\gamma_2 - 1)c_{V_2}}} \end{array} \right.$$

et $T^*(\tau, \varepsilon)$ est la température d'équilibre définie comme la racine de la fonction...

Cas général : $c_{V_1} \neq c_{V_2}$ avec

$$c_{V_1}(\gamma_1 - 1) \neq c_{V_2}(\gamma_2 - 1) \text{ et } c_{V_1}\gamma_1 \neq c_{V_2}\gamma_2$$

Modélisation du
changement de
phase dans des
écoulements à
interface

Gloria Faccanoni

Introduction

Modélisation du
changement de
phase

Modélisation statique

Modélisation
dynamique

MTT-équilibre

Interpretation

Approximation

Tests numériques

Perspective

$$\tau_\alpha^* = A_\alpha (T^*)^B$$

où

$$\left\{ \begin{array}{l} B = \frac{c_{V_2} - c_{V_1}}{(\gamma_1 - 1)c_{V_1} - (\gamma_2 - 1)c_{V_2}} \\ A_1 = \left[\frac{(c_{V_2})^{c_{V_2}}}{(c_{V_1})^{c_{V_1}}} \left(\frac{(\gamma_2 - 1)c_{V_2}}{(\gamma_1 - 1)c_{V_1}} \right)^{(\gamma_2 - 1)c_{V_2}} \exp(c_{V_1}\gamma_1 - c_{V_2}\gamma_2) \right]^{\frac{1}{(\gamma_1 - 1)c_{V_1} - (\gamma_2 - 1)c_{V_2}}} \\ A_2 = \left[\frac{(c_{V_2})^{c_{V_2}}}{(c_{V_1})^{c_{V_1}}} \left(\frac{(\gamma_2 - 1)c_{V_2}}{(\gamma_1 - 1)c_{V_1}} \right)^{(\gamma_1 - 1)c_{V_1}} \exp(c_{V_1}\gamma_1 - c_{V_2}\gamma_2) \right]^{\frac{1}{(\gamma_1 - 1)c_{V_1} - (\gamma_2 - 1)c_{V_2}}} \end{array} \right.$$

et $T^*(\tau, \varepsilon)$ est la température d'équilibre définie comme la racine de la fonction...

Cas général

Modélisation du
changement de
phase dans des
écoulements à
interface

Gloria Faccanoni

Introduction

Modélisation du
changement de
phase

Modélisation statique

Modélisation
dynamique

MTT-équilibre

Interpretation

Approximation

Tests numériques

Perspective

$$f : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$T \longmapsto a_3 T^B + a_2 T^{B-1} + a_1$$

où

$$\begin{cases} a_1 := \tau (c_{v_2} - c_{v_1}), \\ a_2 := \varepsilon \left[\frac{(\gamma_1 - 1)c_{v_1}}{(\gamma_2 - 1)c_{v_2}} - 1 \right] \left[\frac{(c_{v_2})^{c_{v_2}}}{(c_{v_1})^{c_{v_1}}} \left(\frac{(\gamma_2 - 1)c_{v_2}}{(\gamma_1 - 1)c_{v_1}} \right)^{(\gamma_1 - 1)c_{v_1}} \exp(c_{v_1}\gamma_1 - c_{v_2}\gamma_2) \right]^{\frac{1}{(\gamma_1 - 1)c_{v_1} - (\gamma_2 - 1)c_{v_2}}}, \\ a_3 := c_{v_1} \left[1 - \frac{(\gamma_1 - 1)}{(\gamma_2 - 1)} \right] \left[\frac{(c_{v_2})^{c_{v_2}}}{(c_{v_1})^{c_{v_1}}} \left(\frac{(\gamma_2 - 1)c_{v_2}}{(\gamma_1 - 1)c_{v_1}} \right)^{(\gamma_1 - 1)c_{v_1}} \exp(c_{v_1}\gamma_1 - c_{v_2}\gamma_2) \right]^{\frac{1}{(\gamma_1 - 1)c_{v_1} - (\gamma_2 - 1)c_{v_2}}} \end{cases}$$

Cas général

Modélisation du
changement de
phase dans des
écoulements à
interface

Gloria Faccanoni

Introduction

Modélisation du
changement de
phase

Modélisation statique

Modélisation
dynamique

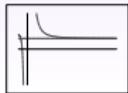
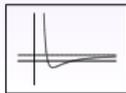
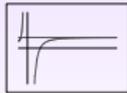
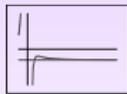
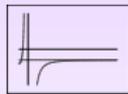
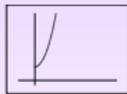
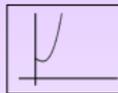
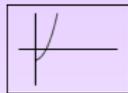
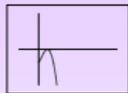
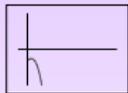
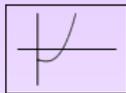
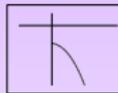
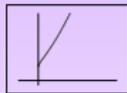
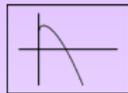
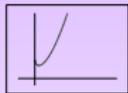
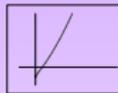
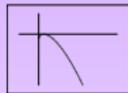
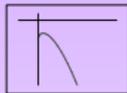
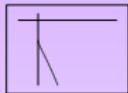
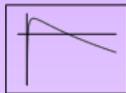
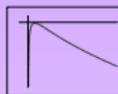
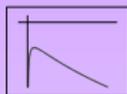
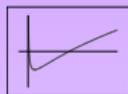
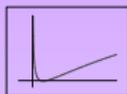
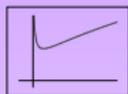
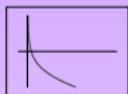
MTT-équilibre

Interpretation

Approximation

Tests numériques

Perspective



Cas général

Modélisation du
changement de
phase dans des
écoulements à
interface

Gloria Faccanoni

Introduction

Modélisation du
changement de
phase

Modélisation statique

Modélisation
dynamique

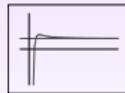
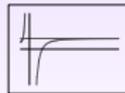
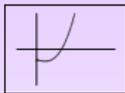
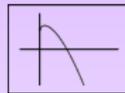
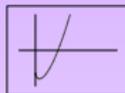
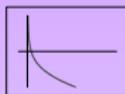
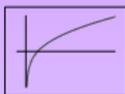
MTT-équilibre

Interpretation

Approximation

Tests numériques

Perspective



Equation de la courbe de saturation est :

$$P^* = (T^*)^{\frac{(c_{v2} \gamma_2 - c_{v1} \gamma_1)}{(c_{v2} (\gamma_2 - 1) - c_{v1} (\gamma_1 - 1))}} \left[\frac{\left((\gamma_2 - 1)^{(\gamma_2 - 1)} c_{v2}^{\gamma_2} \right)^{c_{v2}}}{\left((\gamma_1 - 1)^{(\gamma_1 - 1)} c_{v1}^{\gamma_1} \right)^{c_{v1}}} \exp(c_{v1} \gamma_1 - c_{v2} \gamma_2) \right]^{\frac{1}{(c_{v2} (\gamma_2 - 1) - c_{v1} (\gamma_1 - 1))}}$$

Modélisation du
changement de
phase dans des
écoulements à
interface

Gloria Faccanoni

Introduction

Modélisation du
changement de
phase

Modélisation statique

Modélisation
dynamique

MTT-équilibre

Interpretation

Approximation

Tests numériques

Perspective

- 1 Introduction
- 2 Modélisation du changement de phase
 - Modélisation statique
 - Modélisation dynamique
- 3 MTT-équilibre
 - Interpretation
 - Approximation
 - Tests numériques
- 4 Perspective

Tests numériques

Modélisation du
changement de
phase dans des
écoulements à
interface

Gloria Faccanoni

Introduction

Modélisation du
changement de
phase

Modélisation statique

Modélisation
dynamique

MTT-équilibre

Interpretation

Approximation

Tests numériques

Perspective

- 1-D : un domaine de 1 m de longueur avec une interface.

		LIQUIDE	VAPEUR
• c_v	$\text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$	1816.2	1040.14
γ	$(= c_p/c_v)$	2.35	1.43

- $T|_{t=0} = 400 \text{ K}$ dans tout le domaine
- $(P, \rho_1, \rho_2)|_{t=0} (T)$ tels qu'il y a ÉQUILIBRE.

Tests numériques

Modélisation du
changement de
phase dans des
écoulements à
interface

Gloria Faccanoni

Introduction

Modélisation du
changement de
phase

Modélisation statique

Modélisation
dynamique

MTT-équilibre

Interpretation

Approximation

Tests numériques

Perspective

- 1-D : un domaine de 1 m de longueur avec une interface.

- $$\begin{array}{c} c_v \\ \gamma \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1} \\ (= c_p/c_v) \end{array} \quad \left| \begin{array}{c} \text{LIQUIDE} \\ 1816.2 \\ 2.35 \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{c} \text{VAPEUR} \\ 1040.14 \\ 1.43 \end{array} \right.$$

- $T|_{t=0} = 400 \text{ K}$ dans tout le domaine
- $(P, \rho_1, \rho_2)|_{t=0} (T)$ tels qu'il y a ÉQUILIBRE.

Tests numériques

Modélisation du
changement de
phase dans des
écoulements à
interface

Gloria Faccanoni

Introduction

Modélisation du
changement de
phase

Modélisation statique

Modélisation
dynamique

MTT-équilibre

Interpretation

Approximation

Tests numériques

Perspective

- 1-D : un domaine de 1 m de longueur avec une interface.

- $$\begin{array}{c} c_v \\ \gamma \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1} \\ (= c_p/c_v) \end{array} \quad \left| \begin{array}{c} \text{LIQUIDE} \\ 1816.2 \\ 2.35 \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} \text{VAPEUR} \\ 1040.14 \\ 1.43 \end{array} \right.$$

- $T|_{t=0} = 400 \text{ K}$ dans tout le domaine
- $(P, \rho_1, \rho_2)|_{t=0} (T)$ tels qu'il y a ÉQUILIBRE.

- 1-D : un domaine de 1 m de longueur avec une interface.

- $$\begin{array}{c} c_v \\ \gamma \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1} \\ (= c_p/c_v) \end{array} \quad \left| \begin{array}{c} \text{LIQUIDE} \\ 1816.2 \\ 2.35 \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} \text{VAPEUR} \\ 1040.14 \\ 1.43 \end{array} \right.$$

- $T|_{t=0} = 400 \text{ K}$ dans tout le domaine
- $(P, \rho_1, \rho_2)|_{t=0} (T)$ tels qu'il y a ÉQUILIBRE.

Modélisation du
changement de
phase dans des
écoulements à
interface

Gloria Faccanoni

Introduction

Modélisation du
changement de
phase

Modélisation statique

Modélisation
dynamique

MTT-équilibre

Interpretation

Approximation

Tests numériques

Perspective

- $u = 100$ m/s de
chaque côté de
l'interface
- conditions
limites : infinie

Modélisation du
changement de
phase dans des
écoulements à
interface

Gloria Faccanoni

Introduction

Modélisation du
changement de
phase

Modélisation statique

Modélisation
dynamique

MTT-équilibre

Interpretation

Approximation

Tests numériques

Perspective

- $u = 100$ m/s de
chaque côté de
l'interface
- conditions
limites : infinie

Modélisation du
changement de
phase dans des
écoulements à
interface

Gloria Faccanoni

Introduction

Modélisation du
changement de
phase

Modélisation statique

Modélisation
dynamique

MTT-équilibre

Interpretation

Approximation

Tests numériques

Perspective

- $u = 100$ m/s de
chaque côté de
l'interface
- conditions
limites : infinie

Modélisation du
changement de
phase dans des
écoulements à
interface

Gloria Faccanoni

Introduction

Modélisation du
changement de
phase

Modélisation statique

Modélisation
dynamique

MTT-équilibre

Interpretation

Approximation

Tests numériques

Perspective

- $u = 100$ m/s de
chaque côté de
l'interface
- conditions
limites : infinie

Modélisation du
changement de
phase dans des
écoulements à
interface

Gloria Faccanoni

Introduction

Modélisation du
changement de
phase

Modélisation statique

Modélisation
dynamique

MTT-équilibre

Interpretation

Approximation

Tests numériques

Perspective

- $u = 0$ m/s de chaque côté de l'interface
- conditions limites :
 - Droite : Mur
 - Gauche :
Piston
 $u_{\text{piston}} = -100$ m/s

Modélisation du
changement de
phase dans des
écoulements à
interface

Gloria Faccanoni

Introduction

Modélisation du
changement de
phase

Modélisation statique

Modélisation
dynamique

MTT-équilibre

Interpretation

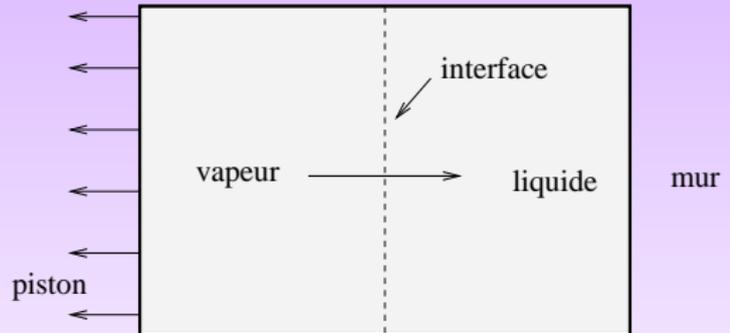
Approximation

Tests numériques

Perspective

- $u = 0$ m/s de
chaque coté de
l'interface
- conditions
limites :
 - Droite : Mur
 - Gauche :
Piston
 $u_{\text{piston}} =$
-100 m/s

- $u = 0$ m/s de chaque côté de l'interface
- conditions limites :
 - Droite : Mur
 - Gauche : Piston
$$u_{\text{piston}} = -100 \text{ m/s}$$



Modélisation du
changement de
phase dans des
écoulements à
interface

Gloria Faccanoni

Introduction

Modélisation du
changement de
phase

Modélisation statique

Modélisation
dynamique

MTT-équilibre

Interpretation

Approximation

Tests numériques

Perspective

- $u = 0$ m/s de
chaque côté de
l'interface
- conditions
limites :
 - Droite : Mur
 - Gauche :
Piston
 $u_{\text{piston}} =$
-100 m/s

Modélisation du
changement de
phase dans des
écoulements à
interface

Gloria Faccanoni

Introduction

Modélisation du
changement de
phase

Modélisation statique

Modélisation
dynamique

MTT-équilibre

Interpretation

Approximation

Tests numériques

Perspective

- $u = 0$ m/s de
chaque côté de
l'interface
- conditions
limites :
 - Droite : Mur
 - Gauche :
Piston
 $u_{\text{piston}} =$
 $+200$ m/s

Modélisation du
changement de
phase dans des
écoulements à
interface

Gloria Faccanoni

Introduction

Modélisation du
changement de
phase

Modélisation statique

Modélisation
dynamique

MTT-équilibre

Interpretation

Approximation

Tests numériques

Perspective

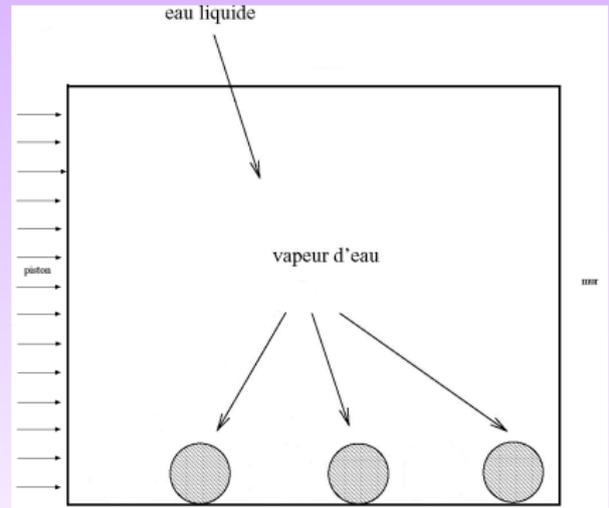
- $u = 0$ m/s de
chaque coté de
l'interface

- conditions
limites :

- Droite : Mur
- Gauche :
Piston

$$u_{\text{piston}} = +200 \text{ m/s}$$

- $u = 0$ m/s de
chaque coté de
l'interface
- conditions
limites :
 - Droite : Mur
 - Gauche :
Piston
$$u_{\text{piston}} = +200 \text{ m/s}$$



Modélisation du
changement de
phase dans des
écoulements à
interface

Gloria Faccanoni

Introduction

Modélisation du
changement de
phase

Modélisation statique

Modélisation
dynamique

MTT-équilibre

Interpretation

Approximation

Tests numériques

Perspective

- $u = 0$ m/s de
chaque coté de
l'interface
- conditions
limites :
 - Droite : Mur
 - Gauche :
Piston
 $u_{\text{piston}} =$
 $+200$ m/s

Modélisation du
changement de
phase dans des
écoulements à
interface

Gloria Faccanoni

Introduction

Modélisation du
changement de
phase

Modélisation statique

Modélisation
dynamique

MTT-équilibre

Interpretation

Approximation

Tests numériques

Perspective

- 1 Introduction
- 2 Modélisation du changement de phase
 - Modélisation statique
 - Modélisation dynamique
- 3 MTT-équilibre
 - Interpretation
 - Approximation
 - Tests numériques
- 4 Perspective

Modélisation du
changement de
phase dans des
écoulements à
interface

Gloria Faccanoni

Introduction

Modélisation du
changement de
phase

Modélisation statique

Modélisation
dynamique

MTT-équilibre

Interpretation

Approximation

Tests numériques

Perspective

- Stiffened Gas
- Hyperbolicité
- étude de “lois d’état de mélange” plus globale : par exemple potentiels d’interaction
- résolution par transformé de Legendre
- prise en compte de la capillarité (tension de surface)
- étude du point triple
- introduction du changement de phase dans une cadre de simulation 3D (TRITON)